

Libros de **Cátedra**

Tópicos de gravimetría

Primera parte

Federico Gustavo Enrique Späth, Ezequiel Darío
Antokoletz y Claudia Noemí Tocho

FACULTAD DE
CIENCIAS ASTRONÓMICAS Y GEOFÍSICAS

e
exactas


EDITORIAL DE LA UNLP



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA

TÓPICOS DE GRAVIMETRÍA

PRIMERA PARTE

Federico Gustavo Enrique Späth
Ezequiel Darío Antokoletz
Claudia Noemí Tocho

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA


Eduulp
EDITORIAL DE LA UNLP

Agradecimientos

A todos los estudiantes, personas y colegas que aportaron comentarios y correcciones útiles a lo largo de varios años de impartir el Curso de Gravimetría en la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de La Plata.

A las Doctoras Ana Carolina Pedraza De Marchi y María Laura Gómez Dacal, quienes nos acompañaron en el procesos de revisión del texto.

A la Universidad Nacional de La Plata por hacer posible la edición de este libro.

Como un tigre que desafía las leyes de la gravedad

Like a tiger defying the laws of gravity

FREDDIE MERCURY

Prefacio

Este libro cubre parte de los contenidos del programa de la materia *Gravimetría* dictada en la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas (FCAG), perteneciente a la Universidad Nacional de La Plata (UNLP).

El objetivo del texto es acercar a los estudiantes aquellos contenidos requeridos para la comprensión global de la materia en un único libro que sirva de base al momento de consultar la bibliografía sugerida por la cátedra.

El libro es el resultado de años de trabajo a lo largo de los cuales se fueron desarrollando y madurando los diferentes tópicos a través de la interacción entre los docentes de la cátedra y con los alumnos. Ésta es una obra dinámica, ya que se irá actualizando e incorporando material conforme a las necesidades de la cátedra.

Índice general

1	Introducción	7
	Claudia N. Tocho	
2	El campo de gravedad terrestre	18
	Federico G. E. Späth y Claudia N. Tocho	
3	El campo de gravedad normal	54
	Claudia N. Tocho y Federico G. E. Späth	
4	Reducciones y anomalías gravimétricas	85
	Claudia N. Tocho y Federico G. E. Späth	
5	Determinación gravimétrica del geoide	109
	Claudia N. Tocho, Federico G. E. Späth y Ezequiel D. Antokoletz	
6	Mediciones de la gravedad	121
	Federico G. E. Späth, Ezequiel D. Antokoletz y Claudia N. Tocho	
	Los autores	147

CAPÍTULO 1

Introducción

Claudia N. Tocho

Este capítulo introductorio, menciona la definición de la *Gravimetría*. La necesidad de medir la intensidad de la gravedad g (magnitud del vector de la aceleración de la gravedad g) nos hace plantearnos que la gravedad varía de un lugar a otro y con el tiempo. El campo de gravedad terrestre, incluidas sus variaciones temporales, es un parámetro clave para brindar información de las deformaciones de la Tierra sólida y la distribución de masas. Por ejemplo, los cambios de las masas de hielo, los movimientos de los fluidos en los volcanes influyen en el valor de la gravedad así como en las deformaciones terrestres y en la redistribución de masas asociadas a grandes terremotos (Van Camp et al., 2017).

1.1. Gravimetría

Gravimetría significa medir la gravedad. En la práctica se mide la magnitud de la aceleración de la gravedad g ($g = |\vec{g}|$) o el gradiente de gravedad (grad g) sobre o cerca de la superficie de la Tierra o de otros cuerpos celestes.

En el Sistema Internacional de medidas (SI) la unidad de gravedad es el m/s^2 , y en estas unidades sobre la superficie terrestre $g \approx 9,8 m/s^2$. En el Sistema Cegesimal de Unidades (CGS), y en honor a Galileo Galilei, se define el *Gal*:

$$1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm}/s^2 = 10^{-2} \text{ m}/s^2.$$

En *Gravimetría*, dada la precisión requerida, normalmente se trabaja con unidades de miliGal (*mGal*):

$$1 \text{ mGal} = 10^{-3} \text{ Gal} = 0,001 \text{ cm}/s^2 = 10^{-5} \text{ m}/s^2.$$

El microgal (μGal) se define como:

$$1 \mu\text{Gal} = 10^{-6} \text{ Gal} = 10^{-8} \text{ m}/s^2.$$

Otra unidad empleada es la *g.u.* (*gravity unit* o unidad gravimétrica):

$$1 \text{ g.u.} = 1 \mu\text{m/s}^2 = 0,1 \text{ mGal.}$$

Y las unidades del gradiente de gravedad son:

$$1 \text{ mGal/km} = 10^{-8}/\text{s}^2,$$

$$1 \text{ E(Eötvös)} = 10^{-9}/\text{s}^2 = 0,1 \text{ mGal/km.}$$

La fuerza ejercida sobre un elemento de masa que se encuentra en la superficie de la Tierra tiene dos componentes principales: una debido a la atracción gravitacional de la masa de la Tierra; y otra debido a la rotación de la Tierra:

Gravedad = Gravitación + Rotación

Como se observa en la *figura 1.1*, el vector \vec{g} medido no pasa necesariamente por el centro de la Tierra.

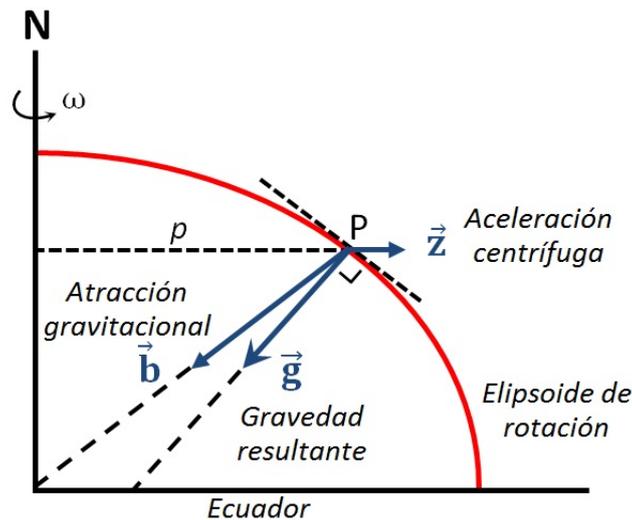


Figura 1.1: P es un punto situado sobre la superficie terrestre, p la distancia al eje de rotación, \vec{z} la aceleración centrífuga, \vec{b} la aceleración newtoniana o atracción gravitacional y \vec{g} la gravedad.

El objetivo de la Gravimetría es determinar el campo de gravedad terrestre (o de otros cuerpos celestes) como una función de la posición y del tiempo mediante mediciones de gravedad y de gradientes de gravedad realizadas sobre o cerca de la superficie de la Tierra (o del cuerpo celeste en cuestión).

Si el significado de la palabra Gravimetría es medir la magnitud del vector de la aceleración de la gravedad g deberíamos preguntarnos:

1. ¿Cómo medimos la aceleración de la gravedad?

2. ¿La aceleración de la gravedad varía? ¿Por qué varía?
3. ¿Por qué se requiere del conocimiento del campo de la gravedad? ¿Cómo se relaciona el campo de gravedad terrestre con otras disciplinas de las Ciencias de la Tierra?

Analizaremos brevemente las respuestas a cada una de estas preguntas.

1.1.1. ¿Cómo medimos la aceleración de la gravedad?

Las mediciones gravimétricas se clasifican en:

Mediciones absolutas de la gravedad

Consisten en la medición directa de las dos cantidades fundamentales de la aceleración: distancia y tiempo (Torge, 1989). Para ello se observa el movimiento libre de un sensor (cuerpo masa) bajo el campo de gravedad terrestre, determinando así el valor absoluto del vector de la aceleración de la gravedad en la estación de medición.

Mediciones relativas de la gravedad

El sensor se restringe a medir directa o indirectamente una de las dos cantidades fundamentales de la aceleración: tiempo o distancia (Torge, 1989). Es un problema indeterminado que se resuelve observando una de las dos cantidades fundamentales en más de una estación y comparándolas considerando la cantidad no observada como fija. La diferencia de gravedad entre las dos estaciones de observación se calcula a partir de la diferencia observada en tiempo o distancia. Las mediciones relativas de la gravedad se efectúan con instrumentos mucho más económicos que los empleados en determinaciones absolutas.

En ambos tipos de mediciones se mide la componente vertical de la aceleración de la gravedad g . Existen mediciones de gravedad terrestres (tanto absolutas como relativas), aéreas, marinas, satelitales y en pozos.

En la *figura 1.2* se observan distintos tipos de gravímetros en el Laboratorio de Gravimetría ubicado en el Observatorio Argentino – Alemán de Geodesia (AGGO).

1.1.2. ¿La aceleración de la gravedad varía? ¿Por qué varía?

Si la Tierra fuera homogénea y un cuerpo esférico simétrico que no rotara, en su superficie la aceleración gravitacional sería constante. El promedio global de g es de $9,8 \text{ m/s}^2$. El valor de g se asumió constante en todo el planeta durante mucho tiempo. A medida que se desarrollaron instrumentos cada vez más sensibles y sofisticados, se observó cómo ésta variaba de un lugar a otro y a lo largo del tiempo. Estas variaciones se deben tanto a factores espaciales (ubicación de la estación) como a factores temporales (cambios con el tiempo).

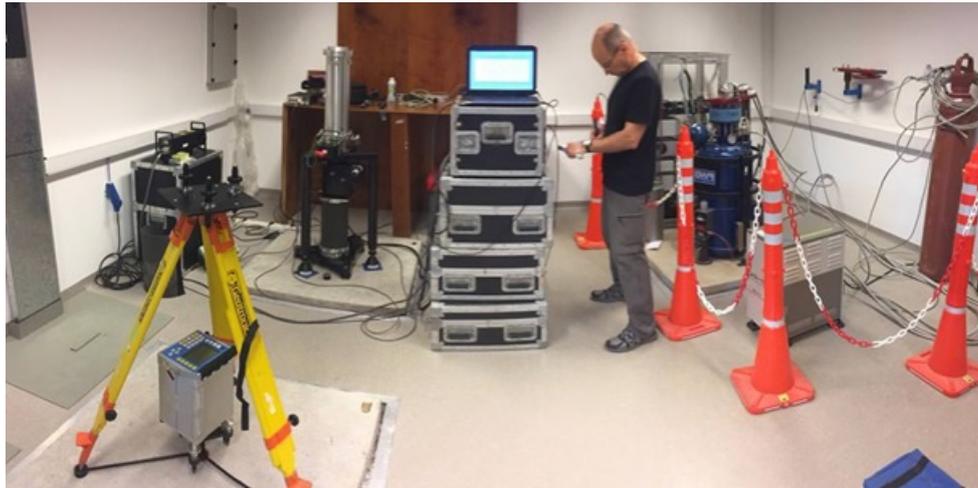


Figura 1.2: Laboratorio de Gravimetría situado en AGGO. Cortesía de Diego A. Piñón.

Por ejemplo, el valor de la gravedad medido el 24 de enero de 2018 en el Observatorio Argentino – Alemán de Geodesia (AGGO) es

$$g = 979\,732\,944,8 \pm 2,2 \mu\text{Gales}.$$



Figura 1.3: Los constituyentes de la gravedad en la estación AGGO. Cortesía de Hayo Hase.

Como sabemos, la gravedad es el efecto combinado de la Gravitación y la Rotación. La gravedad g depende de cómo están distribuidas las masas de la Tierra y las masas extraterrestres, así como también de la rotación terrestre, y ambas varían con el tiempo. La gravedad en un punto es una función que depende de la constante de Gravitación G , de la velocidad angular ω , de la posición del punto r , de la distribución de densidad en el interior terrestre $\rho(r')$ y del tiempo t :

$$g = g(G, \omega^2, r, \rho(r'), t).$$

1.1.3. ¿Por qué se requiere del conocimiento del campo de la gravedad? ¿Cómo se relaciona el campo de gravedad terrestre con otras disciplinas de las Ciencias de la Tierra?

- La figura y forma de la Tierra es modelada por el campo de la gravedad.
- La superficie de referencia más importante en la definición de alturas, el geoide, es una superficie de nivel del campo de gravedad terrestre real. Es la referencia natural para muchas mediciones geodésicas.
- Los satélites artificiales se mueven en torno de la Tierra según su campo de la gravedad.
- El campo de gravedad permite el conocimiento de la estructura interna de la Tierra.

La gravedad medida sobre la superficie de la Tierra contiene información sobre la ubicación de la medida (aplicación geodésica) y sobre la distribución de masa en el interior terrestre (aplicación geofísica). Si las mediciones de gravedad se repiten en el tiempo, proveen información de las variaciones temporales de la Tierra (aplicación geodinámica).

La Gravimetría interactúa con otras disciplinas de las Ciencias de la Tierra para tener un mejor entendimiento del "Sistema Tierra" como lo son la Geodesia Física, la Geofísica, la Prospección Geofísica, la Oceanografía, la Geología, la Glaciología, la Hidrología, entre otras. También, la gravedad es un parámetro fundamental en la Física, especialmente en el campo de la metrología (Torge, 1989).

Campo de gravedad y Geodesia Física

La Geodesia Física es la rama de la Geodesia que trata de determinar la forma física de la Tierra.

Campo de gravedad y Geofísica

El campo de gravedad terrestre refleja la distribución interna de masas, uno de los objetivos de la Geofísica. Sin embargo, el campo de gravedad es insuficiente para determinar por sí solo la distribución de densidades. De todos modos la gravedad es un buen dato para restringir los modelos y se usa junto a la sísmica, magnetometría y otra información geofísica.

Campo de gravedad y Geología

Diferentes formaciones geológicas tienen diferentes estructuras de densidad y, por lo tanto, producen diferentes señales gravimétricas.

Campo de gravedad y Oceanografía

El campo de gravedad terrestre determina el geoide. La desviación entre el geoide y el nivel medio del mar se llama Topografía de la Superficie del Mar (*Sea Surface Topography* o SST). La SST refleja el equilibrio dinámico de los océanos. La superficie del mar puede determinarse mediante altimetría satelital, por lo tanto si se conoce el geoide con el mismo grado de exactitud, la circulación oceánica global puede ser determinada.

Campo de gravedad, Glaciología y nivel del mar

Monitorear el derretimiento de los hielos (como en la Antártida, Groenlandia y Canadá) es muy importante y causa rebote isostático. Las mediciones de gravedad aportan información sobre el derretimiento y consecuentemente sobre el aumento del nivel del mar. El cambio de la superficie de los hielos contiene una componente gravitacional directa y un efecto causado por el levantamiento.

Campo de gravedad e Hidrología

Los cambios de la gravedad con el tiempo, luego de que otros efectos variables con el tiempo sean corregidos, pueden atribuirse a cambios en los parámetros del suelo, por ejemplo, humedad del suelo, nieve o variaciones del nivel freático. El principal objetivo de la misión satelital GRACE (*Gravity Recovery and Climate Experiment*) fue medir variaciones espacio-temporales del campo de gravedad terrestre, siendo su principal aplicación la cuantificación de distintos fenómenos relacionados con el ciclo hidrológico global. A escalas temporales menores a un año, las variaciones de gravedad son principalmente atribuidas a cambios en el almacenamiento continental de agua tanto superficial como subterránea.

Campo de gravedad y Prospección Geofísica

El método gravimétrico estudia las variaciones espaciales del campo de gravedad de la Tierra en una zona limitada. Dado que dicho campo vectorial deriva de una función potencial (escalar), el mismo es un campo potencial. Las principales características de los métodos gravimétricos son: remotos, no destructivos, pasivos (campo natural), no contaminantes y relativamente económicos. La Gravimetría se utiliza en:

- Exploración petrolera.
- Exploración minera.
- Estudios arqueológicos y geotécnicos.
- Estudios ambientales y de aguas subterráneas.
- Estudios tectónicos y geodinámica.

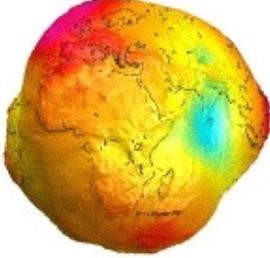
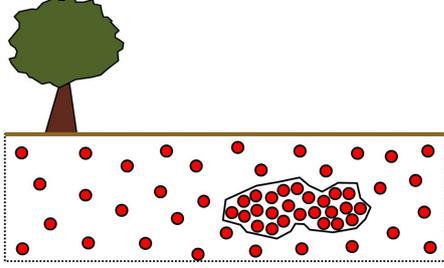
- Mapeo geológico regional.

1.2. Conceptos básicos

Por definición, una anomalía representa la diferencia entre el valor medido en un punto de un cierto parámetro y el valor teórico de este mismo parámetro en el mismo punto. El cálculo del valor teórico se realiza mediante un modelo teórico.

En particular, una anomalía gravimétrica es la diferencia entre el valor observado de la gravedad en una estación gravimétrica y el valor teórico de la gravedad en el mismo punto. El valor teórico de la gravedad se llama gravedad normal (γ) y el cálculo de la gravedad normal se hace desde el *campo del modelo* a partir de un elipsoide de nivel cuyo potencial es idéntico al del Geoide. El campo de gravedad normal es la forma de aproximarnos al campo de la gravedad real.

El concepto de anomalía gravimétrica se utiliza con un fin geodésico para determinar la figura de la Tierra o el geoide; y también se habla de anomalías de gravedad del subsuelo cuando se asocian a la presencia de cuerpos cuyas propiedades físicas, en un volumen definido, difieren apreciablemente de las de su entorno. La propiedad física importante en el Método Gravimétrico es el contraste de densidad. Dicho de otro modo, las variaciones de la gravedad (anomalías) se deben a cambios en la densidad de las rocas del subsuelo.

Geodesia Física	Prospección Geofísica
Objetivo: determinar la figura de la Tierra.	Objetivo: deducir la distribución de densidades en el interior terrestre y estructuras geológicas en subsuperficie para una gran variedad de aplicaciones.
 <p style="text-align: right;">1</p>	 <p style="text-align: center;">● Masa puntual</p> <p style="text-align: right;">2</p>
El geodesta está interesado en anomalías de gravedad que preserven todas las masas de la Tierra.	El geofísico trata de remover todos aquellos efectos que enmascaren su anomalía de interés.

Cuadro 1.1: Distintas aplicaciones del uso de las anomalías de gravedad.

¹Imagen tomada de <http://geodesiamania.blogspot.com/2013/10/que-es-el-geoide.html>.

²Imagen modificada de https://pburnley.faculty.unlv.edu/GEOL442_642/MISC/gravnotes.pdf.

Modelado gravimétrico

En Geofísica, la interpretación de las anomalías de gravedad se realiza mediante un modelo gravimétrico (no confundir con el modelo del campo de gravedad normal definido por el elipsoide de nivel!). Existen dos métodos para hacer este modelado:

- método directo o problema directo: a partir de un modelo inicial del subsuelo se trata de determinar datos teóricos y compararlos con los datos reales,
- método inverso o inversión: a partir de los datos reales se trata de calcular un modelo teórico y compararlos con los datos reales.

Siempre que no coinciden los datos reales con los teóricos, se modifica el modelo inicial hasta que coincida. Por iteraciones sucesivas, se dice que se va ajustando el modelo.

En Geodesia Física, la determinación de la Figura de la Tierra (el geoide) se realiza mediante la resolución de diferentes problemas de valor de contorno, como por ejemplo, utilizando la integral de Stokes o el método de Molodenski. El Geoide es la superficie equipotencial del campo de gravedad terrestre que mejor ajusta al nivel medio del mar de una determinada época (Mather, 1978).

Noción de escala (Klarica, 2017)

Un estudio gravimétrico está definido dentro de un espacio que depende del objeto estudiado. A veces las medidas se hacen a lo largo de un perfil, pero generalmente las mediciones gravimétricas terrestres se adquieren de manera puntual en puntos distribuidos en forma aleatoria, por ejemplo, a lo largo de caminos. En Gravimetría, la dimensión de los campos pueden extenderse dentro de 5-6 órdenes de magnitud, desde la escala pequeña (de 1 hasta 10 metros) para la ingeniería civil o la arqueología, hasta una escala de 10.000 km para un estudio global (espacio entre malla del orden de los 10 km).

La escala temporal va desde el segundo hasta millones de años.

Medida y precisión sobre la medida (Klarica, 2017)

Una medida tiene interés solamente si se conoce el margen de error que puede tener esta medida. Existen distintos tipos de errores:

- error de los aparatos de medición,
- error de los operadores,
- error efectuado dentro la correcciones de las medidas (como la corrección de posición o topográfica),
- error aleatorio,

- error sistemático como un ruido ambiental (electrónico, meteorológico, sísmicos, etc.),
- error de muestreo.

La precisión sobre una medida es diferente de la resolución de los aparatos de medición (gravímetros). La precisión incluye también todos los parámetros antes mencionados.

Referencias

- Klarica, S. (2017). *Introducción a la prospección geofísica*. Apuntes de clase. Grupo de Geofísica, Departamento de Física. Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes.
- Mather, R. S. (1978). *The role of the geoid in four-dimensional Geodesy*. *Marine Geodesy* 1:217-252.
- Torge, W. (1989). *Gravimetry*. Walter de Gruyter. Berlin. New York.
- Van Camp, M., Viron, O., Watlet, A., Meurers, B., Francis, O. y Caudron, C. (2017). *Geophysics from terrestrial time-variable gravity measurements*. *Reviews of Geophysics*, 55, 938– 992. <https://doi.org/10.1002/2017RG000566>.

CAPÍTULO 2

El campo de gravedad terrestre

Federico G. E. Späth y Claudia N. Tocho

Este capítulo fue escrito siguiendo los libros *Gravimetry* (Torge, 1989), *Geodesy* (Torge, 1991) y *Physical Geodesy* (Hofmann-Wellenhof y Helmut, 2005). En la primer parte se presenta la ley de gravitación universal y se definen los conceptos de gravitación, aceleración y potencial gravitacional. Se enumeran propiedades de este último y se demuestra la ecuación de Laplace y Poisson. En particular, se presenta una expresión para el potencial gravitacional terrestre. En la *sección 2.3* se realiza un desarrollo en serie de la recíproca de la distancia en la expresión del potencial gravitacional terrestre, lo cual equivale a una descomposición espectral del campo gravitacional, y en el cual intervienen los coeficientes de Stokes. En la *sección 2.4* se realiza un análisis del significado físico de estos coeficientes hasta grado 2 y en la *sección 2.5* se cuantifica el efecto de los distintos términos del desarrollo en serie del potencial gravitacional sobre las superficies equipotenciales generadas por una esfera, según la metodología propuesta en el libro *El Potencial Terrestre* (Mateo, 1968).

En la *sección 2.6* se definen la *aceleración* y el *potencial centrífugo*, se encuentra una expresión de este último, y se cuantifica su efecto sobre las equipotenciales generadas por una esfera.

En la *sección 2.7* se analiza la variación de la gravedad entre ecuador y polo empleando la fórmula de McCullagh.

En la parte final del capítulo se incluyen algunas preguntas de estudio.

2.1. Introducción

Un cuerpo que rota solidario con la Tierra experimenta una fuerza gravitacional debido a la masa de la Tierra y de otros cuerpos celestes, así como de una aceleración centrífuga debida a la rotación terrestre. La resultante es la fuerza de la *gravedad*. En el caso de los satélites que no rotan junto con la Tierra, sólo actúa sobre ellos la *gravitación*.

2.2. Gravitación, aceleración y potencial gravitacional.

La base de la gravimetría es la ley de gravitación universal de Newton. En 1687, Isaac Newton publicó “Principios matemáticos de la filosofía natural”, siendo la filosofía natural, el nombre que recibió hasta mediados del siglo XIX, lo que hoy se conoce como física.

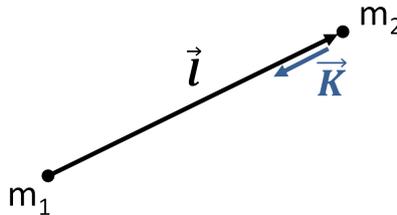


Figura 2.1: Atracción de la masa m_1 sobre la masa m_2 .

En su libro, Newton establece que la fuerza de atracción entre dos cuerpos es directamente proporcional al producto de sus masas individuales e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. La dirección de esta *fuerza gravitacional* es a lo largo de la línea que conecta a ambos cuerpos (*figura 2.1*), y su módulo es

$$|\vec{K}| = G \frac{m_1 m_2}{l^2}, \quad (2.1)$$

donde $l = |\vec{l}|$ es la distancia entre las masas y G es el factor de proporcionalidad, constante de gravitación universal, o constante newtoniana, que fue determinado por Cavendish en 1798. Un valor actual de G , publicado por Petit y Luzum en 2010, es $G = 6,67428 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}^2\text{kg}$.

Los vectores \vec{K} y \vec{l} tienen la misma dirección pero sentidos opuestos. Además, la *ecuación 2.1* es simétrica: la masa m_1 ejerce sobre m_2 una fuerza de la misma magnitud y dirección, pero de sentido opuesto que la que m_2 ejerce sobre m_1 .

En Gravimetría, es de interés estudiar el *campo gravitacional* generado por una sola masa de prueba. Eliminando los subíndices y llamando $m_1 = m$, el módulo de la *atracción gravitacional* es

$$b = \frac{Gm}{l^2}, \quad (2.2)$$

siendo l la distancia entre la masa puntual y el punto donde se evalúa la atracción gravitacional. Las unidades de la atracción gravitacional según el sistema internacional de unidades (SI) son m/s^2 , mientras que en el sistema CGS es el *Gal* en honor a Galileo Galilei. En Gravimetría se suele emplear la milésima parte de un Gal o *mGal*.

Es importante destacar que *la atracción gravitacional no es una aceleración*, es una cantidad dinámica, una fuerza por unidad de masa.

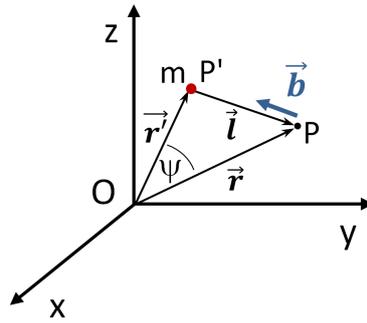


Figura 2.2: Atracción gravitacional \vec{b} .

2.2.1. Atracción vectorial de una masa puntual

En la *figura 2.2* se esquematiza la atracción gravitacional en un punto P producida por una masa m :

$$\vec{b} = -\frac{Gm}{l^2} \frac{\vec{l}}{l}. \quad (2.3)$$

El vector \vec{b} tiene origen en P y está dirigido hacia la fuente P' , mientras que el vector \vec{l} tiene origen en la fuente m y está dirigido hasta el punto de observación P . El vector \vec{l} puede expresarse en función de los vectores \vec{r} y \vec{r}' :

$$\vec{l} = \vec{r} - \vec{r}' \quad , \quad l = |\vec{r} - \vec{r}'| = |\Delta\vec{r}|. \quad (2.4)$$

En un sistema cartesiano (x, y, z) :

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) \quad , \quad \vec{r}' = \vec{r}'(x', y', z'), \quad (2.5)$$

$$l = |\vec{l}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \quad (2.6)$$

La única variable en la expresión de \vec{b} es $\Delta\vec{r}$.

Suponiendo a la Tierra compuesta por un número infinito de elementos diferenciales de masa dm , la gravitación en un punto P de masa unitaria, será la integral de todas las contribuciones individuales:

$$\vec{b} = \vec{b}(r) = -G \iiint_{M_{Tierra}} \frac{dm}{l^2} \frac{\vec{l}}{l} = -G \iiint_{M_{Tierra}} dm \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.7)$$

El diferencial de masa dm puede expresarse en función de la densidad como

$$dm = \rho(r') dv = \rho(x', y', z') dv \quad , \quad [\rho] = \left[\frac{kg}{m^3} \right], \quad (2.8)$$

siendo $dv = dx' dy' dz'$ un diferencial de volumen. En lugar de trabajar con el vector de gravitación es más sencillo trabajar con el potencial gravitacional. Dado que $rot(\vec{b}) = \vec{0}$, es posible expresar a \vec{b} como el gradiente de un *potencial gravitacional* llamado V :

$$\vec{b} = grad(V). \quad (2.9)$$

En el caso de una masa puntual

$$V = \frac{Gm}{l}, \quad \text{con} \quad \lim_{l \rightarrow \infty} V = 0. \quad (2.10)$$

En el caso de la Tierra

$$V = V(\vec{r}) = G \iiint_{M_{Tierra}} \frac{dm}{l} = G \iiint_{M_{Tierra}} \frac{\rho}{l} dv = G \iiint_{M_{Tierra}} \frac{\rho(x', y', z')}{l} dv, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} V = 0. \quad (2.11)$$

El potencial en el punto P representa el trabajo que debe hacer la gravitación para mover una masa desde el infinito ($V = 0$) hasta el punto P . Las unidades del potencial son $[V] = [m^2/s^2]$.

Si la función de densidad $\rho = \rho(r')$ fuera conocida para toda la Tierra se podría calcular la gravitación y el potencial como una función de la posición. En realidad sólo tenemos información detallada de la densidad en las capas más superficiales de la Tierra y los modelos globales sólo consideran cambios *radiales* de densidad.

2.2.2. Propiedades del potencial gravitacional

- Para una masa puntual:

$$V = \frac{Gm}{l}. \quad (2.12)$$

- Para una distribución de N masas discretas:

$$V = G \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{l_i}. \quad (2.13)$$

- Para una distribución continua de masa (un cuerpo sólido):

$$V = G \iiint_M \frac{dm}{l} = G \iiint_V \frac{\rho}{l} dv. \quad (2.14)$$

- El valor del potencial V cuando l tiende a infinito se anula:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} V = 0. \quad (2.15)$$

- El potencial V y sus primeras derivadas son continuas:

$$V = \frac{Gm}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}, \quad (2.16)$$

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{Gm(x-x')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}, \quad (2.17)$$

siempre que $x \neq x'$, $y \neq y'$ y $z \neq z'$.

- Las derivadas segundas no son continuas en todo el espacio exterior. Teniendo presente que $l^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$, es posible escribirlas como:

$$\begin{cases} \frac{d^2V}{dx^2} = -Gm \left[\frac{l^2 - 3(x - x')^2}{l^5} \right], \\ \frac{d^2V}{dy^2} = -Gm \left[\frac{l^2 - 3(y - y')^2}{l^5} \right], \\ \frac{d^2V}{dz^2} = -Gm \left[\frac{l^2 - 3(z - z')^2}{l^5} \right]. \end{cases} \quad (2.18)$$

- En cada punto exterior a las masas atrayentes, el potencial gravitacional satisface la *ecuación de Laplace*

$$\Delta V = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0. \quad (2.19)$$

Demostración de la ecuación de Laplace

Empleando las expresiones de las derivadas segundas (*ecuación 2.18*) se deduce que

$$\begin{aligned} \Delta V &= -Gm \frac{l^2}{l^5} [1 - 3(x - x')^2 + 1 - 3(y - y')^2 + 1 - 3(z - z')^2] \\ &= -3Gm \frac{l^2}{l^5} + \frac{3Gm}{l^5} [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2] \\ &= -3Gm \frac{l^2}{l^5} + 3Gm \frac{l^2}{l^5} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

La ecuación de Laplace es válida para puntos del espacio situados fuera del cuerpo que ejerce la atracción. Si el punto atraído se encuentra dentro del cuerpo puede suceder que l tienda a 0.

- El potencial de los puntos que se encuentran en el interior del sólido cumple con la *ecuación de Poisson*:

$$\Delta V = -4\pi G\rho. \quad (2.21)$$

Demostración de la ecuación de Poisson

Suponiendo que alrededor del punto atraído P , situado dentro del cuerpo, se dibuja una esfera de radio finito de una pequeñez tal que la densidad ρ de la sustancia dentro la esfera pueda considerarse homogénea. El punto atraído debe hallarse dentro de esta esfera pero no necesariamente en el centro.

Designando a V_1 como el potencial de atracción del cuerpo en el punto atraído sin considerar a la esfera de radio R y V_2 al potencial de atracción de la esfera de radio R , el

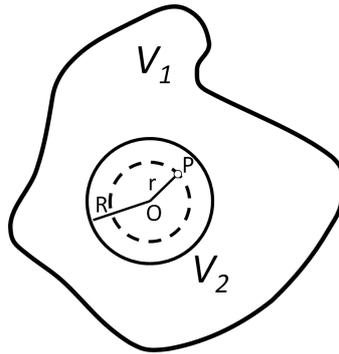


Figura 2.3: Punto P en el interior de un sólido.

potencial total será

$$V = V_1 + V_2, \quad (2.22)$$

por lo que

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2. \quad (2.23)$$

Dado que P es exterior al cuerpo, $\Delta V_1 = 0$. El potencial V_2 es el potencial externo de la esfera de radio r sumado al potencial interno de la cáscara $R - r$:

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{4}{3}\pi G\rho \frac{r^3}{r} + G \int_r^R \frac{4\pi\rho r^2}{r} dr = \frac{4}{3}\pi G\rho r^2 + 2\pi G\rho[R^2 - r^2] \\ &= 2\pi G\rho R^2 - \frac{2}{3}\pi G\rho r^2 = 2\pi G\rho R^2 - \frac{2}{3}\pi G\rho [(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Calculando las derivadas a partir de esta expresión:

$$\begin{cases} \frac{dV_2}{dx} = \frac{4}{3}\pi G\rho(a-x) \Rightarrow \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho, \\ \frac{dV_2}{dy} = \frac{4}{3}\pi G\rho(b-y) \Rightarrow \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho, \\ \frac{dV_2}{dz} = \frac{4}{3}\pi G\rho(c-z) \Rightarrow \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho. \end{cases} \quad (2.25)$$

Sumando los tres términos de la derecha

$$\boxed{\Delta V = -4\pi G\rho.} \quad (2.26)$$

Aquí ρ es la densidad del cuerpo en un pequeño entorno alrededor del punto que atrae. Si en el punto analizado no hay masa atrayente ($\rho = 0$) la ecuación de Poisson se reduce a la ecuación de Laplace, es decir, la ecuación de Laplace es un caso particular de la ecuación de Poisson. Por lo tanto, si existen cambios de densidad como sucede al pasar del interior al exterior de un cuerpo, ΔV es discontinua (ecuación de Poisson y Laplace).

2.3. Expansión de la distancia recíproca en armónicos esféricos zonales. Fórmula de descomposición

Un inconveniente de la *ecuación 2.11* es que $\rho(x', y', z')$ es difícil de medir y en el interior de la Tierra no se conoce con precisión. Un camino alternativo para analizar el potencial V es trabajar desde el espacio exterior donde se cumple que $\Delta V = 0$.

Lo que se hará es desarrollar la recíproca de l en una serie convergente dentro de la expresión

$$V_P = G \iiint_{M_{Tierra}} \frac{dm}{l}. \quad (2.27)$$

Esta solución equivale a la *descomposición espectral del campo gravitacional* donde los coeficientes de este desarrollo, que son números adimensionales, proveen las distintas amplitudes del espectro.

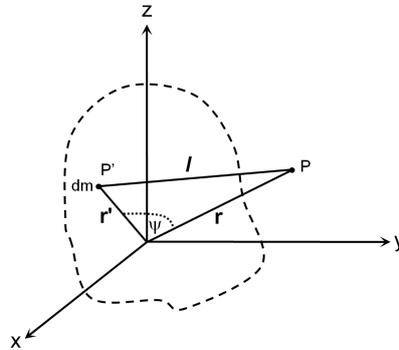


Figura 2.4: Distancia l entre dos puntos P y P' .

Analizando la *figura 2.4*, donde ψ es el ángulo comprendido entre los radiovectores \vec{r} y \vec{r}' , aplicando el teorema del coseno

$$\begin{aligned} l^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\psi, \\ l &= (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\psi)^{1/2}, \\ \frac{1}{l} &= (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\psi)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Definiendo h como

$$h = \frac{r'}{r} < 1 \quad (r' < r), \quad (2.29)$$

es posible reescribir la *ecuación 2.28* como

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} (1 + h^2 - 2h \cos\psi)^{-1/2}. \quad (2.30)$$

Dado que

$$\cos\psi = \frac{e^{i\psi} + e^{-i\psi}}{2}, \quad (2.31)$$

la ecuación 2.30 resulta

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \left[(1 - he^{i\psi})^{-1/2} (1 - he^{-i\psi})^{-1/2} \right]. \quad (2.32)$$

El desarrollo en serie de Taylor de $(1 - x)^{-1/2}$ es

$$(1 - x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \dots, \quad (2.33)$$

por lo que es posible reescribir los términos dentro del corchete en la ecuación 2.32:

$$\begin{aligned} (1 - he^{i\psi})^{-1/2} &= 1 + \frac{1}{2}he^{i\psi} + \frac{3}{8}h^2e^{2i\psi} + \frac{5}{16}h^3e^{3i\psi} + \dots, \\ (1 - he^{-i\psi})^{-1/2} &= 1 + \frac{1}{2}he^{-i\psi} + \frac{3}{8}h^2e^{-2i\psi} + \frac{5}{16}h^3e^{-3i\psi} + \dots, \end{aligned} \quad (2.34)$$

y su producto resulta

$$\begin{aligned} (1 - he^{i\psi})^{-1/2} (1 - he^{-i\psi})^{-1/2} &= 1 + \frac{1}{2}he^{-i\psi} + \frac{3}{8}h^2e^{-2i\psi} + \frac{5}{16}h^3e^{-3i\psi} + \dots \\ &+ \frac{1}{2}he^{i\psi} + \frac{1}{4}h^2e^{i\psi}e^{-i\psi} + \frac{3}{16}h^3e^{i\psi}e^{-2i\psi} + \frac{5}{32}h^4e^{i\psi}e^{-3i\psi} + \dots \\ &+ \frac{3}{8}h^2e^{2i\psi} + \frac{3}{16}h^3e^{2i\psi}e^{-i\psi} + \frac{9}{64}h^4e^{2i\psi}e^{-2i\psi} + \dots \\ &+ \frac{5}{16}h^3e^{3i\psi} + \frac{5}{32}h^4e^{3i\psi}e^{-i\psi} + \dots \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} &= 1 + h\cos\psi + h^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2\psi \right] + h^3 \left[\frac{3}{8}\cos\psi + \frac{5}{8}\cos 3\psi \right] + \\ &+ \dots \quad (\text{funciones de su argumento}) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Se obtuvo un polinomio de n términos que son funciones de ψ y de todos sus armónicos 2ψ , 3ψ , etc. La serie posee n términos y ha de ser convergente por lo que debe cumplirse

$$h = \frac{r'}{r} < 1, \quad r' < r. \quad (2.37)$$

Los términos de este polinomio se llaman *Polinomios de Legendre* de primera clase (ver Anexo 2A). Se escriben de la forma

$$P_n(\cos\psi), \quad (2.38)$$

donde n indica el grado del polinomio y $(\cos\psi)$ indica que son funciones del $\cos\psi$. De forma general se puede escribir

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(\cos\psi) \quad \text{para } h = \frac{r'}{r}, \quad (2.39)$$

para puntos exteriores se cumple que

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\psi). \quad (2.40)$$

Si el punto P fuera interior al cuerpo, en donde puede ser que $r' > r$, el factor común que debe sacarse en la ecuación 2.28 es r' , con lo que el resultado hubiera sido

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(\cos\psi), \quad h = \frac{r}{r'}, \quad (2.41)$$

por lo que para puntos interiores se cumple

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos\psi). \quad (2.42)$$

La expresión del potencial gravitacional terrestre para puntos exteriores (ecuación 2.11) puede ser reescrito como

$$V = V(\vec{r}) = G \iiint_{M_{Tierra}} \frac{dm}{l} = G \iiint_{M_{Tierra}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\psi) dm. \quad (2.43)$$

En el caso de la Tierra, es conveniente trabajar con coordenadas de colatitud θ y longitud λ . Introduciendo una esfera unitaria σ centrada en el origen de coordenadas O , las proyecciones de \overline{OP} , $\overline{OP'}$ y el polo norte forman un triángulo esférico (figura 2.5). Este triángulo contiene al ángulo cenital ψ que es una distancia esférica sobre la esfera unitaria σ .

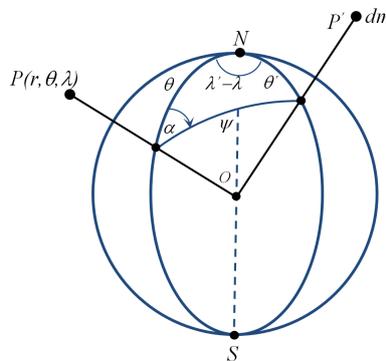


Figura 2.5: Triángulo esférico sobre la esfera unitaria.

Aplicando el teorema del coseno al triángulo esférico:

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda' - \lambda), \quad (2.44)$$

y usando la fórmula de descomposición:

$$\begin{aligned}
 P_n(\cos\psi) = & P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta') + \\
 & + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [P_{nm}(\cos\theta)\cos(m\lambda)P_{nm}(\cos\theta')\cos(m\lambda)' + \\
 & + P_{nm}(\cos\theta)\text{sen}(m\lambda)P_{nm}(\cos\theta')\text{sen}(m\lambda)'] .
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Las funciones $P_{nm}(\cos\theta)$ y $P_{nm}(\cos\theta')$ son las *funciones asociadas de Legendre de primera clase*, n es el grado y m el orden (ver Anexo 2B). La fórmula (2.45) se analiza en el Anexo 2C, para el caso particular cuando $n = 2$.

Entonces, partiendo de la expresión del potencial, sustituyendo la recíproca de la distancia por su expresión en armónicos esféricos y aplicando la fórmula de descomposición a los polinomios $P_n(\cos\psi)$ se llega a

$$V_P = \frac{G}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n k \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{r^n} \left\{ \begin{aligned} & P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda \iiint_{M_{Tierra}} r'^n P_{nm}(\cos\theta')\cos m\lambda' dm + \\ & + P_{nm}(\cos\theta)\text{sen}m\lambda \iiint_{M_{Tierra}} r'^n P_{nm}(\cos\theta')\text{sen}m\lambda' dm, \end{aligned} \right. \tag{2.46}$$

donde

$$k = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0, \\ 2 & \text{para } m \neq 0. \end{cases} \tag{2.47}$$

A partir de la ecuación 2.46 es posible reescribir la expresión del potencial gravitacional terrestre como un desarrollo de armónicos esféricos:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n (C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\text{sen}m\lambda) P_{nm}(\cos\theta) \right], \tag{2.48}$$

siendo a el semieje mayor del elipsoide de referencia y los *coeficientes armónicos*, o *coeficientes de Stokes*, C_{nm} y S_{nm} son integrales sobre la masa de la Tierra:

$$C_{n0} = \frac{1}{Ma^n} \iiint_{M_{Tierra}} r'^n P_n(\cos\theta') dM, \tag{2.49}$$

$$C_{nm} = 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{Ma^n} \iiint_{M_{Tierra}} r'^n P_{nm}(\cos\theta') \cos(m\lambda') dM, \quad m \neq 0, \tag{2.50}$$

$$S_{nm} = 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{Ma^n} \iiint_{M_{Tierra}} r'^n P_{nm}(\cos\theta') \text{sen}(m\lambda') dM, \quad m \neq 0. \tag{2.51}$$

Los cálculos del campo gravitacional son más sencillos empleando funciones en armónicos esféricos normalizados $\bar{P}_{nm}(\cos\theta)$. También se usan los coeficientes en armónicos esféricos normalizados:

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{k(2n+1)(n-m)!}} \begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} k = 1 \text{ para } m = 0 \\ k = 2 \text{ para } m \neq 0. \end{array} \quad (2.52)$$

2.4. Significado físico de los coeficientes de grado 0, 1 y 2

La expansión en armónicos esféricos del potencial gravitacional (*ecuación 2.48*) representa una *descomposición espectral* del campo de gravitación. El campo se descompone (o separa) en términos con longitud de onda $360/n$, que corresponde a una resolución espacial $180/n$. Los coeficientes armónicos son integrales de masa de la contribución individual de la correspondiente longitud de onda al potencial total.

Los armónicos de bajo grado poseen una interpretación física simple y pueden vincularse a los momentos y productos de inercia de la Tierra.

2.4.1. Coeficiente C_{00}

Para $n = 0$, la integral (2.49) se reduce a

$$C_{00} = \frac{1}{M} \iiint_{M_{Tierra}} 1 dM = 1. \quad (2.53)$$

Entonces, la expresión del potencial (*ecuación 2.48*), se reduce a la expresión del potencial de una esfera de densidad constante o variable radialmente:

$$V(r, \theta, \lambda) = GM/r. \quad (2.54)$$

El resto de los términos de la *ecuación 2.48* representan desviaciones armónicas del valor medio, que es el potencial de una esfera. En la *sección 2.5* se cuantificará el orden de estas desviaciones.

2.4.2. Coeficientes de grado 1

Los coeficientes de grado 1, C_{10} , C_{11} y S_{11} , pueden calcularse a partir de las integrales 2.49, 2.50 y 2.51 introduciendo las funciones armónicas $P_{nm}(\cos\theta)$ en dichas expresiones y luego transformando las coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas (ver *Anexo 2D*). Con este procedimiento los coeficientes de grado 1 resultan

$$C_{10} = \frac{1}{Ma} \iiint_{M_{Tierra}} r' P_1(\cos\theta') dM = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{M} \iiint_{M_{Tierra}} z' dM \right) = \frac{z_c}{a}, \quad (2.55)$$

$$C_{11} = \frac{1}{Ma} \iiint_{M_{Tierra}} r' P_{11}(\cos\theta') \cos(\lambda') dM = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{M} \iiint_{M_{Tierra}} x' dM \right) = \frac{x_c}{a}, \quad (2.56)$$

$$S_{11} = \frac{1}{Ma} \iiint_{M_{Tierra}} r' P_{11}(\cos\theta') \text{sen}(\lambda') dM = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{M} \iiint_{M_{Tierra}} y' dM \right) = \frac{y_c}{a}, \quad (2.57)$$

donde x_c , y_c y z_c son las coordenadas del centro de masas terrestre en coordenadas rectangulares. Por lo tanto, los coeficientes de grado uno representan las coordenadas del centro de masas de la Tierra en el sistema de coordenadas elegido. Si el origen de coordenadas es coincidente con el centro de masas, estos coeficientes son inadmisibles por lo que

$$C_{10} = C_{11} = S_{11} = 0. \quad (2.58)$$

Al elegir el origen en el centro de gravedad de la Tierra, no habrá términos de grado 1 en la expresión del potencial, en cuyo caso se presenta como

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \text{sen}(m\lambda)) P_{nm}(\cos\theta) \right]. \quad (2.59)$$

2.4.3. Coeficientes de grado 2

Los coeficientes de grado 2, C_{20} , C_{21} , S_{21} , C_{22} y S_{22} , al igual que los de grado 1, pueden calcularse a partir de las integrales 2.49, 2.50 y 2.51 introduciendo las funciones armónicas $P_{nm}(\cos\theta)$ y transformando las coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas. Además, se vinculan a los momentos y productos de inercia (ver Anexo 2E).

- Para el caso $m=0$

$$C_{20} = \frac{1}{Ma^2} \iiint_{M_{Tierra}} r'^2 P_2(\cos\theta') dM = \frac{1}{Ma^2} \iiint_{M_{Tierra}} \left(z'^2 - \frac{x'^2 + y'^2}{2} \right) dM. \quad (2.60)$$

La expresión de la derecha contiene los momentos principales de inercia A , B y C , y puede ser reescrita en función de los mismos:

$$C_{20} = \frac{1}{Ma^2} \left(\frac{A+B}{2} - C \right). \quad (2.61)$$

Este coeficiente caracteriza al aplastamiento polar de la Tierra y, además, representa la mayor desviación de la simetría esférica. También se lo suele escribir como C_2 , y se vincula con el *factor de forma dinámico* $J_2 = -C_2$.

- Para el caso $m=1$

$$C_{21} = \frac{1}{3} \frac{1}{Ma^2} \iiint_{M_{Tierra}} r'^2 P_{21}(\cos\theta') \cos(\lambda') dM = \frac{1}{Ma^2} \iiint_{M_{Tierra}} x' z' dM, \quad (2.62)$$

que puede ser escrita en función del producto de inercia E :

$$C_{21} = \frac{E}{Ma^2}. \quad (2.63)$$

De forma análoga se obtiene una expresión para S_{21} :

$$S_{21} = \frac{1}{Ma^2} \iiint_{M_{Tierra}} y'z' dM = \frac{D}{Ma^2}. \quad (2.64)$$

■ Para el caso $m=2$

$$C_{22} = \frac{1}{12} \frac{1}{Ma^2} \iiint_{M_{Tierra}} r'^2 P_{22}(\cos\theta') \cos(2\lambda') dM = \frac{1}{4} \frac{1}{Ma^2} \iiint_{M_{Tierra}} r'^2 \text{sen}^2\theta \cos(2\lambda') dM, \quad (2.65)$$

$$C_{22} = \frac{1}{4Ma^2} \iiint_{M_{Tierra}} (x'^2 - y'^2) dM = \frac{1}{4Ma^2} (B - A). \quad (2.66)$$

Y de forma similar se obtiene

$$S_{22} = \frac{1}{4Ma^2} \iiint_{M_{Tierra}} x'y' dM = \frac{F}{4Ma^2}. \quad (2.67)$$

Si se desprecia el movimiento polar, el eje z es coincidente con un eje principal de inercia (momento de inercia máximo), en cuyo caso $D = E = 0$ y $C_{21} = S_{21} = 0$.

Definir un sistema de coordenadas implica asignar valores a los coeficientes C_{21} , S_{21} y S_{22} . El valor de S_{22} no es nulo debido a la definición del meridiano de Greenwich. Si el eje principal de inercia coincidiera con el meridiano de Greenwich, o si el cuerpo tuviera simetría rotacional completa, entonces S_{22} sería nulo.

Los coeficientes C_{22} y S_{22} caracterizan la desviación de la distribución de masa terrestre del eje de simetría z (elipticidad del ecuador).

2.5. Cuantificación del efecto producido por los términos (2,0), (3,0) y (2,2) sobre las superficies equipotenciales

Se define como *superficie equipotencial* a una superficie sobre la cual el potencial es constante. En el caso del potencial de gravedad terrestre

$$W(x, y, z) = W_0 = cte. \quad (2.68)$$

Diferenciando esta expresión

$$\begin{aligned}
 dW &= \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz \\
 &= \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz)^T \\
 &= \nabla W \cdot d\vec{r} \\
 &= \vec{g} \cdot d\vec{r}.
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Sobre una superficie equipotencial $W = cte$, por lo que $dW = 0$, entonces $\vec{g} \cdot d\vec{r} = 0$ sobre W_0 . Como en general $\vec{g} \neq 0$ y $d\vec{r} \neq 0$, \vec{g} es perpendicular a $d\vec{r}$. El vector de gravedad es normal a las superficies equipotenciales.

En esta sección cuantificaremos el efecto de los términos del potencial gravitacional V que contienen a los coeficientes C_{20} , C_{30} , C_{22} y S_{22} sobre el potencial de una esfera. Con el objeto de simplificar el análisis de algunos términos de la ecuación 2.48 supondremos que $a/r \approx 1$, por lo que

$$V(r) \approx \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) P_{nm}(\cos\theta) \right]. \tag{2.70}$$

El término GM/r , que es el término para $n = 0$, representa el valor medio del potencial y los sucesivos términos desviaciones armónicas respecto a este valor. El valor medio del potencial gravitacional terrestre es aquel que tendría la Tierra si fuese estrictamente una esfera. Dado que la magnitud de los coeficientes C_{nm} y S_{nm} está relacionada a la distribución de masas de la Tierra, aquellas zonas donde el potencial sea positivo respecto al valor medio estarán asociadas a un exceso de masas. Recíprocamente, en aquellas zonas donde el potencial sea negativo respecto al valor medio, existirá un déficit de masas.

Para enfatizar que $V(r)$ puede ser pensado como el potencial de una esfera modificado por una serie de términos, reescribiremos la ecuación 2.70 como:

$$V(R) \approx \frac{GM}{R} + \Delta V_{C_{10}} + \Delta V_{C_{11}} + \Delta V_{S_{11}} + \Delta V_{C_{20}} + \dots, \tag{2.71}$$

donde se aproximó a r por el valor medio del radio terrestre ($R = 6371$ km).

2.5.1. Coeficientes C_{nm} y S_{nm}

Para el análisis cuantitativo propuesto es necesario conocer los valores numéricos de los coeficientes C_{nm} y S_{nm} . Estos valores son calculados a partir de perturbaciones orbitales de satélites artificiales, datos de anomalías de gravedad terrestres y datos de gravedad derivados de altimetría satelital. Emplearemos los valores del modelo EGM2008, publicados por Pavlis (2012), disponibles a través de la página del International Centre for Global Earth Models (ICGEM) y presentados en el cuadro 2.1 hasta el grado 4.

n	m	\bar{C}	\bar{S}
0	0	1.0d0	0.0d0
1	0	0.0000000000000000D+00	0.0000000000000000D+00
1	1	0.0000000000000000D+00	0.0000000000000000D+00
2	0	-0.484165143790815D-03	0.0000000000000000D+00
2	1	-0.206615509074176D-09	0.138441389137979D-08
2	2	0.243938357328313D-05	-0.140027370385934D-05
3	0	0.957161207093473D-06	0.0000000000000000D+00
3	1	0.203046201047864D-05	0.248200415856872D-06
3	2	0.904787894809528D-06	-0.619005475177618D-06
3	3	0.721321757121568D-06	0.141434926192941D-05
4	0	0.539965866638991D-06	0.0000000000000000D+00

Cuadro 2.1: Coeficientes normalizados del modelo EGM2008.

Las expresiones \bar{C} y \bar{S} denotan a los coeficientes de Stokes normalizados. A partir del cuadro 2.1 se desprende que el armónico de mayor influencia es el armónico zonal \bar{C}_{20} cuyo efecto es, aproximadamente, tres órdenes de magnitud mayor al siguiente armónico en importancia (\bar{C}_{22}).

Para poder emplear la ecuación 2.70 es necesario calcular los valores de los coeficientes sin normalizar usando la ecuación 2.52. Numéricamente, los valores de los coeficientes sin normalizar que se analizarán son $C_{20} \approx -1.08E-03$, $C_{30} \approx 2.53E-06$, $C_{22} \approx 1.57E-6$ y $S_{22} \approx -9.04E-7$.

2.5.2. Coeficiente C_{20}

Para analizar el efecto de este único término, la ecuación 2.71 se reduce a

$$V(R) \approx \frac{GM}{R} + \Delta V_{C_{20}}. \quad (2.72)$$

Desarrollando $\Delta V_{C_{20}}$:

$$V(R) \approx \frac{GM}{R} + \frac{GM}{R} C_{20} P_{20}(\cos\theta) = \frac{GM}{R} - \frac{GM}{R} \frac{|C_{20}|}{2} (3\cos^2\theta - 1). \quad (2.73)$$

Donde se tuvo en cuenta el signo de C_{20} . Los valores de colatitud para los cuales se anula $\Delta V_{C_{20}}$ son aquellos para los cuales se anula $(3\cos^2\theta - 1)$, es decir, $\theta = 54^\circ 44'$ y $\theta = 125^\circ 16'$. Además, $\Delta V_{C_{20}}$ es positivo en el intervalo $54^\circ 44' < \theta < 125^\circ 16'$ y negativo para $\theta < 54^\circ 44'$ y para $\theta > 125^\circ 16'$ (figura 2.6).

Como $C_{20} \neq 0$, es posible cuantificar la separación entre equipotenciales ΔR producida por $\Delta V_{C_{20}}$, para ello emplearemos la aproximación

$$\Delta V \approx g\Delta R, \quad (2.74)$$

siendo g el valor de la gravedad, que tomaremos en promedio como GM/R^2 . Calcularemos la separación entre equipotenciales en el ecuador y en los polos evaluando a $\Delta V_{C_{20}}$ en dichos puntos. Para el caso del ecuador

$$\Delta V_{ecuador} \approx -\frac{GM}{R} \frac{|C_{20}|}{2} (3\cos^2\theta - 1) \Big|_{\theta=90^\circ} = \frac{GM}{R} \frac{|C_{20}|}{2}. \quad (2.75)$$

Empleando la ecuación 2.74 y evaluando numéricamente

$$\Delta R_{ecuador} \approx \frac{|C_{20}|R}{2} \approx 3,45km. \quad (2.76)$$

Para el cálculo de la separación entre equipotenciales en los polos se tiene que:

$$\Delta V_{polos} \approx -\frac{GM}{R} |C_{20}|. \quad (2.77)$$

Usando la ecuación 2.74 se obtiene

$$\Delta R_{polos} \approx -|C_{20}|R \approx -6,90km. \quad (2.78)$$

El efecto del armónico zonal C_{20} es un aplastamiento de las equipotenciales en los polos y un estiramiento de las mismas sobre el ecuador (figura 2.6).

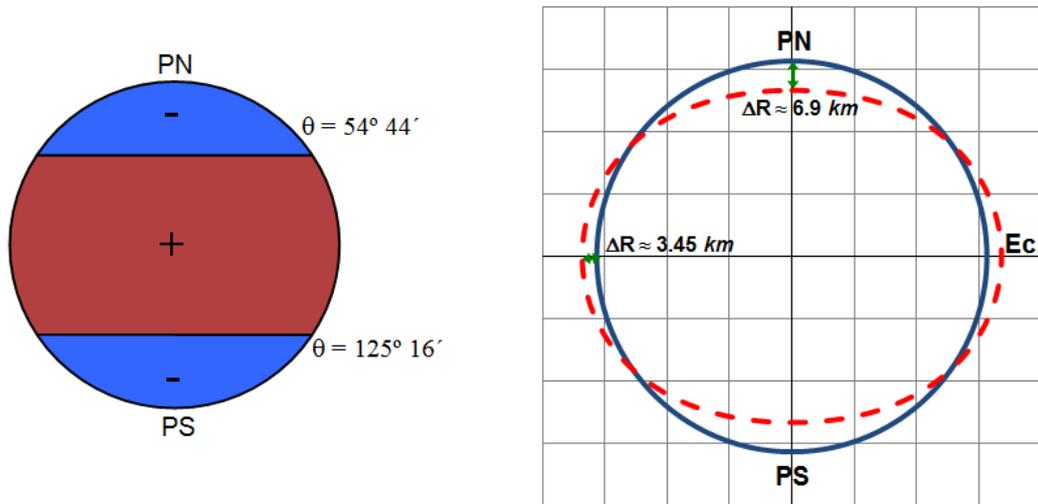


Figura 2.6: A la izquierda se esquematiza el signo de $\Delta V_{C_{20}}$. En la imagen de la derecha se muestra el efecto del término $\Delta V_{C_{20}}$ (rojo) sobre el potencial de una esfera (azul).

2.5.3. Coeficiente C_{30}

La ecuación 2.71 para este término se reduce a

$$V(R) \approx \frac{GM}{R} + \Delta V_{C_{30}} = \frac{GM}{R} + \frac{1}{2} \frac{GM}{R} |C_{30}| \cos\theta (5\cos^2\theta - 3). \quad (2.79)$$

El término $\Delta V_{C_{30}}$ se anula para $\theta = 90^\circ$, $\theta = 39^\circ 14'$ y $\theta = 140^\circ 16'$. Los máximos apartamientos entre equipotenciales se producen para $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 180^\circ$. Evaluando a $\Delta V_{C_{30}}$ en los polos y en el ecuador, y empleando la aproximación (2.74), se obtiene

$$\Delta R_{\text{ecuador}} \approx 0m, \quad (2.80)$$

$$\Delta R_{PN} \approx |C_{30}|R \approx 16m, \quad (2.81)$$

$$\Delta R_{PS} \approx -|C_{30}|R \approx -16m. \quad (2.82)$$

El armónico zonal C_{30} es el principal causante de la asimetría entre el polo norte y el polo sur (figura 2.7).

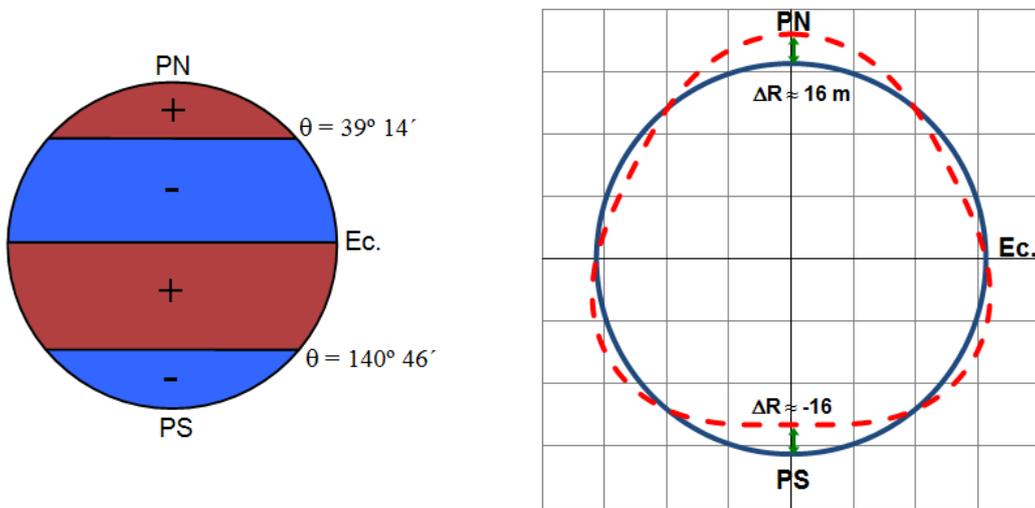


Figura 2.7: A la izquierda se esquematiza el signo de $\Delta V_{C_{30}}$. En la imagen de la derecha se muestra el efecto del término $\Delta V_{C_{30}}$ (rojo) sobre el potencial de una esfera (azul).

2.5.4. Coeficientes C_{22} y S_{22}

El efecto de estos dos términos, asociados a la *elipticidad del ecuador*, se analizará de forma conjunta. La ecuación 2.71 para este caso se reduce a

$$\begin{aligned} V(R) &\approx \frac{GM}{R} + \Delta V_{C_{22}} + \Delta V_{S_{22}}, \\ &\approx \frac{GM}{R} + \frac{GM}{R} [C_{22}\cos(2\lambda) + S_{22}\sen(2\lambda)] 3\sen^2\theta. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Empleando la aproximación 2.74 y un valor medio de la gravedad $g = GM/R^2$, se tiene que

$$\frac{GM}{R} [C_{22}\cos(2\lambda) + S_{22}\sen(2\lambda)] 3\sen^2\theta \approx \frac{GM}{R^2} \Delta R. \quad (2.84)$$

Despejando ΔR se obtiene la separación entre equipotenciales. El máximo apartamiento se produce en el ecuador:

$$\Delta R \Big|_{\theta=90^\circ} \approx 3R [C_{22}\cos(2\lambda) + S_{22}\sen(2\lambda)]. \quad (2.85)$$

En la *figura 2.8* se muestra gráficamente esta expresión.

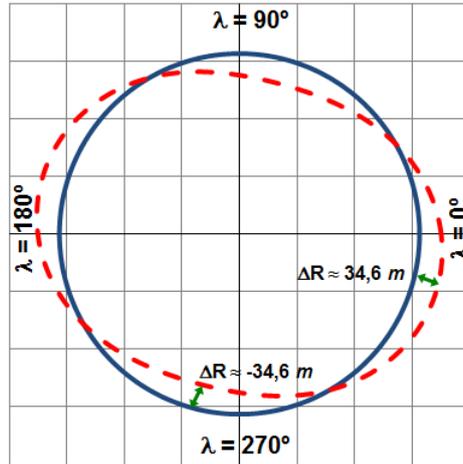


Figura 2.8: Efecto de los términos $\Delta V_{C_{22}} + \Delta V_{S_{22}}$ (rojo) sobre el potencial de una esfera en el plano ecuatorial (azul).

Para encontrar los máximos y mínimos sobre el ecuador se deriva la *ecuación 2.85* respecto a la longitud y se iguala a cero:

$$\frac{\partial \Delta R_{ec}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 6R [-C_{22}\sen(2\lambda) + S_{22}\cos(2\lambda)] = 0, \quad (2.86)$$

$$\frac{S_{22}}{C_{22}} = \tan(2\lambda) \approx \frac{-9,04 \times 10^{-7}}{1,57 \times 10^{-6}} \approx -0,576. \quad (2.87)$$

Las cuatro soluciones de esta expresión en el intervalo $0^\circ \leq \lambda < 360^\circ$ son $\lambda \approx 75^\circ 2' 0,29''$, $\lambda \approx 165^\circ 2' 0,29''$, $\lambda \approx 255^\circ 2' 0,29''$ y $\lambda \approx 345^\circ 2' 0,29''$. Evaluando la derivada segunda de la *ecuación 2.85* en estos cuatro puntos se obtiene que $\lambda \approx 75^\circ 2' 0,29''$ y $\lambda \approx 255^\circ 2' 0,29''$ son mínimos y producen una separación entre equipotenciales $\Delta R \approx -34,6 m$; mientras que $\lambda \approx 165^\circ 2' 0,29''$ y $\lambda \approx 345^\circ 2' 0,29''$ son máximos que producen una separación entre equipotenciales $\Delta R \approx 34,6 m$.

Es decir, el eje principal de inercia *a* se encuentra aproximadamente sobre la línea ($165^\circ - 345^\circ$) y el eje principal *b* de forma perpendicular al anterior sobre la línea ($75^\circ - 255^\circ$). En particular, el valor de longitud 75° coincide con el mínimo del geoide situado sobre el océano Índico.

Los valores obtenidos son consistentes con los publicados por Liu y Chao (1991), calculados a partir de los momentos principales de inercia. En su trabajo deducen que el eje principal *a* corresponde al diámetro ($14.93^\circ W$, $165.07^\circ E$) y el eje *b* al diámetro ($75.07^\circ E$, $104.93^\circ W$).

2.6. Efecto producido por la aceleración centrífuga sobre las superficies equipotenciales

En las secciones anteriores se analizó en detalle el potencial gravitacional. Pero la fuerza que actúa sobre un cuerpo en reposo sobre la superficie terrestre es la *fuerza de gravedad*, es decir, la suma de la fuerza gravitacional y la fuerza centrífuga. En esta sección, analizaremos el efecto del potencial centrífugo sobre las equipotenciales de una esfera de densidad constante.

Si un cuerpo en reposo rota solidario con la Tierra experimentará una aceleración centrífuga. Llamando z al eje de rotación terrestre, ω a la velocidad angular de rotación, y \vec{P} al vector desde el eje de rotación al punto P (figura 2.9), la fuerza centrífuga por unidad de masa es

$$\vec{f} = \omega^2 \vec{P}. \quad (2.88)$$

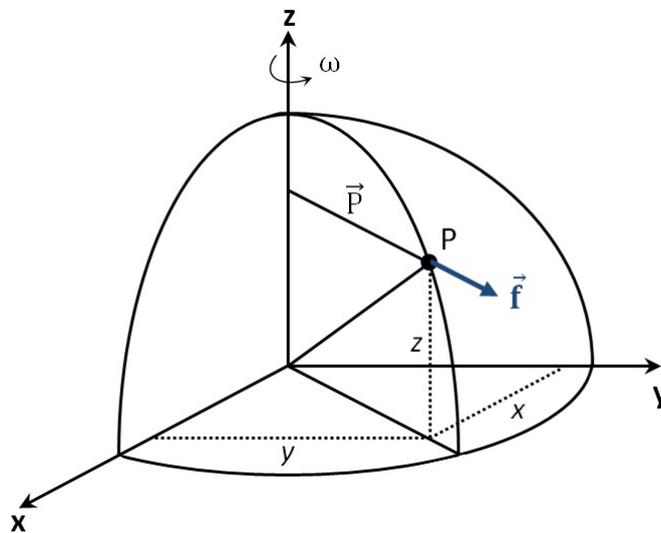


Figura 2.9: Aceleración centrífuga.

\vec{f} también puede expresarse como el gradiente de un potencial. El potencial centrífugo asociado a dicha aceleración, en coordenadas cartesianas, es

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \omega^2 R^2 \text{sen}^2(\theta), \\ &= \frac{1}{2} m \frac{GM}{a^3} R^2 \text{sen}^2(\theta) = \frac{GM}{R} \left[\frac{1}{2} m \frac{R^3}{a^3} \text{sen}^2(\theta) \right], \end{aligned} \quad (2.89)$$

donde $m = \frac{\omega^2 a^3}{GM}$. Realizando la aproximación $R/a \approx 1$ la ecuación se reduce a

$$\phi \approx \frac{GM}{R} \left[\frac{1}{2} m \text{sen}^2(\theta) \right]. \quad (2.90)$$

Para analizar el efecto de este término sobre el potencial de una esfera reescribiremos el potencial gravitacional como

$$W(r) \approx \frac{GM}{R} + \phi. \quad (2.91)$$

Por lo que el apartamiento de las equipotenciales producido por este término es

$$\Delta R \approx \frac{\Delta W}{g}. \quad (2.92)$$

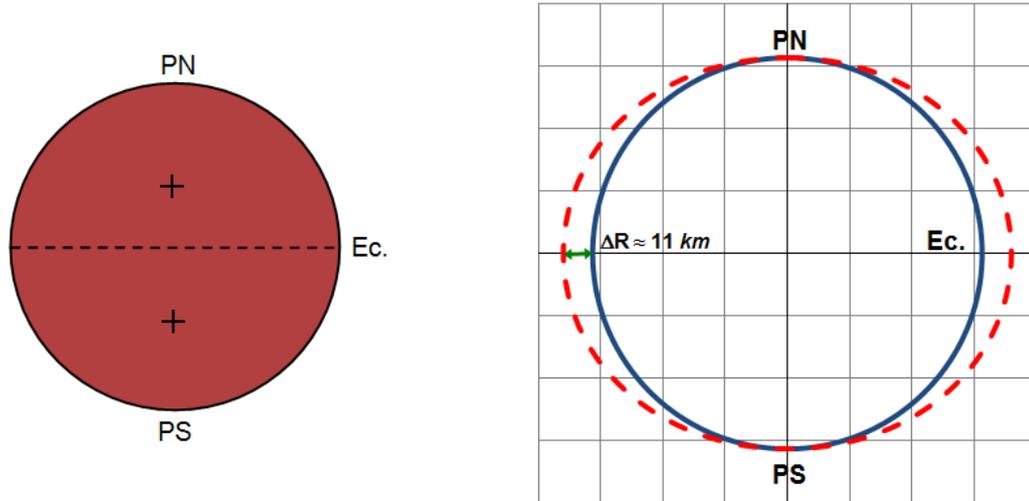


Figura 2.10: A la izquierda se esquematiza el signo de ϕ . En la imagen de la derecha se muestra el efecto del término ϕ (rojo) sobre el potencial de una esfera (azul).

Sustituyendo la *ecuación 2.91* en la 2.92, y desarrollando g

$$\Delta R \approx \frac{1}{2} R m \sin^2(\theta). \quad (2.93)$$

En el ecuador:

$$\Delta R_{\text{ecuador}} \approx \frac{1}{2} R m \approx 11 \text{ km}. \quad (2.94)$$

Mientras que en los polos:

$$\Delta R_{\text{polos}} \approx 0 \text{ km}. \quad (2.95)$$

Este término produce un abultamiento ecuatorial.

2.7. Variación de la aceleración de la gravedad entre el polo y el ecuador (fórmula de McCullagh)

Sea O el centro de gravedad de un cuerpo, ψ el ángulo comprendido entre r y r' , r la distancia \overline{OP} y r' la distancia desde el centro de gravedad al diferencial de masa dm ($\overline{OP'}$).

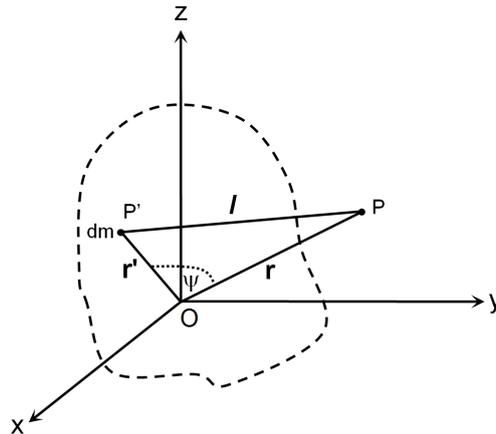


Figura 2.11: Distancia l entre dos puntos P y P'.

En las secciones anteriores se mostró que el potencial gravitacional en P puede ser escrito como

$$V_P = G \iiint_M \frac{dm}{l} \quad \text{con} \quad \frac{1}{l} = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi)^{1/2}}. \quad (2.96)$$

También fue demostrado que

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\psi), \quad (2.97)$$

siendo P_n los polinomios de Legendre (armónicos esféricos zonales) y n el grado del polinomio. Desarrollando la sumatoria

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} P_0(\cos\psi) + \frac{1}{r} \frac{r'}{r} P_1(\cos\psi) + \frac{1}{r} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_2(\cos\psi) + \dots, \quad (2.98)$$

y truncando la serie en el término cuadrático ($n = 2$):

$$\begin{aligned} V &\approx \frac{G}{r} \iiint dm + \frac{G}{r} \iiint \frac{r'}{r} P_1(\cos\psi) dm + \frac{G}{r} \iiint \left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_2(\cos\psi) dm \\ &= \frac{G}{r} M + \underbrace{\frac{G}{r^2} \iiint r' \cos\psi dm}_2 + \underbrace{\frac{G}{r^3} \iiint r'^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2\psi - \frac{1}{2}\right) dm}_3. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Donde M es la masa total concentrada en el origen. El **término 2** es nulo ya que representa la suma de todos los elementos respecto a un eje que pasa por el centro de masas y representa las coordenadas rectangulares del centro de gravedad. En cuanto al **término 3**, dado que $\cos^2\psi =$

$1 - \text{sen}^2\psi$, es posible desarrollarlo como

$$\begin{aligned} \frac{G}{r^3} \iiint r'^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2\psi - \frac{1}{2} \right) dm &= \frac{G}{r^3} \iiint r'^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \text{sen}^2\psi - \frac{1}{2} \right) dm \\ &= \frac{G}{r^3} \left[\underbrace{\iiint r'^2 dm}_4 - \frac{3}{2} \underbrace{\iiint r'^2 \text{sen}^2\psi dm}_5 \right]. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Analizando el **término 4**, teniendo en cuenta que $2r'^2 = 2x'^2 + 2y'^2 + 2z'^2$:

$$\begin{aligned} \iiint 2r'^2 dm &= \iiint (x'^2 + x'^2 + y'^2 + y'^2 + z'^2 + z'^2) dm \\ &= \underbrace{\iiint (x'^2 + y'^2) dm}_C + \underbrace{\iiint (x'^2 + z'^2) dm}_B + \underbrace{\iiint (y'^2 + z'^2) dm}_A \\ &= A + B + C. \end{aligned} \quad (2.101)$$

La expresión $2 \iiint r'^2 dm$ representa la suma de los momentos de inercia con respecto a los ejes x , y y z a los cuales denominamos A , B y C , respectivamente. En cuanto al **término 5** de la **ecuación 2.100**, $\iiint r'^2 \text{sen}^2\psi dm$ es el momento de inercia I respecto al eje \overline{OP} . Por lo tanto, la expresión del potencial resulta

$$V_p = \frac{GM}{r} + \frac{G(A + B + C - 3I)}{2r^3}. \quad (2.102)$$

Imponiendo la condición de simetría respecto al eje z se tiene $A = B$ y la ecuación se reduce a

$$V_p = \frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^3}(2A + C - 3I). \quad (2.103)$$

Esta expresión, obtenida por McCullagh (Turcotte y Schubert, 2002 y 1982) permite cuantificar las variaciones de gravedad entre el ecuador y el polo. Calculando la aceleración gravitacional:

$$b = \text{grad}(V) = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{GM}{r^2} + \frac{3G}{2r^4}(2A + C - 3I). \quad (2.104)$$

En el polo, $r = c$ (semieje menor del elipsoide que mejor ajusta a la Tierra) por lo que $I = C$:

$$b_{\text{polo}} = \frac{GM}{c^2} + \frac{3G}{2c^4}(2A - 2C) = \frac{GM}{c^2} - \frac{3G}{c^4}(C - A). \quad (2.105)$$

En el ecuador, $r = a$ e $I = A$:

$$b_{\text{ecuador}} = \frac{GM}{a^2} + \frac{3G}{2a^4}(C - A). \quad (2.106)$$

Asumiendo que la Tierra rota con una velocidad angular ω :

$$f_{ecuador} = \omega^2 a \approx 3,39 \text{ Gal}, \quad (2.107)$$

$$g_{ecuador}^* = \frac{GM}{a^2} + \frac{3G}{2a^4}(C - A) - \omega^2 a. \quad (2.108)$$

Por lo que la diferencia de gravedad entre el ecuador y el polo, que es la diferencia entre las ecuaciones 2.105 y 2.108, resulta:

$$g_p^* - g_e^* = b_{polo} - g_e^* \approx 5,17 \text{ Gales}. \quad (2.109)$$

Para lo cual se deben conocer GM , a , c , ω , C y A . Dado que I es complejo de obtener, la ecuación 2.103 puede ser reescrita de una forma más conveniente:

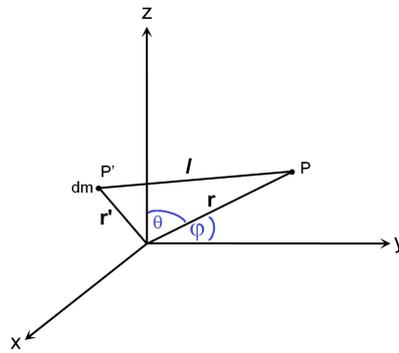


Figura 2.12: Ángulos θ y φ .

$$I = Al^2 + Bm^2 + Cn^2, \quad (2.110)$$

siendo l , m y n los cosenos directores de la recta u :

$$\begin{cases} n = \cos\theta = \text{sen}\varphi \implies n^2 = \cos^2\theta = \text{sen}^2\varphi, \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1. \end{cases} \quad (2.111)$$

Para $A = B$, usando 2.111, la ecuación 2.110 resulta:

$$I = A(l^2 + m^2) + C\cos^2\theta = A(1 - \cos^2\theta) + C\cos^2\theta. \quad (2.112)$$

La expresión entre paréntesis de la ecuación 2.103:

$$\begin{aligned} 2A + C - 3I &= 2A + C - 3A(1 - \cos^2\theta) - 3C\cos^2\theta \\ &= 2A + C - 3A + 3A\cos^2\theta - 3C\cos^2\theta \\ &= C - A - 3(C - A)\cos^2\theta \\ &= (C - A)(1 - 3\cos^2\theta). \end{aligned} \quad (2.113)$$

Con lo que la expresión del potencial es

$$V_p = \frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^3}(C - A)(1 - 3\cos^2\theta). \quad (2.114)$$

Esta expresión es del potencial gravitacional de la Tierra en aproximación del término $1/r^3$, en función de la masa M y de los momentos de inercia C y A . Derivando respecto a r :

$$b = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{GM}{r^2} + \frac{3G(C - A)(1 - 3\cos^2\theta)}{2r^4}. \quad (2.115)$$

Es común escribir la diferencia de los momentos de inercia utilizando el factor de aplanaamiento dinámico J_2 :

$$C - A = J_2 M a^2,$$

donde a es el radio ecuatorial terrestre. Luego, podemos reescribir la ecuación 2.115 como:

$$b = \frac{GM}{r^2} + \frac{3GMa^2 J_2}{2r^4}(1 - 3\cos^2\theta). \quad (2.116)$$

2.8. Preguntas de estudio

- ¿Cuál es la diferencia entre *gravedad* y *gravitación*?
- ¿Cuál es la importancia de encontrar un desarrollo en serie de $1/l$ en la expresión del potencial gravitacional terrestre?
- ¿Qué términos del desarrollo en serie del potencial gravitacional terrestre son los que producen un mayor apartamiento del mismo respecto al potencial de una esfera? ¿De qué orden son dichos apartamientos?
- ¿De qué orden es la variación en la aceleración de la gravedad entre el ecuador y el polo predicha por McCullagh? ¿A qué efectos se debe dicha variación?

Referencias

- Hofmann-Wellenhof, B. y Moritz, H. (2005). *Physical Geodesy*. Springer.
- Liu, H. S. y Chao, B. F. (1991). *The Earth's equatorial principal axes and moments of inertia*. *Geophys. J. Int.* 106, 699-702.
- Lowrie, W. (2011). *A Student's Guide to Geophysical Equations*. Cambridge University Press.
- Mateo, J. (1968). *El Potencial Terrestre*. Observatorio Astronómico de la Universidad Nacional de La Plata.
- Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C., y Factor, J. K. (2012). *The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)*. *Journal of geophysical research: solid earth*, 117(B4).
- Torge, W. (1989). *Gravimetry*. Walter de Gruyter. Berlin. New York.
- Torge, W. (1991). *Geodesy*. Walter de Gruyter. Berlin. New York.
- Turcotte, D. L. y Schubert, G. (2002) y (1982). *Geodynamics*. Wiley & Sons. 450 PP.

Páginas web:

International Centre for Global Earth Models (ICGEM): <http://icgem.gfz-potsdam.de/home>

Anexo 2A. Polinomios de Legendre

Los primeros polinomios de Legendre son

$$\begin{aligned}P_0 &= 1, \\P_1 &= \cos\psi, \\P_2 &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2\psi, \\P_3 &= \frac{3}{8}\cos\psi + \frac{5}{8}\cos 3\psi.\end{aligned}\tag{2.117}$$

Resulta más práctico expresar los polinomios de Legendre como *potencias de su argumento*, y no como funciones de su argumento y sus armónicos. Empleando las igualdades

$$\begin{aligned}\cos 2\psi &= 2\cos^2\psi - 1, \\ \cos 3\psi &= 4\cos^3\psi - 3\cos\psi, \\ \cos 4\psi &= 8\cos^4\psi - 8\cos^2\psi + 1,\end{aligned}\tag{2.118}$$

y sustituyéndolas en las expresiones de los polinomios se obtiene

$$\boxed{P_0 = 1},\tag{2.119}$$

$$\boxed{P_1 = \cos\psi},\tag{2.120}$$

$$P_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2\psi = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(2\cos^2\psi - 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\cos^2\psi - \frac{3}{4},\tag{2.121}$$

$$\boxed{P_2 = \frac{3}{2}\cos^2\psi - \frac{1}{2}},\tag{2.122}$$

$$P_3 = \frac{3}{8}\cos\psi + \frac{5}{8}(4\cos^3\psi - 3\cos\psi) = \frac{3}{8}\cos\psi + \frac{5}{2}\cos^3\psi - \frac{15}{8}\cos\psi,\tag{2.123}$$

$$P_3 = \frac{5}{2}\cos^3\psi - \frac{12}{8}\cos\psi = \frac{5}{2}\cos^3\psi - \frac{3}{2}\cos\psi,\tag{2.124}$$

$$\boxed{P_3 = \frac{5}{2}\cos^3\psi - \frac{3}{2}\cos\psi}.\tag{2.125}$$

Llamando $t = \cos\psi$:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, \\ P_1 &= t, \\ P_2 &= \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}, \\ P_3 &= \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t. \end{aligned} \tag{2.126}$$

También es posible obtener los polinomios de Legendre a partir de la *fórmula de Rodrigues* que data de 1815:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n. \tag{2.127}$$

Cálculo de P_1 y P_2 con la fórmula de Rodrigues

$$P_1(t) = \frac{1}{2^1 \times 1!} \frac{d}{dt} (t^2 - 1) = \frac{1}{2} 2t = t, \tag{2.128}$$

$$\therefore \boxed{P_1(t) = t = \cos\psi.} \tag{2.129}$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2^2 \times 2!} \frac{d^2}{dt^2} (t^2 - 1)^2 = \frac{1}{8} \frac{d}{dt} 2(t^2 - 1)2t = \frac{1}{2} (3t^2 - 1), \tag{2.130}$$

$$\therefore \boxed{P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\cos^2\psi - \frac{1}{2}.} \tag{2.131}$$

La fórmula de Rodrigues no es práctica para valores grandes de n , en cuyo caso se emplea la fórmula recursiva

$$P_n(t) = \frac{1-n}{n} P_{n-2}(t) + \frac{2n-1}{n} t P_{n-1}(t), \tag{2.132}$$

válida para $n \geq 2$ y con $P_0 = 1$ y $P_1 = t$.

Cálculo de P_3 , P_4 y P_5 con la fórmula recursiva

$$P_3(t) = \frac{1-3}{3} P_1(t) + \frac{6-1}{3} t P_2(t), \tag{2.133}$$

$$P_3(t) = -\frac{2}{3}t + \frac{5}{3}t \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right), \tag{2.134}$$

$$P_3(t) = -\frac{2}{3}t + \frac{5}{2}t^3 - \frac{5}{6}t, \tag{2.135}$$

$$P_3(t) = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t, \tag{2.136}$$

$$\therefore \boxed{P_3(\cos\psi) = \frac{5}{2}\cos^3\psi - \frac{3}{2}\cos\psi.} \quad (2.137)$$

$$P_4(t) = \frac{1-4}{4}P_2(t) + \frac{8-1}{4}tP_3(t), \quad (2.138)$$

$$P_4(t) = -\frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{7}{4}t\left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right), \quad (2.139)$$

$$P_4(t) = -\frac{9}{8}t^2 + \frac{3}{8} + \frac{35}{8}t^4 - \frac{21}{8}t^2, \quad (2.140)$$

$$P_4(t) = \frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8}, \quad (2.141)$$

$$\therefore \boxed{P_4(\cos\psi) = \frac{35}{8}\cos^4\psi - \frac{15}{4}\cos^2\psi + \frac{3}{8}.} \quad (2.142)$$

$$P_5(t) = \frac{1-5}{5}P_3(t) + \frac{10-1}{5}tP_4(t), \quad (2.143)$$

$$P_5(t) = -\frac{4}{5}\left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right) + \frac{9}{5}t\left(\frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8}\right), \quad (2.144)$$

$$P_5(t) = -2t^3 + \frac{6}{5}t + \frac{63}{8}t^5 - \frac{27}{4}t^3 + \frac{27}{40}t, \quad (2.145)$$

$$P_5(t) = \frac{63}{8}t^5 - \frac{35}{4}t^3 + \frac{15}{8}t, \quad (2.146)$$

$$\therefore \boxed{P_5(\cos\psi) = \frac{63}{8}\cos^5\psi - \frac{35}{4}\cos^3\psi + \frac{15}{8}\cos\psi.} \quad (2.147)$$

Los $P_n(t)$ no dependen de la longitud ni de ninguna distancia. Si al vector \vec{r} se lo considera como un eje, se puede considerar a todos los armónicos desarrollados sobre una esfera de radio unitario, y de allí el nombre de *armónicos esféricos*.

Cambiar de eje significa cambiar de *polo*, donde el polo es el eje de la esfera unitaria. El eje $r = \overline{OP}$ se llama eje de los armónicos zonales.

Los $P_n(t)$ varían con el ángulo ψ y pueden pasar por valores positivos y negativos, y en algún punto se harán nulos por lo cual la esfera quedará dividida en zonas positivas y negativas.

Los $P_n(t)$ son armónicos esféricos zonales con $0 \leq \psi \leq \pi \implies -1 \leq \cos\psi \leq 1$. Los armónicos que tienen como superficie límite una esfera unitaria se llaman *armónicos esféricos superficiales* y si se multiplican por una función de radio diferente a la unidad ($r \neq 1$) se denominan *armónicos esféricos sólidos*.

Propiedades de los polinomios de Legendre

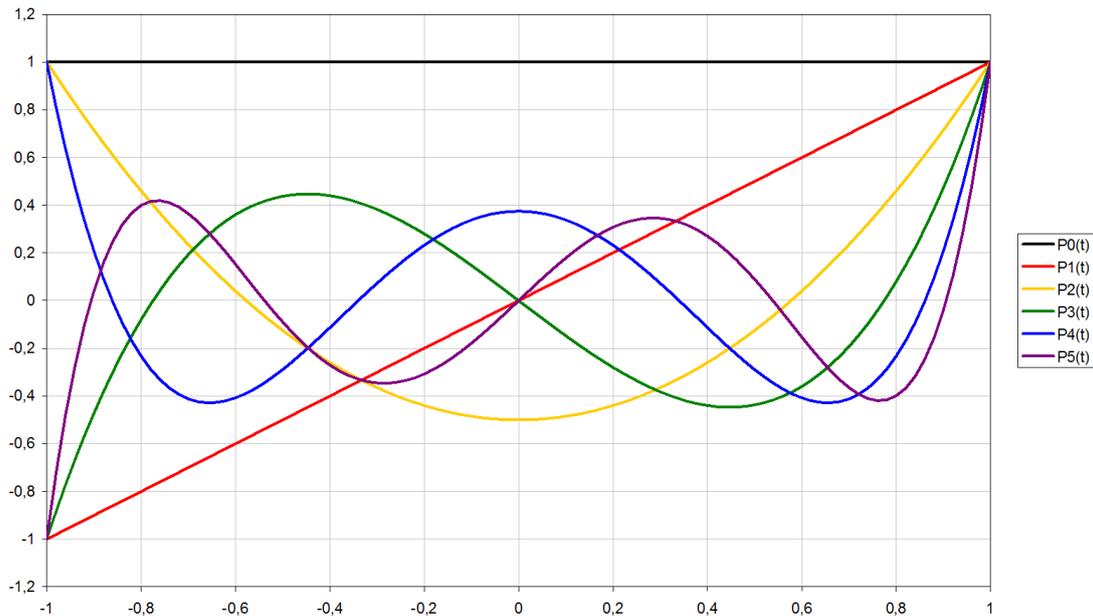


Figura 2.13: Polinomios de Legendre en función de $\cos\psi$.

- a) Todos sus ceros son reales y se ubican simétricamente respecto a un ecuador, perpendicular al eje $\overline{OP} = r$.
- b) Todos los $P_n(t)$ impares poseen un máximo $+1$ para $\psi = 0$ y un mínimo -1 para $\psi = 180$.
- c) Todos los $P_n(t)$ pares poseen un máximo $+1$ para $\psi = 0$ y $\psi = 180$.
- d) Los $P_n(t)$ poseen tantos ceros como n y dividen a la esfera en $n + 1$ zonas.
- e) Si n es par no existen ceros para $\psi = 90$. Si n es impar existe al menos un cero para $\psi = 90$.
- f) Los polinomios de Legendre son ortogonales en el intervalo $-1 < t < 1$:

$$\int_{-1}^1 P_n(t)P_k(t)dt = 0, \quad n \neq k, \tag{2.148}$$

$$\int_{-1}^1 P_n^2(t)dt = \frac{2}{2n + 1}. \tag{2.149}$$

Ceros de los $P_n(\cos\psi)$

Los $P_n(\cos\psi)$ son funciones continuas que toman tanto valores positivos como negativos, por lo que deben pasar por cero. Como ejemplo, en la *figura 2.14* se esquematiza el número de ceros que poseen P_2 y P_3 , y el número de zonas en la que dividen a la esfera de radio unitario.

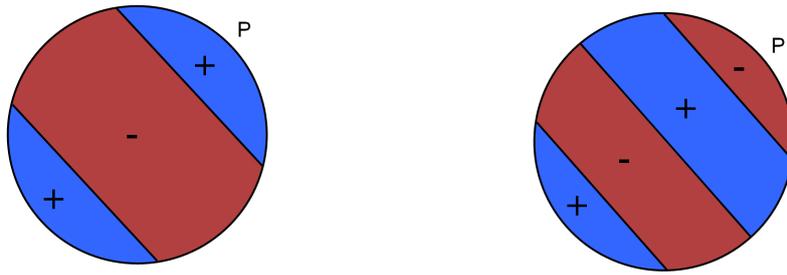


Figura 2.14: Representación zonal del armónico P_2 (izquierda) y P_3 (derecha).

Anexo 2B. Funciones asociadas de Legendre

En el siguiente cuadro se presentan las funciones asociadas de Legendre en función de la colatitud hasta el cuarto grado:

n	m	$P_{nm}(\cos\theta)$
0	0	1
1	0	$\cos\theta$
	1	$\text{sen}\theta$
2	0	$\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}$
	1	$3\text{sen}\theta\cos\theta$
	2	$3\text{sen}^2\theta$
3	0	$\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta$
	1	$\text{sen}\theta \left(\frac{15}{2}\cos^2\theta - \frac{3}{2} \right)$
	2	$15\text{sen}^2\theta\cos\theta$
	3	$15\text{sen}^3\theta$
4	0	$\frac{35}{8}\cos^4\theta - \frac{15}{4}\cos^2\theta + \frac{3}{8}$

Cuadro 2.2: Funciones asociadas de Legendre.

Estas funciones pueden obtenerse con la fórmula de Ferrer a partir de los polinomios de Legendre:

$$P_{nm}(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t). \quad (2.150)$$

Anexo 2C. Cambio de polo del armónico esférico zonal P_2

$$P_2(\cos\psi) = \frac{3}{2}\cos^2\psi - \frac{1}{2}. \quad (2.151)$$

Aplicando la fórmula de descomposición a $P_2(\cos\psi)$:

$$\begin{aligned} P_2(\cos\psi) = & P_2(\cos\theta)P_2(\cos\theta') + \\ & + 2\frac{1}{3 \times 2} [R_{21}(\cos\theta)R_{21}(\cos\theta') + S_{21}(\cos\theta)S_{21}(\cos\theta')] + \\ & + 2\frac{1}{4 \times 3 \times 2} [R_{22}(\cos\theta)R_{22}(\cos\theta') + S_{22}(\cos\theta)S_{22}(\cos\theta')] \end{aligned} \quad (2.152)$$

$$\begin{cases} P_2(\cos\theta) = \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2} \\ P_{21}(\cos\theta) = 3\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ P_{22}(\cos\theta) = 3\operatorname{sen}^2\theta \end{cases} \quad (2.153)$$

$$\begin{aligned} P_2(\cos\psi) = & \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\right) + \\ & + \frac{1}{3} [P_{21}(\cos\theta)\cos\lambda P_{21}(\cos\theta')\cos\lambda' + P_{21}(\cos\theta)\operatorname{sen}\lambda P_{21}(\cos\theta')\operatorname{sen}\lambda'] + \\ & + \frac{1}{12} [P_{22}(\cos\theta)\cos 2\lambda P_{22}(\cos\theta')\cos 2\lambda' + P_{22}(\cos\theta)\operatorname{sen} 2\lambda P_{22}(\cos\theta')\operatorname{sen} 2\lambda'] \\ = & k_1 \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\right) + \\ & + \frac{1}{3} [P_{21}(\cos\theta)P_{21}(\cos\theta')(\cos\lambda\cos\lambda' + \operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}\lambda')] + \\ & + \frac{1}{12} [P_{22}(\cos\theta)P_{22}(\cos\theta')(\cos 2\lambda\cos 2\lambda' + \operatorname{sen} 2\lambda\operatorname{sen} 2\lambda')]. \end{aligned} \quad (2.154)$$

$$P_2(\cos\psi) = k_1 \underbrace{\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\right)}_{\text{zonal}} + k_2 \underbrace{\operatorname{sen}\theta'\cos\theta'\cos(\lambda - \lambda')}_{\text{teselar}} + k_3 \underbrace{\operatorname{sen}^2\theta'\cos 2(\lambda - \lambda')}_{\text{sectorial}}. \quad (2.155)$$

El término *zonal* posee un eje norte-sur, 2 ceros y divide a la esfera en 3 zonas. El término *teselar* divide a la esfera en 4 partes limitadas por los meridianos 90° y 270° y por los polos y el

ecuador (latitudes de 0° , 90° y 180°). El término *sectorial* divide la esfera en 4 partes mediante dos círculos máximos que pasan por los polos y longitud 45° y 135° .

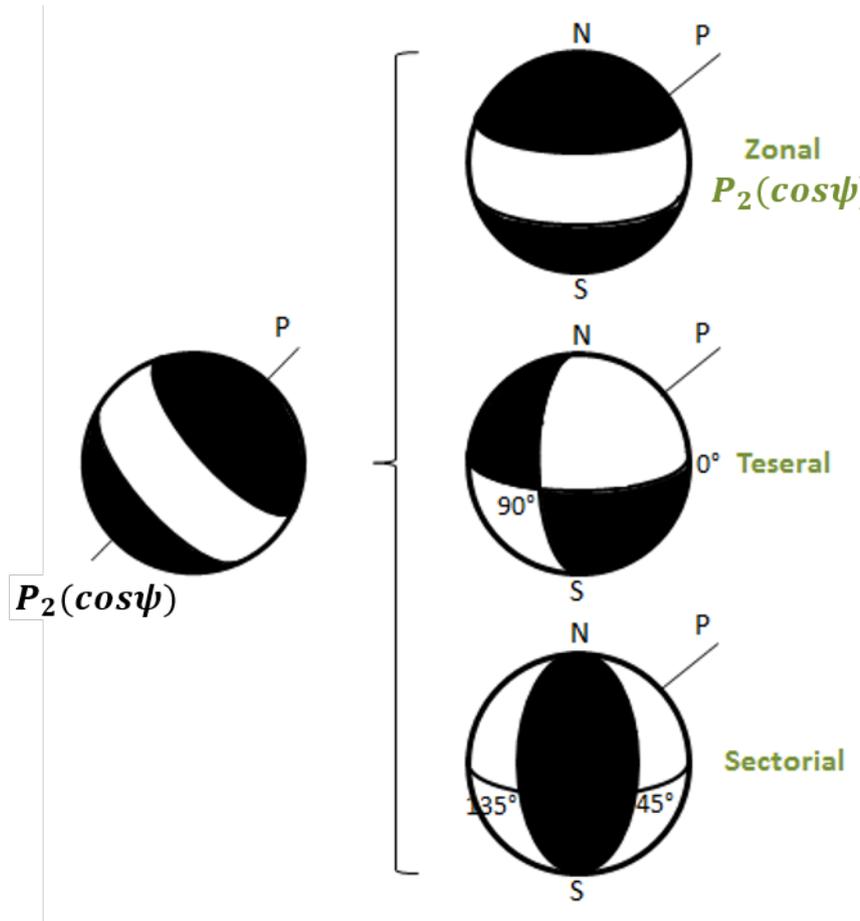


Figura 2.15: Descomposición del armónico zonal $P_2(\cos\psi)$.

Anexo 2D. Coordenadas esféricas y rectangulares

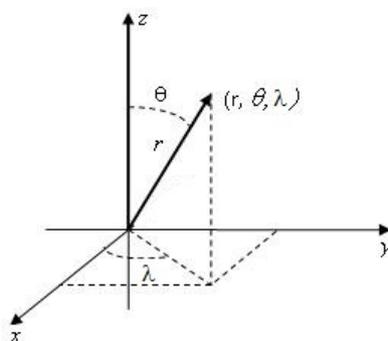


Figura 2.16: Coordenadas rectangulares.

Las coordenadas cartesianas (x,y,z) son apropiadas para describir una gran variedad de problemas pero existen mucho otros casos en que estas coordenadas son inadecuadas. Para ubicar un punto en el espacio también es posible usar coordenadas esféricas.

La relación entre las coordenadas cartesianas y coordenadas esféricas viene dada por:

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \lambda \quad , \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \lambda \quad , \quad z = r \cos \theta. \quad (2.156)$$

Anexo 2E. Momentos y productos de inercia

El contenido de este Anexo fue modificado del libro *A Student's Guide to Geophysical Equations* (Lowrie, 2011).

El momento angular h de un cuerpo rotando entorno a un eje con velocidad angular ω es

$$h = I\omega, \quad (2.157)$$

donde I es el *momento de inercia* del cuerpo. Es una medida de la distribución de su masa entorno a un eje de rotación. Para una masa puntual m a una distancia perpendicular r de un eje de rotación, el momento de inercia es

$$I = mr^2. \quad (2.158)$$

Para un cuerpo formado por un conjunto de partículas discretas de masa m_i ubicadas a una distancia r_i del eje de rotación, el momento de inercia es la suma de todas las contribuciones de estas partículas:

$$I = \sum_i m_i r_i^2. \quad (2.159)$$

Si la distribución de masas de un cuerpo se describe en relación a tres ejes coordenados cartesianos ortogonales, los momentos de inercia A , B y C entorno a los ejes x , y y z , respectivamente, son:

$$A = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad (2.160)$$

$$B = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2), \quad (2.161)$$

$$C = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (2.162)$$

Otra propiedad que afecta al comportamiento rotacional de un cuerpo es el *producto de inercia* entorno al eje de rotación. Los productos de inercia D , E y F de un cuerpo respecto a los ejes de referencia x , y y z se definen como

$$D = \sum_i m_i y_i z_i, \quad (2.163)$$

$$E = \sum_i m_i z_i x_i, \quad (2.164)$$

$$F = \sum_i m_i x_i y_i. \quad (2.165)$$

Supongamos que en un cuerpo homogéneo el plano z-x es un plano de simetría. Para cada partícula en la posición (x_i, y_i) existe una partícula equivalente en $(x_i, -y_i)$ que cancela su contribución al producto de inercia F , que resulta nulo. Si cada par de ejes de referencia define un plano de simetría, como sucede para una esfera o un elipsoide, entonces todos los productos de inercia son nulos. Productos de inercia no nulos indican falta de simetría de un cuerpo homogéneo.

CAPÍTULO 3

El campo de gravedad normal

Claudia N. Tocho y Federico G. E. Späth

En la primer parte de este capítulo se define el *potencial de gravedad normal* y, a partir de su desarrollo en armónicos esféricos y del conjunto de propiedades que lo caracterizan, se encuentra una expresión aproximada lineal en f , para puntos situados sobre y fuera del elipsoide.

En la *sección 3.3*, a partir de la aproximación de orden f del potencial normal se obtiene una expresión para la gravedad normal, con la cual se obtiene el teorema de Clairaut y se deduce cómo varía la gravedad con la altura.

En la *sección 3.4* se deduce la fórmula de la variación de la gravedad normal con la latitud geodésica hasta el orden de f^2 , y se la compara con la aproximación de orden f obtenida en la sección anterior.

En la *sección 3.5* se presenta la ecuación de Laplace en coordenadas armónicas elipsoidales y se resuelve de manera análoga a como fue resuelta en armónicos esféricos, reduciendo la ecuación diferencial parcial a tres ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el método de separación de variables.

Una vez resuelta la ecuación de Laplace, en la *sección 3.6* se obtiene una expresión del potencial gravitacional para puntos interiores y exteriores a un elipsoide de referencia. A partir de éste, en la *sección 3.7* se deduce la expresión del potencial de gravedad normal y, evaluando su gradiente, se encuentra una expresión cerrada de la gravedad normal sobre el elipsoide de referencia, obtenida por primera vez por Somigliana en 1929.

En la *sección 3.8* se expresa la fórmula analítica exacta para la gravedad normal y algunas de sus aproximaciones más usadas, y se presentan las constantes del Sistema de Referencia Geodésico GRS80 (Moritz, 1980).

Por último, en la *sección 3.9*, se comparan los principales aspectos de la Geodesia Geométrica y la Geodesia Física.

La mayor parte del texto y las figuras, fueron tomados del libro *Physical Geodesy* de Hofmann-Wellenhof y Moritz (2005).

En la parte final del capítulo se incluyen algunas preguntas de estudio.

	GRS30	GRS67	GRS80
a [m]	6378388	6378160	6378137
$1/f$	297	298.247 167	298.257222
GM_0 [$10^{14}m^3s^{-2}$]	3.986329	3.986030	3.986005
ω [$10^{-5}rad/s$]	7.2921151	7.2921151467	7.292115

Cuadro 3.1: Parámetros que definen diferentes sistemas de referencia geodésicos.

3.1. Introducción

La figura y el campo de gravedad normal deben ser lo más próximo posible a la figura y campo de gravedad real de la Tierra, y su formulación matemática debe ser compacta y simple.

Los observables geodésicos dependen de la geometría (r) y del campo de gravedad W de la Tierra. De forma general la relación funcional será no lineal:

$$f = f(r, W). \quad (3.1)$$

El procedimiento estándar es desarrollar al observable en series de Taylor y truncarlo luego del término lineal. Como resultado se obtiene una ecuación de observación lineal. Con el objeto de realizar dicha linealización es necesario contar con una aproximación adecuada de la geometría y del campo de gravedad terrestre. Una aproximación esférica es demasiado inexacta ya que el radio ecuatorial de la Tierra es aproximadamente 21.5 km mayor al radio polar. Un elipsoide de simetría rotacional es lo suficientemente exacto. El geoide, que representa la forma física de la Tierra, no se desvía más de 100 m respecto al elipsoide de referencia.

El potencial y el campo de gravedad que son consistentes con dicho elipsoide se denominan *potencial normal* y *gravedad normal*. De forma que el campo normal es una aproximación elipsoidal al campo de gravedad real. Para el potencial de gravedad tenemos la siguiente linealización:

$$W = U + T, \quad (3.2)$$

donde W es el potencial de gravedad real, U el potencial de gravedad normal y T el potencial perturbador. La Geodesia Física es una disciplina global por naturaleza por lo que es necesario asegurarse que el mismo campo normal sea empleado por diferentes grupos de trabajo en todo el globo. Esta tarea fue llevada a cabo en el último siglo por la Asociación Internacional de Geodesia (IAG, International Association of Geodesy). Como resultado, a lo largo de los años fueron evolucionando diferentes Sistemas de Referencia Geodésicos (GRS, Geodetic Reference Systems): GRS30, GRS67 y el actual GRS80. En la *tabla 3.1* se resumen los parámetros básicos para definir cada uno de estos sistemas. Se observa un cambio significativo en las constantes principales excepto en la velocidad angular ω que se conoce a partir de mediciones astronómicas.

3.2. Potencial Normal desarrollado en armónicos esféricos hasta el orden f

La *geometría* del campo normal (el elipsoide) es determinada por dos parámetros geométricos para el tamaño y forma. Elegiremos el semieje mayor a y el aplanamiento f . La descripción del *campo físico* (el potencial normal) requiere dos parámetros adicionales. La intensidad viene dada por la *constante geocéntrica gravitacional* GM_0 y, dado que estamos tratando con gravedad, es necesario incluir la velocidad de rotación terrestre ω . Este conjunto de 4 parámetros define completamente al campo normal (ver la *tabla 3.1* para ejemplos). Cualquier otro conjunto de 4 parámetros independientes definirá al campo normal. Para el GRS80 se suele emplear el factor de forma dinámico J_2 ($-C_{20}^N$) en lugar del factor de forma geométrico f . El conjunto de parámetros a , J_2 , GM_0 y ω se llaman *constantes de definición*. El potencial normal, desarrollado en armónicos esféricos, se define de forma tal que posee las siguientes propiedades:

- 1- Posee simetría rotacional (es zonal).
- 2- Posee simetría ecuatorial (términos zonales pares).
- 3- Es constante sobre el elipsoide (superficie equipotencial).

La última propiedad es la más fundamental ya que define al elipsoide de rotación terrestre como una *superficie equipotencial* o superficie de nivel. Este conjunto de propiedades provee un algoritmo para derivar el potencial normal y la fórmula de gravedad. El punto de partida es el desarrollo en armónicos esféricos del potencial normal junto con el potencial centrífugo. De forma conjunta dan el potencial normal U :

$$U(r, \theta, \lambda) = \frac{GM_0}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l P_{lm}(\cos\theta) (C_{lm}^N \cos m\lambda + S_{lm}^N \sin m\lambda) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (3.3)$$

Dado que deseamos representar el potencial normal sólo sobre el elipsoide y fuera de él, su distribución de masas es irrelevante. Para el desarrollo siguiente será útil considerar a todas las masas contenidas en una esfera de radio a . Con la primera propiedad, simetría rotacional, se obtiene la simplificación

$$U(r, \theta) = \frac{GM_0}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} C_{l0}^N P_l(\cos\theta) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (3.4)$$

La segunda propiedad, simetría ecuatorial, reduce la serie a los términos de grado par. Sólo los términos hasta grado 8 son necesarios, dado que la serie converge, con lo que se obtiene

$$U(r, \theta) = \frac{GM_0}{a} \sum_{l=0, [2]}^8 \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} C_{l0}^N P_l(\cos\theta) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (3.5)$$

Para una mejor comprensión y simplicidad de cálculos continuaremos únicamente con los términos de grado 0 y 2. El objetivo es obtener una aproximación lineal en f y C_{20}^N . De todas

formas, debemos recordar que el desarrollo debería llegar hasta grado 8. Desarrollando el polinomio de Legendre P_2 se obtiene

$$U(r, \theta) = \frac{GM_0}{a} \left[\left(\frac{a}{r}\right) C_{00}^N + \left(\frac{a}{r}\right)^3 C_{20}^N \frac{1}{2} (3\cos^2\theta - 1) + \frac{1}{2} \frac{\omega^2 r^2 a}{GM_0} \text{sen}^2\theta \right]. \quad (3.6)$$

Finalmente, para imponer el principal requerimiento, elipsoide equipotencial, es necesario evaluar la ecuación 3.6 sobre el elipsoide. Es por ello que es necesario una expresión para el radio del elipsoide en función de la colatitud θ . La expresión exacta es

$$r(\theta) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \text{sen}^2\theta}} = \frac{a}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2\theta}}, \quad (3.7)$$

la cual es fácilmente verificable reemplazando $x = r \text{sen}\theta \cos\lambda$, $y = r \text{sen}\theta \text{sen}\lambda$ y $z = r \cos\theta$ en la ecuación del elipsoide

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (3.8)$$

Como queremos obtener una expresión lineal en f , haremos una expansión como serie binomial de a/r :

$$(1 + x)^q = 1 + qx + \frac{q(q-1)x^2}{2!} + \dots, \quad (3.9)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots, \quad (3.10)$$

$$\sqrt{1 + e'^2 \cos^2\theta} = 1 + \frac{1}{2}e'^2 \cos^2\theta - \dots, \quad (3.11)$$

$$\frac{a}{r} = 1 + f \cos^2\theta + E_{rr}(f^2). \quad (3.12)$$

El último paso fue posible por el hecho de que

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \underbrace{\frac{a-b}{a}}_f \frac{a+b}{b} \frac{a}{b} = 2f + E_{rr}(f^2). \quad (3.13)$$

A partir de la ecuación 3.12 es posible obtener la expresión del radio (lineal con f) del elipsoide en función de θ :

$$r \approx a(1 - f \cos^2\theta), \quad (3.14)$$

de manera similar a lo obtenido con la ecuación 3.12 es posible desarrollar

$$\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 = 1 + 2f \cos^2\theta + E_{rr}(f^2) \right]. \quad (3.15)$$

Reemplazando la ecuación 3.12 en la ecuación 3.6, y teniendo en cuenta que el coeficiente $C_{00}^N = 1$, se desprende que U depende de tres cantidades pequeñas del mismo orden de magnitud:

$$f = \frac{a-b}{a} \sim 0,003, \quad (3.16)$$

$$C_{20}^N \sim -0,001, \quad (3.17)$$

$$m = \frac{\omega^2 a^3}{GM_0} \sim 0,003. \quad (3.18)$$

La cantidad m es la intensidad relativa de la aceleración centrífuga en el ecuador comparada con la gravitación. Introduciendo la *ecuación 3.12* en la *ecuación 3.6*, empleando f , C_{20}^N , m y despreciando todos aquellos términos que sean cuadráticos en estas cantidades (f^2 , fC_{20}^N , fm , $C_{20}^{N^2}$ y $C_{20}^N m$) se obtiene

$$U = \frac{GM_0}{a} \left[(1 + f \cos^2 \theta) + C_{20}^N \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{2} m \operatorname{sen}^2 \theta \right] \quad (3.19)$$

$$= \frac{GM_0}{a} \left[1 - \frac{1}{2} C_{20}^N + \frac{1}{2} m + \left(f + \frac{3}{2} C_{20}^N - \frac{1}{2} m \right) \cos^2 \theta \right]. \quad (3.20)$$

Esta expresión del potencial normal aún depende de la colatitud lo cual contradice el requerimiento de un potencial constante sobre el elipsoide. Para eliminar esta dependencia es necesario que se cumpla la siguiente condición entre f , C_{20}^N y m :

$$f + \frac{3}{2} C_{20}^N = \frac{1}{2} m, \quad (3.21)$$

lo cual implica que estas tres cantidades no pueden ser independientes entre sí. Usando la *expresión 3.21* es posible eliminar uno de los tres parámetros en la expresión del potencial normal. Con lo que el valor constante del potencial normal U_0 sobre el elipsoide puede ser escrito como

$$U_0 = \frac{GM_0}{a} \left(1 - \frac{1}{2} C_{20}^N + \frac{1}{2} m \right) = \frac{GM_0}{a} \left(1 + \frac{1}{3} f + \frac{1}{3} m \right) = \frac{GM_0}{a} (1 + f + C_{20}^N). \quad (3.22)$$

Fuera del elipsoide se debe emplear la *expresión 3.6* y aplicar la condición *3.21* para eliminar uno de los tres parámetros. En caso de eliminar C_{20}^N

$$U(r, \theta) = \frac{GM_0}{a} \left[\frac{a}{r} + \left(\frac{a}{r} \right)^3 \left(\frac{1}{2} m - f \right) \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 m \operatorname{sen}^2 \theta \right]. \quad (3.23)$$

Hay que recordar que esta es una aproximación lineal. Para cálculos precisos debe emplearse la *ecuación 3.5*.

3.3. Gravedad normal hasta el orden de f

A partir de la aproximación lineal en f obtenida en la sección anterior es posible definir la *gravedad normal* como la derivada radial negativa del potencial normal. A partir de la *ecuación 3.23* se obtiene la siguiente expresión para la gravedad normal fuera del elipsoide:

$$\gamma(r, \theta) = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{GM_0}{a} \left[\frac{a}{r^2} + \frac{3}{r} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \left(\frac{1}{2} m - f \right) \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) - \frac{r}{a^2} m \operatorname{sen}^2 \theta \right]. \quad (3.24)$$

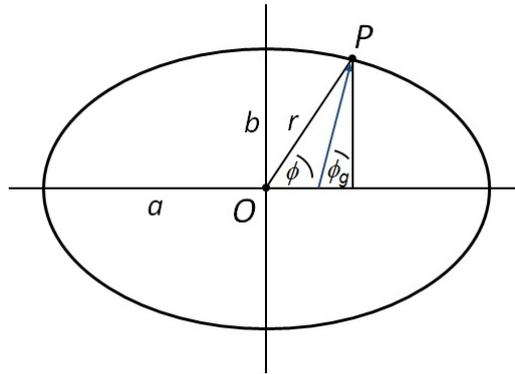


Figura 3.1: Latitud geodésica (ϕ_g) y latitud geocéntrica (ϕ).

Esta expresión es función de la colatitud geocéntrica θ . Por cuestiones prácticas trabajaremos con la latitud geodésica ϕ_g . La latitud geográfica o *geodésica* es el ángulo subtendido entre la vertical local y el plano ecuatorial. Mientras que la latitud *geocéntrica* ϕ es el ángulo subtendido entre la línea al centro de la Tierra y el plano ecuatorial. Ambas latitudes se vinculan mediante la relación

$$\tan(\phi_g) = \frac{a^2}{b^2} \tan(\phi). \quad (3.25)$$

Dado que $\gamma = \text{grad}(U)$, en coordenadas polares

$$\gamma = - \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} \right)^2 \right]^{1/2} \approx - \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (3.26)$$

Como la diferencia $\phi_g - \phi$ es del orden de f , en esta primera aproximación se tiene que la dirección de γ es normal al *elipsoide* de referencia. En la superficie del elipsoide, empleando la misma aproximación que en la sección anterior, se tiene

$$\gamma(\theta) = \frac{GM_0}{a^2} \left[1 + m + \left(f - \frac{5}{2}m \right) \text{sen}^2\theta \right]. \quad (3.27)$$

Vemos que no es posible obtener gravedad normal constante en la superficie del elipsoide simultáneamente con un potencial normal constante. Es por ello que la dependencia con la colatitud permanece. Evaluando la *ecuación* 3.27 en el ecuador:

$$\gamma_a = \frac{GM_0}{a^2} \left[1 + f - \frac{3}{2}m \right], \quad (3.28)$$

y en los polos:

$$\gamma_b = \frac{GM_0}{a^2} [1 + m]. \quad (3.29)$$

Notar que $\gamma_b > \gamma_a$ debido a que el polo se encuentra más cercano al centro de masa de la Tierra. De forma análoga al aplanamiento geométrico $f = (a - b)/a$ se define el *aplanamiento dinámico* o *elipticidad de la gravedad*:

$$f^* = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a}. \quad (3.30)$$

Numéricamente $f^* \approx 0,005$, es decir, del mismo orden que los otros tres parámetros. Sustituyendo las ecuaciones 3.28 y 3.30 en la expresión 3.27 se llega a expresar la fórmula de gravedad de Newton:

$$\gamma(\phi_g) = \gamma_a(1 + \text{sen}^2\phi_g f^*) \quad (3.31)$$

Sustituyendo la gravedad normal en los polos y el ecuador en la ecuación 3.30:

$$f^* = \frac{\frac{5}{2}m - f}{1 + f - \frac{3}{2}m} \approx \frac{5}{2}m - f, \quad (3.32)$$

con lo que se llega al resultado

$$f^* + f = \frac{5}{2}m. \quad (3.33)$$

Esta relación es conocida como *teorema de Clairaut* (hasta el orden de f). Es importante ya que vincula una cantidad dinámica (f^*) con una cantidad geométrica (f) a través de la rotación terrestre (m) de una forma sencilla.

Hasta la ecuación 3.6 el desarrollo del campo normal era válido de forma estricta. A partir de la ecuación 3.6, se introdujeron aproximaciones de forma tal que todas las expresiones con términos cuadráticos en f , m y C_{20}^N fueron despreciados.

3.3.1. Variación de la gravedad normal con la altura (hacia el exterior)

Aunque la ecuación 3.24 describe la gravedad normal fuera del elipsoide, es más práctico contar con una continuación ascendente del valor de la gravedad normal sobre el elipsoide de la forma $\gamma(h, \theta)$. Esto se logra mediante el desarrollo en serie de Taylor:

$$\gamma(h, \theta) = \gamma(h=0) + \left. \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right|_{h=0} h + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \right|_{h=0} h^2 \dots \quad (3.34)$$

3.4. Gravedad normal hasta el orden de f^2

Demostraremos que la expresión de la gravedad normal hasta el orden de f^2 es:

$$\gamma = \gamma_a \left[1 + \left(\frac{5}{2}m - f - \frac{17}{14}mf + \frac{15}{4}m^2 \right) \text{sen}^2\phi_g + \left(\frac{1}{8}f^2 - \frac{5}{8}mf \right) \text{sen}^2 2\phi_g \right]. \quad (3.35)$$

La gravedad normal es, por definición, la variación del potencial normal de gravedad U en la dirección de la normal:

$$\gamma = -\frac{\partial U}{\partial n}, \quad (3.36)$$

llamando a la componente radial y tangencial γ_r y γ_t , respectivamente:

$$\gamma_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \gamma_t = -\frac{\partial U}{r\partial\phi}. \quad (3.37)$$

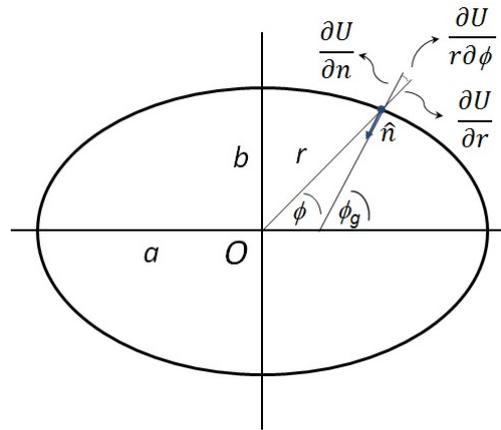


Figura 3.2: Componentes radial y tangencial de γ .

De la figura 3.2 resulta

$$\gamma^2 = \gamma_r^2 + \gamma_t^2 = \gamma_r^2 \left[1 + \left(\frac{\gamma_t}{\gamma_r} \right)^2 \right], \quad (3.38)$$

o simplemente

$$\gamma = \gamma_r \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_t}{\gamma_r} \right)^2 + \dots \right], \quad (3.39)$$

$$\gamma = -\frac{\partial U}{\partial r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{-\frac{\partial U}{r \partial \phi}}{-\frac{\partial U}{\partial r}} \right)^2 \right]. \quad (3.40)$$

Partiendo de la expresión de U para $J_3 = 0$, es decir, con simetría ecuatorial (HN=HS):

$$U = GM \left[\frac{1}{r} - \frac{a^2}{r^3} J_2 \left(\frac{3}{2} \text{sen}^2 \phi - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^3} m \cos^2 \phi - \frac{a^4}{r^5} J_4 \left(\frac{35}{8} \text{sen}^4 \phi - \frac{30}{8} \text{sen}^2 \phi + \frac{3}{8} \right) \right], \quad (3.41)$$

se obtiene

$$-\frac{\partial U}{\partial r} = GM \left[\frac{1}{r^2} - 3 \frac{a^2}{r^4} J_2 \left(\frac{3}{2} \text{sen}^2 \phi - \frac{1}{2} \right) - \frac{r}{a^3} m \cos^2 \phi - 5 \frac{a^4}{r^6} J_4 \left(\frac{35}{8} \text{sen}^4 \phi - \frac{30}{8} \text{sen}^2 \phi + \frac{3}{8} \right) \right], \quad (3.42)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{GM}{r^2} \left[1 - 3 \left(\frac{a}{r} \right)^2 J_2 \left(\frac{3}{2} \text{sen}^2 \phi - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{r}{a} \right)^3 m \cos^2 \phi - 5 \left(\frac{a}{r} \right)^4 J_4 \left(\frac{35}{8} \text{sen}^4 \phi - \frac{30}{8} \text{sen}^2 \phi + \frac{3}{8} \right) \right], \quad (3.43)$$

$$-\frac{\partial U}{r\partial\phi} = GM \left[\frac{3a^2}{2r^4} J_2 \text{sen}2\phi + \frac{1}{2} \frac{r}{a^3} m \text{sen}2\phi + \frac{a^4}{r^6} J_4 \left(\frac{35}{2} \text{sen}^3\phi \cos\phi - \frac{15}{4} \text{sen}2\phi \right) \right], \quad (3.44)$$

$$-\frac{\partial U}{r\partial\phi} = \frac{GM}{r^2} \left[\left(\frac{3}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 J_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^3 m \right) \text{sen}2\phi + \left(\frac{a}{r} \right)^4 J_4 \left(\frac{35}{2} \text{sen}^3\phi \cos\phi - \frac{15}{4} \text{sen}2\phi \right) \right]. \quad (3.45)$$

Hasta términos de cuarto orden resulta

$$\frac{\frac{\partial U}{r\partial\phi}}{\frac{\partial U}{\partial r}} = \left(\frac{\left[\frac{3}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 J_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^3 m \right] \text{sen}2\phi}{1 - 3 \left(\frac{a}{r} \right)^2 J_2 \left(\frac{3}{2} \text{sen}^2\phi - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{r}{a} \right)^3 m \cos^2\phi - 5 \left(\frac{a}{r} \right)^4 J_4 \left(\frac{35}{8} \text{sen}^4\phi - \frac{30}{8} \text{sen}^2\phi + \frac{3}{8} \right)} \right), \quad (3.46)$$

$$\left[\frac{\frac{\partial U}{r\partial\phi}}{\frac{\partial U}{\partial r}} \right]^2 = \left[\frac{3}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 J_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^3 m \right]^2 \text{sen}^2 2\phi. \quad (3.47)$$

Sustituyendo el valor de J_2 por:

$$J_2 = \frac{2}{3}f - \frac{1}{3}f^2 + \frac{2}{21}fm - \frac{1}{3}m, \quad (3.48)$$

resulta

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\frac{\partial U}{r\partial\phi}}{\frac{\partial U}{\partial r}} \right]^2 = \frac{1}{2} f^2 \text{sen}^2 2\phi. \quad (3.49)$$

Reemplazando las ecuaciones 3.49 y 3.43 en la ecuación 3.40 se obtiene

$$\gamma = \frac{GM}{r^2} \left[1 - 3 \left(\frac{a}{r} \right)^2 J_2 \left(\frac{3}{2} \text{sen}^2\phi - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{r}{a} \right)^3 m \cos^2\phi - 5 \left(\frac{a}{r} \right)^4 J_4 \left(\frac{35}{8} \text{sen}^4\phi - \frac{30}{8} \text{sen}^2\phi + \frac{3}{8} \right) + \frac{1}{2} f^2 \text{sen}^2 2\phi \right]. \quad (3.50)$$

Esta fórmula expresa el valor de la gravedad normal para cualquier latitud. Si r representa el radio elipsoidal, la gravedad será al nivel del elipsoide.

Reteniendo los términos de la teoría de segundo orden y usando la relación que existe entre la latitud geodésica y la latitud geocéntrica la fórmula internacional de segundo orden queda

$$\gamma = \gamma_a \left[1 + \left(\frac{5}{2}m - f + \frac{15}{4}m^2 - \frac{17}{14}mf \right) \text{sen}^2\phi_g + \left(\frac{15}{8}mf - \frac{7f^2}{8} \right) \text{sen}^2 2\phi_g \right], \quad (3.51)$$

$$\boxed{\gamma = \gamma_a [1 + \beta_1 \text{sen}^2\phi_g + \beta_2 \text{sen}^2 2\phi_g]}. \quad (3.52)$$

Esta es la variación de la gravedad normal con la latitud geodésica sobre el elipsoide de referencia.

Aproximación del orden de f	Aproximación del orden de f^2
$f = \frac{1}{2}m - \frac{3}{2}C_{20}^N = \frac{1}{2}m + \frac{3}{2}J_2$	$f - \frac{1}{2}m + \frac{3}{2}f^2 - \frac{3}{2}fm - \frac{3}{2}(1-f)J_2 + \frac{15}{4}J_4 = 0$
$m = \frac{\omega^2 a^3}{GM}$	$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$
<p>Teorema de Clairaut:</p> $\beta = f^* = \frac{5}{2}m - f$	<p>Teorema de Clairaut:</p> $\beta_1 = f^* = \frac{5}{2}m - f - \frac{17}{14}fm + \frac{15}{4}m^2$
<p>Fórmula de gravedad de Newton:</p> $\gamma(\theta) = \gamma_a(1 + \beta \text{sen}^2\theta)$	<p>Fórmula convencional:</p> $\gamma = \gamma_a [1 + \beta_1 \text{sen}^2\phi_g + \beta_2 \text{sen}^2 2\phi_g]$
$J_2 = -C_{20}^N = \frac{2}{3}f - \frac{1}{3}m$	$J_2 = \frac{2}{3}f - \frac{1}{3}m - \frac{1}{3}f^2 + \frac{2}{21}fm$
	$J_4 = -\frac{4}{5}f^2 + \frac{4}{7}fm$
$r \approx a(1 - f \cos^2\theta)$	$r \approx a [1 + (f + \frac{3}{2}f^2) \cos^2\theta - \frac{1}{2}f^2 \cos^4\theta]^{-1}$

Cuadro 3.2: Comparación entre la aproximación de orden f y la de orden f^2 .

3.5. Expresión del potencial gravitacional en coordenadas armónicas elipsoidales

La ecuación de Laplace en coordenadas armónicas elipsoidales (ver Anexo 3A) se escribe como

$$\Delta V = \frac{1}{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta} \left[(u^2 + E^2) \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + 2u \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{(u^2 + E^2) \operatorname{sen}^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} \right] = 0. \quad (3.53)$$

Una expresión alternativa se obtiene eliminando el factor $(u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta)^{-1}$:

$$(u^2 + E^2) \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + 2u \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{(u^2 + E^2) \operatorname{sen}^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (3.54)$$

Para el caso límite $E \rightarrow 0$ las ecuaciones se reducen a las expresiones vistas en coordenadas esféricas.

Para resolver la ecuación de Laplace (expresiones 3.53 o 3.54) en coordenadas elipsoidales se procede de manera análoga al método empleado para resolver la ecuación en coordenadas esféricas. Se propone una solución de la forma

$$V(u, \vartheta, \lambda) = f(u) g(\vartheta) h(\lambda). \quad (3.55)$$

El objetivo de separar las variables u, ϑ, λ es descomponer la ecuación diferencial original en tres ecuaciones diferenciales ordinarias. Sustituyendo y dividiendo por $f g h$, se obtiene

$$\frac{1}{f} [(u^2 + E^2) f'' + 2u f'] + \frac{1}{g} (g'' + g' \cot \vartheta) + \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{(u^2 + E^2) \operatorname{sen}^2 \vartheta} \frac{h''}{h} = 0. \quad (3.56)$$

Esta ecuación puede ser reescrita como

$$-\frac{(u^2 + E^2) \operatorname{sen}^2 \vartheta}{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta} \left\{ \frac{1}{f} [(u^2 + E^2) f'' + 2u f'] + \frac{1}{g} (g'' + g' \cot \vartheta) \right\} = \frac{h''}{h}. \quad (3.57)$$

El lado izquierdo de esta expresión depende únicamente de u y ϑ , mientras que el lado derecho depende únicamente de λ . La única forma de satisfacer esta igualdad es que ambos lados sean igual a una misma constante. Es por ello que se propone como solución

$$\frac{h''}{h} = -m^2. \quad (3.58)$$

La inversa del primer factor del producto en el miembro izquierdo de la ecuación 3.57, puede ser reescrito como

$$\frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{(u^2 + E^2) \operatorname{sen}^2 \vartheta} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \vartheta} - \frac{E^2}{u^2 + E^2}. \quad (3.59)$$

Sustituyendo las *ecuaciones 3.58 y 3.59* en la *ecuación 3.57*, y combinando las funciones que dependen de una misma variable, se tiene

$$\frac{1}{f} [(u^2 + E^2)f'' + 2uf'] + \frac{E^2}{u^2 + E^2} m^2 = -\frac{1}{g} (g'' + g' \cot \vartheta) + \frac{m^2}{\text{sen}^2 \vartheta}. \quad (3.60)$$

Nuevamente ambos lados de la ecuación son funciones de variables independientes diferentes por lo que deben ser constantes. Llamando a esa constante $n(n+1)$ finalmente se tiene

$$(u^2 + E^2)f''(u) + 2uf'(u) - \left[n(n+1) - \frac{E^2}{u^2 + E^2} m^2 \right] f(u) = 0, \quad (3.61)$$

$$\text{sen} \vartheta g''(\vartheta) + \text{cos} \vartheta g'(\vartheta) + \left[n(n+1) \text{sen} \vartheta - \frac{m^2}{\text{sen} \vartheta} \right] g(\vartheta) = 0, \quad (3.62)$$

$$h''(\lambda) + m^2 h(\lambda) = 0. \quad (3.63)$$

Estas son tres ecuaciones diferenciales ordinarias obtenidas a partir de la *ecuación diferencial parcial 3.54*, por separación de variables. Las *ecuaciones 3.62 y 3.63* son las mismas que en el caso esférico, mientras que la *ecuación 3.61* es diferente. Sustituyendo

$$\tau = i \frac{u}{E}, \quad y \quad t = \text{cos} \vartheta, \quad (3.64)$$

las dos primeras ecuaciones se transforman en

$$(1 - \tau^2) \bar{f}''(\tau) - 2\tau \bar{f}'(\tau) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \tau^2} \right] \bar{f}(\tau) = 0, \quad (3.65)$$

$$(1 - t^2) \bar{g}''(t) - 2t \bar{g}'(t) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - t^2} \right] \bar{g}(t) = 0. \quad (3.66)$$

Donde la barra sobre f y g indica que estas funciones fueron expresadas en función de los nuevos argumentos τ y t . Del análisis de armónicos esféricos ya se conoce la sustitución $t = \text{cos} \vartheta$ y la ecuación correspondiente a $\bar{g}(t)$.

La función $\bar{f}(\tau)$ satisface la misma ecuación diferencial que $\bar{g}(t)$: la ecuación de Legendre. Como se vio con anterioridad esta ecuación diferencial posee dos soluciones: las funciones de Legendre P_{nm} , y las funciones de Legendre de segunda especie Q_{nm} (ver *Anexo 3B*). Para $\bar{g}(t)$, donde $t = \text{cos} \vartheta$, los Q_{nm} fueron descartados, pero en el caso de $\bar{f}(\tau)$ ambos conjuntos de funciones, $P_{nm}(\tau)$ y $Q_{nm}(\tau)$, son posibles soluciones. Corresponden a las dos soluciones diferentes, $f = r^n$ y $f = r^{-(n+1)}$, en el caso esférico. Finalmente, la *ecuación 3.63* posee las soluciones $\text{cos} m\lambda$ y $\text{sen} m\lambda$.

Resumiendo, las soluciones individuales son

$$\begin{aligned} f(u) &= P_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right) \quad o \quad Q_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right), \\ g(\vartheta) &= P_{nm}(\text{cos} \vartheta), \\ h(\lambda) &= \text{cos} m\lambda \quad o \quad \text{sen} m\lambda. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Al igual que antes n y $m < n$ son enteros $0, 1, 2, \dots$. Por lo tanto, las funciones

$$V(u, \vartheta, \lambda) = P_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right) P_{nm}(\cos \vartheta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \operatorname{sen} m\lambda \end{Bmatrix}, \quad (3.68)$$

$$V(u, \vartheta, \lambda) = Q_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right) P_{nm}(\cos \vartheta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \operatorname{sen} m\lambda \end{Bmatrix} \quad (3.69)$$

son soluciones de la ecuación de Laplace $\Delta V = 0$, es decir, son funciones armónicas. A partir de una combinación lineal de estas funciones se construye la serie

$$V_i(u, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{P_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right)}{P_{nm} \left(i \frac{b}{E} \right)} [a_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \operatorname{sen} m\lambda], \quad (3.70)$$

$$V_e(u, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{Q_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right)}{Q_{nm} \left(i \frac{b}{E} \right)} [a_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \operatorname{sen} m\lambda]. \quad (3.71)$$

En esta serie b es el semieje menor de un elipsoide arbitrario pero fijo que se denomina *elipsoide de referencia* (ver figura 3.3). La división por $P_{nm}(ib/E)$ o $Q_{nm}(ib/E)$ se realiza con el objeto de simplificar las expresiones y hacer a los coeficientes a_{nm} y b_{nm} reales.

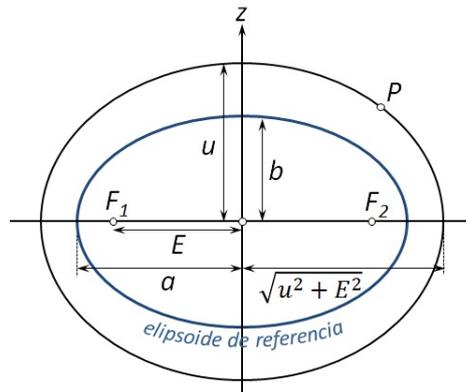


Figura 3.3: Elipsoide de referencia.

Si la excentricidad E se reduce a cero, las coordenadas armónicas elipsoidales u, ϑ, λ se reducen a las coordenadas esféricas r, ϑ, λ ; el elipsoide $u = b$ se reduce a la esfera $r = R$, debido a que los semiejes a y b son iguales al radio R ; y se encuentra que

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{P_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right)}{P_{nm} \left(i \frac{b}{E} \right)} = \left(\frac{u}{b} \right)^n = \left(\frac{r}{R} \right)^n, \quad \lim_{E \rightarrow 0} \frac{Q_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right)}{Q_{nm} \left(i \frac{b}{E} \right)} = \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1}, \quad (3.72)$$

por lo que la función $P_{nm}(iu/E)$ corresponde a r^n , y $Q_{nm}(iu/E)$ corresponde a $r^{-(n+1)}$ en armónicos esféricos.

Entonces, la *serie 3.70* es armónica en el interior del elipsoide $u = b$, y la *serie 3.71* es armónica en su exterior. Este último caso es relevante en geodesia. Para $u = b$, ambas series son iguales:

$$V_i(b, \vartheta, \lambda) = V_e(b, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_{nm} P_{nm}(\cos\vartheta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos\vartheta) \sin m\lambda]. \quad (3.73)$$

3.6. Potencial del elipsoide de nivel (potencial normal)

Como primera aproximación, la forma de la Tierra es la de una esfera. Como una segunda aproximación, se puede considerar un elipsoide de revolución. Aunque la Tierra no sea exactamente un elipsoide, el campo de gravedad de un elipsoide es de importancia práctica fundamental ya que es simple de manipular matemáticamente, y las desviaciones del campo de gravedad real del campo elipsoidal *normal* son lo suficientemente pequeñas como para considerarlas lineales. Esta división del campo de gravedad terrestre en una componente *normal* y otra *de perturbación* simplifica considerablemente el problema de su determinación.

Por lo tanto, se asume que la figura normal de la Tierra es la de un elipsoide de nivel, es decir, un elipsoide de revolución que es una superficie equipotencial del campo de gravedad normal. Esta suposición es necesaria porque el elipsoide será la forma normal del geode, que es una superficie equipotencial del campo de gravedad real. Llamando al potencial del campo de gravedad normal

$$U = U(x, y, z), \quad (3.74)$$

se observa que el elipsoide de nivel, siendo una superficie $U = cte$, corresponde exactamente al geode, que se define como una superficie $W = cte$.

La idea detrás de esto es que, postulando que el elipsoide dado sea una superficie equipotencial del campo de gravedad normal, y estableciendo la masa total M , se determina el potencial normal U de forma completa y única. La distribución de densidades dentro del elipsoide, que produce el potencial U , no necesita ser conocida.

Esta determinación es posible por el *principio de Dirichlet*, que establece que el potencial gravitacional fuera de una superficie S es completamente determinado conociendo la forma geométrica de S y el valor del potencial sobre S . Originalmente fue demostrado para el potencial gravitacional V pero también se puede aplicar al potencial de gravedad

$$U = V + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2), \quad (3.75)$$

si la velocidad angular ω es conocida. Entonces, la función $U(x, y, x)$ del potencial normal es completamente determinada por

- la forma del elipsoide de revolución (semiejes a y b),
- la masa total M , y

- la velocidad angular ω .

Ahora se realizarán los cálculos en detalle. El elipsoide S_0 ,

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (3.76)$$

es por definición una superficie equipotencial

$$U(x, y, z) = U_0. \quad (3.77)$$

Es conveniente introducir las coordenadas armónicas elipsoidales u, β, λ vistas en la sección anterior y definidas en el *Anexo A*. El elipsoide S_0 se toma como el elipsoide de referencia $u = b$.

Dado que $V(u, \beta)$, la componente gravitacional del potencial normal U , será armónico fuera del elipsoide S_0 , se emplea la *serie 3.71*. El campo V posee simetría rotacional por lo que no depende de la longitud λ , lo cual implica que todos los términos no zonales, que sí dependen de λ , deben ser cero:

$$V(u, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_n\left(i\frac{b}{E}\right)} A_n P_n(\text{sen}\beta), \quad (3.78)$$

donde

$$E = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad (3.79)$$

es la excentricidad lineal. El potencial centrífugo $\Phi(u, \beta)$ está dado por

$$\Phi(u, \beta) = \frac{1}{2}\omega^2(u^2 + E^2)\cos^2\beta. \quad (3.80)$$

Entonces, el potencial de gravedad normal total puede ser escrito como

$$U(u, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_n\left(i\frac{b}{E}\right)} A_n P_n(\text{sen}\beta) + \frac{1}{2}\omega^2(u^2 + E^2)\cos^2\beta. \quad (3.81)$$

Sobre el elipsoide S_0 se tiene que $u = b$ y $U = U_0$. Entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\text{sen}\beta) + \frac{1}{2}\omega^2(u^2 + E^2)\cos^2\beta = U_0. \quad (3.82)$$

Esta ecuación es válida para todos los puntos de S_0 , es decir, para todos los valores de β .

Dado que

$$b^2 + E^2 = a^2, \quad (3.83)$$

y

$$\cos^2\beta = \frac{2}{3}[1 - P_2(\text{sen}\beta)], \quad (3.84)$$

se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\text{sen}\beta) + \frac{1}{3}\omega^2 a^2 - \frac{1}{3}\omega^2 a^2 P_2(\text{sen}\beta) - U_0 = 0, \quad (3.85)$$

o bien,

$$(A_0 + \frac{1}{3}\omega^2 a^2 - U_0)P_0(\text{sen}\beta) + A_1 P_1(\text{sen}\beta) + (A_2 - \frac{1}{3}\omega^2 a^2)P_2(\text{sen}\beta) + \sum_{n=3}^{\infty} A_n P_n(\text{sen}\beta) = 0. \quad (3.86)$$

La ecuación es válida para todos los valores de β , únicamente si el coeficiente de cada $P_n(\text{sen}\beta)$ es nulo. Entonces se obtiene

$$A_0 = U_0 - \frac{1}{3}\omega^2 a^2, \quad A_1 = 0, \quad (3.87)$$

$$A_2 = \frac{1}{3}\omega^2 a^2, \quad A_3 = A_4 = \dots = 0. \quad (3.88)$$

Reemplazando estas expresiones en la **ecuación 3.78**:

$$V(u, \beta) = (U_0 - \frac{1}{3}\omega^2 a^2) \frac{Q_0\left(\frac{i u}{E}\right)}{Q_0\left(\frac{i b}{E}\right)} + \frac{1}{3}\omega^2 a^2 \frac{Q_2\left(\frac{i u}{E}\right)}{Q_2\left(\frac{i b}{E}\right)} P_2(\text{sen}\beta). \quad (3.89)$$

Esta **fórmula cerrada** es básicamente la solución del problema de Dirichlet para el elipsoide de nivel, pero se puede escribir de maneras más convenientes.

Primero se calcularán las funciones de Legendre de segunda especie Q_0 y Q_2 . Como

$$\text{coth}^{-1}(ix) = \frac{1}{i} \cot^{-1}x = -i \tan^{-1} \frac{1}{x}, \quad (3.90)$$

se obtiene, con $z = iu/E$:

$$Q_0\left(\frac{i u}{E}\right) = -i \tan^{-1} \frac{E}{u}, \quad (3.91)$$

$$Q_2\left(\frac{i u}{E}\right) = \frac{i}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{u^2}{E^2}\right) \tan^{-1} \frac{E}{u} - 3 \frac{u}{E} \right]. \quad (3.92)$$

Introduciendo en esta última expresión las abreviaturas

$$q = \frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{u^2}{E^2}\right) \tan^{-1} \frac{E}{u} - 3 \frac{u}{E} \right], \quad (3.93)$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{b^2}{E^2}\right) \tan^{-1} \frac{E}{b} - 3 \frac{b}{E} \right], \quad (3.94)$$

y sustituyéndolas en la **ecuación 3.89** se obtiene

$$V(u, \beta) = (U_0 - \frac{1}{3}\omega^2 a^2) \frac{\tan^{-1} \frac{E}{u}}{\tan^{-1} \frac{E}{b}} + \frac{1}{3}\omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} P_2(\text{sen}\beta). \quad (3.95)$$

Ahora es posible expresar U_0 en función de la masa M . Para valores grandes de u se tiene

$$\tan^{-1} \frac{E}{u} = \frac{E}{u} + O(1/u^3). \quad (3.96)$$

Es posible demostrar que

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = u^2 + E^2 \cos^2 \beta, \quad (3.97)$$

por lo que para valores grandes de r se tiene

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{r} + O(1/r^3), \quad (3.98)$$

y

$$\tan^{-1} \frac{E}{u} = \frac{E}{r} + O(1/r^3), \quad (3.99)$$

donde $O(x)$ significa "pequeño, de orden x ", en nuestro caso de orden $1/r^3$. Para distancias r muy grandes, el primer término en la ecuación 3.95 es dominante por lo que

$$V = (U_0 - \frac{1}{3}\omega^2 a^2) \frac{E}{\tan^{-1}(E/b)} \frac{1}{r} + O(1/r^3). \quad (3.100)$$

Además, se vio con anterioridad que

$$V = \frac{GM}{r} + O(1/r^3). \quad (3.101)$$

Sustituyendo esta expresión de V en el lado izquierdo de la ecuación 3.100:

$$\frac{GM}{r} = (U_0 - \frac{1}{3}\omega^2 a^2) \frac{E}{\tan^{-1}(E/b)} \frac{1}{r} + O(1/r^3). \quad (3.102)$$

Multiplicando esta ecuación por r y tomando el límite $r \rightarrow 0$, se llega a

$$GM = (U_0 - \frac{1}{3}\omega^2 a^2) \frac{E}{\tan^{-1}(E/b)}, \quad (3.103)$$

que puede ser reescrito como

$$U_0 = \frac{GM}{E} \tan^{-1} \frac{E}{b} + \frac{1}{3}\omega^2 a^2. \quad (3.104)$$

Esta es la relación que se buscaba entre M y el potencial U_0 . Sustituyendo este resultado en la ecuación 3.95, se simplifica la ecuación de V a

$$V = \frac{GM}{E} \tan^{-1} \frac{E}{u} + \frac{1}{3}\omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} P_2(\text{sen}\beta). \quad (3.105)$$

Expresando P_2 como

$$P_2(\text{sen}\beta) = \frac{3}{2}\text{sen}^2\beta - \frac{1}{2} \quad (3.106)$$

y, finalmente, incorporando el potencial centrífugo $\Phi = \omega^2(u^2 + E^2)\cos^2\beta/2$ de la ecuación 3.80, el potencial normal de gravedad U resulta

$$U(u, \beta) = \frac{GM}{E} \tan^{-1} \frac{E}{u} + \frac{1}{2}\omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} (\text{sen}^2\beta - \frac{1}{3}) + \frac{1}{2}\omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2\beta. \quad (3.107)$$

Las únicas constantes en esta fórmula son a, b, GM, ω . Esto está de acuerdo con el teorema de Dirichlet.

3.7. Fórmula analítica exacta de la gravedad normal en coordenadas armónicas elipsoidales. Fórmula de Somigliana

La expresión del diferencial de línea en coordenadas armónicas elipsoidales, se puede escribir como (Hofmann-Wellenhof y Moritz, 2005):

$$ds^2 = w^2 du^2 + w^2(u^2 + E^2)d\beta^2 + (u^2 + E^2)\cos^2\beta d\lambda^2, \quad (3.108)$$

donde

$$w = \sqrt{\frac{u^2 + E^2 \operatorname{sen}^2 \beta}{u^2 + E^2}}. \quad (3.109)$$

Por lo tanto, a lo largo de las líneas de coordenadas se tiene

$$u=\text{variable}, \quad \beta=\text{cte}, \quad \lambda=\text{cte}, \quad ds_u = w du,$$

$$\beta=\text{variable}, \quad u=\text{cte}, \quad \lambda=\text{cte}, \quad ds_\beta = w\sqrt{u^2 + E^2}d\beta,$$

$$\lambda=\text{variable}, \quad u=\text{cte}, \quad \beta=\text{cte}, \quad ds_\lambda = \sqrt{u^2 + E^2}\cos\beta d\lambda.$$

Las componentes del vector de gravedad normal

$$\gamma = \operatorname{grad}U \quad (3.110)$$

a lo largo de estas coordenadas de línea, están dadas por

$$\gamma_u = \frac{\partial U}{\partial s_u} = \frac{1}{w} \frac{\partial U}{\partial u}, \quad (3.111)$$

$$\gamma_\beta = \frac{\partial U}{\partial s_\beta} = \frac{1}{w\sqrt{u^2 + E^2}} \frac{\partial U}{\partial \beta}, \quad (3.112)$$

$$\gamma_\lambda = \frac{\partial U}{\partial s_\lambda} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + E^2}\cos\beta} \frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0. \quad (3.113)$$

La componente γ_λ es nula ya que U no contiene a λ , esto también es evidente por la simetría rotacional.

Calculando las derivadas parciales:

$$-w\gamma_u = \frac{GM}{u^2 + E^2} + \frac{\omega^2 a^2 E}{u^2 + E^2} \frac{q'}{q_0} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \beta - \frac{1}{6} \right) - \omega^2 u \cos^2 \beta, \quad (3.114)$$

$$-w\gamma_\beta = \left(-\frac{\omega^2 a^2}{\sqrt{u^2 + E^2}} \frac{q}{q_0} + \omega^2 \sqrt{u^2 + E^2} \right) \operatorname{sen} \beta \cos \beta, \quad (3.115)$$

donde se define

$$q' = -\frac{u^2 + E^2}{E} \frac{dq}{du} = 3 \left(1 + \frac{u^2}{E^2} \right) \left(1 - \frac{u}{E} \tan^{-1} \frac{E}{u} \right) - 1. \quad (3.116)$$

Vale aclarar que q' no representa dq/du . Para el elipsoide de nivel S_0 , se tiene $u = b$, con lo que

$$\gamma_{\beta,0} = 0. \quad (3.117)$$

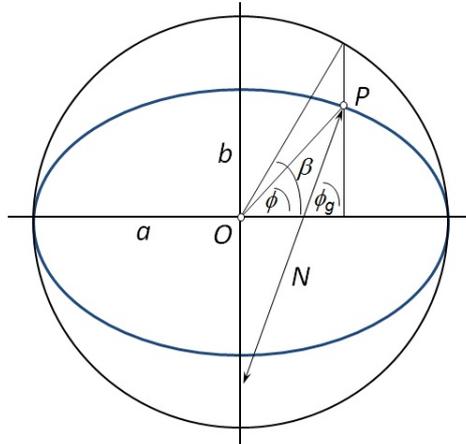


Figura 3.4: Latitud elipsoidal ϕ_g , latitud geocéntrica ϕ y latitud reducida β para un punto P sobre el elipsoide.

Esto también es evidente porque sobre S_0 el vector de gravedad es normal a la superficie de nivel S_0 . Entonces, además de ser nula la componentes λ , también lo es la componente β sobre el elipsoide de referencia $u = b$. Notar que otras coordenadas elipsoidales $u = cte$ no son superficies equipotenciales $U = cte$, por lo que en general la componente β no será nula.

Entonces, la expresión de la gravedad total γ sobre el elipsoide S_0 viene dada por

$$\gamma = |\gamma_{u,0}| = \frac{GM}{a\sqrt{a^2\text{sen}^2\beta + b^2\text{cos}^2\beta}} \cdot \left[1 + \frac{\omega^2 a^2 E q'_0}{GM q_0} \left(\frac{1}{2} \text{sen}^2\beta - \frac{1}{6} \right) - \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \text{cos}^2\beta \right]. \quad (3.118)$$

Dado que sobre S_0 se satisfacen las relaciones

$$\sqrt{u^2 + E^2} = \sqrt{b^2 + E^2} = a, \quad (3.119)$$

$$w_0 = \frac{1}{a} \sqrt{b^2 + E^2 \text{sen}^2\beta} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 \text{sen}^2\beta + b^2 \text{cos}^2\beta}. \quad (3.120)$$

Introduciendo la abreviación

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \quad (3.121)$$

y la segunda excentricidad

$$e' = \frac{E}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}. \quad (3.122)$$

Nuevamente, el apóstrofe en e no implica diferenciación, sino que permite distinguir la segunda excentricidad de la primera, definida como $e = E/a$.

Eliminando los términos constantes usando

$$1 = \text{cos}^2\beta + \text{sen}^2\beta, \quad (3.123)$$

se obtiene

$$\gamma = \frac{GM}{a\sqrt{a^2\text{sen}^2\beta + b^2\text{cos}^2\beta}} \left[\left(1 + \frac{m e' q'_0}{3 q_0} \right) \text{sen}^2\beta + \left(1 - m - \frac{m e' q'_0}{6 q_0} \right) \text{cos}^2\beta \right]. \quad (3.124)$$

En el ecuador, $\beta = 0$:

$$\gamma_a = \frac{GM}{ab} \left(1 - m - \frac{m}{6} \frac{e'q'_0}{q_0} \right). \quad (3.125)$$

En los polos, donde $\beta = \pm 90^\circ$, la gravedad normal es

$$\gamma_b = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{m}{3} \frac{e'q'_0}{q_0} \right). \quad (3.126)$$

La gravedad normal en el ecuador γ_a , y la gravedad normal en el polo γ_b , satisfacen la relación

$$\frac{a-b}{a} + \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a} = \frac{\omega^2 b}{\gamma_a} \left(1 + \frac{e'q'_0}{2q_0} \right), \quad (3.127)$$

que debe ser verificada por sustitución. Esta es la forma rigurosa de una fórmula aproximada publicada por Clairaut en 1738. Es, por lo tanto, llamado *teorema de Clairaut*.

Comparando la expresión de γ_a y la expresión de γ_b con las cantidades entre paréntesis en la *fórmula 3.124*, se observa que γ puede ser escrita de forma simétrica:

$$\gamma = \frac{a\gamma_b \text{sen}^2 \beta + b\gamma_a \text{cos}^2 \beta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \beta + b^2 \text{cos}^2 \beta}}. \quad (3.128)$$

Por último, introduciendo la latitud elipsoidal ϕ_g sobre el elipsoide, que corresponde al ángulo entre la normal al elipsoide y el plano ecuatorial (*figura 3.4*), y empleando la fórmula de geometría elipsoidal

$$\tan \beta = \frac{b}{a} \tan \phi_g \quad (3.129)$$

se obtiene

$$\gamma = \frac{a\gamma_a \text{cos}^2 \phi_g + b\gamma_b \text{sen}^2 \phi_g}{\sqrt{a^2 \text{cos}^2 \phi_g + b^2 \text{sen}^2 \phi_g}}. \quad (3.130)$$

Esta expresión, rigurosa para la gravedad normal sobre el elipsoide, fue obtenida por Somigliana en 1929.

3.8. Variación de la gravedad normal entre el ecuador y los polos

En la *figura 3.5* se esquematizan los tres efectos que contribuyen a la variación de la gravedad normal con la latitud. Cuantificaremos cada uno de ellos empleando parámetros de GRS80.

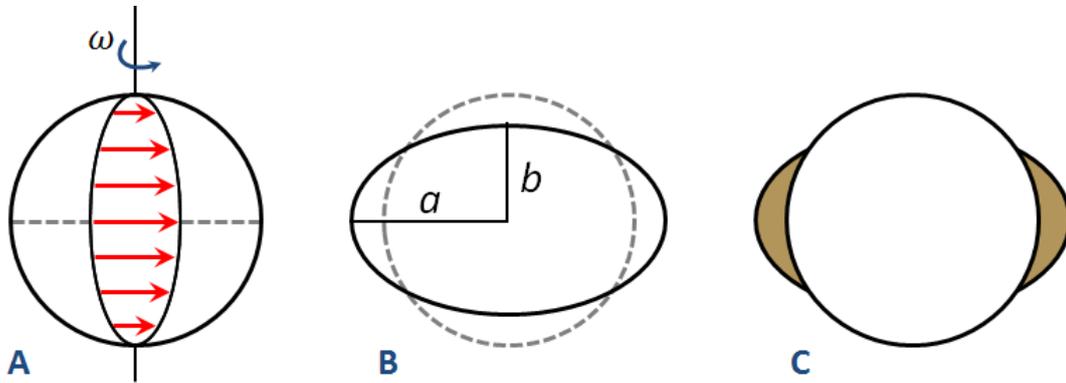


Figura 3.5: Factores que producen que la gravedad normal varíe con la latitud. Aceleración centrífuga (A), distancia al centro de masas (B) y distribución de masas (C). La figura fue modificada del trabajo de Chapin (1996).

- **Aceleración centrífuga:** La rotación del elipsoide produce que la gravedad en el ecuador sea *menor* que en los polos. Numéricamente, la aceleración centrífuga en el ecuador es

$$-\omega^2 a \approx -3392 \text{ mGal}. \quad (3.131)$$

- **Factor geométrico:** El aplastamiento del elipsoide es del orden de 1/300. Esto implica que un observador situado en el ecuador se encuentra más alejado del centro de masas (CM) que un observador situado en los polos. Por lo que la gravedad en el ecuador será *menor* que la gravedad en los polos. Asumiendo toda la masa concentrada en el CM del elipsoide, la diferencia de gravedad en el ecuador y los polos será:

$$\frac{GM}{a^2} - \frac{GM}{b^2} \approx -6604 \text{ mGal}. \quad (3.132)$$

- **Distribución de masas:** El apartamiento de la forma del elipsoide respecto a la de una esfera resulta en una mayor distribución de masa entre el ecuador y el CM, que entre los polos y el CM. Esto produce que la gravedad en el ecuador sea *mayor* que en los polos. Es posible cuantificar el efecto empleando la expresión obtenida por McCullagh (*ecuación 2.115*) teniendo en cuenta que $J_2 = (C - A)/(Ma^2)$:

$$3J_2 \left(\frac{a^2}{b^4} + \frac{1}{2a^2} \right) \approx 4817 \text{ mGal}. \quad (3.133)$$

Combinando los tres efectos, la diferencia de gravedad entre el ecuador y los polos es

$$(-3392 - 6604 + 4817) \text{ mGal} = -5179 \text{ mGal}. \quad (3.134)$$

3.9. Gravedad normal adoptada

A continuación expresaremos la fórmula analítica exacta para la gravedad normal y algunas de sus aproximaciones más utilizadas. Existen fórmulas para la continuación ascendente pero no serán analizadas.

3.9.1. Fórmulas

La teoría del elipsoide equipotencial fue desarrollada inicialmente por Pizzetti en 1894 y más adelante por Somigliana (1929). La siguiente fórmula de gravedad normal es válida de forma general y se denomina fórmula de gravedad normal de Somigliana-Pizzetti:

$$\gamma(\phi_g) = \frac{a\gamma_a \cos^2 \phi_g + b\gamma_b \text{sen}^2 \phi_g}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi_g + b^2 \text{sen}^2 \phi_g}} = \gamma_a \frac{1 + k \text{sen}^2 \phi_g}{\sqrt{1 - e^2 \text{sen}^2 \phi_g}}. \quad (3.135)$$

Donde

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad k = \frac{b\gamma_b - a\gamma_a}{a\gamma_a}, \quad (3.136)$$

y la variable ϕ_g es la latitud geodésica.

Para el sistema GRS80 se suele emplear la *fórmula lineal*

$$\begin{aligned} \gamma(\phi_g) = \gamma_a (1 &+ 0,0052790414 \text{sen}^2 \phi_g \\ &+ 0,0000232718 \text{sen}^4 \phi_g \\ &+ 0,0000001262 \text{sen}^6 \phi_g \\ &+ 0,0000000007 \text{sen}^8 \phi_g), \end{aligned} \quad (3.137)$$

que posee un error relativo de 10^{-10} , correspondiente a 10^{-4} mGal . Para muchas aplicaciones, es suficiente emplear la *serie convencional* que tiene una exactitud de $0,1 \text{ mGal}$:

$$\gamma(\phi_g) = 9,780327(1 + 0,0053024 \text{sen}^2 \phi_g - 0,0000058 \text{sen}^2 2\phi_g) \text{ [m/s}^2\text{]}. \quad (3.138)$$

Conversión entre GRS30, GRS67 y GRS80

Para convertir anomalías de gravedad calculadas con la fórmula internacional de 1930 a GRS80, se puede emplear

$$\gamma_{1980} - \gamma_{1930} = (-16,3 + 13,7 \text{sen}^2 \phi_g) \text{ [mGal]}, \quad (3.139)$$

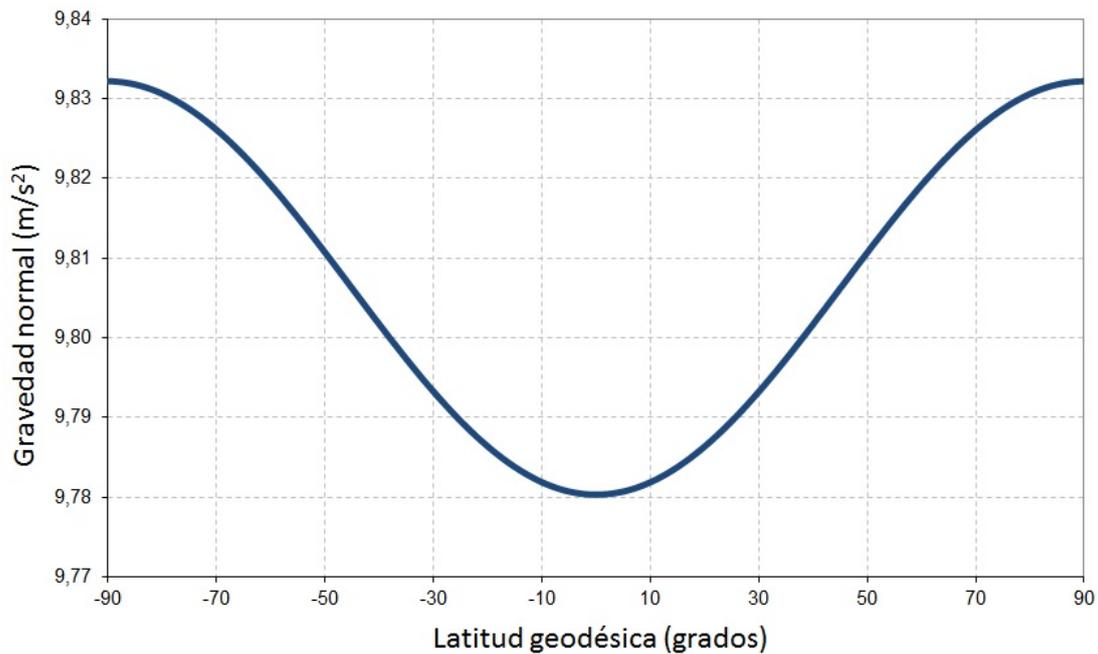


Figura 3.6: Gravedad Normal empleando la fórmula de Somigliana-Pizzetti con los parámetros de GRS80.

donde la parte principal proviene de un cambio del valor de referencia Potsdam en -14 mGal . Para convertir de la fórmula de gravedad de 1967 a la fórmula de gravedad de 1980 existe una fórmula más exacta, correspondiente a la expansión dada con anterioridad es

$$\gamma_{1980} - \gamma_{1967} = (0,8316 + 0,0782 \text{sen}^2 \phi_g - 0,0007 \text{sen}^4 \phi_g) [\text{mGal}]. \quad (3.140)$$

Siempre es conveniente emplear la fórmula de Somigliana en lugar de la fórmula lineal que es menos exacta. Al momento de convertir anomalías de un sistema geodésico a otro es conveniente:

- si el valor de gravedad medido está disponible, recalcar el valor de gravedad normal usando la fórmula de Somigliana y luego calcular las anomalías de gravedad.
- si no se cuenta con el valor de gravedad medido se debe aplicar una corrección a las anomalías gravimétricas sumando la diferencia entre la gravedad normal determinada para cada uno de los dos elipsoides.

3.9.2. Constantes de GRS80

Constantes de definición

$a = 6378137 \text{ m}$	semieje mayor
$GM_0 = 3,986005 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$	constante gravitacional geocéntrica (incluye la masa atmosférica)
$J_2 = 0,00108263$	factor de forma dinámico
$\omega = 7,292115 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$	velocidad angular

Constantes derivadas

Las siguientes constantes derivadas son exactas hasta el número de decimales dado. En caso de requerir una mayor exactitud es posible calcular estas constantes a partir de las constantes de definición.

$b = 6356752,3141 \text{ m}$	semieje menor
$E = 521854,0097 \text{ m}$	excentricidad lineal
$c = 6399593,6259 \text{ m}$	radio polar de curvatura
$e^2 = 0,00669438002290$	primera excentricidad
$e'^2 = 0,00673949677548$	segunda excentricidad
$f = 0,00335281068118$	aplanamiento
$f^{-1} = 298,257222101$	inversa del aplanamiento
$Q = 10001965,7293 \text{ m}$	cuadrante meridiano
$R_1 = 6371008,7714 \text{ m}$	radio medio $R_1 = (2a + b)/3$
$R_2 = 6371007,1810 \text{ m}$	radio de la esfera con la misma superficie
$R_3 = 6371000,7900 \text{ m}$	radio de la esfera con el mismo volumen
$U_0 = 62636860,850 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$	potencial normal sobre el elipsoide
$J_4 = -0,00000237091222$	Coefficiente armónico esférico
$J_6 = 0,00000000608347$	Coefficiente armónico esférico
$J_8 = -0,0000000001427$	Coefficiente armónico esférico
$m = 0,00344978600308$	$m = \omega^2 a^2 b / GM_0$
$\gamma_a = 9,7803267715 \text{ m/s}^2$	gravedad normal en el ecuador
$\gamma_b = 9,8321863685 \text{ m/s}^2$	gravedad normal en los polos
$\gamma_m = 9,797644656 \text{ m/s}^2$	gravedad normal media sobre el elipsoide
$\gamma_{45} = 9,806199203 \text{ m/s}^2$	gravedad normal para $\phi = 45^\circ$
$f^* = 0,005302440112$	$f^* = (\gamma_b - \gamma_a) / \gamma_a$
$k = 0,001931851353$	$k = (b\gamma_b - a\gamma_a) / a\gamma_a$

Donde $J_n = -C_{n0}$

3.10. Geodesia global y el campo de gravedad

Geodesia Geométrica	Geodesia Física
<p>Figura geométrica regular cercana a la verdadera forma de la Tierra: Elipsoide (de nivel)</p> <p><u>Parámetros geométricos:</u></p> <p><i>a</i>: semieje mayor</p> <p><i>f</i>: aplanamiento</p> <p><u>Parámetros físicos:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Origen de coordenadas = geocentro - Distribución homogénea de densidades - Masa terrestre (atmósfera y océanos) - Velocidad de rotación terrestre - Eje menor coincidente con el eje de rotación terrestre <p><u>Campo normal (teórico) de gravedad</u></p> <p>Fuerza normal de gravedad</p> $\gamma = F_{elip} + F_c = -G \iiint_{elip} \frac{dm}{r^2} + p\omega^2$ $\gamma = \nabla U_{(r)}$ <p>Potencial normal</p> $U_{(r)} = u + \Phi = G \iiint_{elip} \frac{\rho}{r} dv + \frac{1}{2}\omega^2 p^2$	<p>Superficie matemática de la Tierra determinada por el campo de gravedad: Geoide</p> <p><u>Comportamiento real:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Distribución heterogénea de masas (variaciones laterales) - Movimiento de masas (sólidas, gaseosas, viscosas, fluidas) - Variación de la velocidad de rotación - Movimiento del eje de rotación <p><u>Campo verdadero de gravedad</u></p> <p>Fuerza de gravedad terrestre</p> $g = F + F_c = -G \iiint_{Tierra} \frac{dm}{r^2} + p\omega^2$ $g = \nabla W_{(r)}$ <p>Potencial terrestre</p> $W_{(r)} = V + \Phi = G \iiint_{Tierra} \frac{\rho}{r} dv + \frac{1}{2}\omega^2 p^2$

Cuadro 3.3: Principales aspectos de la geodesia geométrica y la geodesia física.

3.11. Preguntas de estudio

- Explicar qué es el campo normal de la gravedad y sus características
- ¿Cómo se definen las coordenadas elipsoidales u, ϑ, λ ? Esquematizar.
- Describir los pasos involucrados en la resolución de la ecuación de Laplace en coordenadas armónicas elipsoidales.
- ¿Cuáles son las constantes que definen la fórmula de gravedad normal?
- ¿Las superficies equipotenciales generadas por un elipsoide de revolución, tienen una geometría de elipsoides paralelos o son superficies esferopotenciales?

Referencias

Hofmann-Wellenhof , B. y Moritz, H. (2005). *Physical Geodesy*. Springer.

Moritz, H. (1980). *Geodetic Reference System*.

Sneeuw, N. (2006). *Physical Geodesy*. Lecture Notes.

Somigliana, C. (1929). *Teoria generale del campo gravitazionale dell'ellissoide di rotazione*.
Memorie della società astronomica italiana, 4, 425.

Anexo 3A. Coordenadas armónicas elipsoidales

En geodesia se suelen emplear armónicos esféricos debido a su simplicidad y por el hecho de que la Tierra es aproximadamente esférica. Una mejor aproximación de la forma de la Tierra es un elipsoide de revolución. Por lo tanto, es esperable que sea más apropiado emplear *armónicos elipsoidales*, definidos de una forma similar a los armónicos esféricos. De todas maneras, esto es sólo una conveniencia matemática, ya que tanto los armónicos esféricos como los elipsoidales pueden ser empleados para describir el potencial gravitacional de cualquier cuerpo atrayente, independientemente de su forma. Dado que los armónicos elipsoidales son de mayor complejidad, sólo se emplean en situaciones particulares que involucran el cálculo riguroso de la gravedad normal.

Se definen las *coordenadas armónicas elipsoidales* μ, ϑ, λ según la *figura 3.7*. En un sistema rectangular un punto P posee coordenadas x, y, z . Haremos pasar por el punto P la superficie de un elipsoide de revolución cuyo centro es el origen O , con eje de rotación coincidente con el eje z , y con excentricidad lineal constante E . La coordenada u es el semieje menor de este elipsoide, ϑ es el complemento de la *latitud reducida* β de P respecto al elipsoide, y λ es la longitud geocéntrica usual. Es importante notar que en armónicos esféricos ϑ es la distancia polar, que no es otra cosa que el complemento de la *latitud geocéntrica*, mientras que en armónicos elipsoidales ϑ es el complemento de la *latitud reducida*, representada por β .

Como se observa en la *figura 3.7*, las coordenadas armónicas elipsoidales u, ϑ, λ se vinculan a x, y, z por medio de las relaciones

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{u^2 + E^2} \operatorname{sen}\vartheta \cos\lambda, \\y &= \sqrt{u^2 + E^2} \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\lambda, \\z &= u \cos\vartheta,\end{aligned}\tag{3.141}$$

donde $\sqrt{u^2 + E^2}$ es el semieje mayor del elipsoide cuya superficie pasa por P . Como $\vartheta = 90^\circ - \beta$, se puede escribir de forma equivalente

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{u^2 + E^2} \cos\beta \cos\lambda, \\y &= \sqrt{u^2 + E^2} \cos\beta \operatorname{sen}\lambda, \\z &= u \operatorname{sen}\beta.\end{aligned}\tag{3.142}$$

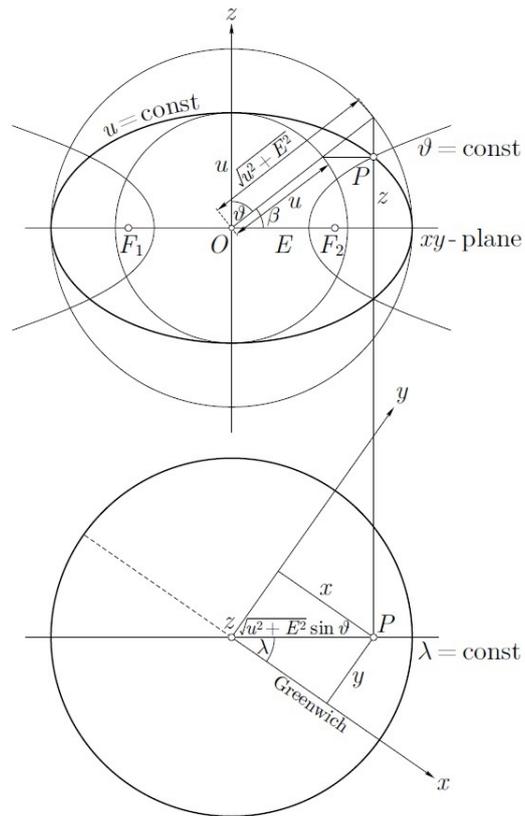


Figura 3.7: Coordenadas armónicas elipsoidales. Vista frontal (arriba) y superior (abajo).

Para $u = cte$, se obtiene

$$\frac{x^2 + y^2}{u^2 + E^2} + \frac{z^2}{u^2} = 1, \quad (3.143)$$

que representa un elipsoide de revolución. Para $\vartheta = cte$, se obtiene

$$\frac{x^2 + y^2}{E^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta} - \frac{z^2}{E^2 \operatorname{cos}^2 \vartheta} = 1, \quad (3.144)$$

que representa un hiperboloide de una hoja, y para $\lambda = cte$, se tiene el plano meridiano

$$y = x \tan \lambda. \quad (3.145)$$

La distancia focal constante E , que es la distancia entre el origen del sistema de coordenadas O y alguno de los puntos focales F_1 o F_2 , que es la misma para *todos* los elipsoides $u = cte$, caracteriza al sistema de coordenadas. Como caso límite, para $E = 0$ se tiene el sistema usual de coordenadas esféricas $u = r$ y ϑ, λ .

Anexo 3B. Funciones de Legendre de segunda especie

Las funciones de Legendre de segunda especie $Q_{nm}(t)$, donde n es el grado y m el orden, también son solución de la ecuación diferencial de Legendre (ecuación 3.62). Las funciones zonales $Q_n(t) \equiv Q_{n0}(t)$, representadas hasta grado 5 en la figura 3.8, se definen como

$$Q_n(t) = \frac{1}{2}P_n(t)\ln\frac{1+t}{1-t} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}P_{k-1}(t)P_{n-k}(t), \quad (3.146)$$

y el resto como

$$Q_{nm}(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m Q_n(t)}{dt^m}. \quad (3.147)$$

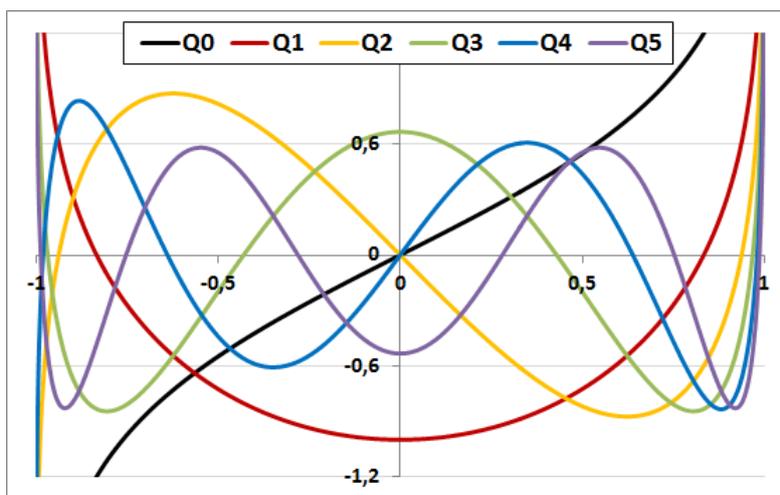


Figura 3.8: Funciones zonales de Legendre de segunda especie.

CAPÍTULO 4

Reducciones y anomalías gravimétricas

Claudia N. Tocho y Federico G. E. Späth

Este capítulo fue escrito siguiendo parte del libro *Physical Geodesy* de Hofmann-Wellenhopf y Moritz (2005). En la *sección 4.1* se mencionan las aplicaciones de las reducciones gravimétricas y en las siguientes secciones se define qué es una anomalía de gravedad y se describen los distintos tipos de reducciones y anomalías gravimétricas. Se pretende que el alumno distinga qué tipo de anomalía o correcciones gravimétricas debe aplicar a los datos de gravedad observados para utilizarlas en los diferentes propósitos mencionados en la *sección 4.1*. Por último, se incluyen algunas preguntas de estudio.

4.1. Introducción

La gravedad g se mide en la superficie terrestre, mientras que la gravedad normal γ se refiere al elipsoide de referencia. Para referir g al geoide o al nivel del mar es necesario aplicar *reducciones gravimétricas* (Hofmann-Wellenhopf y Moritz, 2005). Se denomina reducción gravimétrica al proceso de corrección de los datos gravimétricos crudos. Se utilizan para los siguientes propósitos:

1. Determinación del geoide gravimétrico.
2. Para la investigación de la corteza terrestre.
3. Para la interpolación y extrapolación de datos gravimétricos.

El primer y tercer propósito son con fines geodésicos mientras que el segundo es de interés geofísico (para estudiar la estructura de la corteza) y geológico (exploración geofísica).

La fórmula de Stokes, que permite determinar el geoide a partir de mediciones gravimétricas, utiliza anomalías de gravedad evaluadas sobre el geoide:

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q, \quad (4.1)$$

pero: ¿qué sucede con las masas por fuera del geoide?. Una forma de lidiar con ellas es aplicar reducciones gravimétricas para eliminar las masas situadas entre la superficie topográfica, donde se realizaron las mediciones gravimétricas, y el geoide.

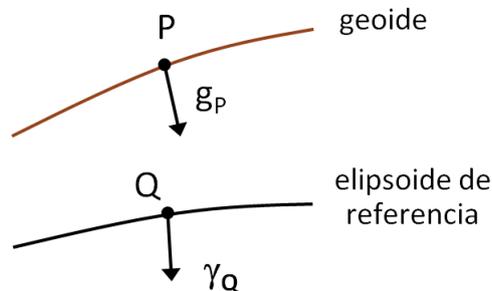


Figura 4.1: Reducción gravimétrica.

En este capítulo veremos cómo se aplican las reducciones gravimétricas, lo que consta de dos pasos principales:

1. Eliminar las masas situadas por fuera del geoide.
2. Mover la estación de gravedad, ubicada en la superficie topográfica, al geoide.

La principal diferencia entre los distintos tipos de reducciones está en paso 1.

¿Qué ocurre con el geoide al aplicar reducciones gravimétricas? El cambio del geoide debido a la reducción gravimétrica usada se llama *efecto indirecto geodésico*, y el pequeño cambio del geoide se llama *cogeoide*:

$$N_{geoide} = N_{cogeoide}^C + N_{ind}, \quad (4.2)$$

donde N_{ind} es el efecto indirecto geodésico y es diferente para cada tipo de reducción gravimétrica utilizada:

$$N_{ind} = \frac{\delta W}{\gamma}. \quad (4.3)$$

Cuando las observaciones de gravedad se utilizan para determinar las variaciones de masa en el interior terrestre, las mediciones crudas realizadas en el campo necesitan ser procesadas antes de realizar la interpretación de las mismas. Para detectar o interpretar la baja amplitud de la señal gravimétrica de una masa anómala en el subsuelo, en los datos crudos es necesario remover variaciones no deseadas tanto temporales como espaciales.

Otra aplicación de las reducciones es para la interpolación y extrapolación de datos de gravedad.

4.2. Reducción de Bouguer

El objetivo de esta reducción es remover el efecto de las masas topográficas, es decir, de las masas situadas por fuera del geoide. Para ello, se asume que el área que rodea a la estación

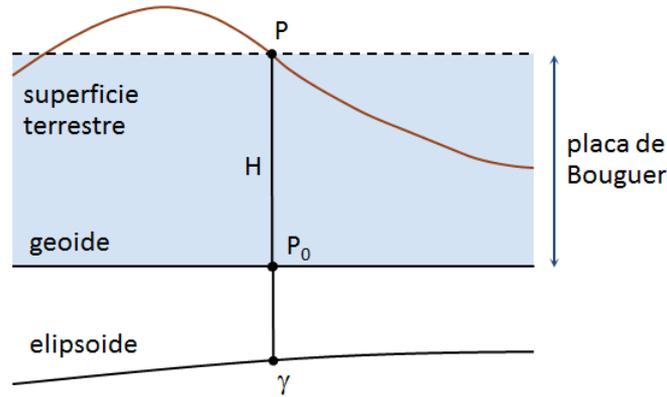


Figura 4.2: Placa de Bouguer.

P es plana, horizontal y con una densidad constante ρ , y de este modo, es aproximada por una placa plana infinita (figura 4.2). La atracción de esta placa infinita de espesor H es

$$A_B = 2\pi G\rho H. \quad (4.4)$$

Empleando la densidad media cortical $\rho = 2,67 \text{ g/cm}^3$:

$$A_B [\text{mGal}] \approx 0,1119 H_{[\text{m}]}. \quad (4.5)$$

Remover el efecto de la placa es equivalente a restar de la gravedad observada la atracción de la misma. Para reducir la gravedad observada en P al geoide se debe, además, aplicar la reducción de aire libre (ver Sección 4.3):

$$g_{P_0} = g_P - A_B + F, \quad (4.6)$$

donde g_{P_0} está referido al geoide y F es la corrección de aire libre. Luego, la *anomalía de Bouguer* se define como

$$\Delta g_{P_0} = g_{P_0} - \gamma, \quad (4.7)$$

donde γ es la gravedad normal sobre el elipsoide de referencia.

La principal aplicación de las anomalías de Bouguer es en relevamientos geofísicos donde se desea analizar el efecto de masas anómalas presentes en el subsuelo.

4.3. Reducción de aire libre

Para realizar la reducción de aire libre F de la gravedad medida en P al geoide P_0 (figura 4.3), es necesario conocer el gradiente vertical de la gravedad real $\partial g/\partial H$. Si el valor de la gravedad observado en la superficie de la Tierra es g_P , se puede obtener el valor en la superficie del

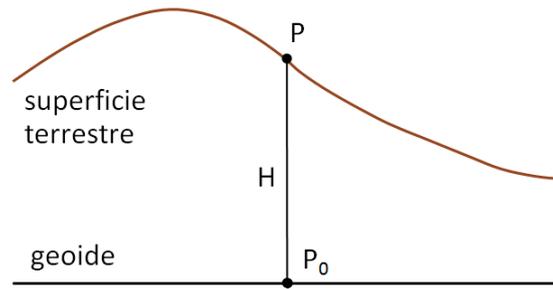


Figura 4.3: Reducción de Aire Libre.

geoide g_0 mediante una expansión en series de Taylor:

$$g_0 = g_P - \frac{\partial g}{\partial H} H + \dots, \quad (4.8)$$

donde H es la altura ortométrica del punto P .

Asumiendo que no hay masas entre el geoide y la superficie terrestre, y considerando sólo el término lineal de la expansión de Taylor:

$$g_0 = g_P + F, \quad (4.9)$$

donde

$$F = -\frac{\partial g}{\partial H} H, \quad (4.10)$$

es la *reducción de aire libre al geoide*.

El hecho de no considerar masas se debe a que generalmente éstas son removidas con anterioridad, por lo que la reducción se lleva a cabo en el aire libre.

En la práctica, en lugar de emplear $\partial g / \partial H$, se usa el gradiente de la gravedad normal $\partial \gamma / \partial h$. En ese caso, la reducción de aire libre es

$$F = -\frac{\partial g}{\partial H} H \approx -\frac{\partial \gamma}{\partial h} H. \quad (4.11)$$

Es posible obtener una primera expresión de $\partial \gamma / \partial h$ asumiendo un modelo de Tierra esférico de radio r , homogéneo e irrotacional (*figura 4.4*). Para dicho modelo la expresión de la gravedad normal en un punto P situado a una altura h empleando expansión de Taylor resulta

$$\gamma_h = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial h} h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \right) h^2 + \dots, \quad (4.12)$$

donde γ_0 es el valor de la gravedad en la superficie:

$$\gamma_0 = \frac{GM}{r^2}. \quad (4.13)$$

La expresión de la variación de la gravedad con la altura es

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = \frac{\partial \gamma}{\partial r} = -2 \frac{GM}{r^3} = -\frac{2\gamma_0}{r}. \quad (4.14)$$

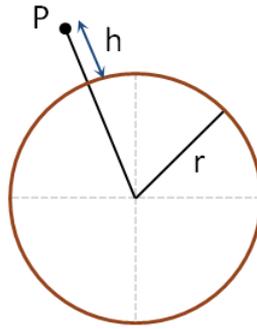


Figura 4.4: Modelo de Tierra esférico, homogéneo e irrotacional.

Mientras que la derivada segunda es

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} = 6 \frac{GM}{r^4} = 6 \frac{\gamma_0}{r^2}. \quad (4.15)$$

Sustituyendo la *ecuación 4.14* en la expresión de la reducción de aire libre (*ecuación 4.11*):

$$F \approx -\frac{\partial \gamma}{\partial h} H = \frac{2\gamma_0}{r} H \approx 0,3086 H_{[m]}, \quad (4.16)$$

donde el gradiente está expresado en *mGal/m*. Esta última expresión indica que, por cada 3 metros que se aleje el punto de observación de la superficie de la Tierra, la gravedad disminuye 1 *mGal*. Estaciones gravimétricas con elevaciones por encima del nivel del mar tendrán lecturas menores que las que se encuentran sobre el nivel del mar.

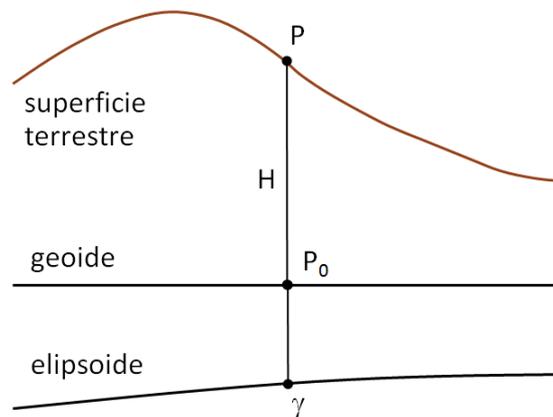


Figura 4.5: Anomalía de aire libre.

La *anomalía de aire libre* se define como la gravedad observada, corregida por la latitud y altura de la estación:

$$\Delta g_{AL} = g_0 - \gamma, \quad (4.17)$$

donde $g_0 = g_P + 0,3086H$ y γ es la gravedad normal sobre el elipsoide.

Para analizar el efecto del término cuadrático del modelo esférico propuesto se deben reemplazar las ecuaciones 4.14 y 4.15 en la ecuación 4.12:

$$\gamma_h = \gamma_0 - \frac{2\gamma_0}{r}h + \frac{1}{2} \frac{6\gamma_0 h^2}{r^2} + \dots \quad (4.18)$$

Despreciando los términos de orden mayor al cuadrático y sacando factor común γ_0 :

$$\gamma_h = \gamma_0 \left(1 - \frac{2}{r}h + 3\frac{h^2}{r^2} \right). \quad (4.19)$$

Empleando el valor del radio terrestre medio (6371 km) y $\gamma_0 = 983000 \text{ mGal}$:

$$\gamma_h \approx \gamma_0 - 0,3086 h_{[m]} + 0,073 h_{[km]}^2, \quad (4.20)$$

donde la altura en el término lineal está en metros, mientras que en el cuadrático en kilómetros. La influencia de este segundo término para diferentes alturas se muestra en la siguiente tabla:

h	$0,073 h^2$
1 km	0,07 mGal
2 km	0,29 mGal
3 km	0,65 mGal
5 km	1,82 mGal.

Si se busca una mayor rigurosidad en el cálculo de la variación de la gravedad con la altura se debe considerar un elipsoide, en cuyo caso

$$\gamma_h = \gamma_0 - (0,3087691 - 0,0004398 \text{ sen}^2\varphi)h + 7,2125 \times 10^{-8}h^2, \quad (4.21)$$

donde h es la altura respecto al elipsoide definido por el GRS80 y φ la latitud geodésica de la estación (Hinze et al., 2005).

El valor $0,3086 \text{ mGal/m}$ corresponde a la aproximación lineal de la ecuación

$$\gamma_h = \gamma_0 - (0,30877 - 0,00045 \text{ sen}^2\varphi)h + 0,000072h^2, \quad (4.22)$$

para $\varphi = 45^\circ$, y utilizando los parámetros del elipsoide internacional de 1930 (Li y Götze, 2001).

4.4. Corrección topográfica

La corrección topográfica (CT), tiene en cuenta las irregularidades topográficas en los alrededores de la estación de altura H . El procedimiento usual para su cálculo consiste en descomponer la topografía en cuerpos elementales de densidad constante y elevación media \bar{h} .

Un método para calcular la CT consiste en descomponer el área entorno a la estación en porciones de columnas cilíndricas con contraste de densidad $\Delta\rho$ (ver Anexo 4A). Esto se logra superponiendo una plantilla con los compartimentos sobre un mapa topográfico. En ese caso el aporte de cada compartimento es

$$CT_{comp.} = \frac{2\pi G \Delta\rho}{n} \left[\sqrt{a_2^2 + (c-b)^2} - \sqrt{a_1^2 + (c-b)^2} - \sqrt{a_2^2 + c^2} + \sqrt{a_1^2 + c^2} \right], \quad (4.23)$$

siendo a_1 el radio interior, a_2 el radio exterior del compartimento, b su espesor y c la altura desde la base al punto de cálculo (figura 4.6). Dada una estación de medición, cada compartimento podrá separarse en un exceso o una deficiencia de masa (figura 4.7), respecto a esa estación. Para el caso de un exceso de masa (montaña), donde $\bar{h} > H$, se tiene: $c = 0$ y $b = \bar{h} - H$. Para el caso de una deficiencia de masa (valle), donde $\bar{h} < H$, se tiene: $b = c = H - \bar{h}$.

La corrección topográfica (CT) es la suma de las contribuciones de todos los compartimentos:

$$CT = \sum_r \sum_\theta CT_{comp.} \quad (4.24)$$

Esta última expresión fue empleada por Hammer (1939), para calcular la corrección topográfica en una estación superponiendo una plantilla sobre un mapa topográfico de la misma escala como se esquematiza en la figura 4.6. En su trabajo, Hammer publicó una tabla con el valor de la corrección topográfica en centésimas de $mGal$ para sectores de anillos en función de la altura media y para una densidad $2 g/cm^3$.

El cuadro 4.1, modificado de Götze y Schmidt (2000), sintetiza algunos valores aproximados de la corrección topográfica para distintos tipos de topografía.

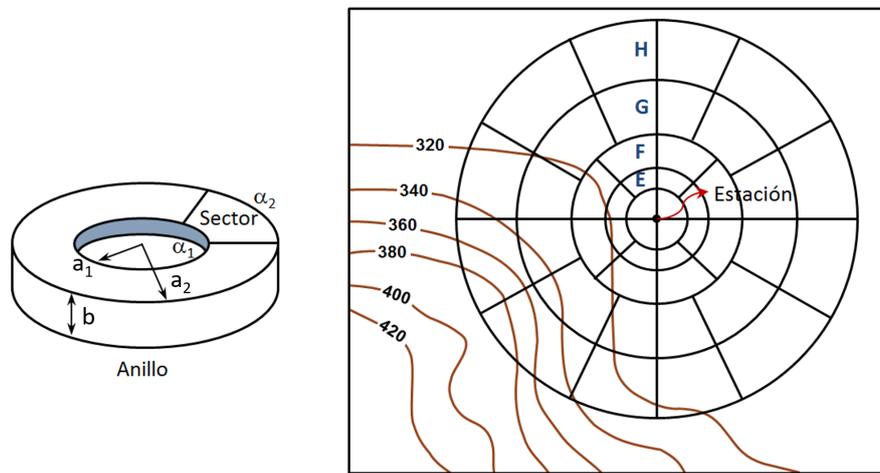


Figura 4.6: Plantilla de Hammer sobre un mapa topográfico centrada en la estación de medición de gravedad.

Para cálculos extensos, hoy en día se emplean modelos digitales de elevación. La corrección topográfica se calcula mediante la expresión de la atracción de prismas rectangulares (figura

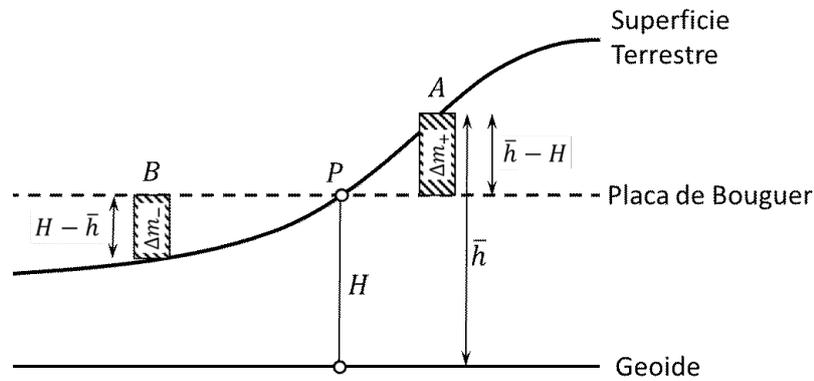


Figura 4.7: Corrección topográfica para el caso de excesos (montaña) y deficiencias (valle) de masa (modificado de Hofmann-Wellenhop y Moritz (2005)).

Costa chilena - Cordillera Oriental	10 a 20 <i>mGal</i>
Cordillera de la costa	
Precordillera	1 a 10 <i>mGal</i>
Cordillera alta	
Puna/Altiplano	0,5 a 1 <i>mGal</i>
Llanura	0,0 <i>mGal</i>

Cuadro 4.1: Valores aproximados de corrección topográfica para distintas topografías (modificado de Götze y Schmidt (2000)).

4.8). La expresión analítica cerrada de la atracción vertical de un prisma rectangular es (Nagy, 1966):

$$a(z) = G\Delta\rho \left[x \ln(y+r) + y \ln(x+r) - z a \operatorname{sen} \frac{z^2 + y^2 + yr}{(y+r)\sqrt{y^2 + z^2}} \right] \Big|_{z_1}^{z_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \Big|_{x_1}^{x_2}, \quad (4.25)$$

con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

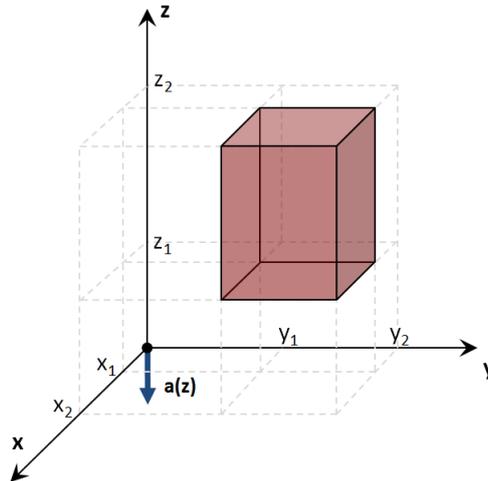


Figura 4.8: Atracción vertical en el origen producida por un prisma rectangular.

4.5. Reducción refinada de Bouguer

En áreas con topografía abrupta pueden existir efectos significativos debidos a la topografía (montañas o valles) que no fueron tenidos en cuenta con la placa de Bouguer. Es por ello que se aplica la *corrección topográfica* a las anomalías de Bouguer.

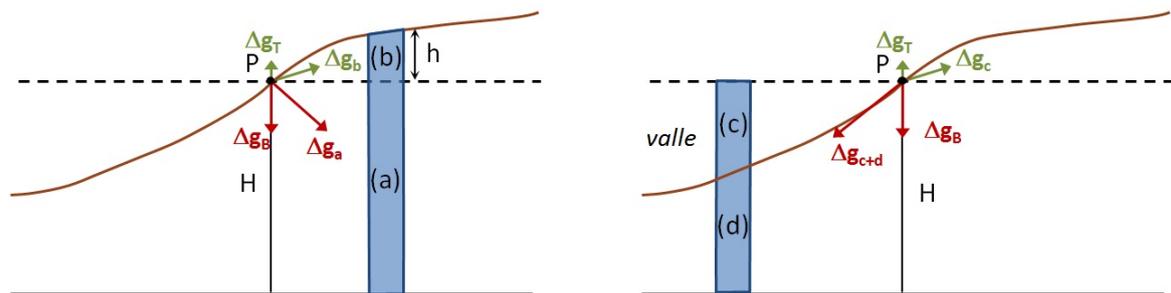


Figura 4.9: Corrección topográfica asociada a una montaña (izq.) y a un valle (der.).

La expresión de la anomalía refinada de Bouguer es

$$\Delta g_{BR} = \Delta g_B + CT. \quad (4.26)$$

En la *figura 4.9 (izq.)*, el efecto gravimétrico en P del compartimento (a) de altura H es Δg_a , y su componente vertical Δg_B . Mientras que el efecto del compartimento (b), de altura h , es Δg_b , y su componente vertical en P es Δg_T . El signo de Δg_T es opuesto al de Δg_B . El efecto del compartimento (b), que la CB no tiene en cuenta, se resta al efecto gravimétrico de la placa de Bouguer, es por ello que la corrección topográfica debe *sumarse* al valor de g en la estación.

En el caso de un valle (*figura 4.9, der.*) al aplicar la corrección de la placa de Bouguer se remueve el efecto de (c) + (d) cuya componente vertical es Δg_B . Pero como en (c) no hay masas, se debe restar el efecto Δg_c del valor de gravedad en la estación. Esto equivale a *sumar* la corrección topográfica.

Por lo tanto, en el caso terrestre la corrección topográfica será siempre positiva, se trate de una elevación o de una depresión. La aplicación de la corrección topográfica exige el conocimiento de la topografía alrededor de de cada punto donde se realiza una observación de la gravedad.

4.5.1. Anomalías de Bouguer en el mar

Cuando se realizan mediciones en el mar se suele medir la gravedad sobre la superficie del agua. En ese caso la anomalía de aire libre es

$$\Delta g_{AL} = g_{obs} - \gamma. \quad (4.27)$$

Dado que la altura de la estación es nula, podría pensarse que la anomalía de Bouguer es igual a la de aire libre. Pero no es así, cuando se realizan mediciones marinas, en lugar de eliminar el efecto de la topografía como en el caso terrestre, lo que se debe hacer con la corrección de Bouguer es regularizar la densidad por debajo de la estación a una densidad cortical normal ρ_c . Esto puede pensarse como rellenar el volumen de agua hasta que adquiera una densidad ρ_c .

La corrección de Bouguer en el mar se obtiene a través de la expresión de una placa infinita de espesor igual a la profundidad del agua D , y con una densidad que es la diferencia entre la de la corteza y la del agua:

$$CB_{mar} [mGal] = 2\pi G \Delta \rho D = 0,0419 (\rho_c - \rho_w) [g/cm^3] D [m], \quad (4.28)$$

donde ρ_w y ρ_c son la densidad del agua de mar y la cortical, respectivamente.

La expresión de la anomalía de Bouguer, utilizando densidades medias, resulta

$$\Delta g_B = \Delta g_{AL} + 0,0687 \frac{mGal}{m} \times D. \quad (4.29)$$

Al calcular Δg_B en el mar, al contrario de lo que sucede en el caso terrestre, la corrección topográfica puede tener tanto signo positivo como negativo, tal como se ilustra en la *figura 4.10*.

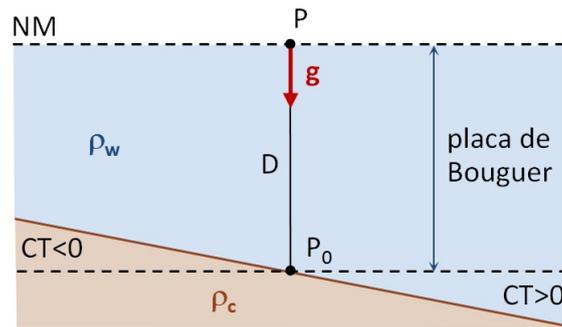


Figura 4.10: Signo de la corrección topográfica en el mar (adaptado de Torge, 1989).

4.6. Reducciones topo-isostáticas

El objetivo de las reducciones topo-isostáticas es la regularización de la corteza de acuerdo con algún modelo de isostasia. Regularizar implica hacer que la corteza sea lo más homogénea posible.

Las masas no sólo se remueven completamente como en la reducción de Bouguer, sino que se mueven al interior del geode para compensar la deficiencia de masa que existe debajo de los continentes (raíz) o el exceso de masas en los océanos (antiraíz).

Se especula que el origen de esta *raíz* o *antiraíz* se debe al comportamiento hidrostático de la corteza terrestre en una escala de tiempos geológicos. El equilibrio hidrostático se llama hipótesis de isostasia o compensación isostática.

El cálculo de reducciones topo-isostáticas involucra tres pasos:

1. Remover la topografía.
2. Remover la compensación.
3. Reducir por aire libre el punto al geode.

4.6.1. Sistema Airy-Heiskanen

En el modelo de Airy-Heiskanen, las masas topográficas se emplean para rellenar las raíces de los continentes, de una densidad cortical ρ_c , hasta una densidad propia del manto ρ_m . Planteando equilibrio isostático es posible hallar las dimensiones de la raíz (*figura 4.11*):

$$\rho_c(H_p + T + t) = \rho_c T + \rho_m t, \quad (4.30)$$

con lo que se llega a

$$t = \frac{\rho_c H_p}{\rho_m - \rho_c}. \quad (4.31)$$

Para remover la atracción de la compensación A_C , se procede de igual manera que con la corrección topográfica y se emplea la expresión de la atracción de la compensación

$$A_C = \sum \Delta A. \quad (4.32)$$

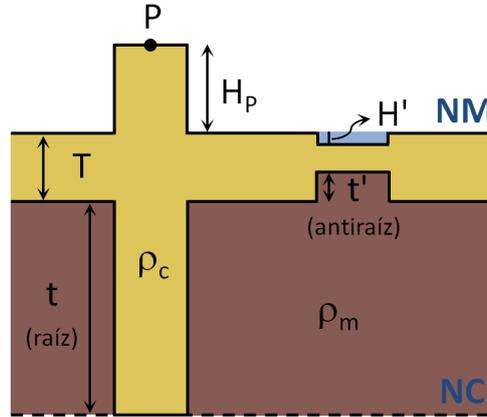


Figura 4.11: Sistema Airy-Heiskanen.

Empleando la expresión de la atracción de un cilindro vertical, desarrollada en el Anexo de este capítulo, para *estaciones continentales* resulta

$$b = t, \quad c = H_p + T + t, \quad \Delta\rho = \rho_m - \rho_c, \quad (4.33)$$

donde a es el radio del cilindro, b su altura y c la distancia desde la base del cilindro al punto P . La gravedad reducida topo-isostáticamente al geode es

$$g_{TI} = g_P - A_T + A_{Compensado} + F, \quad (4.34)$$

y la anomalía topo-isostática es

$$\Delta g_{TI} = g_P - A_T + A_{Compensado} + F - \gamma. \quad (4.35)$$

En el caso de *estaciones oceánicas*, $A_{Compensado}$ posee dos componentes:

$$A_{Compensado} = -A_1 + A_2 \quad (4.36)$$

donde A_1 está asociada a la antiraíz y A_2 , al océano. Para A_1 ,

$$\Delta\rho = \rho_m - \rho_c, \quad b = t', \quad c = T, \quad (4.37)$$

siendo

$$t' = \frac{\rho_c - \rho_w}{\rho_m - \rho_c} H' = 2,73 H'. \quad (4.38)$$

Mientras que para A_2

$$\Delta\rho = \rho_c - \rho_w, \quad b = H' = c. \quad (4.39)$$

La gravedad reducida topo-isostáticamente al geode es

$$g_{TI} = g_P + A_{Compensado}, \quad (4.40)$$

y la anomalía topo-isostática

$$\Delta g_{TI} = g_P + A_{Compensado} - \gamma. \quad (4.41)$$

4.6.2. Sistema Pratt-Hayford

En el modelo de Pratt-Hayford la densidad bajo las montañas es menor que en zonas de topografía más baja. Es por ello que las masas topográficas son distribuidas entre el nivel de compensación y el nivel del mar para llevar la densidad cortical desde su valor original a un valor de densidad constante ρ_0 . La compensación se alcanza a una profundidad D , donde existe equilibrio isostático.

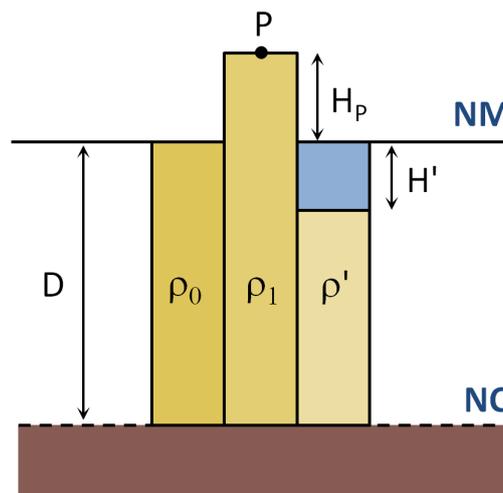


Figura 4.12: Sistema Pratt-Hayford.

Planteando equilibrio isostático, a partir de la *figura 4.12*, se tiene que:

$$\rho_1(H_p + D) = \rho_0 D \quad (4.42)$$

por lo que

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{D}{H_p + D}. \quad (4.43)$$

Para remover la atracción de la compensación A_C (negativa), se procede de igual manera que con la corrección topográfica:

$$A_C = \sum \Delta A. \quad (4.44)$$

Si se emplea la expresión de la atracción de un cilindro vertical (ver el *Anexo* de este capítulo), para modelar la atracción de la compensación se tiene $b = D$, $c = D + H_P$ y $\Delta\rho$ se asocia a la deficiencia de masa para llevar ρ_1 a ρ_0 .

La gravedad reducida topo-isostáticamente al geoide es

$$g_{TI} = g_P - A_T + A_{Compensado} + F, \quad (4.45)$$

donde A_T es la corrección de Bouguer más la corrección topográfica. La anomalía topo-isostática resulta

$$\Delta g_{TI} = g_P - A_T + A_{Compensado} + F - \gamma. \quad (4.46)$$

En el caso de *estaciones oceánicas*, planteando equilibrio isostático:

$$\rho' = \frac{D\rho_0 - H'\rho_w}{D - H'}. \quad (4.47)$$

Nuevamente $A_{Compensado}$ posee dos componentes:

$$A_{Compensado} = -A_1 + A_2 \quad (4.48)$$

donde A_1 está asociada al exceso de masas por debajo del océano y A_2 , al océano. Para A_1 ,

$$\Delta\rho = \rho' - \rho_0, \quad b = D - H', \quad c = D, \quad (4.49)$$

y para A_2 ,

$$\Delta\rho = \rho_0 - \rho_w, \quad b = c = H'. \quad (4.50)$$

4.7. Segundo método de condensación de Helmert

En este caso, la topografía se condensa en una capa superficial sobre el geoide de forma tal que la masa no cambia.

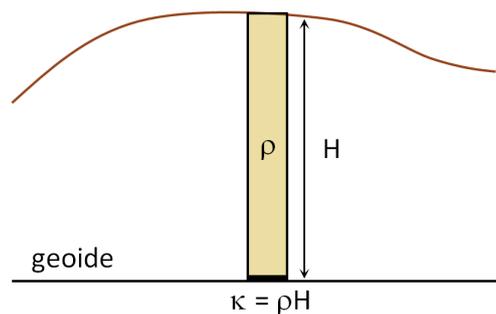


Figura 4.13: Segundo método de condensación de Helmert.

Se lo puede considerar como un caso límite de una reducción isostática de Pratt-Hayford cuando la profundidad de la compensación tiende a cero.

La expresión de la gravedad reducida resulta

$$g_H = g_P - A_T + A_{Condensada} + F, \quad (4.51)$$

donde la atracción de la condensación $A_C = \sum \Delta A$ se calcula empleando la expresión de un cilindro con espesor $H \rightarrow 0$, y densidad superficial $\kappa = \rho H$. En este caso $c = H_P$, siendo H_P la altura de la estación.

Dado que la atracción de la capa de Helmert prácticamente compensa la atracción de la topografía, resulta

$$g_H = g_P + F, \quad (4.52)$$

que no es otra cosa que la reducción de aire libre. En este sentido, las anomalías de aire libre pueden considerarse como aproximaciones de las anomalías de condensación de Helmert

$$\Delta g_H = g_H - \gamma. \quad (4.53)$$

Si se considera la corrección topográfica, la reducción de gravedad según el segundo método de condensación de Helmert es

$$g_H = g_P - 2\pi G\rho H + CT + 2\pi G\rho H + F, \quad (4.54)$$

$$g_H = g_P + CT + F. \quad (4.55)$$

Y la anomalía de Helmert, o anomalía de gravedad de Faye, es

$$\Delta g_H = g_P + CT + F - \gamma, \quad (4.56)$$

$$\Delta g_H \approx \Delta g_{AL} + CT. \quad (4.57)$$

4.8. Método de reducción de Rudzki

Es una reducción gravimétrica en donde el efecto indirecto geodésico es nulo. Esto se logra desplazando las masas topográficas al interior del geoide de manera tal que el potencial de las masas invertidas iguale al de las masas topográficas:

$$V_{inv} = V_T. \quad (4.58)$$

Por lo que el efecto indirecto es

$$\delta N = \frac{\delta W}{\gamma} = \frac{V_T - V_{inv}}{\gamma} = 0. \quad (4.59)$$

Como el efecto indirecto geodésico es nulo, el cogeide de Rudzki coincide con el geoide verdadero. La atracción de las masas invertidas para este caso resulta

$$A_{inv} = \sum \Delta A, \quad (4.60)$$

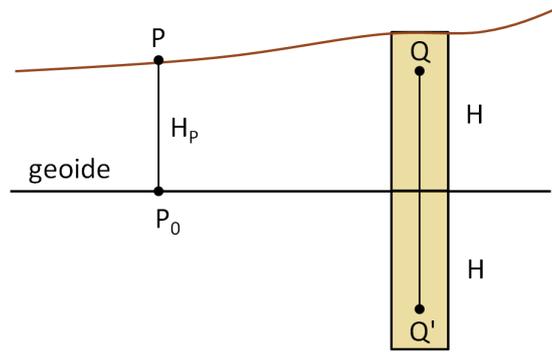


Figura 4.14: Reducción de Rudzki.

con $b = H$, $c = H + H_p$ y ρ de igual valor a la topografía. La gravedad de Rudzki en el geoide es

$$g_R = g_P - A_T + A_{inv} + F, \tag{4.61}$$

y la anomalía

$$\Delta g_R = g_R - \gamma. \tag{4.62}$$

4.9. Comparación de los diferentes métodos

En el *cuadro 4.2* y en la *figura 4.15* se comparan diferentes características de los principales métodos de reducción de la gravedad vistos.

Reducción	Efecto indirecto geodésico	Suavizamiento	Significado geofísico
Bouguer	Muy grande	Sí	Sí
Helmert-Faye	Pequeño	No	No
Airy-Heiskanen	Pequeño (>Helmert)	Sí	Sí
Pratt-Hayford	Pequeño (>Helmert)	Sí	Sí
Rudzki	No hay	No	No

Cuadro 4.2: Comparación entre los diferentes tipos de reducciones.

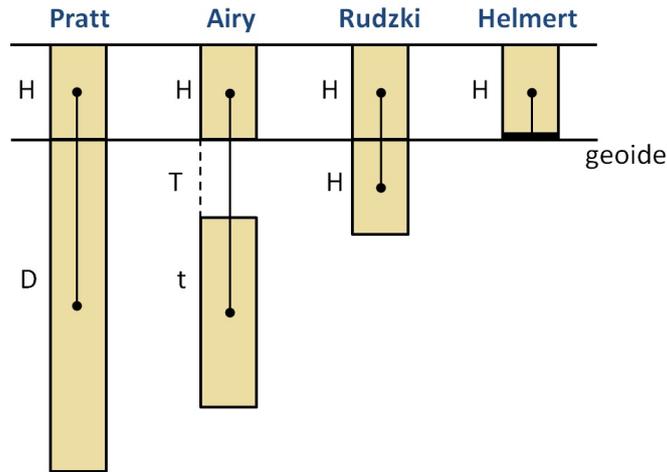


Figura 4.15: Topografía y compensación para diferentes reducciones de gravedad.

4.10. Efecto atmosférico

Cuando se emplea la fórmula de Somigliana-Pizzetti con parámetros del Sistema de Referencia Geodésico GRS80, la masa de la atmósfera está incluida en la masa de la Tierra sólida en el parámetro físico GM_0 . Pero, si se asume que la atmósfera está compuesta de cáscaras esféricas homogéneas, su contribución no debe afectar la gravedad medida en una estación. Es por ello que se debe aplicar una corrección (Moritz, 1980):

$$\delta g_{atm} = 0,874 - 9,9 \times 10^{-5}h + 3,56 \times 10^{-9}h^2, \quad (4.63)$$

donde la corrección está en $mGal$ y la altura en metros. Esta corrección debe restarse al valor de gravedad normal en la estación, o sumarse al valor de gravedad observada.

El efecto atmosférico incrementa el valor de un anomalía de gravedad en aproximadamente $0,86 mGal$ a una altura de $100 m$ y $0,77 mGal$ a $1000 m$.

4.11. Reducción de Poincaré y Prey

Se emplea cuando se necesita conocer la gravedad en el interior terrestre g_Q (figura 4.16). Si se midió la gravedad en el punto P de la superficie, la gravedad en un punto Q del subsuelo es

$$g_Q = g_P - \int_Q^P \frac{\partial g}{\partial H} H dH. \quad (4.64)$$

Una forma alternativa de calcular g_Q consiste en

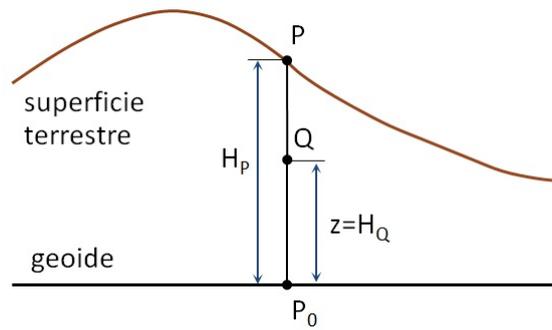


Figura 4.16: Reducción de Prey (adaptado de Hofmann-Wellenhof y Moritz, 2005).

1. Remover todas las masas por encima de la superficie equipotencial $W = W_Q$ que contiene a Q , y remover su atracción de g en el punto P .

$$g_P - 2\pi G\rho(H_P - H_Q), \quad (4.65)$$

donde ρ es la densidad entre los puntos P y Q .

2. Una vez realizado el primer paso, la gravedad en P está en aire libre. Se debe aplicar la reducción de aire libre llevando la estación de gravedad de P a Q .

$$g_P - 2\pi G\rho(H_P - H_Q) + F. \quad (4.66)$$

3. Por último, se restauran las masas removidas a su posición original, y se suma su atracción a g en Q .

$$\begin{aligned} g_Q &= g_P - 2\pi G\rho(H_P - H_Q) + F - 2\pi G\rho(H_P - H_Q), \\ &= g_P - 4\pi G\rho(H_P - H_Q) + F. \end{aligned} \quad (4.67)$$

La reducción de Poincaré y Prey puede usarse para determinar la densidad media de una capa intermedia (*mediciones en pozo*), en las *mediciones submarinas* o también para calcular *alturas ortométricas*.

4.12. Mediciones en pozo

Existen gravímetros adaptados para realizar mediciones de gravedad en las condiciones de altas temperaturas y presiones de un pozo. Estas mediciones se emplean para determinar densidades empleando la *reducción de Preyer*.

Si se realizan mediciones de gravedad en la boca g_1 , y en fondo de un pozo g_2 , como se esquematiza en la *figura 4.17*, la diferencia en los valores medidos estará dada por la diferencia

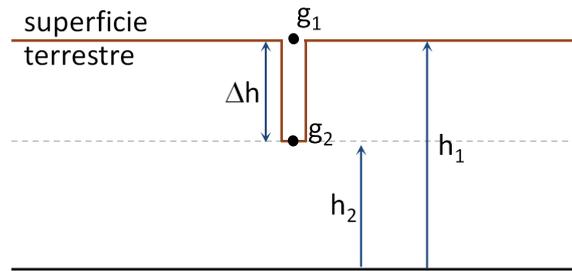


Figura 4.17: Mediciones de gravedad en pozo.

de altura entre las mediciones Δh y por el material situado entre ambas. Siguiendo lo visto en la sección anterior, es posible escribir el valor g_1 en función de g_2 como

$$g_1 = g_2 - 0,3086 \Delta h + 4\pi G\rho\Delta h. \quad (4.68)$$

De donde es posible despejar la densidad media del material entre las mediciones.

4.13. Corrección de Bouguer por curvatura terrestre

La corrección de Bouguer no considera la curvatura terrestre por lo que quedan zonas sin corregir y otras sobre corregidas, como se esquematiza en la *figura 4.18*. Estas zonas no consideradas por la placa infinita de Bouguer fueron consideradas en una trabajo publicado por LaFehr (1991), donde brinda una fórmula de corrección (Bullard B):

$$BB = 2\pi G\rho(\mu h - \lambda R), \quad (4.69)$$

donde $\rho = 2,67 \text{ g/cm}^3$, h es la altura de la estación y R es la altura combinada entre la estación y el radio medio terrestre. Los coeficientes adimensionales, μ y λ , son calculados asumiendo un radio terrestre medio $R_0 = 6371 \text{ km}$ y radio superficial $S \approx 167 \text{ km}$.

En la *figura 4.19* se grafica la corrección de Bullard B para alturas desde el nivel del mar hasta aproximadamente los 6 km, según los valores calculados por LaFehr (1991).

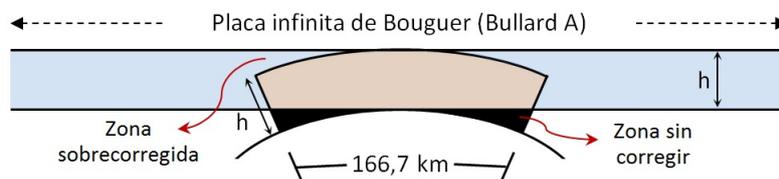


Figura 4.18: Geometría de la cáscara esférica empleada para la corrección por curvatura terrestre.

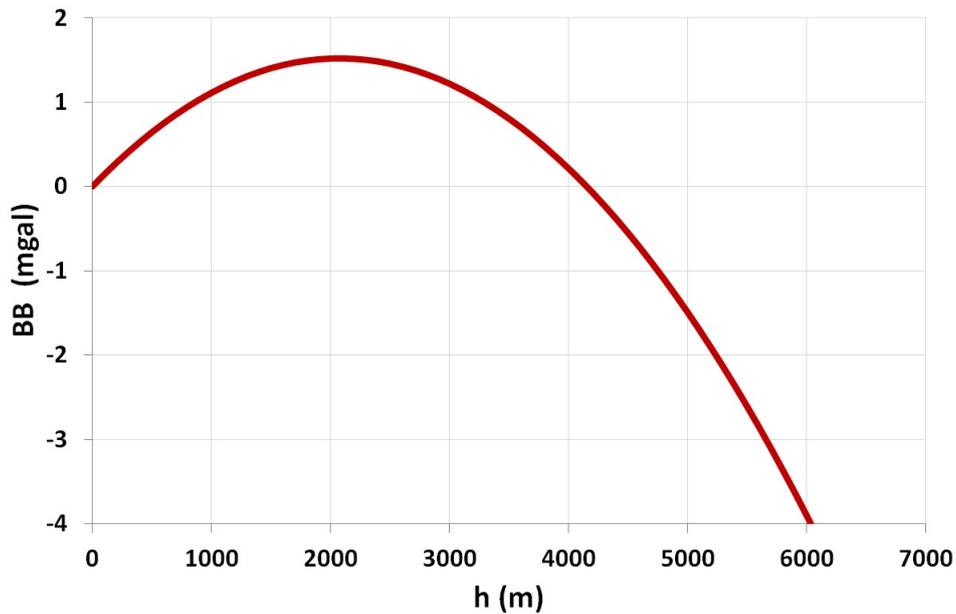


Figura 4.19: Corrección por curvatura terrestre (Bullard B).

4.14. Efecto indirecto geofísico

El efecto indirecto geofísico (Hinze et al., 2005) es el efecto gravitacional debido a que se emplean diferentes datum verticales al realizar el cálculo de las anomalías. En el cálculo clásico de anomalías, la altura de la estación se mide respecto al geode (altura ortométrica o H), y la gravedad teórica se mide respecto al elipsoide (h).

Se usa el adjetivo geofísico para diferenciar este efecto del efecto indirecto de geodesia.

Las máximas diferencia entre las alturas elipsoidales (geométricas) y alturas ortométricas a nivel global son de ± 100 m. El efecto indirecto geofísico combina el efecto de la diferencia de alturas, y el efecto gravimétrico de las masas situadas entre ambos datum.

Asumiendo una capa horizontal de espesor igual a la diferencia entre alturas, para estaciones terrestres el efecto indirecto en mGal resulta:

$$\delta g_{IE} = (0,3086 - 2\pi G\rho)N = 0,1976N, \quad (4.70)$$

donde N es la ondulación del geode en metros, G es la constante de gravitación universal y ρ es la densidad de la placa de Bouguer, la cual se asume $2,67$ g/cm³ en caso de estar sobre continentes y $1,03$ g/cm³ en caso de estar sobre los océanos. Por lo tanto, el máximo valor del efecto indirecto es del orden de 20 mGal. En caso de trabajar con observaciones marinas se debe aplicar una corrección similar de $0,2655N$ mGal/m.

El efecto indirecto posee igual signo que la ondulación del geode y varía lentamente con la distancia debido a que el gradiente horizontal del geode es bajo.

4.15. Mediciones desde plataformas y vehículos en movimiento

Cuando se realizan mediciones desde vehículos en movimiento, como barcos y aviones, la componente vertical de las aceleraciones inerciales afecta las mediciones de la gravedad.

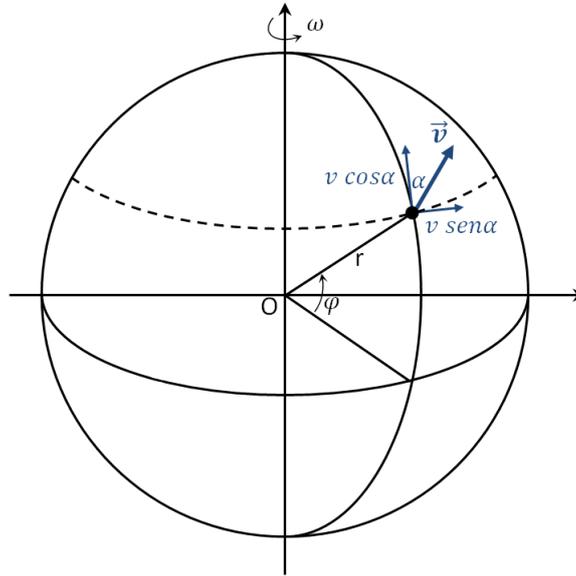


Figura 4.20: Descomposición de la velocidad en una componente O-E y otra S-N para el cálculo del efecto Eötvös.

Asumiendo un modelo de la Tierra esférico de radio r , cuando la medición se realiza en *reposo* respecto a la superficie, el valor de la gravedad está dado por (Torge, 1989):

$$g = \frac{GM}{r^2} - \omega^2 r \cos^2 \varphi. \tag{4.71}$$

Cuando el vehículo está en *movimiento* respecto a la superficie terrestre, para el cálculo de la aceleración de Coriolis, la velocidad se descompone en una componente O-E y otra S-N (figura 4.20). Cuando el vehículo se mueve hacia el este, la componente O-E se suma a ω como velocidad angular $|v| \text{sen} \alpha / (r \cos \varphi)$, donde α es el acimut del vector velocidad. En cambio, cuando el vehículo se mueve hacia el oeste, la componente O-E se resta a ω como $|v| \text{sen} \alpha / (r \cos \varphi)$. La componente S-N produce una aceleración centrífuga meridional entorno al geocentro. Por lo tanto, en un vehículo en movimiento el valor observado es

$$g^* = \frac{GM}{r^2} - \left(\omega + \frac{|v| \text{sen} \alpha}{r \cos \varphi} \right)^2 r \cos^2 \varphi - \left(\frac{|v| \cos \alpha}{r} \right)^2 r. \tag{4.72}$$

A partir de esta expresión y la ecuación 4.71 se obtiene la aproximación esférica de la corrección de Eötvös:

$$\delta g_{E\ddot{o}t} = g - g^* = 2\omega |v| \cos \varphi \text{sen} \alpha + \frac{|v|^2}{r}. \tag{4.73}$$

El primer término de esta expresión es el que tiene mayor peso, es negativo cuando las mediciones se realizan en dirección E-O y positivo si el vehículo se mueve O-E. El segundo término suele despreciarse por ser muy pequeño comparado con otras fuentes de error. En el caso de *mediciones marinas*, donde $r = R = 6371 \text{ km}$, la *ecuación 4.73* puede ser expresada como

$$\delta g_{E\ddot{o}t[mGal]} = 4,040 |v| \cos\varphi \operatorname{sen}\alpha + 0,00121 |v|^2, \quad (4.74)$$

si la velocidad del vehículo está en km/h . Si la velocidad está en nudos:

$$\delta g_{E\ddot{o}t[mGal]} = 7,487 |v| \cos\varphi \operatorname{sen}\alpha + 0,004 |v|^2. \quad (4.75)$$

Para *gravímetros montados en barcos*, la corrección de Eötvös puede ser del orden de decenas de $mGal$; para *gravímetros aerotransportados*, cuando las velocidades son superiores a 90 km/h , la corrección de Eötvös es del orden de las centenas de $mGal$. Al realizar *mediciones aéreas*, donde la corrección llega a superar los 1000 mGal , puede ser necesario emplear una aproximación elipsoidal (Torge, 1991).

Otra corrección que suele ser necesaria para observaciones de gravedad en movimiento es la corrección de Browne, que se aplica para eliminar el efecto fuerte de aceleraciones horizontales.

4.16. Preguntas de estudio

- Definir qué es la anomalía de la gravedad. Explicar las correcciones o reducciones que se aplican a los valores de la gravedad observada y cual es el fin de cada una de estas correcciones y su signo.
- ¿Cuál es la diferencia entre el efecto topográfico y la corrección topográfica?
- Explicar que son las correcciones isostáticas y qué conclusiones se obtienen a través del análisis de sus anomalías
- Explicar y demostrar el modelo de compensación isostático de Pratt.
- Explicar y demostrar el modelo de compensación isostático de Airy

Referencias

- Götze, H. y Schmidt, S. (2000). *Curso de Procesamiento y Modelado de Campos Potenciales*.
<http://www.geophysik.uni-kiel.de/~sabine/BsAs2000/index.htm>.
- Hammer, S. (1939). *Terrain corrections for gravimeter stations*. *Geophysics*. Vol. 4, pp. 184-194.
- Hinze, W. J., Aiken, C., Brozena, J., Coakley, B., Dater, D., Flanagan, G., Forsberg, R., Hildenbrand, T., Keller, G. R., Kellogg, J., Kucks, R., Li, X., Mainville, A., Morin, R., Pilkington, M., Plouff, D., Ravat, D., Roman, D., Urrutia-Fucugauchi, J., Veronneau, M., Webring, M., y Winester, D. (2005). *New standards for reducing gravity data: The North American gravity database*. *Geophysics*, Vol. 70, No. 4, pp. J25–J32.
- Hofmann-Wellenhof, B. y Moritz, H. (2005). *Physical Geodesy*. Springer.
- LaFehr, T. R. (1991). *An exact solution for the gravity curvature (Bullard B) correction*. *Geophysics*. Vol. 56, Nro. 8, pp. 1179-1184.
- Li, X. y Götze, H.-J. (2001). *Tutorial. Ellipsoid, geoid, gravity, geodesy, and geophysics*. *Geophysics*. Vol. 66, Nro. 6, pp. 1660-1668.
- Moritz, H. (1980). *Geodetic Reference System*.
- Nagy, D. (1966). *The gravitational attraction of a right rectangular prism*. *Geophysics*, Vol. 31, No. 2, pp. 362-371.
- Torge, W. (1989). *Gravimetry*. Walter de Gruyter. Berlin. New York.
- Torge, W. (1991). *Geodesy*. Walter de Gruyter. Berlin. New York.

Anexo 4A. Atracción de un cilindro

La atracción de un cilindro circular, homogéneo y vertical evaluada en un punto P exterior y situado sobre su eje de simetría es (Hofmann-Wellenhof y Helmut, 2005)

$$A_P = 2\pi G\rho \left[b + \sqrt{a^2 + (c-b)^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \right] \quad (4.76)$$

siendo ρ la densidad del cilindro, a su radio, b su altura y c la distancia desde la base del cilindro hasta el punto P (figura 4.21)

Si se divide el cilindro en n sectores de radio a , la componente vertical de la atracción de un sector es

$$A_{sector} = \frac{A_P}{n}. \quad (4.77)$$

Mientras que la atracción vertical de un compartimento de radio interior a_1 y radio exterior a_2 es

$$A_{comp.} = \frac{2\pi G\Delta\rho}{n} \left[\sqrt{a_2^2 + (c-b)^2} - \sqrt{a_1^2 + (c-b)^2} - \sqrt{a_2^2 + c^2} + \sqrt{a_1^2 + c^2} \right]. \quad (4.78)$$

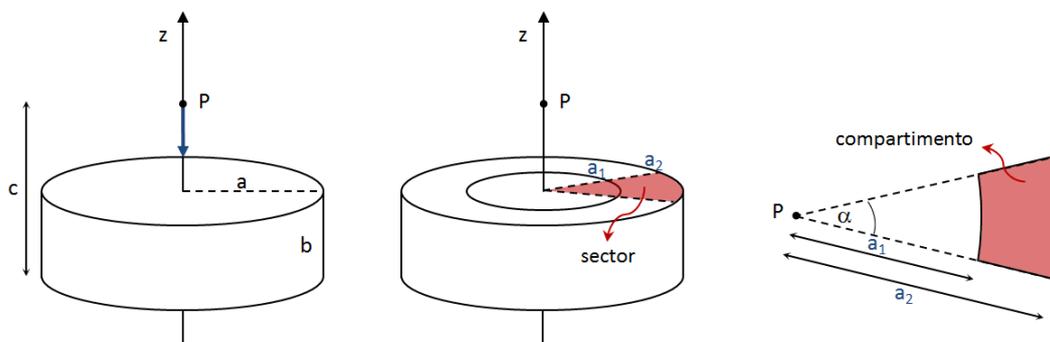


Figura 4.21: Componente vertical de la atracción de un cilindro circular homogéneo, un sector y un compartimento.

CAPÍTULO 5

Determinación gravimétrica del geoide

*Claudia N. Tocho, Federico G. E. Späth
y Ezequiel D. Antokoletz*

Este capítulo comienza con la definición de geoide y una breve revisión del problema de valor de contorno de Stokes y su solución mediante la técnica remover-calcular-restaurar, utilizando el segundo método de condensación de Helmert. Luego se presenta el modelo de geoide gravimétrico oficial, GEOIDE-Ar 16 de la República Argentina (Piñón et al., 2017).

5.1. Introducción

El geoide es una superficie equipotencial particular del campo de gravedad terrestre. El geoide puede definirse como la superficie equipotencial del campo de gravedad terrestre que mejor ajusta al nivel medio del mar para una determinada época (Mather, 1978).

El geoide es utilizado en varias aplicaciones de Geodesia, Geofísica y Oceanografía. En Geodesia, el geoide se usa como superficie de referencia para el sistema de alturas ortométricas. Dichas alturas pueden ser calculadas combinando un modelo de geoide gravimétrico con alturas elipsoidales obtenidas a través de Sistemas Globales de Navegación por Satélite (GNSS). Esto es una forma económica y sencilla de determinación de alturas ortométricas en áreas montañosas y en áreas sin nivelación convencional. En Geofísica, el geoide se utiliza para obtener información acerca de la distribución de masas en el interior de la Tierra; en Oceanografía, para estudiar las variaciones del nivel medio del mar, anomalías en el nivel del mar, corrientes oceánicas y mareas.

En un sentido práctico, un modelo de geoide está dado por una cuadrícula regular sobre la superficie de la Tierra y un valor llamado ondulación del geoide (N), que representa la separación entre dos superficies fundamentales geodésicas: el geoide y el elipsoide de referencia.

5.2. Problema de valor de contorno de Stokes

El problema de valores de contorno de Stokes consiste en la determinación gravimétrica del geoide S . El problema clásico de Stokes trata con la determinación de un potencial, armónico fuera de las masas, a partir de anomalías Δg dadas sobre toda la superficie del geoide. Por lo tanto, como no se permiten masas fuera de S , la topografía terrestre debe ser eliminada matemáticamente. Por el momento se supondrá que S encierra a todas las masas.

El problema clásico de valores de contorno es determinar el potencial perturbador T que satisface la ecuación de Laplace (*ecuación 5.1*):

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (5.1)$$

bajo la condición de borde en S que, en una aproximación esférica y despreciando los errores relativos del orden del aplanamiento del elipsoide de referencia, es

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{r}T + \Delta g = 0. \quad (5.2)$$

T representa la diferencia entre el potencial externo real de la Tierra W (por determinar) y el potencial normal U (conocido) el cual corresponde con el generado por un elipsoide de nivel. U se aproxima a W . La solución de la *ecuación 5.1* bajo las condiciones 5.2 permite obtener T como función de las anomalías de gravedad Δg sobre el geoide, y está dada por la integral de Stokes, que puede ser escrita en aproximación esférica como

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_S \Delta g S(\psi) d\sigma, \quad (5.3)$$

donde R es el radio medio terrestre y $S(\psi)$ es la función de Stokes:

$$S(\psi) = \frac{1}{\text{sen}(\psi/2)} - 6\text{sen}\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln\left(\text{sen}\frac{\psi}{2} + \text{sen}^2\frac{\psi}{2}\right), \quad (5.4)$$

siendo ψ la distancia esférica entre el punto de datos (φ, λ) y el punto de evaluación (φ_P, λ_P) .

Luego, se obtiene la ondulación del geoide en el punto P aplicando la ecuación de Bruns:

$$N = \frac{T}{\gamma} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_S \Delta g S(\psi) d\sigma. \quad (5.5)$$

Esta fórmula fue publicada por George Gabriel Stokes en 1849. Es la fórmula más importante de la geodesia física, se la conoce como fórmula de Stokes o integral de Stokes. Permite determinar el geoide a partir de datos de gravedad. La fórmula de Stokes se basa en una aproximación esférica donde cantidades del orden del aplanamiento (3×10^{-3}) son despreciadas. La *fórmula 5.5* sólo se satisface para un elipsoide de referencia que:

- 1) Tiene el mismo potencial $U_0 = W_0$ del geoide.
- 2) Encierra una masa que numéricamente es igual a la masa del geoide.
- 3) Tiene su centro de gravedad en el centro de gravedad de la Tierra.

La *ecuación 5.5* requiere que Δg sean valores de contorno sobre el geoide y que no haya masas fuera del geoide. En la próxima sección veremos como se trata este problema que requiere de la regularización de la Tierra y de la correspondiente reducción de la gravedad.

La *ecuación 5.5* requiere también que la integración se extienda sobre todo el geoide y se necesitan anomalías de gravedad sobre toda la superficie de la Tierra. En la *sección 5.3* se explica la técnica remover-calcular-restaurar para la determinación práctica del geoide gravimétrico.

El *cuadro 5.1* muestra la aproximación esférica de las condiciones que deben satisfacer los valores de frontera en la teoría de Stokes (Heiskanen y Moritz, 1967; Sánchez, 2013). Ver *figura 5.1*.

Teoría de Stokes
La superficie de frontera es el geoide y fuera de éste no existen masas.
Ondulación geoidal (Teorema de Bruns):
$N = \frac{1}{\gamma_{Q_0}} T_{P_0}$
Anomalías de la gravedad definidas sobre el geoide:
$\Delta g = g_{P_0} - \gamma_{Q_0} = -\frac{\partial T}{\partial r} \Big _{P_0} - \frac{2}{r} T,$
$g_{P_0} = \text{gravedad sobre el geoide.}$
$\gamma_{Q_0} = \text{gravedad normal sobre el elipsoide de referencia.}$

Cuadro 5.1: Condiciones del valor de frontera para la teoría de Stokes.

5.3. Ondulaciones del geoide y reducciones topográficas

La *ecuación 5.5* permite obtener la ondulación del geoide N siempre que no haya masas por fuera de la superficie del mismo. Una manera de lidiar con las masas topográficas de densidad (por lo general de valor constante) es empleando, por ejemplo, el segundo método de condensación de Helmert. En este capítulo se lo utilizará como ejemplo de uno de los posibles tipos de reducciones gravimétricas que se pueden aplicar para el cálculo del geoide gravimétrico. El segundo método de condensación de Helmert consiste en (*figura 5.1*):

- Medir g_P en un punto P ubicado sobre la superficie terrestre.
- Remover todas las masas sobre el geoide.
- Utilizar la reducción de aire libre (F) para llevar el valor de g en P a P_0 sobre el geoide.
- Restaurar todas las masas condensadas en una capa delgada sobre el geoide de densidad superficial $\kappa = \rho H$.

- Restar la gravedad normal correspondiente al punto Q_0 sobre el elipsoide de referencia.

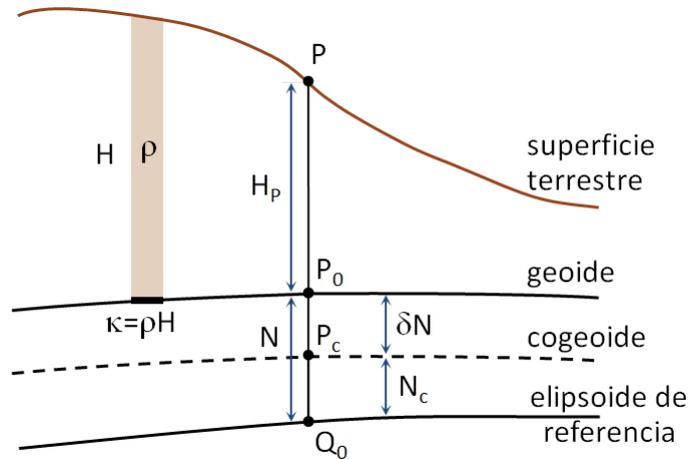


Figura 5.1: Segundo método de condensación de Helmert.

De esta manera las anomalías de Helmert o de Faye quedan expresadas por la siguiente expresión:

$$\Delta g_{Helmert} = \Delta g_{Faye} = g_P - 2\pi G\rho H_P + CT + F + 2\pi G\kappa - \gamma_{Q_0} = \Delta g_{AL} + CT, \quad (5.6)$$

Δg_{AL} es la anomalía de aire libre en P , κ la densidad superficial ($\kappa = \rho H_P$) y CT la corrección topográfica.

La ecuación 5.6 es válida únicamente si las anomalías de gravedad son linealmente dependientes con las alturas, suposición que se considerará válida.

Debido a la redistribución de las masas, el potencial cambia también en una cantidad denominada *efecto indirecto sobre el potencial*, dado por la expresión

$$\delta T = T_{P_0} - T_{P_0}^C, \quad (5.7)$$

donde T_{P_0} es el potencial de las masas topográficas en P_0 y $T_{P_0}^C$ el potencial de las masas condensadas en P_0 . Debido al cambio en el potencial, al emplear 5.5 con Δg de 5.6 no produce el geoide sino una superficie denominada *cogeide*. A la separación que existe entre geoide y cogeide se la llama efecto indirecto geodésico sobre el geoide siendo calculable mediante la aplicación de la fórmula de Bruns:

$$N_{ind} = \frac{\delta T}{\gamma}. \quad (5.8)$$

Por lo tanto, antes de aplicar la ecuación de Stokes, las anomalías de gravedad tienen que transformarse desde el geoide al cogeide aplicando una pequeña corrección $\delta\Delta g$ llamada *efecto indirecto sobre la gravedad*:

$$\delta\Delta g = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial\gamma}{\partial h} \delta T = +0,3086 \frac{mGal}{m} N_{ind(m)}. \quad (5.9)$$

5.4. Técnica remover-calcular-restaurar

El uso de 5.5 requiere anomalías de gravedad sobre todo el geoide para el cálculo de la ondulación del geoide en un único punto. Esto no resulta práctico para el cálculo de la ondulación del geoide sobre toda la superficie por lo que son necesarias algunas modificaciones de la técnica. Primero, es posible aplicar 5.5 sobre una región acotada, y las contribuciones de las largas longitudes de onda del campo de gravedad no estarán presentes en los resultados y deberán ser calculadas de alguna otra forma. Se las obtiene de un conjunto de coeficientes armónicos esféricos (modelos geopotenciales). Segundo, la integral es discretizada y computada como una sumatoria empleando datos discretos. Debido a la densidad espacial limitada de los datos de gravedad, las cortas longitudes de onda tampoco estarán presentes. Se las calcula empleando alturas topográficas, que se suelen dar en la forma de un modelo digital de elevaciones (DEM, por sus siglas en inglés *Digital Elevation Model*). Las distintas contribuciones de datos utilizados para la determinación del geoide gravimétrico se esquematizan en la *figura 5.2*.

La técnica remover-calcular-restaurar puede resumirse de la siguiente manera:

1. Remover anomalías de gravedad calculadas a partir de un modelo de armónicos esféricos global evaluadas en el geoide de las anomalías de gravedad de Helmert, las que son calculadas (*ecuación 5.6*) con mediciones de gravedad local y un modelo digital de elevaciones, y luego de aplicar la pequeña corrección llamada efecto indirecto sobre la gravedad. De esta forma tenemos *anomalías residuales*:

$$\Delta g_{residuales} = \Delta g_{Helmert} - \Delta g_{GM} + \delta \Delta g. \quad (5.10)$$

2. Calcular utilizando las anomalías residuales *ondulaciones de cogeode residuales* $N_{\Delta g}$.
3. Restaurar a las ondulaciones del cogeode residuales calculadas, el efecto gravimétrico indirecto sobre el geoide N_{ind} (calculados a partir de un DEM) y las ondulaciones del geoide N_{GM} (calculadas de un modelo global de armónicos esféricos, evaluadas en el geoide) para obtener el geoide final.

Los pasos anteriores se combinan en la siguiente fórmula simple:

$$N_{gravimétrico} = N_{\Delta g} + N_{ind} + N_{GM}, \quad (5.11)$$

donde $N_{\Delta g}$ es el término de longitud de *onda media* obtenido de la integración de los datos de gravedad, N_{ind} es la contribución del *efecto indirecto geodésico* sobre el geoide originado por la reducción gravimétrica utilizada y N_{GM} es el término de *onda larga* obtenido a través de un modelo geopotencial.

5.4.1. ¿Cómo se calcula $N_{\Delta g}$?

La evaluación numérica de la *ecuación 5.5* con las anomalías residuales *5.10* proporciona la componente residual del geoide $N_{\Delta g}$. Para el cálculo de dicha integral se emplean técnicas

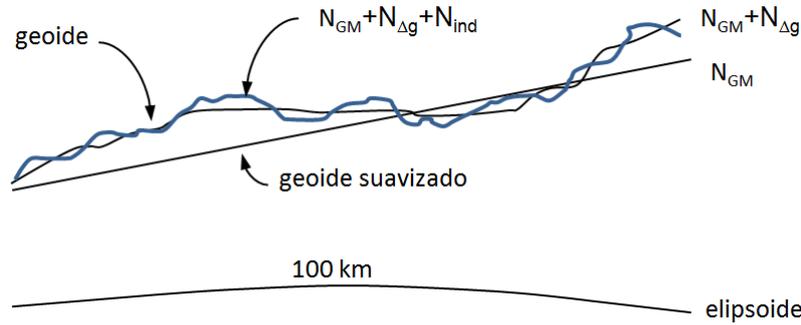


Figura 5.2: Contribución de distintos datos a la determinación regional del geoid (adaptado de Sansò y Sideris, 2013).

espectrales basadas en la Transformada Rápida de Fourier (FFT), que son ampliamente usadas en el modelado de geoides continentales, marinos o sobre áreas extensas. Existen distintas formas en las que se puede escribir y evaluar la integral de Stokes, desde considerar el área de estudio tan pequeña que puede suponerse plana hasta considerar una aproximación de Tierra esférica.

5.4.2. ¿Cómo se calcula N_{ind} ?

El efecto indirecto geodésico sobre el geoid, N_{ind} , originado por la reducción del segundo método de condensación de Helmert, se formula en términos de una serie de Taylor de los cuales solo los tres primeros términos son considerados, siendo el término de orden cero el más dominante, el cual se expresa (Wichiencharoen, 1982):

$$N_{ind} = -\frac{\pi G \rho H_{DEM}^2}{\gamma}. \quad (5.12)$$

Para calcular este término es necesario disponer de un Modelo Digital de Elevaciones (DEM) y realizar una hipótesis de densidad (similar a la aplicada durante la reducción gravimétrica).

5.4.3. ¿Cómo se calculan N_{GM} y Δg_{GM} ?

El potencial de atracción gravitacional terrestre V se representa, en general, mediante su expansión en funciones armónicas esféricas, las cuales constituyen una solución de la ecuación de Laplace $\Delta V = 0$. Los coeficientes (C_{nm}, S_{nm}) , parámetros de los modelos de gravedad global, permiten derivar las diferentes funciones asociadas a la gravedad terrestre (alturas geoidales, anomalías de la gravedad, alturas anómalas) mediante su relación con el potencial anómalo o de perturbación T (tabla 5.1). El desarrollo en armónicas esféricas de T , en función de las coordenadas (r, θ, λ) corresponde con (ver p. ej. Heiskanen y Moritz, 1967; Pavlis, 1997; Torge,

2001):

$$T(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm} \sen m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta), \quad (5.13)$$

donde GM es la constante gravitacional geocéntrica, \bar{P}_{nm} son las funciones normalizadas de Legendre y $\Delta\bar{C}_{nm}$, $\Delta\bar{S}_{nm}$ indican la diferencia entre los coeficientes normalizados del potencial de gravedad real W y el potencial normal U , el cual se expresa a través de los armónicos zonales pares C_{n0} ($n = 2, 4, \dots \approx 8$). La serie se inicia en el grado $n = 2$, ya que el elipsoide de referencia tiene la misma masa terrestre y su centro de masas coincide con el de la Tierra.

Los modelos globales de gravedad de grado bajo se calculan, principalmente, a partir del análisis de órbitas satelitales; su combinación con datos terrestres de gravedad (aéreos, marinos y continentales) y datos de altimetría satelital (anomalías de gravedad o alturas geoidales) permiten la obtención de modelos con mayor resolución (grados altos). En el primer caso, se toman todos los observables disponibles del campo de gravedad, se combinan en un modelo matemático y, mediante un ajuste, se determinan los coeficientes de Stokes, C_{nm} y S_{nm} , hasta ciertos grado n y orden m . En el segundo caso, se toman como base las relaciones de ortogonalidad de las funciones de armónicos esféricos, las cuales requieren del análisis de un único parámetro del campo de gravedad (normalmente, anomalías gravimétricas), de allí, es necesario que las otras cantidades (p. ej. alturas geoidales derivadas de altimetría satelital) se expresen en términos del mismo parámetro (p. ej. anomalías medias). Heiskanen y Moritz (1967). Los valores del grado n y del orden m de la expansión en serie dependen de las observaciones disponibles y de su distribución.

A partir de la fórmula de Bruns y de la ecuación fundamental de la geodesia física, *en aproximaciones esféricas obtenemos*

$$N_{GM} = R \sum_{n=2}^{n=n_{max}} \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{n,m} \sen m\lambda) \bar{P}_{n,m}(\cos \theta), \quad (5.14)$$

donde R es el radio medio terrestre y

$$\Delta g_{GM} = G \sum_{n=2}^{n=n_{max}} \sum_{m=0}^n (n-1) (\Delta\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{n,m} \sen m\lambda) \bar{P}_{n,m}(\cos \theta). \quad (5.15)$$

En la práctica n no puede llegar hasta un valor infinito. Por ello existirá un valor máximo (n_{max}) de esta variable que limitará la mínima longitud de onda del campo de gravedad anómalo, que podemos conseguir con este desarrollo en serie.

5.5. Validación de geoides gravimétricos en tierra

La exactitud de un modelo gravimétrico se calcula mediante una evaluación externa, realizando comparaciones con ondulaciones del geode derivadas en puntos donde se tiene doble

altura (altura elipsoidal obtenida mediante GNSS (h) y altura ortométrica (H)), utilizando la ecuación:

$$N_{GNSS/Nivelación} = h - H. \quad (5.16)$$

La diferencia entre el geoide gravimétrico y el $N_{GNSS/Nivelación}$ se suelen minimizar mediante una transformación de 4 parámetros dada por la ecuación:

$$N_{GNSS/Nivelación} - N_{gravimétrico} = x_0 + x_1 \cos \varphi \cos \lambda + x_2 \cos \varphi \sin \lambda + x_3 \sin \varphi + v \quad (5.17)$$

donde x_0 , x_1 , x_2 y x_3 son los parámetros de transformación, φ y λ las coordenadas del punto en cuestión y v los residuos.

Los valores ajustados de los residuos dan una idea realista del nivel de acuerdo entre el geoide gravimétrico y el geoide derivado de GNSS/Nivelación. Un modelo de 4 parámetros absorbe la mayoría de las inconsistencias de los datums de los distintos tipos de alturas involucradas así como los errores del geoide de larga longitud de onda.

En la práctica, hay diversos factores que afectan la ecuación (5.16), algunos de ellos son:

- Errores aleatorios en los valores de h , H y $N_{gravimétrico}$;
- Inconsistencias en los datums; cada tipo de datos se refiere a distintas superficies de referencia y el resultado es un datum shift entre $N_{gravimétrico}$ y $N_{GNSS/Nivelación}$;
- Efectos sistemáticos y distorsiones, como errores de larga longitud de onda en N_{GM} , modelado pobre de los errores de GNSS y distorsiones en el datum vertical debido a sobre ajuste de la red de nivelación;
- Efectos geodinámicos (rebote isostático, subsidencia, inestabilidad de los monumentos, aumento del nivel del mar, etc.);
- Aproximaciones teóricas en el cálculo del geoide gravimétrico o en el cálculo de la altura ortométrica;
- Modelado inadecuado del efecto de terreno en el cálculo del geoide gravimétrico;
- Negligencia de la Topografía del Nivel del Mar en los mareógrafos.

5.6. Modelo de geoide argentino GEOIDE-Ar 16

El modelo de geoide GEOIDE-Ar 16 (*figura 5.3*) fue desarrollado por el Instituto Geográfico Nacional (IGN) junto con la RMIT University (Australia) utilizando la técnica remove-compute-restore (Schwarz et al., 1990) y el modelo geopotencial global GOCO05S (Mayer-Guerr, 2015) hasta su grado y orden máximo (280), junto con 671.547 mediciones de gravedad observadas en el sistema gravimétrico IGSN71 (Morelli et al. 1972) sobre el territorio continental argentino, sus países limítrofes, Islas Malvinas y el litoral marino (*figura 5.3*).

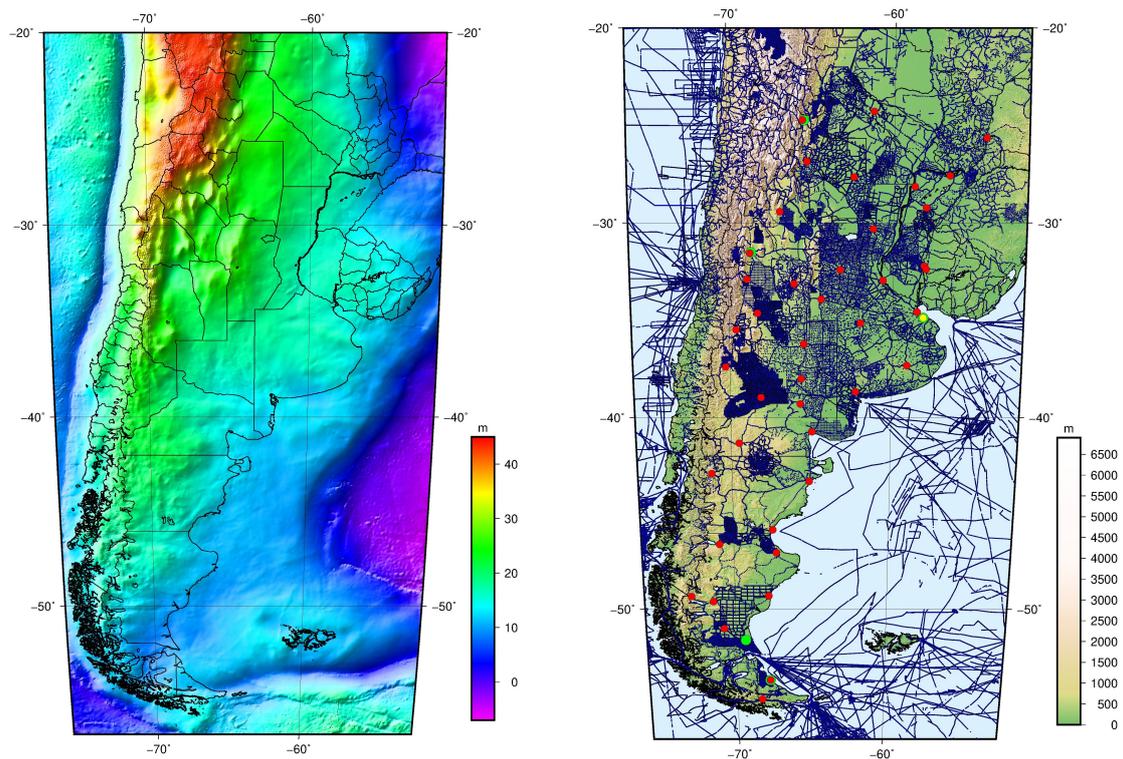


Figura 5.3: Mapa de la Ondulación del Geoide (izq.) y de los datos gravimétricos utilizados (der.), correspondientes al modelo GEOIDE-Ar 16.

Para cumplir con la condición de contorno, las masas topográficas fueron removidas utilizando el segundo método de condensación de Helmert (Heiskanen y Moritz 1967). Tanto las correcciones del terreno como el efecto indirecto del terreno fueron determinados utilizando una combinación de los modelos digitales de elevación SRTM_v4.1 (Jarvis et al. 2008) y SRTM30_Plus_v10 (Becker et al. 2009), y una densidad de las masas topográficas igual a $2,67 \text{ g/cm}^3$ para el terreno y $1,03 \text{ g/cm}^3$ para el océano.

GEOIDE-Ar 16 se ajustó al Marco de Referencia Geodésico Nacional POSGAR 2007 y al Sistema de Referencia Vertical Nacional 2016 (SRVN16), a partir de la determinación de una superficie correctiva calculada mediante el método clásico de transformación de 4 parámetros (para computar la superficie de tendencia) y una colocación por mínimos cuadrados (para estimar los residuos). Por esta razón, GEOIDE-Ar 16 no es un geoide gravimétrico *puro* sino que al geoide gravimétrico calculado se le ha agregado una superficie correctiva para arribar a GEOIDE-Ar 16.

La precisión de GEOIDE-Ar 16 se evaluó mediante 1.904 puntos de nivelación observados con GNSS doble frecuencia. Los desvíos estándar de las diferencias entre la ondulación geoidal derivada de los puntos GNSS-Nivelación y las ondulaciones del modelo de geoide son menores

a 0,10 *m.*

En la página web del el Instituto Geográfico Nacional existe una Calculadora Online que permite la determinación de ondulaciones geoidales de puntos localizados sobre la superficie de la República Argentina. Estas ondulaciones permiten transformar alturas elipsoidales referidas al Marco de Referencia Geodésico Nacional POSGAR07 en alturas ortométricas (Mader) referidas al Sistema de Referencia Vertical Nacional 2016 (SRVN16) exclusivamente¹.

5.7. Preguntas de estudio

- ¿Por qué es importante determinar un geoide gravimétrico?
- ¿En qué consiste la técnica remover-calcular-restaurar?
- ¿Qué es un modelo geopotencial? ¿Qué es la resolución espacial de un modelo geopotencial?
- Explique cómo a partir de un modelo geopotencial puedo obtener la expresión de anomalías de gravedad y de ondulación del geoide en armónicos esféricos.
- ¿Por qué se elimina la contribución de onda larga en los datos de gravedad para calcular un geoide gravimétrico?
- ¿Qué es el efecto indirecto geodésico en el cálculo del geoide?
- ¿Cómo se puede llevar a cabo el cálculo de la integral de Stokes, la corrección topográfica y el efecto indirecto geodésico?
- ¿Qué datos se necesitan para validar un geoide gravimétrico?
- ¿Dónde puedo conseguir un modelo de geoide para la República Argentina?

¹<http://www.ign.gob.ar/NuestrasActividades/Geodesia/Geoide-Ar16/calculadora>.

Referencias

- Becker, J. J., Sandwell, D. T., Smith, W. H. F., Braud, J., Binder, B., Depner, J., Fabre, D., Factor, J., Ingalls, S., Kim, S-H., Ladner, R., Marks, K., Nelson, S., Pharaoh, A., Trimmer, R., Von Rosenberg, J., Wallace, G. y Weatherall, P. (2009). *Global Bathymetry and Elevation Data at 30 Arc Seconds Resolution: SRTM30_PLUS*, *Marine Geodesy*, 32:4, 355-371. <https://doi.org/10.1080/01490410903297766>.
- Jarvis, A., Reuter, H. I., Nelson, A. y Guevara, E. (2008). *Hole-filled SRTM for the globe Version 4*. <http://www.cgiar-csi.org/data/srtm-90m-digital-elevation-database-v4-1>.
- Heiskanen, W. y Moritz, H. (1967). *Physical Geodesy*. W. H. Freeman and company, San Francisco.
- Mather, R. S. (1978). *The role of the geoid in four-dimensional geodesy*. *Marine Geodesy* 1: 217-252.
- Mayer-Guerr, T. (2015). *The combined satellite gravity field model GOCO05s*. EGU General Assembly, Vienna.
- Morelli, C., Gantar, C., McConnell, R. K., Szabo, B. y Uotila, U. (1972). *The international gravity standardization net 1971 (IGSN 71)*. DTIC Document.
- Pavlis, N. (1997). *Development and applications of geopotential models*. International School for the determination of the geoid. Lecture Notes. International Geoid Service, Milan. S. 101-134.
- Piñón, D. A., Zhang, K., Wu, S., y Cimbaro, S. R., 2017. *A New Argentinean Gravimetric Geoid Model: GEOIDEAR*. In International Symposium on Earth and Environmental Sciences for Future Generations (pp. 53-62). Springer, Cham.
- Sánchez Rodríguez, L. (2003). *Determinación de la superficie vertical de referencia para Colombia (Traducción)*. Tesis para el título de *Diplom-Ingenieurin* de la *Technische Universität Dresden*.
- Sansò, F., y Sideris, M. G. (Eds.). (2013). *Geoid determination: theory and methods*. Springer Science & Business Media.

Schwarz, K. P., Sideris, M. G. y Forsberg, R. (1990). *The use of FFT techniques in physical geodesy*. *Geophys J Int* 100:485–514.

Torge, W. (2001). *Geodesy. 3rd Edition*. De Gruyter, Berlin, New York.

Wichiencharoen, C. (1982). *The indirect effects on the computation of geoid undulations*. Rep. 336, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus.

CAPÍTULO 6

Mediciones de la gravedad

*Federico G. E. Späth, Ezequiel D. Antokoletz
y Claudia N. Tocho*

En este capítulo se describen diferentes formas de medir la gravedad. En las *secciones 6.2 y 6.3* se muestra el principio de funcionamiento de diferentes instrumentos terrestres absolutos y relativos. Fueron escritas siguiendo el Capítulo 4 del libro *Physical Geodesy* de Sneeuw (2006) y el trabajo *Absolute and Relative Gravimetry* de Timmen (2010). Se analizan tanto instrumentos clásicos, como el péndulo ya en desuso; gravímetros relativos modernos de tipo masa-resorte; los actuales gravímetros absolutos de tipo balístico (caída libre y tiro vertical); y los gravímetros superconductores. La descripción de estos últimos se realizó a partir de los trabajos de Neumeyer (2010) y Goodkind (1999).

En las *secciones 6.4 y 6.5* se resumen las técnicas de mediciones marinas y aéreas, y en la *sección 6.6* se describen las técnicas modernas de medición de gravedad satelital, resumidas del libro de Hofmann-Wellenhof y Moritz (2005). En la *sección 6.7* se discute sobre la resolución que es posible obtener en relevamientos terrestres, marinos, aéreos y satelitales, a partir de los trabajos publicados por Chapin (1998) y LaFehr y Nabighian (2012).

Por último, en la *sección 6.8* se definen los sistemas de referencia gravimétricos, marcos de referencia y redes gravimétricas; se enumeran los principales sistemas gravimétricos; y se describen las redes gravimétricas vigentes en la República Argentina. El texto es un resumen de parte de la tesis de grado *Red Gravimétrica de Primer Orden de la República Argentina* de Antokoletz (2017).

6.1. Introducción

Los gravímetros son instrumentos que permiten medir la gravedad. Difieren de los acelerómetros o sismógrafos en que son diseñados para operar a muy bajas frecuencias y con un menor nivel de ruido. Desde el punto de vista de la toma del dato, se los puede clasificar en *absolutos* o *relativos*.

Las mediciones absolutas de gravedad implican medir las dos cantidades fundamentales de

la aceleración, *tiempo* y *longitud*, mientras que las mediciones relativas son más sencillas de realizar e implican medir únicamente una de las dos cantidades que definen a la aceleración.

Entre 1700 y 1950 se emplearon péndulos para medir la gravedad, cuya precisión relativa era del orden de 10^{-5} . Actualmente ya no se emplean péndulos: para mediciones absolutas se usan gravímetros de *caída libre* y de *tiro vertical*, que son instrumentos voluminosos, sofisticados y caros; y para las mediciones relativas en el campo se emplean gravímetros basados en el sistema masa-resorte que son más económicos, portables y de manipulación más sencilla.

6.2. Mediciones absolutas

Existen tres principios básicos de medición absoluta de la gravedad: péndulos (ya en desuso), caída libre y tiro vertical. Hasta 1980, cuando surgen los métodos de caída libre y tiro vertical, se emplearon péndulos para las mediciones absolutas.

Las técnicas modernas de medición de gravedad absoluta se basan en medir tiempos y distancias a lo largo de la vertical, para obtener el valor de gravedad en un punto específico de la Tierra. La expresión *absoluta* hace referencia a que los estándares de tiempo y distancia (relojes de rubidio y láseres de helio-neón) están incorporados como componentes del sistema del gravímetro y no requieren de una referencia externa. Actualmente, los gravímetros absolutos más empleados son del tipo caída libre, y corresponden a las series A10 y FG5 fabricada por Micro-g LaCoste™, sucesoras del sistema JILAG.

6.2.1. Péndulos

Péndulo matemático

Es un péndulo ficticio que consiste en una masa puntual m , sujeta por un hilo sin masa de longitud l , que oscila sin fricción entorno a su punto de sujeción o pivote (*figura 6.1*). El movimiento de la masa está confinado a un arco circular entorno al punto de equilibrio. La coordenada a lo largo de esta trayectoria es $s = l\phi$, siendo ϕ el ángulo de deflexión respecto a la vertical.

Como se esquematiza en la *figura 6.1*, cuando la masa no se encuentra en equilibrio, existe una componente tangencial del vector de gravedad, $g\text{sen}\phi$, con sentido hacia el punto de equilibrio. La ecuación de movimiento resultante es

$$\ddot{s} = l\ddot{\phi} = -g\text{sen}\phi \approx -g\phi, \quad (6.1)$$

donde se empleó la aproximación para ángulos pequeños, $\text{sen}\phi \approx \phi$. La expresión de g resulta

$$g = l\omega^2 = l \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2. \quad (6.2)$$

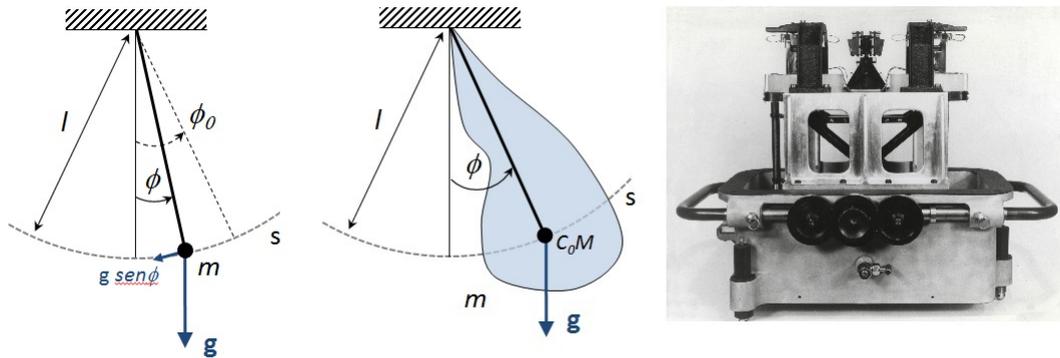


Figura 6.1: Esquema de un péndulo matemático (izq.) y uno físico (centro). Imagen del péndulo relativo de Gulf¹ (der.).

Midiendo la longitud l , y tiempos para determinar el período de oscilación, es posible calcular g . Por ejemplo, si los parámetros del péndulo fueran $l \approx 1m$ y $T \approx 2s$, y se desea una exactitud absoluta, $dg = 1mGal$, es necesario conocer a l al micrómetro y a T al microsegundo.

Péndulo físico

Es un cuerpo rígido capaz de oscilar alrededor de un eje. Es una descripción más realista que el péndulo matemático ya que está sujeto a la fricción con el aire, su masa no es puntual y el hilo también posee masa (figura 6.1).

Considerando el torque ejercido por la fuerza de gravedad sobre el centro de masas del péndulo, se obtiene la ecuación de movimiento del sistema:

$$M\ddot{\phi} = -mgl\sin(\phi), \quad (6.3)$$

donde M es el momento de inercia y l la distancia del punto de sujeción al centro de masas. Realizando la aproximación para ángulos pequeños

$$\ddot{\phi} + \frac{mgl}{M}\phi \approx 0. \quad (6.4)$$

El péndulo físico, al igual que el matemático, es un oscilador armónico y a partir de su período de oscilación es posible obtener el valor de la gravedad

$$g = \frac{M}{ml} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2. \quad (6.5)$$

En este caso, el valor de g no solo depende de l y T . También se debe conocer el momento de inercia y la posición del centro de masas del péndulo, que son muy difíciles de determinar.

¹Imagen tomada de https://americanhistory.si.edu/collections/search/object/nmah_892807.

Es por eso que fue empleado como *gravímetro relativo puro*, ya que el cociente de la gravedad entre dos estaciones diferentes es independiente de los parámetros físicos del péndulo:

$$\frac{g_1}{g_2} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2. \quad (6.6)$$

Por lo tanto, midiendo períodos, y con un punto donde la gravedad es conocida, es posible determinar la gravedad en otras estaciones. Los péndulos relativos más precisos fueron el péndulo de cuarzo de Gulf y el péndulo de invar de Cambridge, que fueron empleados hasta fines de 1960.

El péndulo también fue empleado como *gravímetro absoluto mediante calibración*. Midiendo la gravedad con un péndulo en dos o más lugares donde es conocido su valor, es posible determinar la constante del gravímetro (M/ml) y, por lo tanto, emplearlo como gravímetro absoluto.

De especial importancia en la historia de los gravímetros son las mediciones absolutas de g , realizadas entre 1898 y 1904 en Potsdam, Alemania, que fueron usadas como base del sistema de referencia Potsdam, introducido en 1908 y extendido mundialmente. Años más tarde se detectó un error sistemático en el datum Potsdam y los valores del sistema tuvieron que ser modificados aproximadamente en $-14mGal$ debido al mal cálculo de la constante del gravímetro.

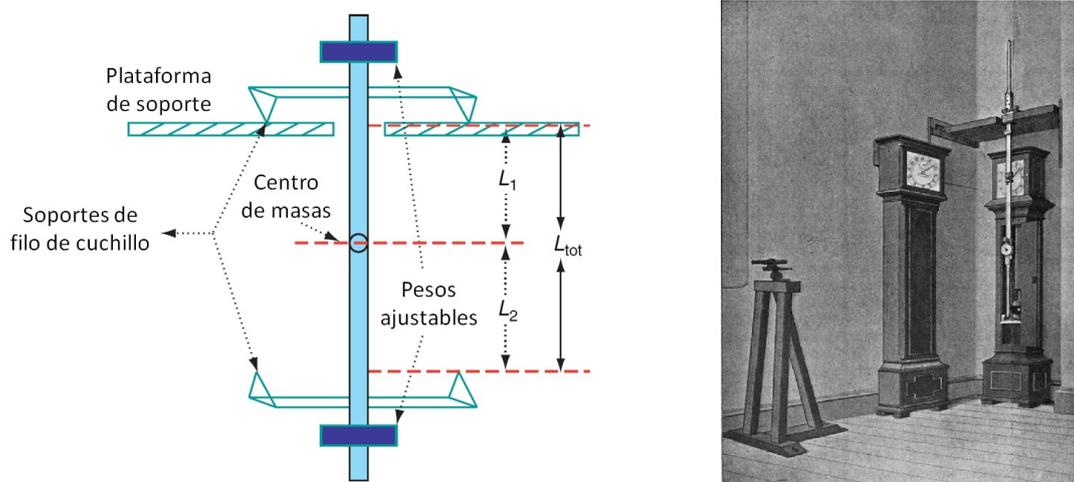


Figura 6.2: Esquema del péndulo reversible (izq.) (modificado de Niebauer, 2007). Imagen del péndulo de Kater² (der.).

Péndulo físico reversible

Este gravímetro absoluto fue desarrollado por Kater en 1818. El péndulo posee dos pivotes alineados con el centro de masas, ubicados uno a cada lado del mismo. La distancia entre los

²Imagen extraída de https://en.wikipedia.org/wiki/Kater%27s_pendulum.

pivotes y el centro de masas es L_1 y L_2 , respectivamente (*figura 6.2*). El péndulo se calibra de forma tal que el movimiento de oscilación entorno a ambos pivotes posee el mismo período T . El valor de g , independiente de los momentos de inercia, resulta

$$g = (L_1 + L_2) \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2. \quad (6.7)$$

Si la distancia entre los pivotes es conocida se tiene un gravímetro absoluto.

6.2.2. Caída libre

La ecuación de movimiento de una masa m que cae libremente en un campo gravitatorio uniforme es

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = m\ddot{z} = mg. \quad (6.8)$$

Eliminando m y resolviendo la ecuación diferencial para la posición:

$$z(t) = z_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2. \quad (6.9)$$

En el caso particular que la posición y velocidad inicial son nulas ($z_0 = v_0 = 0$)

$$g = \frac{2z(t)}{t^2}. \quad (6.10)$$

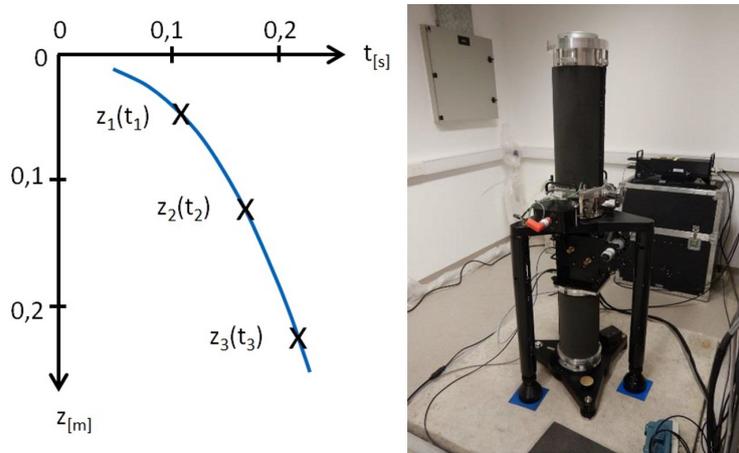


Figura 6.3: Diagrama tiempo-distancia de un gravímetro de caída libre con medición de tiempos a tres alturas fijas (izq.). Gravímetro absoluto portátil FG5-227 fabricado por Micro-g LaCoste™ instalado en AGGO (der.).

Como se están midiendo longitudes y tiempos la medición es absoluta. El error absoluto en la determinación de g es

$$dg = \frac{2}{t^2} dz - \frac{2z}{t^3} dt, \quad (6.11)$$

por lo que el error relativo resulta

$$\frac{dg}{g} = \frac{dz}{z} - \frac{2dt}{t}. \quad (6.12)$$

Por ejemplo, si el tiempo de caída fuera de 1 segundo, la distancia de caída 5 metros, y se desea un error absoluto del orden de 1 *mGal* (el error relativo será $dg/g \approx 10^{-6}$), es necesario medir al tiempo con precisiones absolutas de 0,5 μs , y la distancia de caída con una precisión de 5 μm . Esto se puede lograr a partir de la interferometría láser y con el uso de relojes atómicos.

Actualmente se logran errores absolutos del orden de 1-10 μGal , y relativos de 10^{-9} . Para obtener esas precisiones es necesario aplicar correcciones por mareas terrestres, carga oceánica, movimiento del polo (cambios en la aceleración centrífuga), cambios en la presión del aire (se debe medir la columna de aire existente por encima del gravímetro) y gradiente vertical (corrección de aire libre que aproximadamente es 0,3 *mGal* cada 1 *m*).

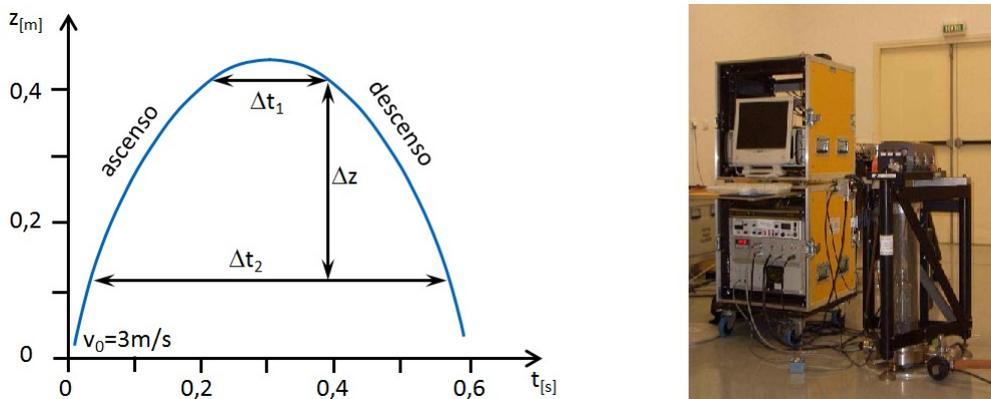


Figura 6.4: Principio de funcionamiento de un gravímetro de tiro vertical con medición de tiempo a dos alturas fijas (izq.). Gravímetro balístico de tiro vertical IMG-C-02 (der.), imagen tomada del trabajo de D'Agostino et al. (2005).

Como en la práctica no es posible asegurar $z_0 = v_0 = 0$, el sistema se inicia en una posición y tiempo diferentes de la nula, y z_0 y v_0 pasan a ser incógnitas adicionales, por lo que se necesitan al menos 3 mediciones para resolver el sistema (6.9):

$$g = \frac{2(z_3 - z_1)(t_2 - t_1) - (z_2 - z_1)(t_3 - t_1)}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}. \quad (6.13)$$

Por cada caída, se suele censar unas 700 veces la posición de la masa y el tiempo de caída, por lo que se obtiene un sistema sobredeterminado y se realiza un ajuste por mínimos cuadrados del valor de gravedad. Además, como la gravedad varía con la altura es necesario tener en cuenta este efecto en la ecuación de movimiento. En la *figura 6.3* se esquematiza el diagrama tiempo-distancia de un gravímetro de caída libre con medición de tiempos a tres alturas fijas.

6.2.3. Tiro vertical

En este caso, en lugar de dejar caer una masa, se la lanza hacia arriba. La ecuación de movimiento es la misma que en el caso anterior (*ecuación 6.8*) y la simetría del problema elimina el efecto de la fricción del aire. El valor de g viene dado por la expresión:

$$g = \frac{8\Delta z}{(\Delta t_1)^2 - (\Delta t_2)^2}. \tag{6.14}$$

En la *figura 6.4* se esquematiza el diagrama tiempo-distancia de un gravímetro de tiro vertical con medición de tiempo a dos alturas fijas.

6.2.4. Exactitud

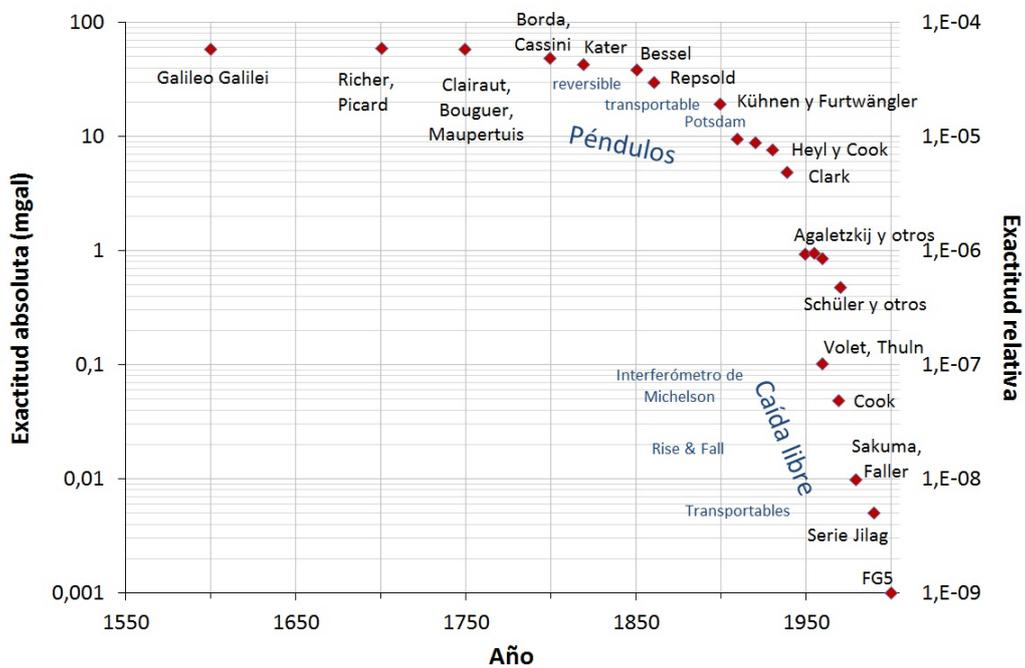


Figura 6.5: Aumento de la exactitud en las mediciones absolutas a lo largo del tiempo. Modificado de Melchior (2009).

En la *figura 6.5* se ilustra el aumento en la exactitud de las mediciones gravimétricas absolutas a lo largo del tiempo, publicado por Melchior (2009). Es evidente la mejora en la exactitud lograda a partir de 1950 con los gravímetros balísticos (tiro vertical y caída libre), que emplean interferometría láser y relojes atómicos.

6.3. Mediciones relativas

Las mediciones relativas son un problema indeterminado que se resuelve observando una de las dos cantidades fundamentales de la aceleración (tiempo o longitud), tomando la otra como fija.

Todos los gravímetros relativos modernos emplean el principio masa-resorte. Si se sujeta una masa m a un resorte, la fuerza de gravedad provocará una elongación del mismo. Por lo tanto, midiendo las variaciones en la elongación del resorte es posible deducir la variación de g . Esta variación de gravedad Δg se obtiene a partir del cómputo de las diferencias de tiempo o longitud entre las estaciones.

Los instrumentos para mediciones relativas son más económicos que los gravímetros absolutos, son menos voluminosos y de manipulación más sencilla.

6.3.1. Resortes estáticos

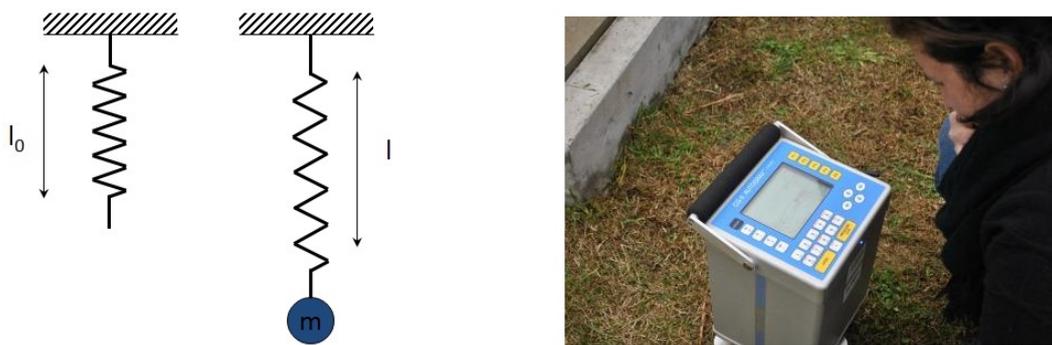


Figura 6.6: Diagrama de un resorte sin masa y con una masa sujeta (izq.). Gravímetro estático Scintrex AUTOGRAV™ CG-5 (der.).

Considerando el resorte vertical de la *figura 6.6*, del cual se suspende una masa m , si la longitud inicial del resorte es l_0 , y luego de sujetar la masa adquiere una longitud l , de acuerdo a la ley de Hooke:

$$k(l - l_0) = mg, \quad (6.15)$$

siendo k la constante física del resorte. Despejando el valor de g :

$$g = \frac{k\Delta l}{m}. \quad (6.16)$$

Como el valor de g no depende únicamente del tiempo y de la longitud y, además, hay involucradas constantes físicas, es un gravímetro relativo que se puede emplear de dos formas:

1. Como gravímetro relativo puro midiendo los cocientes

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2}. \quad (6.17)$$

2. Calibrando el factor k/m mediante mediciones en dos estaciones con gravedad conocida.

Como la longitud inicial l_0 del resorte es difícil de medir, esta última es la forma usual de emplear a los gravímetros de resorte:

$$\Delta g_{1,2} = g_2 - g_1 = \frac{k}{m}(\Delta l_2 - \Delta l_1) = \frac{k}{m}(l_2 - l_1). \quad (6.18)$$

Para lograr una exactitud absoluta de 1 mGal , la constante del gravímetro k/m debe ser calibrada y la elongación del resorte debe ser medida con una precisión relativa de 10^{-6} .

6.3.2. Resortes astáticos

Hasta el desarrollo de los gravímetros CG-3, fabricados por Scintrex™, los resortes estáticos no permitían obtener las exactitudes requeridas en relevamientos gravimétricos modernos. En 1934, LaCoste desarrolló el concepto de *resorte de longitud cero*.

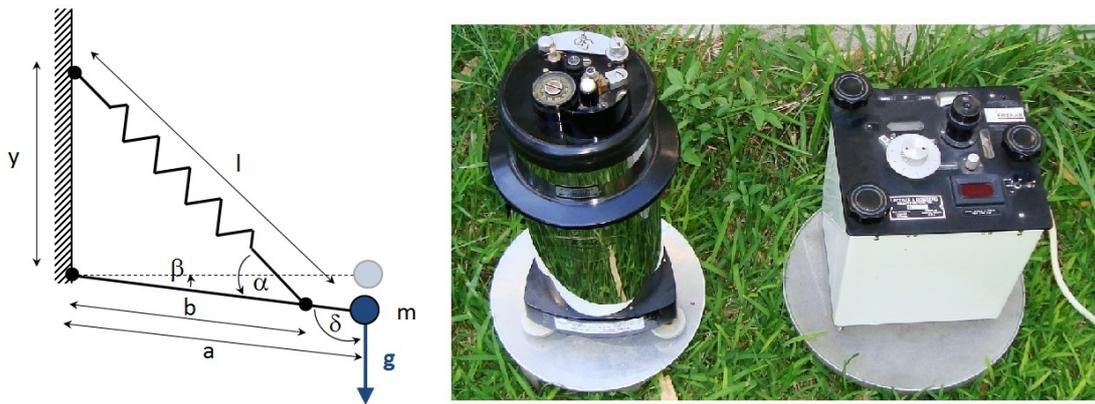


Figura 6.7: Esquema del diseño del gravímetro astático LaCoste&Romberg™ (izq.). Gravímetros astáticos Worden™ y L&R™ de la FCAG (der.).

De la *figura 6.7* se deduce que en caso de equilibrio, cuando el torque ejercido por la gravedad es igual al torque producido por el resorte:

$$mg \cos \beta = k(l - l_0) b \sin \alpha = k(l - l_0) b \frac{y}{l} \cos \beta. \quad (6.19)$$

Con lo que se llega a

$$g = \frac{kb}{ma} \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) y. \quad (6.20)$$

Esta ecuación es independiente de β : aunque se mueva la palanca, el sistema permanece en equilibrio.

La *sensibilidad* del instrumento dl/dg se obtiene a partir de la forma diferencial de esta última expresión:

$$\frac{dl}{dg} = \frac{m a l l}{k b l_0 y}. \quad (6.21)$$

Se denomina *astatización* al incremento en la sensibilidad mecánica del sistema rotacional obtenido a través de la disminución del torque restitutivo ejercido por el resorte o del aumento del torque ejercido por la gravedad. En el caso recién visto, esto se lleva a cabo por construcción del sistema mecánico, aunque otros sistemas incluyen resortes adicionales para lograrlo.

El desempeño de este tipo de gravímetros depende de las propiedades del material con el cual se construye el resorte. Para las exactitudes requeridas, el resorte no es completamente elástico, lo que provoca un *drift* o *deriva* en las mediciones. Los gravímetros LaCoste&Romberg™ usan un resorte metálico, mientras que los gravímetros Worden™ usan resortes de cuarzo. Las ventajas y desventajas de estos resortes se resumen en el *cuadro 6.1*.

	Resorte metálico L&R™	Resorte de cuarzo Worden™
Expansión térmica	alta, requiere aislamiento	baja y lineal
Influencia magnética	si	no
Peso	más pesado	más liviano
Drift	bajo	alto

Cuadro 6.1: Ventajas y desventajas al emplear resortes metálicos y de cuarzo (Sneeuw, 2006).

6.3.3. Gravímetros superconductores

Los gravímetros superconductores (SG; *figura 6.8*) pertenecen a la familia de gravímetros relativos tipo masa-resorte. Pero, al contrario que los clásicos gravímetros LaCoste&Romberg™ o Worden™, los SG no poseen resorte. Éste es reemplazado por un *resorte virtual* que emplea el principio de levitación magnética de la masa de prueba. Es por ello que los SG no están limitados por las desventajas inherentes a los resortes mecánicos, y prácticamente no poseen drift. El mismo es del orden de algunos μGal por año, contra μGal por mes en el caso de los resortes mecánicos.

El elemento básico del sensor gravimétrico del SG es una esfera superconductora situada dentro de la *unidad de sensado gravimétrico* (GSU), alojada dentro de un baño de helio en un termo *dewar* super aislante (*figura 6.8*). La esfera superconductora es de niobio, de 2,54 cm de diámetro y aproximadamente 5 g de peso, y levita en un campo magnético ultra estable generado por bobinas superconductoras de niobio situadas por encima y por debajo de ella. La



Figura 6.8: Diagrama de la parte criogénica del gravímetro superconductor (Goodkind, 1999) (izq.), e imagen del gravímetro SG038, fabricado por GWR, del Observatorio Argentino-Alemán de Geodesia, AGGO (der.).

corriente en las bobinas es constante y su resistencia es prácticamente nula mientras permanezcan por debajo de los 4,7 K.

Debido a las condiciones de operación, la GSU está casi completamente aislada de efectos ambientales causados por variaciones en la temperatura externa, humedad y presión atmosférica, en contraste con el gravímetro mecánico masa-resorte que opera cerca de la temperatura ambiente y se ve más afectado por efectos ambientales. La fuerza de levitación puede ser ajustada modificando la corriente que circula por las bobinas.

A diferencia del resto de los gravímetros relativos, los SG se utilizan para medir las variaciones del campo de gravedad con respecto al tiempo. Están pensados para permanecer un tiempo prolongado en un punto determinado, mientras que los L&R™ o los Scintrex AUTOGRAV™ son más versátiles y están pensados para trabajos de campo.

6.3.4. Drift o deriva instrumental

El *drift* o *deriva instrumental* es una variación temporal que se observa en las mediciones a lo largo del tiempo en un gravímetro relativo. Éste es generado por el desgaste propio de cada instrumento y otros componentes, como el sistema de resortes y palancas. Pequeñas variaciones en la temperatura de operación del equipo también pueden generar variaciones en la deriva.

El paso del tiempo produce un desgaste en el instrumento, principalmente en su sistema de resortes y en las fibras de torsión. Este efecto genera pequeñas variaciones en las lecturas realizadas con el instrumental. Cada gravímetro presenta un comportamiento distinto de la deriva debido al material con el que esté fabricado el sistema de resortes (por ejemplo, los los gravi-

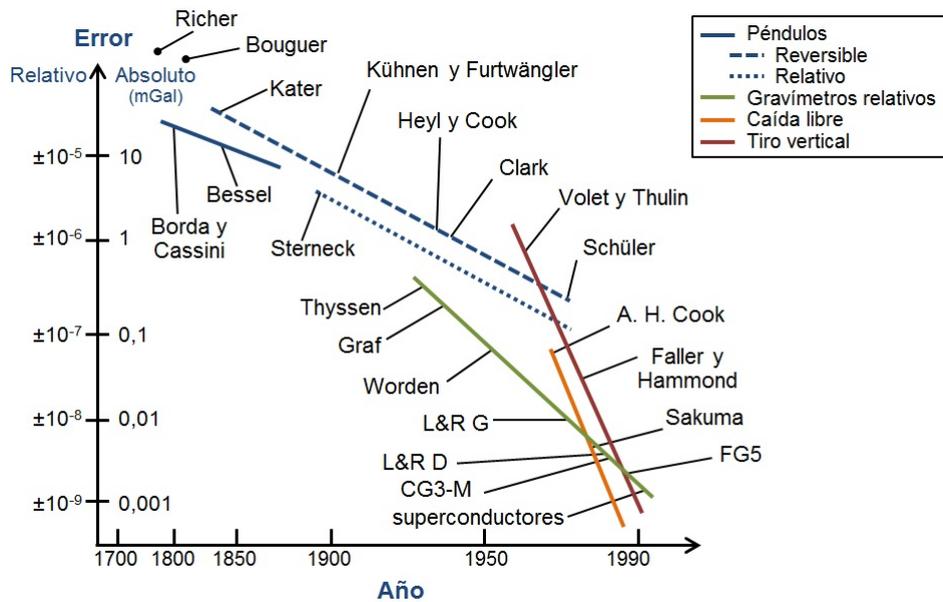


Figura 6.9: Error relativo en las mediciones con gravímetros relativos y absolutos a lo largo del tiempo. Modificado de Torge (1989) y Bonvalot (2009).

metros Scintrex™ presentan una deriva más alta que los gravímetros Lacoste & Romberg™).

La deriva instrumental suele dividirse en dos términos: uno *estático* y otro *dinámico*. La deriva estática está asociada al desgaste propio del instrumento y estaría presente aún si mantuviera el instrumento en una estación de medición y midiendo en condiciones ideales. En cambio, la deriva dinámica está relacionada al efectos generados por el transporte y la manipulación del instrumento.

Para obtener valores de gravedad, el efecto de deriva instrumental debe ser corregido de las observaciones.

6.3.5. Precisiones

En la *figura 6.9* se muestra el error relativo en las mediciones con gravímetros relativos y absolutos a lo largo del tiempo.

6.4. Mediciones gravimétricas marinas

Existen dos formas de medir la gravedad en el mar:

1. Bajando el gravímetro al fondo del mar en un recipiente resistente al agua. En este caso la medición es muy precisa ($0,1 \text{ mGal}$) pero cada lectura consume mucho tiempo ya que se debe detener el barco, bajar el instrumento hasta el fondo marino, y nivelarlo.

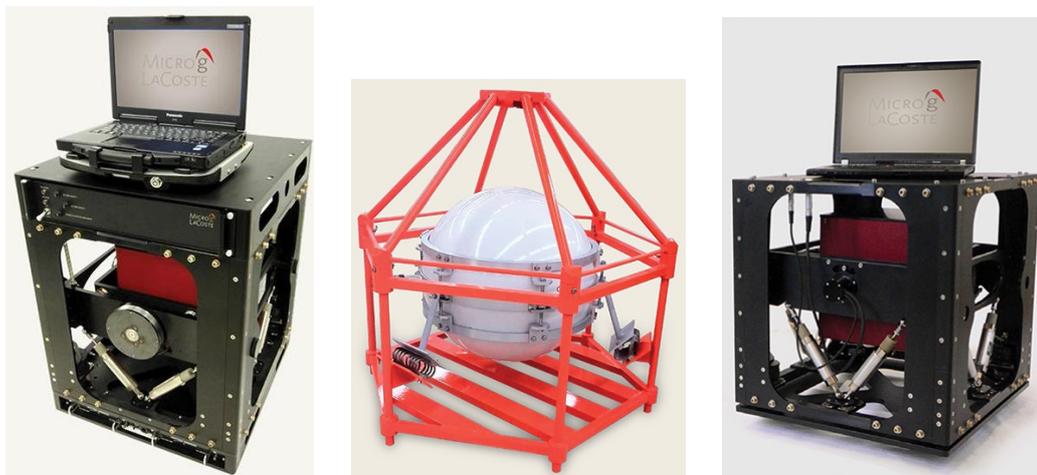


Figura 6.10: Gravímetro marino MG-6³, fabricado por Micro-g LaCoste™ con repetitividad dinámica de lectura de 0,75 *mGal* en dos minutos (izq.). Gravímetro para mediciones en el fondo marino INO⁴, fabricado por Scintrex™, con repetitividad de lectura menor a 5 μ *Gal* (centro). Gravímetro aéreo TAGS-7⁵, fabricado por Micro-g LaCoste™ con repetitividad de lecturas de 0,75 *mGal* (der.).

2. El gravímetro se sitúa en una de las cubiertas de un barco en movimiento, sobre una plataforma giroscópicamente estabilizada para mantenerlo nivelado. De esta forma se pueden realizar mediciones continuas. Como el gravímetro no se encuentra en el fondo marino no puede detectar anomalías pequeñas. Las mediciones deben corregirse por el movimiento del barco, aplicando la corrección de Eötvös, y por el movimiento vertical debido a las olas, para lo cual se promedian las lecturas durante algunos minutos. La precisión es en general de 0,5 a 1 *mGal*. Además, como la profundidad del agua es un parámetro muy importante al momento de procesar los datos, se suele realizar batimetría de alta resolución, junto con el relevamiento gravimétrico.

6.5. Mediciones gravimétricas aéreas

En este caso, las mediciones gravimétricas se realizan con aviones o helicópteros en movimiento. El gravímetro debe estar en una plataforma giroscópicamente estabilizada. Se debe aplicar la corrección de Eötvös y el movimiento puede causar turbulencia atmosférica que debe ser corregida. La precisión es de aproximadamente 1 *mGal*.

³Imagen extraída de <http://microglacoste.com/product/mgs-6/>.

⁴Imagen extraída de <https://scintrexltd.com/product/ino-sea-floor-gravity-meter/>.

⁵Imagen extraída de <http://microglacoste.com/product/tags-7-dynamic-gravity-meter/>.

6.6. Mediciones satelitales

Antes de que se realizaran mediciones satelitales, el campo gravitatorio terrestre se conocía con gran precisión sólo en unas pocas regiones del mundo, ya que la información se obtenía principalmente a partir de relevamientos terrestres y aéreos. La importancia de conocer el campo global de gravedad terrestre radica en que éste refleja cómo es la *distribución de masas* en el interior y en la superficie terrestre y, además, es fundamental para la *determinación del geode*.

Un gran número de procesos terrestres que son variables en el tiempo pueden ser pensados como cambios en la distribución de masas, por lo que afectan al campo de gravedad. Entre ellos podemos mencionar la circulación oceánica, cambios en las masas de hielo, variaciones en el nivel del mar, mareas, vulcanismo, rebote isostático, etc. Todas estas variaciones están referidas al geode, que es una superficie física global de referencia. Por lo tanto, cuanto mejor se conozca al geode, mayor será exactitud para entender los procesos dinámicos recién mencionados.

A lo largo del tiempo evolucionaron tres conceptos de medición satelital diferentes, que se materializaron en tres misiones satelitales del campo de gravedad distintas:

- Seguimiento satélite-satélite (SST, por sus siglas en inglés de *Satellite to Satellite Tracking*) en modo *high-low* llevado a cabo por la misión “Challenging Minisatellite Payload” (CHAMP).
- Seguimiento satélite-satélite en modo *low-low* realizado por el “Gravity Recovery and Climate Experiment” (GRACE).
- Gradiometría de gravedad satelital, objetivo de la misión “Gravity Field and Steady State Ocean Circulation Explorer” (GOCE).

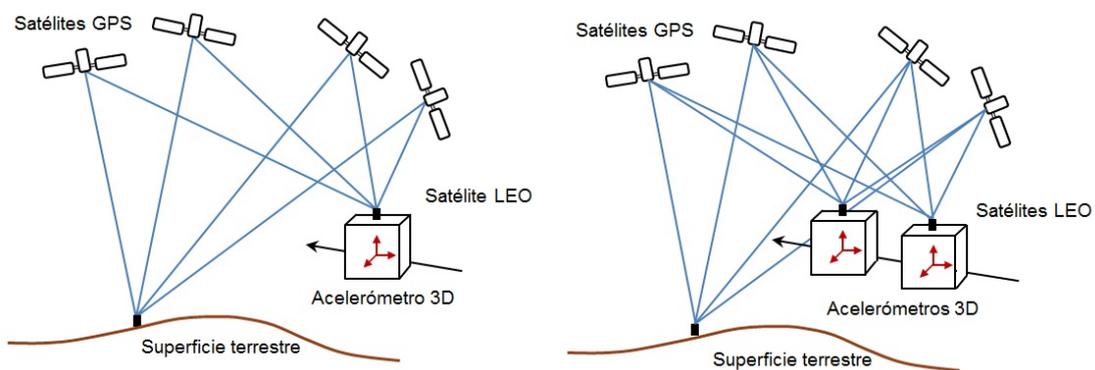


Figura 6.11: Seguimiento satélite-satélite en modo high-low (izq.) y low-low (der.). Modificada de Hofmann-Wellenhof y Moritz (2005).

6.6.1. Seguimiento satélite-satélite en modo high-low

Consiste en una determinación tridimensional de la posición, velocidad o aceleración de un satélite de órbita baja (*figura 6.11*). Se realiza un seguimiento continuo de la órbita del satélite de órbita terrestre baja (LEO por sus siglas en inglés de *Low Earth Orbit*) con satélites de sistemas de posicionamiento global como GPS (por sus siglas en inglés de *Global Positioning System*). Además del seguimiento satélite-satélite, el satélite LEO emplea un acelerómetro. En principio, son medidas las perturbaciones en la aceleración en tres dimensiones causadas por el campo de gravedad terrestre. Estas aceleraciones corresponden a las primeras derivadas del potencial gravitacional V por lo que el campo de gravedad es obtenido por inversión de la información adquirida de la órbita del satélite.

6.6.2. Seguimiento satélite-satélite en modo low-low

Consiste en medir la diferencia en la distancia, velocidad o aceleración entre dos satélites de órbita baja (*figura 6.11*). Los satélites LEO se sitúan en la misma órbita pero separados por algunos cientos de kilómetros (del orden de 220 km en el caso de GRACE). La distancia y velocidad entre los satélites se mide con gran precisión. La órbita de cada LEO se ve afectada por aceleraciones perturbadoras que corresponden a las primeras derivadas del potencial gravitacional, y de la combinación de las mediciones de los satélites resulta en diferencias de aceleraciones. Además, la posición de cada LEO es determinada por satélites GPS. El efecto de las fuerzas no gravitacionales sobre los satélites, como la resistencia del aire, debe ser compensado o medido con un acelerómetro.

6.6.3. Gradiometría de gravedad satelital

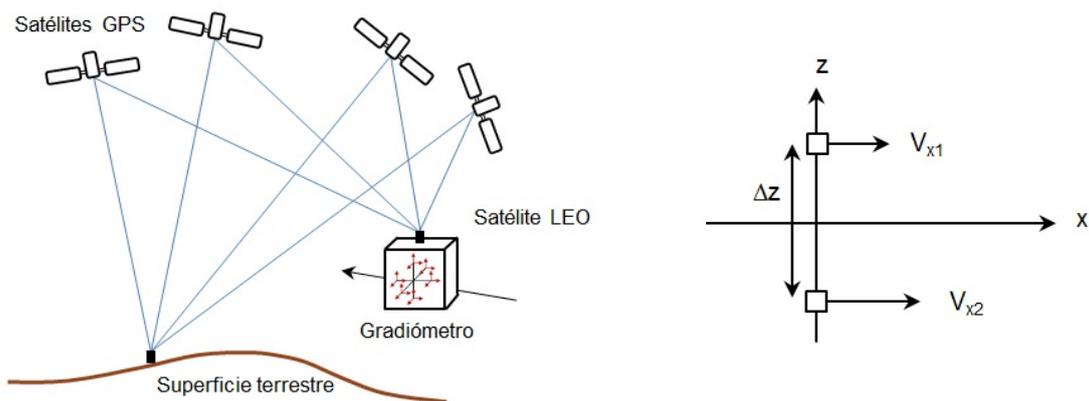


Figura 6.12: Gradiometría gravimétrica satelital con gradiómetro de tres ejes (izq.) y esquema de medición de la derivada segunda V_{xz} (der.). Modificada de Hofmann-Wellenhof y Moritz (2005).

A diferencia del modo low-low recién descrito, en el caso de gradiometría de gravedad satelital la distancia entre los acelerómetros tiende a cero. Esto se logra ubicando acelerómetros en un mismo satélite (*figura 6.12*). La gradiometría satelital consiste en medir diferencias de aceleraciones en tres direcciones espaciales ortogonales entre las masas de prueba de seis acelerómetros (dos por cada uno de los tres ejes) dentro del satélite. Por lo tanto, la señal medida corresponde a los gradientes de las componentes de la aceleración de la gravedad, es decir, las derivadas segundas del potencial gravitacional. Por ejemplo, a partir de la *figura 6.12*:

$$\frac{V_{x2} - V_{x1}}{\Delta z} = \frac{\Delta V_x}{\Delta z} \doteq \frac{\partial V_x}{\partial z} = V_{xz}. \quad (6.22)$$

6.7. Resolución en relevamientos gravimétricos

De forma cualitativa se puede definir la *resolución* como la capacidad de diferenciar dos rasgos que se encuentran muy próximos entre sí. En gravimetría es posible cuantificarla en función de la exactitud del sistema de medición (*mGal*) para la mínima longitud de onda que se puede resolver (*km*).

En la *figura 6.13* se resume la resolución que es posible lograr en operaciones terrestres, en pozo, bajo agua, con gradiómetros, en barco, aéreas y desde satélites; publicada por Chapin en 1998, y por LaFehr y Nabighian en 2012.

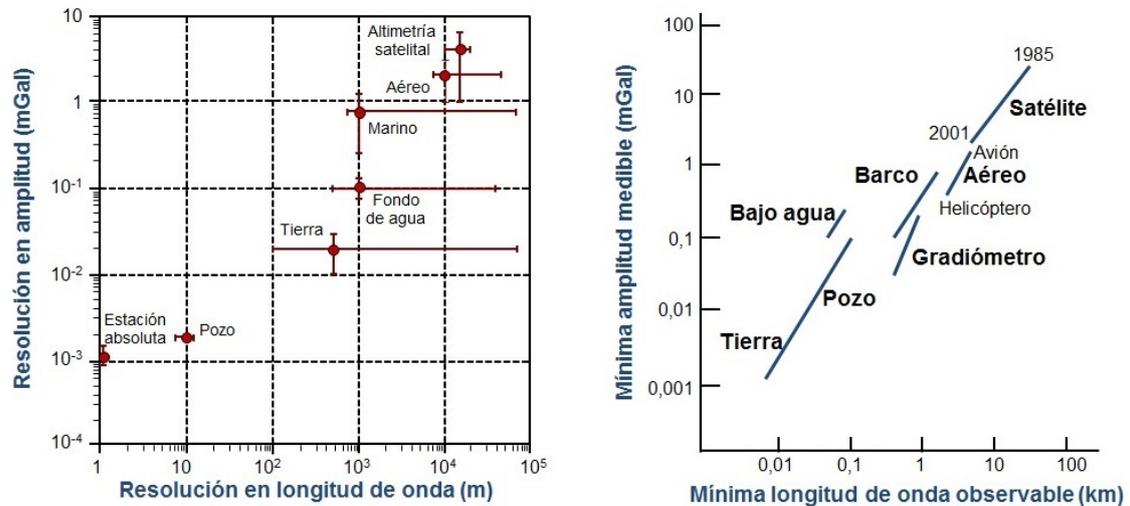


Figura 6.13: Exactitud de diferentes tipos de relevamientos publicados por Chapin en 1998 (izq.) y LaFehr y Nabighian en 2012 (der.).

En relevamientos estáticos, como son los terrestres, de pozo y las mediciones bajo agua, se realizan lecturas discretas y la longitud de onda observable es una función del espaciado entre estaciones. Las mediciones dinámicas como las aéreas y marinas, se ven influenciadas

por ruido inducido por incertezas y variabilidad en la velocidad y posición, y por el estado del mar o turbulencias del aire. En estos casos la resolución hace referencia a los mejores valores que se obtendrían en una situación de vuelo o navegación ideal. Por ejemplo, la resolución en relevamientos marinos se degrada mucho ante mal estado del mar, y en relevamientos aéreos el vuelo se ve afectado por turbulencias y está lejos de ser rectilíneo y nivelado.

Teniendo presente lo recién mencionado, se concluye que, en condiciones de trabajo aceptables, es posible lograr en relevamientos terrestres y en pozo resoluciones de 1 a 20 μGal ; para relevamientos estacionarios bajo el agua entre 0,1 y 0,2 $mGal$; para relevamientos en la superficie marina 0,1 $mGal$ y longitudes de onda menores a 500 m . Para aerogravimetría, con aviones de alas fijas, 1 $mGal$ y longitudes de onda menores a 2 km ; y para aerogravimetría con helicópteros menos de 0,5 $mGal$ y longitudes de onda menores a 1 km .

Las anomalías de aire libre sobre los océanos basadas en mediciones satelitales se aproximan a resoluciones de 2 a 5 $mGal$ y longitudes de onda de 5 a 10 km .

Por supuesto que estos valores están sujetos a debate y muchas veces es difícil encontrar datos comparables provenientes de diferentes compañías, ya que existen numerosas formas de presentar la resolución.

6.8. Sistemas de referencia gravimétricos

Un *sistema de referencia gravimétrico* es un conjunto de definiciones, estándares y recomendaciones para realizar mediciones de gravedad, ya sean absolutas o relativas. La forma de materializar dicho conjunto de convenciones es definiendo un *marco de referencia gravimétrico*. Éste consiste en puntos con coordenadas y gravedades conocidas medidas sobre la superficie terrestre. Las *redes gravimétricas* globales, continentales y/o nacionales son redes de puntos en donde se conoce el valor de la aceleración de la gravedad y forman parte de las densificaciones del marco de referencia gravimétrico.

En esta sección se enumeran los principales sistemas gravimétricos y se describen las redes gravimétricas vigentes en la República Argentina. Cabe destacar que tanto la Red Argentina de Gravedad Absoluta (RAGA), la Red de Primer Orden de la República Argentina (RPO-Ar) y la Red de Segundo Orden de la República Argentina (RSO-Ar), fueron oficializadas por el Instituto Geográfico Nacional (IGN) a partir del 2 de enero de 2017. A partir de las disposiciones DI-2017-2-APN-IGN#MD y DI-2017-3-APN-IGN#MD del IGN, se establece el nuevo Marco de Referencia Gravimétrico Nacional⁶.

⁶<http://www.ign.gob.ar/content/oficializaci%C3%B3n-del-nuevo-sistema-vertical-de-referencia-nacional>

6.8.1. Sistema gravimétrico Potsdam

En la XVI Conferencia de la Asociación Internacional de Geodesia (IAG) celebrada en Londres en 1909, se adoptó como datum gravimétrico al Sistema Potsdam, que reemplazó al sistema Vienna, oficializado en la XIII Conferencia de la IAG llevada a cabo en París en 1900. La exactitud del Sistema Potsdam fue estimada en $\pm 3 \text{ mGal}$, corregía al Sistema Viena en -16 mGal (Morelli et al., 1972) y continuó vigente hasta 1971.

El pilar de referencia para el sistema Potsdam se encontraba en Potsdam, Alemania, y en el año 1906 se realizó la vinculación Buenos Aires-Potsdam, con un gravímetro cuadripéndular Von Sterneck. Años más tarde, en el año 1928, el Ing. Félix Aguilar realizó una segunda vinculación con Potsdam mediante un nuevo equipo cuadripéndular Askania Werke compuesto por cuatro péndulos de invar. En ese mismo año se efectúa una determinación gravimétrica en el pilar del Observatorio Astronómico de La Plata, que había sido vinculado a una estación gravimétrica en Padua, Italia, en el año 1905. Más tarde, se realiza otra vinculación al Observatorio Nacional de Córdoba, que había sido adoptado como punto astronómico fundamental.

En 1954 se realiza una nueva vinculación pero esta vez entre el pilar gravimétrico Estación Fundamental Buenos Aires A en las instalaciones pertenecientes al Instituto Geográfico Militar (IGM), en el partido de San Martín, y Bad Hardzburg (Alemania). La vinculación se realizó utilizando un gravímetro cuadripéndular Askania con el que se determinó el valor del nuevo datum gravimétrico nacional: $979705,0 \text{ mGal}$.

6.8.2. Red de Estandarización Gravimétrica Internacional (IGSN71)

En 1971, en la XV Asamblea General de la Unión Internacional de Geodestas y Geofísicos (IUGG) llevada a cabo en Moscú, se adopta la red gravimétrica IGSN71 (International Gravity Standardization Net 1971) como el nuevo sistema gravimétrico internacional, reemplazando al Sistema Potsdam. La red se materializó con mil ochocientos cincuenta y cuatro estaciones (*figura 6.14*) cuyos valores gravimétricos surgen de una compensación por mínimos cuadrados, en la cual participaron observaciones pendulares, relativas y absolutas de todo el mundo. Los desvíos estándar de los valores gravimétricos fueron inferiores a $\pm 0,1 \text{ mGal}$ (Morelli et al., 1972).

Del total de los puntos de la red, treinta y cuatro de ellos se encontraban en la República Argentina.

6.8.3. Base de Calibración de la República Argentina (BACARA)

La Base de Calibración de la República Argentina (BACARA) constituye la antigua Red Gravimétrica de Primer Orden de la República Argentina. La denominada Operación BACARA fue llevada a cabo en el año 1968, mediante una labor conjunta del Instituto Geográfico Militar (IGM), Yacimientos Petrolífero Fiscales (YPF), el Servicio de Hidrografía Naval (SHN) y el Ins-

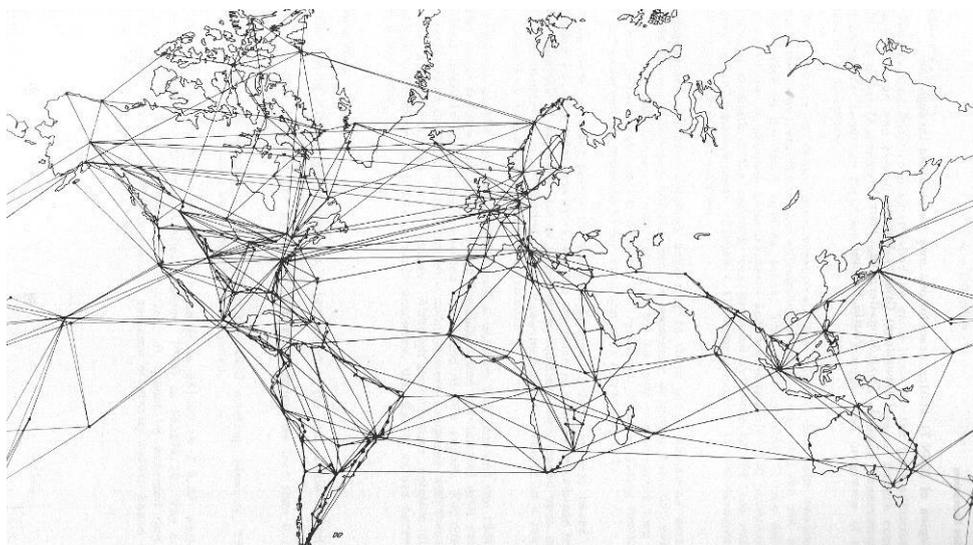


Figura 6.14: Red de Estandarización Gravimétrica Internacional (IGSN71). Extraída de Morelli et al. (1972).

tituto de Geodesia (IG) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires, con la colaboración del Servicio Geodésico Interamericano (IAGS) (IGM, 1971).

La Operación BACARA permitió la determinación de ochenta y seis valores de gravedad en la Argentina, veintiún en Bolivia, tres en Uruguay y dos en Paraguay. Las mediciones se llevaron a cabo con cuatro gravímetros LaCoste & Romberg™ facilitados por el IAGS, y un gravímetro Worden™ provisto por el IG. Los puntos gravimétricos se localizaron en aeródromos de uso comercial o en puntos cercanos a los mismos sobre caminos pavimentados.

La red BACARA fue compensada en dos oportunidades. La primera compensación fue realizada por el IGM, mientras que la segunda fue ejecutada por el SHN conjuntamente con el IG. Ambas compensaciones fueron ajustadas al Sistema Potsdam y los desvíos estándar de sus valores gravimétricos fueron inferiores a $\pm 0,085 \text{ mGal}$ (IGM, 1970). Los resultados finales del proyecto BACARA fueron presentados en la XV Asamblea General de la IUGG en la ciudad de Moscú en 1971 (IGM, 1971).

La red IGSN71 contaba con once puntos coincidentes con puntos de la red BACARA. De este modo, en el año 1988, el IGM desarrolló un programa de compensación de redes gravimétricas en lenguaje FORTRAN, basado en los trabajos realizados por el Dr. Hermann Drewes, que permitió la transformación de la red BACARA al sistema gravimétrico IGSN71.

6.8.4. Primera Red Gravimétrica Absoluta

En el año 1988 se llevó a cabo la primera parte del proyecto de medición absoluta de la gravedad con el gravímetro interferométrico JILAG-3, perteneciente al Instituto de Geodesia de la Universidad de Hannover. Este proyecto contó con el auspicio del mencionado Instituto (cuyo

Director era el Dr. Wolfgang Torge), del Instituto de Geodesia de la Universidad de Buenos Aires, y del IGM. Posibilitó la medición de la gravedad en forma absoluta sobre puntos localizados en Buenos Aires (Estación Fundamental Buenos Aires A), Tandil (Buenos Aires) y San Lorenzo (Salta).

En el año 1991 se ejecuta la segunda etapa del proyecto. Esta vez se realizan mediciones en una estación próxima a la Estación Fundamental Buenos Aires A, ya que por un problema de napas freáticas que afecta a esa zona, no se pudo estacionar el equipo en dicho punto. También se realizan mediciones en el Instituto Geofísico Sismológico Ing. Fernando Volponi (San Juan) y en Comodoro Rivadavia (Chubut; Torge et al., 1995).

La exactitud estimada de los valores de gravedad determinados en los años 1988 y 1991 fue de $\pm 0,007 \text{ mGal}$.

6.8.5. Red Argentina de Gravedad Absoluta (RAGA)

Durante los años 2013 y 2014, en un trabajo conjunto entre el Instituto Geográfico Nacional (IGN), la Universidad Nacional de Rosario (UNR), la Universidad de San Pablo (USP), el Instituto Francés de Investigación para el Desarrollo (IRD), la Universidad Nacional de San Juan (UNSJ) y la Universidad Nacional de La Plata (UNLP), se logró materializar una red integrada por treinta y cinco puntos de gravedad absoluta distribuidos en forma homogénea a lo largo del territorio argentino y uno en la República Oriental del Uruguay (*figura 6.15*).

La medición se llevó a cabo con dos gravímetros absolutos Micro-g LaCoste™ A10, pertenecientes a la USP y el IRD. El procesamiento de la red RAGA se realizó simultáneamente en la USP, el IGN y el IRD, a partir del cual se obtuvieron las gravedades finales de las treinta y seis estaciones gravimétricas con un desvío estándar de $\pm 0,020 \text{ mGal}$ (Lauría et al., 2015).

6.8.6. Red Gravimétrica de Primer Orden de la República Argentina (RPO-Ar)

La Red Gravimétrica de Primer Orden de la República Argentina (RPO-Ar) está compuesta por un total de 227 puntos distribuidos de manera homogénea en todo el territorio argentino. La totalidad de los puntos fue medida entre los años 2012 y 2015 utilizando 5 gravímetros relativos: tres Lacoste & Romberg™ y dos Scintrex AUTOGRAV™ CG-5.

Los 227 puntos que componen la red coinciden, en su mayoría, con los puntos Nodales de la Red de Nivelación de Alta Precisión de la República Argentina. El procesamiento de las observaciones gravimétricas se realizó mediante el software GRAVDATA (Drewes, 1978). Dicho programa realiza el cálculo de la corrección de marea utilizando el modelo propuesto por Cartwright y Edden (1973), el cual aproxima el potencial de marea terrestre con un desarrollo en armónicos esféricos de 505 coeficientes. En cuanto al ajuste de las observaciones, el mismo fue realizado con el programa GRADJ (Andersen y Forsberg, 1996), el cual realiza un ajuste por mínimos cuadrados de las observaciones, considerando los valores de deriva y las precisiones de las lecturas.

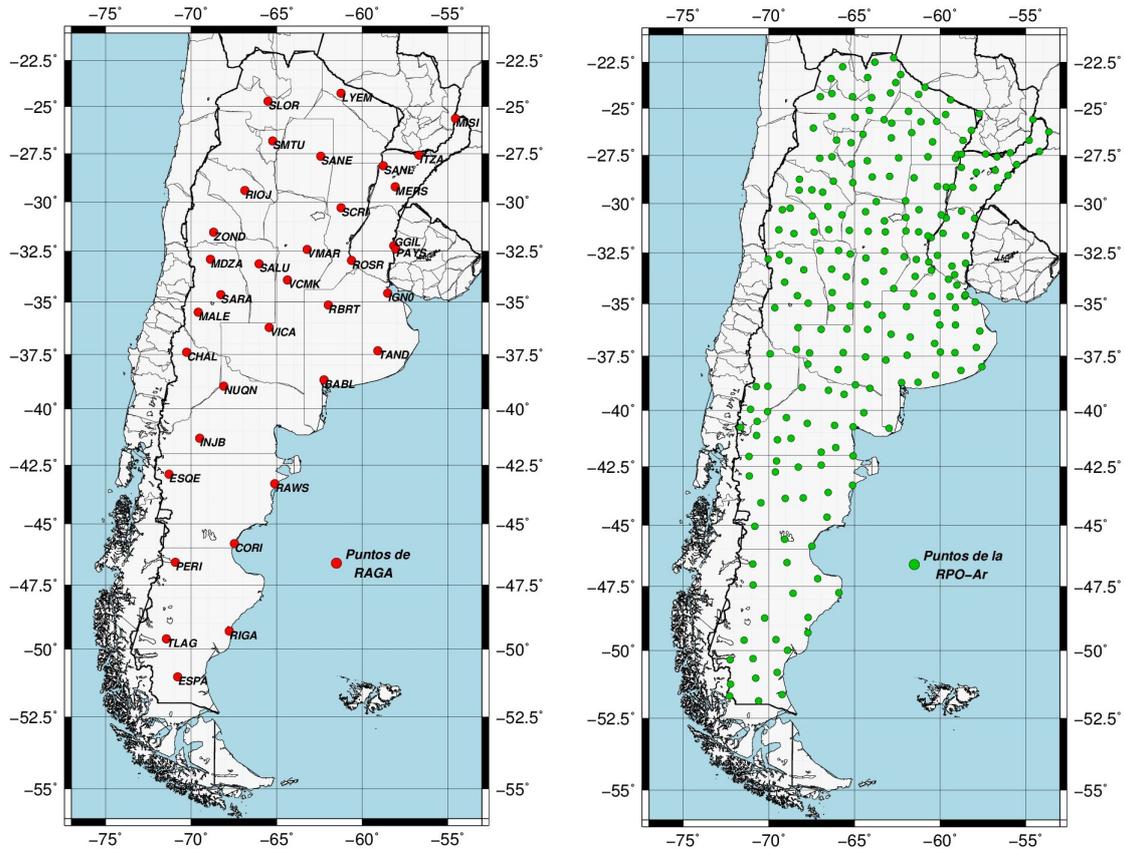


Figura 6.15: Distribución de estaciones de la Red RAGA (izq.) y de la Red RPO-Ar (der).

Como resultado de dicho ajuste se obtuvieron los valores de aceleración de gravedad para 227 puntos distribuidos en toda la República Argentina. Los desvíos estándar resultaron, en todos los casos, menores a $0,04 \text{ mGal}$ (Antokoletz, 2017).

La RPO-Ar reemplaza a la antigua red de primer orden, BACARA, que contaba con un total de 86 puntos y desvíos estándar del orden de $0,085 \text{ mGal}$, siendo la RPO-Ar, más actualizada y con una distribución de puntos considerablemente más homogénea. En la figura 6.15 se puede ver la distribución de puntos de la RPO-Ar.

6.8.7. Red Gravimétrica de Segundo Orden de la República Argentina (RSO-Ar)

La RSO-Ar es coincidente con los puntos que componen la Red de Nivelación de Alta Precisión de la República Argentina (figura 6.16). Hasta el año 1988, los puntos de la RSO-Ar fueron vinculados a la red BACARA y, por lo tanto, muchos de sus valores de gravedad fueron trans-

formados al sistema IGSN71 mediante una corrección de $-14,93 \text{ mGal}$ (Moirano et al., 2002). En la actualidad, la red está compuesta por aproximadamente catorce mil pilares que coinciden, en su mayoría, con puntos altimétricos de la red de nivelación de alta precisión (Piñón et al., 2014).

Esta red se comenzó a medir en la década del '50 por lo que cuenta con observaciones gravimétricas de varios gravímetros relativos. Entre los años 2014 y 2016, el Instituto Geográfico Nacional y la Universidad Nacional de La Plata recopilaron la información necesaria para reprocesar y reajustar las observaciones gravimétricas, utilizando como puntos de referencia puntos de la red RAGA y de la RPO-Ar.

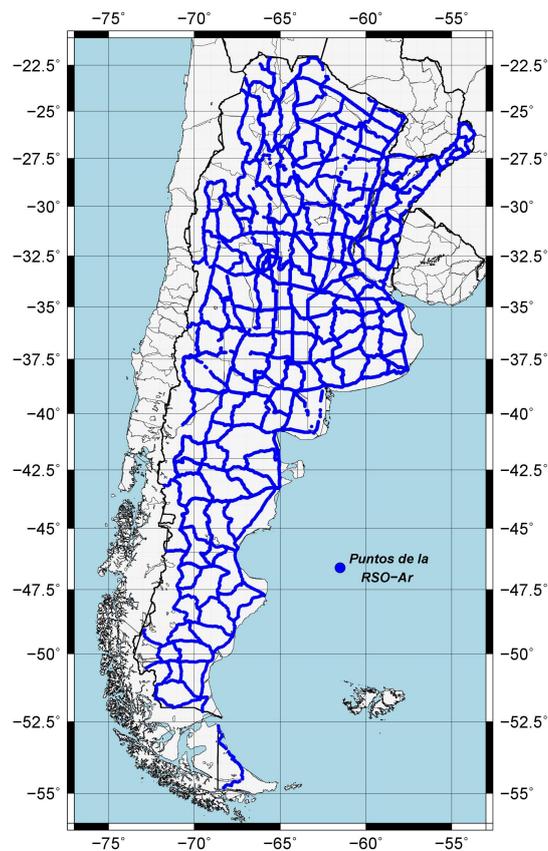


Figura 6.16: Distribución de estaciones de la Red RSO-Ar.

6.9. Preguntas de estudio

- Enumerar las diferencias entre determinaciones absolutas y relativas de la gravedad y qué instrumentos se utilizan para tales fines.
- ¿Cómo se conoce el principio de funcionamiento del gravímetro que consiste en igualar el momento de la gravedad con el momento del resorte, lo cual produce un aumento de la sensibilidad, lo cual se traduce en unas mediciones muy precisas de los incrementos de la gravedad?
 - Feed back
 - Astatización
 - MRV
- Explicar brevemente el esquema de funcionamiento del gravímetro astático Lacoste & Romberg™.
- Describa brevemente el sistema gravimétrico de Potsdam.
- Describa brevemente el sistema gravimétrico IGSN71.
- Describa brevemente el estado actual de las redes gravimétricas en Argentina.

Referencias

- Andersen, O. B. y Forsberg, R. (1996). *Danish precision gravity reference network (Vol. 4)*. Kort & matrikelstyrelsen.
- Antokoletz, E. D. (2017). *Red Gravimétrica de Primer Orden de la República Argentina*. Tesis de grado en Geofísica. Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de La Plata.
- Bonvalot, S. (2009). *Monitoring gravity variations*. 2nd La Plata International School on Astronomy & Geophysics.
- Cartwright, D. y Edden, A. C. (1973). *Corrected tables of tidal harmonics*. Geophysical Journal International, 33(3), 253-264.
- Chapin, D. (1998). *Gravity instruments: Past, present, future*. The Leading Edge.
- D'Agostino, G., Desogus, S., Germak, A. y Origlia, C. (2005). *Absolute measurements of the acceleration due to gravity in Sèvres (France), for the ICAG-2005*. IMGC Technical Report 141.
- Drewes, H. (1978). *Zur Ausgleichung von Gravimeternetzen*. ZfV, 103(10), 485-496.
- Goodkind, J. M. (1999). *The superconducting gravimeter*. Review of Scientific Instruments, 70, 4131.
- Hofmann-Wellenhof, B. y Moritz, H. (2005). *Physical Geodesy*. Springer.
- Instituto Geográfico Militar (1970). *Informe nacional de actividades gravimétricas para el período 1965-1970*. VI Reunión de la Comisión Gravimétrica Internacional de la Asociación Internacional de Geodesia, París, Francia.
- Instituto Geográfico Militar (1971). *Informe nacional de actividades*. XV General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics, Moscú, URSS.
- Kater, H. (1818). *An account of experiments for determining the length of the pendulum vibrating seconds in the latitude of London*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London.

- LaCoste, L. J. Jr. (1934). *A new type long period vertical seismograph*. *Physics*, 5(7), 178-180.
- LaFehr, T. R. y Nabighian, M. N. (2012). *Fundamentals of Gravity Exploration*. Society of Exploration Geophysicists.
- Lauría, E. A., Pacino, M. C., Blitzkow, D., Cimbaro, S. R., Piñón, D. A., Miranda S. y Tocho, C. (2015). *Argentine Absolute Gravity Network (AAGN)*. 26th General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics, Prague, Czech Republic.
- Melchior, P. (2009). *Physical methods, instruments and measurements - Vol. II - Gravimetric Measuring Techniques*. Encyclopedia of Life Support Systems.
- Moirano, J., Brunini, C., Font, G., Lauría, E. A. y Ramos, R. (2002). *Hacia una nueva referencia vertical en Argentina*. Acta XXI Reunión Científica de Geofísica y Geodesia. AAGG, Rosario, Argentina.
- Morelli, C., Gantar, C., McConnell, R., Szabo B. y Uotila, U. (1972). *The international gravity standardization net 1971 (IGSN71)*.
- Neumeyer, J. (2010). *Superconducting Gravimetry*. Sciences of Geodesy - I: Advances and Future Directions. Chapter 10. Guochang Xu (ed). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Niebauer, T. (2007). *Gravimetric Methods - Absolute Gravimeter: Instruments Concepts and Implementation*. Elsevier.
- Piñón, D. A., Guagni, H. J. y Cimbaro, S. R. (2014). *Nuevo ajuste de la red de nivelación de alta precisión de la República Argentina*. XXVII Reunión Científica de la AAGG, San Juan, Argentina.
- Sneeuw, N. (2006). *Physical Geodesy*. Lecture Notes.
- Timmen, L. (2010). *Chapter 1: Absolute and Relative Gravimetry*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Torge, W. (1989). *Gravimetry*. Walter de Gruyter. Berlin. New York.
- Torge, W., Timmen, L., Röder, R. H. y Schnüll, M. (1995). *Large Scale Absolute Gravity Control in South America—JILAG-3 Campaigns 1988–1991*. Gravity and Geoid (pp. 46-55): Springer.

Páginas web:

Micro-g LaCoste. <http://microglacoste.com/>

Scintrex Geoscientific Sensors. <http://scintrexltd.com/>

Péndulo de Gulf. https://americanhistory.si.edu/collections/search/object/nmah_892807

Péndulo de Kater. https://en.wikipedia.org/wiki/Kater%27s_pendulum

Oficialización de las Redes Gravimétricas en Argentina. <http://www.ign.gob.ar/content/oficializaci%C3%B3n-del-nuevo-sistema-vertical-de-referencia-nacional>

Los autores

Späth, Federico Gustavo Enrique

Geofísico egresado de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, UNLP (2008). Cuenta con 15 años de experiencia como docente en la FCAG. Actualmente es jefe de trabajos prácticos en la cátedra Instrumental Geofísico y Electrónico, y ayudante diplomado en la cátedra Gravimetría, donde es docente desde hace 12 años. Trabajó 3 años en el Centro Tecnológico Argentino de YPF en proyectos vinculados a los métodos potenciales. Desde el 2010 trabaja principalmente en caracterización sísmica dentro del grupo de Exploración de Hidrocarburos de YPF, donde se involucró en proyectos de adquisición, procesamiento e interpretación de datos gravimétricos. Desde el 2012 es instructor del módulo *Métodos No Sísmicos* del Master YPF. Es autor o coautor de numerosos trabajos. Dirigió y codirigió tesis de grado en geofísica, una de ellas en el área de gravimetría. Fue jurado de tesis de grado y posgrado en geofísica.



Antokoletz, Ezequiel Darío

Geofísico (2017) egresado de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, UNLP. Se desempeña como Becario Doctoral de la Comisión Nacional Científicas y Técnicas (CONICET) y se encuentra realizando el Doctorado en Geofísica titulado “Gravimetría Superconductora y Absoluta en el Observatorio Argentino Alemán de Geodesia (AGGO)” en la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la UNLP. Por más de tres años ha trabajado en Departamento de Marcos de Referencia del Instituto Geográfico Nacional de la República Argentina, específicamente en el área de Gravimetría, encargado de generar, mantener y actualizar el Marco de Referencia Gravimétrico de la República Argentina.



Tocho, Claudia Noemí

Geofísica (1988) y Doctora en Geofísica (2006), egresada de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas (FCAG), UNLP. Se desempeña como Profesor Adjunto con Dedicación Exclusiva y es responsable del dictado de la cátedra Gravimetría (grado) en la FCAG de la UNLP y del Seminario Sistemas de Alturas, Gravimetría, Geoide y Perfiles Astrogeodésicos (posgrado) en la Maestría de Geomática y Doctorados de Astronomía y Geofísica. Es integrante del cuerpo docente de la Especialización en Geociencias de Exploración y Desarrollo de Hidrocarburos, Facultad de Ciencias Naturales y Museo, desde 2015 y de la Maestría en Geomática desde 2006. Posee Categoría II en el Programa de Incentivos a los Docentes Investigadores y es Investigadora Asociada de la Comisión de Investigaciones Científicas (CIC) de la provincia de Buenos Aires. Ha dirigido tesis de grado, de maestría, doctorales y becarios en el área de Gravimetría, Geodesia Física y Métodos Potenciales de Prospección y ha participado en proyectos de investigación y transferencia. Es integrante del Proyecto *Groundwater Resources for Small Rural and Aboriginal Communities in Chaco Province, Argentina* financiado por Geoscientists Without Borders (GWB). Su línea de investigación se relaciona con la Gravimetría que permite resolver numerosos problemas que involucran la interacción de estudios interdisciplinarios con otras disciplinas de las Ciencias de la Tierra como la Geología, la Geodesia, la Hidrología, entre otras. Es autora y co-autora de numerosos trabajos en revistas con referato, actas de congresos nacionales e internacionales y capítulos de libros.



Tocho, Claudia Noemí

Tópicos de gravimetría : primera parte / Claudia Noemí Tocho ; Federico Gustavo Enrique Späth ; Ezequiel Darío Antokoletz. - 1a ed. - La Plata : Universidad Nacional de La Plata ; EDULP, 2020.

Libro digital, PDF/A

Archivo Digital: descarga

ISBN 978-950-34-1897-0

1. Gravimetría. 2. Geofísica. I. Späth, Federico Gustavo Enrique. II. Antokoletz, Ezequiel Darío. III. Título.

CDD 526.7

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata

48 N.º 551-599 / La Plata B1900AMX / Buenos Aires, Argentina

+54 221 644 7150

edulp.editorial@gmail.com

www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2020

ISBN 978-950-34-1897-0

© 2020 - Edulp

e
exactas

**Edulp**
EDITORIAL DE LA UNLP



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA