OBSERVATORIO ASTRONOMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

SERIE ASTRONOMICA - Tomo XXIX, N° 2 (2a.Edición)

UN METODO GRAFICO PARA LA COMPENSACION DE OBSERVACIONES MEDIANTE UNA RECTA

POR

SERGEJS J. SLAUCITAJS

LA PLATA
OBSERVATORIO ASTRONOMICO
1961

UN METODO GRAFICO PARA LA COMPENSACION DE OBSERVACIONES MEDIANTE UNA RECTA

Por el Dr. SERGEJS J. SLAUCITAJS *

1. *Introducción.* Si bien el observador puede eliminar en su mayor parte la influencia de los errores sistemáticos o constantes sobre los resultados de las observaciones, quedan no obstante los errores accidentales o irregulares. Estos no pueden ser previstos de ningún modo y serán de distinta magnitud en las diferentes observaciones. Así p. ej., en el caso de una relación lineal, los puntos medidos se dispersan alrededor de una recta, que representa la dependencia funcional. Para obtener pues el resultado que mejor represente el valor verdadero de la magnitud medida, debemos someter todos los valores observados a una compensación.

El método clásico de los cuadrados mínimos, matemáticamente fácil de tratar, que se basa sobre la suma de los cuadrados de las desviaciones [vv] y proviene de GAUSS [1], exige un trabajo de cálculo relativamente grande para la averiguación de la magnitud buscada, con el consiguiente dispendio de tiempo. Para la compensación de los resultados de observación existen aún otros métodos menos conocidos, como p. ej., el de CAUCHY [2], que debe preferirse en algunas compensaciones al método de los cuadrados mínimos.

Si deseamos compensar gráficamente los resultados de las observaciones (datos), el problema de la compensación consiste en general en la averiguación de una curva (que también puede ser recta) que represente la aproximación mejor posible a la curva, resp. recta, ideal. Han sido desarrollados también una serie de métodos gráficos, o gráfico - numéricos en los cuales mediante el sacrificio de un cierto grado de exactitud, se puede economizar bastante tiempo. Mencionaremos aquí los más simples, encontrados por AWBERY [3] y CAMPBEL [4], cuya aplicación está restringida a relaciones lineales de la forma $y = mx + n$.

[1] GAUSS, *Theoria combinationes Observationum erroribus minimis obnoxiae*, 1826; véase también A. BÖRSCH u. P. SIMON, *Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate von Carl Friedrich Gauss*, Berlin, 1887.

[2] CAUCHY, *Comptes Rendus*, 36; véase también VILLARCEAU, *Conn. de Temps*, 1852, Add. p. 129.

[3] AWBERY, *A simple Method of Fitting a Straight Line to a Series of Observations*, Proc. Phys. Soc. 41, 1928/29.

[4] WEISE u. PATZER, *Genauigkeit und Zeitaufwand bei Ausgleichsverfahren*, Zeitschrift für techn. Physik, 2, 1939.

* *Jefe del Departamento de Astrometría Meridiana en el Instituto Superior del Observatorio Astronómico y Profesor de Astrometría en la Escuela Superior de Astronomía y Geofísica de la Universidad Nacional de La Plata.*

Para averiguar las cantidades m y n de los k pares de datos (x_i, y_i), procede AWBERY del modo descripto a continuación.

Primeramente se averiguan los valores medios

$$1/k\ (x_1 + x_2 + x_3 + \quad x_k) = \overline{x}$$
$$1/k\ (y_1 + y_2 + y_3 + \quad y_k) = \overline{y}$$

y luego las diferencias

$$x_i - \overline{x} = \Delta\, x_i, \quad y_i - \overline{y} = \Delta\, y_i$$

Luego se cambian los signos de todos los $\Delta\, x_i$ negativos (con lo cual se transforman en positivos), y también los signos de los $\Delta\, y_i$ correspondientes. Enseguida se forman las sumas

$$\Delta\, x_1 + \Delta\, x_2 + \Delta\, x_3 + \quad + \Delta\, x_k = \Sigma\, \Delta\, x_i$$
$$\Delta\, y_1 + \Delta\, y_2 + \Delta\, y_3 + \quad + \Delta\, y_k = \Sigma\, \Delta\, y_i$$

Finalmente se calculan las expresiones

$$m = \frac{\Sigma\, \Delta\, y_i}{\Sigma\, \Delta\, x_i} \quad \text{y} \quad n = \overline{y} - m\,\overline{x}.$$

En la aplicación del método de CAMPBEL deben distinguirse dos casos: a) número par de datos y b) número impar de datos.

a) Se ordenan los k pares de datos de observación según la magnitud de los y_i, haciéndole corresponder a cada dato un "nuevo" número de orden, que se agrega como subíndice:

$$y_1,\ y_2,\ y_3, \quad y_{\frac{k}{2}},\ y_{\frac{k}{2}+1},\ y_{\frac{k}{2}+2},\ y_{\frac{k}{2}+3}, \quad y_k.$$

Luego se forman las sumas parciales

$$x_1 + x_2 + x_3 + \quad + x_{\frac{k}{2}} = \Sigma\, x_f$$

$$x_{\frac{k}{2}+1} + x_{\frac{k}{2}+2} + x_{\frac{k}{2}+3} + \quad + x_k = \Sigma\, x_g$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_{\frac{k}{2}} = \Sigma\, y_f$$

$$y_{\frac{k}{2}+1} + y_{\frac{k}{2}+2} + y_{\frac{k}{2}+3} + \quad + y_k = \Sigma\, y_g$$

y finalmente los cocientes

$$m = \frac{\Sigma\, y_g - \Sigma\, y_f}{\Sigma\, x_g - \Sigma\, x_f} \quad \text{y} \quad n = \frac{(\Sigma\, y_g + \Sigma\, y_f) - m\,(\Sigma\, x_g + \Sigma\, x_f)}{k}$$

b) Se ordenan los k pares de datos según la magnitud de los y_i, haciendo corresponder a cada dato de observación un "nuevo" número de orden que se agrega como subíndice:

$$y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots\ y_{\frac{k-1}{2}},\ y_{\frac{k+1}{2}},\ y_{\frac{k+3}{2}},\ y_{\frac{k+5}{2}},\ y_{\frac{k+7}{2}}, \quad y_k$$

y se forman las sumas

$$2\,x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 + \quad + 2\,x_{\frac{k-1}{2}} + x_{\frac{k+1}{2}} = \Sigma\, x_f$$

$$x_{\frac{k+1}{2}} + 2\,x_{\frac{k+3}{2}} + 2\,x_{\frac{k+5}{2}} + 2\,x_{\frac{k+7}{2}} + \quad + 2\,x_k = \Sigma\, x_g$$

$$2\,y_1 + 2\,y_2 + 2\,y_3 + \ldots + 2\,y_{\frac{k-1}{2}} + y_{\frac{k+1}{2}} = \Sigma\, y_f$$

$$y_{\frac{k+1}{2}} + 2\,y_{\frac{k+3}{2}} + 2\,y_{\frac{k+5}{2}} + 2\,y_{\frac{k+7}{2}} + \quad + 2\,y_k = \Sigma\, y_g$$

y finalmente los cocientes

$$m = \frac{\Sigma\, y_g - \Sigma\, y_f}{\Sigma\, x_g - \Sigma\, x_f} \quad \text{y} \quad n = \frac{(\Sigma\, y_g + \Sigma\, y_f) - m\,(\Sigma\, x_g + \Sigma\, y_f)}{2\,k}$$

También estos métodos exigen un cierto trabajo de cálculo para la averiguación de los coeficientes m y n de la recta compensadora.

Aquí se indicará a continuación un método nuevo y simplificado para la compensación de una serie de datos (x_i, y_i), que se supone obedezcan a una relación lineal. La recta compensadora puede ser hallada mediante construcciones simples, puramente gráficas, si bien también puede ser calculada numéricamente. Este método representa una especie de alisamiento, pudiendo reemplazar en muchos casos al método de los cuadrados mínimos, y pudiendo significar por su simplicidad una economía considerable de tiempo.

Debe reiterarse aquí la circunstancia de que hoy en día es muy general el uso de métodos gráficos de compensación, que se aplican con mucho éxito, y que pueden ofrecer grandes ventajas frente a los métodos analíticos, siempre que la exactitud buscada de los resultados permita despreciar la aplicación del método de los cuadrados mínimos. En primer lugar los métodos gráficos permiten una cómoda visión de conjunto sobre el acuerdo interno de los distintos datos, haciendo posible así, desde un comienzo, la eliminación de errores burdos; en segundo lugar, estos métodos permiten determinar la dependencia mutua de las observaciones, y finalmente significan una economía de tiempo. Es evidente que el observador debe elegir, en cada compensación gráfica con el mayor cuidado, el método y la escala más conveniente.

2. *Averiguación de la recta compensadora mediante construcciones gráficas.* Las n ediciones han sumistrado k pares de valores (x_i, y_i). Para encontrar la recta compensadora procedemos del modo descripto a continuación.

1. Se dibujan todos los pares de valores (x_i, y_i) en un sistema ortogonal de coordenadas, p. ej., sobre papel milimetrado. De este modo se originan los siguientes puntos:

$P_1\,(x_1, y_1)$, $P_2\,(x_2, y_2)$, $P_3\,(x_3, y_3)$, $P_k\,(x_k, y_k)$, *), fig. 1.

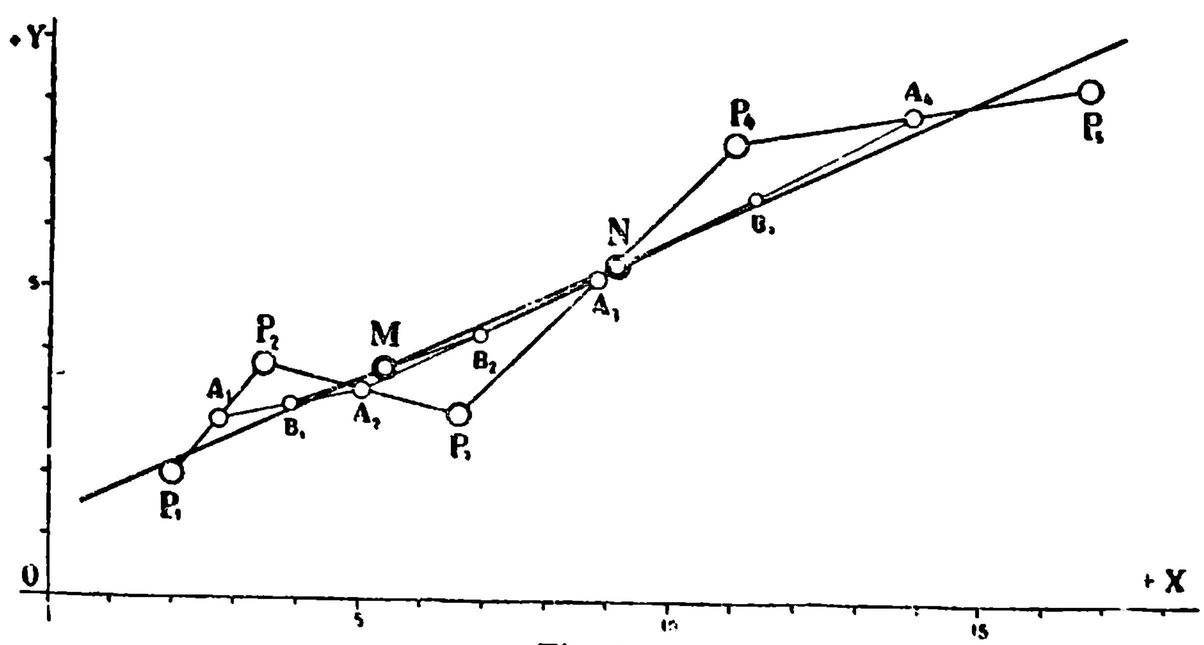

Fig. 1.

2. a) Se bisectan los segmentos $P_1 P_2$, $P_2 P_3$, $P_3 P_4$, $P_{k-1} P_k$, originándose los puntos A_1, A_2, A_3, A_{k-1}.

*) En la figura 1 se tomó $k = 5$: P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.

b) Se bisectan a su vez los segmentos $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, $A_{k-2} A_{k-1}$, originándose los puntos B_1, B_2, B_3, B_{k-2}.

c) Se bisectan nuevamente los segmentos $B_1 B_2$, $B_2 B_3$, $B_3 B_4$, $B_{k-3} B_{k-2}$, originándose los puntos C_1, C_2, C_3, C_{k-3}, etc. hasta que finalmente quedan sólo dos puntos M y N.

3. Si se traza por estos dos puntos M y N una recta, se tiene la recta compensadora buscada.

Las bisecciones son fáciles y ejecutables simplemente con ayuda de una regla milimetrada. Para no sobrecargar el dibujo, no se trazan todos los segmentos entre los puntos, sino que es suficiente trazar sólo alrededor del punto medio un trozo de segmento. La posición del punto medio se denotará con una rayita normal y se anotará para una mejor orientación el correspondiente número de orden de la bisección del segmento (fig. 2). Si los datos de observación tuvieran peso distinto, se dividirá los segmentos respectivos en partes proporcionales a los pesos dados.

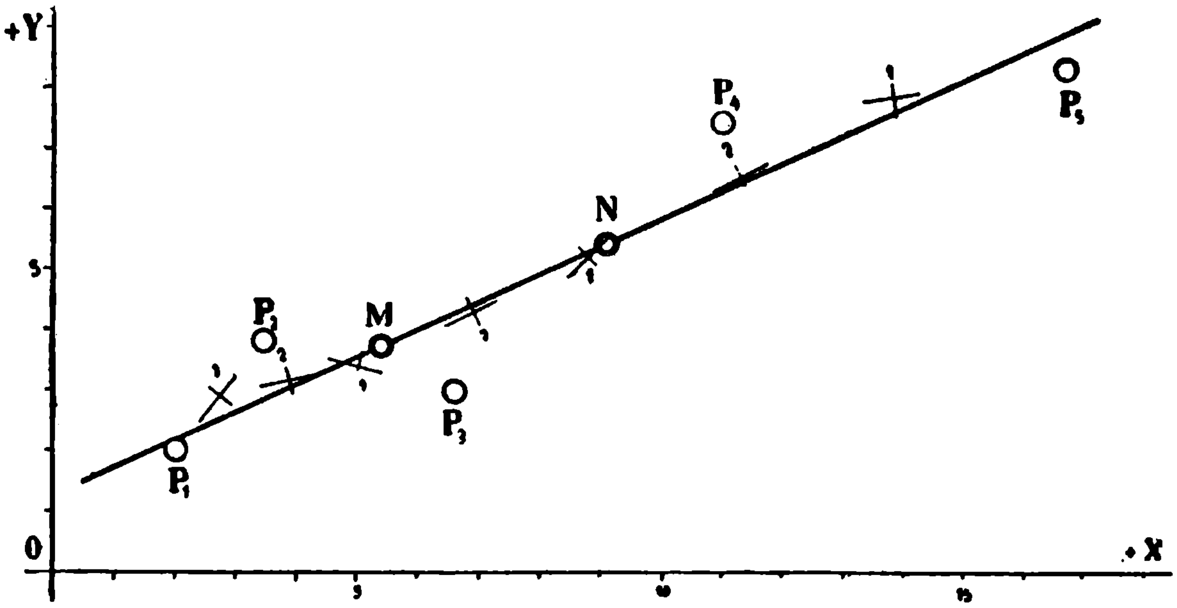

Fig. 2.

3. Cálculo de las coordenadas (ξ_1, η_1) *y* (ξ_2, η_2) *de los puntos* M *y* N *que determinan la recta compensadora.* Sean los datos (puntos): P_i, $i = 1, 2, 3, \ldots k$, es decir:

$$P_1 (x_1, y_1)$$
$$P_2 (x_2, y_2)$$
$$P_3 (x_3, y_3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_k (x_k, y_k),$$

ordenados todos según valores crecientes de x. Es evidente sin más que la primera bisección (véase p. 2, pág. 7) da los puntos A_i, $i = 1, 2, 3, \quad k-1$, con las siguientes coordenadas:

$$A_1 [\tfrac{1}{2} (x_1 + x_2), \tfrac{1}{2} (y_1 + y_2)]$$
$$A_2 [\tfrac{1}{2} (x_2 + x_3), \tfrac{1}{2} (y_2 + y_3)]$$
$$A_3 [\tfrac{1}{2} (x_3 + x_4), \tfrac{1}{2} (y_3 + y_4)]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{k-1} [\tfrac{1}{2} (x_{k-1} + x_k), \tfrac{1}{2} (y_{k-1} + y_k)]$$

Después de la segunda operación de bisección se obtienen los puntos B_i, $i = 1, 2, 3, \ldots k-2$, con las coordenadas:

$$
\begin{array}{l}
B_1 \left[\frac{1}{4}(x_1 + 2x_2 + x_3),\ \frac{1}{4}(y_1 + 2y_2 + y_3)\right] \\
B_2 \left[\frac{1}{4}(x_2 + 2x_3 + x_4),\ \frac{1}{4}(y_2 + 2y_3 + y_4)\right] \\
B_3 \left[\frac{1}{4}(x_3 + 2x_4 + x_5),\ \frac{1}{4}(y_3 + 2y_4 + y_5)\right] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_{k-2} \left[\frac{1}{4}(x_{k-2} + 2x_{k-1} + x_k),\ \frac{1}{4}(y_{k-2} + 2y_{k-1} + y_k)\right].
\end{array}
$$

Además se obtienen los puntos C_i, $i = 1, 2, 3, \quad k-3$, con las coordenadas:

$$
\begin{array}{l}
C_1 \left[\frac{1}{8}(x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4),\ \frac{1}{8}(y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4)\right] \\
C_2 \left[\frac{1}{8}(x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5),\ \frac{1}{8}(y_2 + 3y_3 + 3y_4 + y_5)\right] \\
C_3 \left[\frac{1}{8}(x_3 + 3x_4 + 3x_5 + x_6),\ \frac{1}{8}(y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6)\right] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
C_{k-3} \left[\frac{1}{8}(x_{k-3} + 3x_{k-2} + 3x_{k-1} + x_k),\ \frac{1}{8}(y_{k-3} + 3y_{k-2} + 3y_{k-1} + y_k)\right],
\end{array}
$$

etc.

Como se ve, las coordenadas de los puntos medios pueden ser calculadas con ayuda de los coeficientes binomiales. En el caso de k puntos dados, las coordenadas de los dos puntos M y N: (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) se obtienen mediante las expresiones *

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{1}{2^{k-2}}\left[x_1 + (k-2)\,x_2 + \binom{k-2}{2}x_3 + \binom{k-2}{3}x_4 + \ldots + \binom{k-2}{2}x_{k-3} + \right. \\
&\qquad \left. + (k-2)\,x_{k-2} + x_{k-1}\right] \\
\eta_1 &= \frac{1}{2^{k-2}}\left[y_1 + (k-2)\,y_2 + \binom{k-2}{2}y_3 + \binom{k-2}{3}y_4 + \ldots + \binom{k-2}{2}y_{k-3} + \right. \\
&\qquad \left. + (k-2)\,y_{k-2} + y_{k-1}\right] \\
\xi_2 &= \frac{1}{2^{k-2}}\left[x_k + (k-2)\,x_{k-1} + \binom{k-2}{2}x_{k-2} + \binom{k-2}{3}x_{k-3} + \ldots + \binom{k-2}{2}x_4 + \right. \\
&\qquad \left. + (k-2)\,x_3 + x_2\right] \\
\eta_2 &= \frac{1}{2^{k-2}}\left[y_k + (k-2)\,y_{k-1} + \binom{k-2}{2}y_{k-2} + \binom{k-2}{3}y_{k-3} + \ldots + \binom{k-2}{2}y_4 + \right. \\
&\qquad \left. + (k-2)\,y_3 + y_2\right]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

* Sea recalcado aquí que para la determinación de las coordenadas de M, se utilizan de los k puntos los primeros $k-1$ $(P_1, P_2, P_3, \quad P_{k-1})$ y para la de N, los últimos $k-1$ puntos $(P_k, P_{k-1}, P_{k-2}, \ldots P_2)$.

4. La ecuación de la recta determinada por M (ξ_1, η_1) *y* N (ξ_2, η_2). Para la derivación de la ecuación se parte de la fórmula general:

$$\frac{y-\eta_2}{\eta_2-\eta_1}=\frac{x-\xi_2}{\xi_2-\xi_1}$$

de la cual se deduce:

$$y=\frac{\eta_2-\eta_1}{\xi_2-\xi_1}\,x-\frac{\eta_2-\eta_1}{\xi_2-\xi_1}\xi_2+\eta_2 \quad \text{o} \quad y=mx+n,$$

en la cual

$$m=\frac{\eta_2-\eta_1}{\xi_2-\xi_1}\,, \quad n=-\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{\xi_2-\xi_1}\xi_2-\eta_2\right)$$

De la 1ª y 3ª ecuación del grupo (1) se obtiene:

$$\xi_2-\xi_1=\frac{1}{2^{k-2}}\Bigg\{x_k+\left[\binom{k-2}{1}-\binom{k-2}{0}\right]x_{k-1}+\left[\binom{k-2}{2}-\binom{k-2}{1}\right]x_{k-2}+$$
$$+\left[\binom{k-2}{3}-\binom{k-2}{2}\right]x_{k-3}+\quad\ldots-\left[\binom{k-2}{3}-\binom{k-2}{2}\right]x_4-\left[\binom{k-2}{2}-\right.$$
$$\left.-\binom{k-2}{1}\right]x_3-\left[\binom{k-2}{1}-\binom{k-2}{0}\right]x_2-x_1\Bigg\} \qquad (2)$$

A la ecuación (2) se le puede dar otra forma. Para este fin se calcula la forma general de la diferencia $\binom{n}{p}-\binom{n}{p-1}$:

$$\binom{n}{p}-\binom{n}{p-1}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-1)]}{1.2.3\qquad p}-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-2)]}{1.2.3\ldots(p-1)}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-2)]}{1.2.3\ldots(p-1)}\left[\frac{n-(p-1)}{p}-1\right]$$

$$=\frac{\{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-2)]\}[n-(p-1-p]}{1.2.3\qquad(p-1)p}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-2)][n-(2p-1)]}{1.2.3\qquad p}\cdot\frac{1.2.3\ldots[n-(p-1)]}{1.2.3\qquad[n-(p-1)]}$$

$$=\frac{\{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-2)][n-(p-1)]\ldots3.\,2.\,1\}[n-(2p-1)]}{p![n-(p-1)]!}$$

$$=\frac{n![n-(2p-1)]}{p![n-(p-1)]!} \qquad (3)$$

En base a la ecuación (3) también se puede escribir la (2) en la forma:

$$\xi_2 - \xi_1 = \frac{1}{2^{k-2}} \sum_{p=0}^{k-1} a_{k-p}\, x_{k-p} \tag{4}$$

donde

$$a_{k-p} = \frac{(k-2)!\,(k-2p-1)}{p!\,(k-p-1)!}\,.$$

De un modo enteramente análogo se halla de las ecuaciones 2ª y 4ª del grupo (1) que:

$$\eta_2 - \eta_1 = \frac{1}{2^{k-2}} \sum_{p=0}^{k-1} a_{k-p}\, y_{k-p} \tag{5}$$

de donde se deduce

$$m = \frac{\sum\limits_{p=0}^{k-1} a_{k-p}\, y_{k-p}}{\sum\limits_{p=0}^{k-1} a_{k-p}\, x_{k-p}} \tag{6}$$

y

$$n = -\frac{1}{2^{k-2}}\left[m \sum_{p=0}^{k-2} \binom{k-2}{p} x_{k-p} - \sum_{p=0}^{k-2} \binom{k-2}{p} y_{k-p} \right] \tag{7}$$

La ecuación de la recta buscada es, pues,

$$y = \frac{\sum\limits_{p=0}^{k-1} a_{k-p}\, y_{k-p}}{\sum\limits_{p=0}^{k-1} a_{k-p}\, x_{k-p}}\, x - \frac{1}{2^{k-2}}\left\{ \frac{\sum\limits_{p=0}^{k-1} a_{k-p}\, y_{k-p}}{\sum\limits_{p=0}^{k-1} a_{k-p}\, x_{k-p}} \sum_{p=0}^{k-2} \binom{k-2}{p} x_{k-p} - \sum_{p=0}^{k-2} \binom{k-2}{p} y_{k-p} \right\} \tag{8}$$

$$a_{k-p} = \frac{(k-2)!\,(k-2p-1)}{p!\,(k-p-1)!}$$

5. *Cálculo del error medio cuadrático* ε_1 *de una observación, a partir de* [vv].

Sean (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_k, y_k) los pares de datos provistos por la observación.

Sea $y = mx + n$ la ecuación de la recta compensadora.

a) Si sólo los y_i estuvieron afectados de error, se tendría las siguientes k ecuaciones de corrección:

$$\begin{aligned} (v_y)_1 &= m x_1 - y_1 + n \\ (v_y)_2 &= m x_2 - y_2 + n \\ (v_y)_3 &= m x_3 - y_3 + n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (v_y)_k &= m x_k - y_k + n. \end{aligned} \tag{9}$$

Si también en este caso se basa el cálculo de los errores medios cuadráticos sobre la condición gaussiana del mínimo de la suma de los $[vv]_y$ entonces se sigue que el error medio cuadrático ε_y de una observación de y con peso 1 es

$$\varepsilon_y = \pm \sqrt{\frac{[vv]_y}{k-2}} \tag{10}$$

b) Supuesto el caso de que sólo los x estuviesen afectados de error, se tendría:

$$(v_x)_i = \frac{y_i}{m} - x_i - \frac{n}{m} \tag{11}$$

de donde

$$\varepsilon_x = \pm \sqrt{\frac{[vv]_x}{k-2}} \tag{12}$$

c) Si tanto las x como las y están afectadas de errores observacionales, las distancias de los puntos (x_i, y_i) a la recta, representarán las correcciones combinadas. Esta suposición representa un caso general, y obtendremos correspondientemente dos rectas (líneas de regresión). Ambas rectas coinciden, cuando $[vv]_x = [vv]_y = 0$, es decir, cuando las observaciones están libres de errores. Se llega en la práctica a una recta compensadora intermedia, cuando se plantea la condición $[vv]$ = mínimo.

Como se ve en la figura 3, donde $PA \parallel OY$, $PC \parallel OX$ y $PB \perp AC$, se sigue

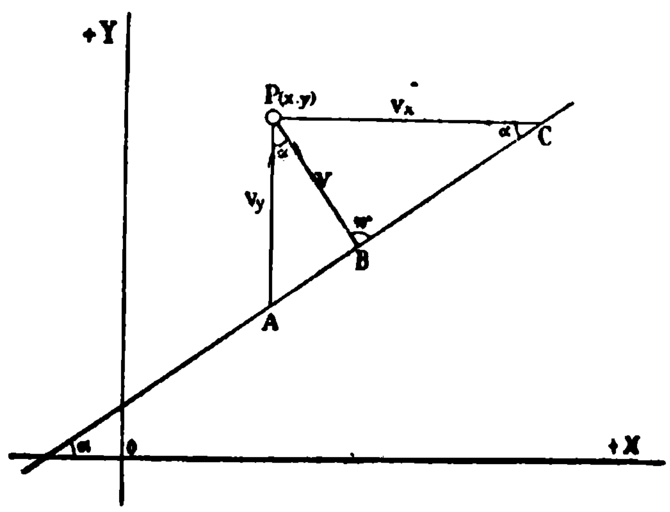

Fig. 3.

pues

$$v = v_y \cos\alpha = v_x \operatorname{sen}\alpha$$

y

$$[vv] = [vv]_y \cos^2\alpha = [vv]_x \operatorname{sen}^2\alpha,$$

de donde

$$\varepsilon_{x,y} = \pm \sqrt{\frac{[vv]_y}{k-2}} \cos\alpha = \pm \sqrt{\frac{[vv]_x}{k-2}} \operatorname{sen}\alpha \tag{13}$$

$(v_y)_1$, respectivamente $(v_x)_1$ se pueden contar directamente sobre el dibujo en papel milimetrado que permite la compensación gráfica, o se puede calcular a partir de las ecuaciones (9) y (11), que dan los $[vv]_y$ y $[vv]_x$ respectivamente.

Las desviaciones $(v_y)_1$ y $(v_x)_1$ —como se deduce de los dibujos 4 y 5, donde DE || CP || OX, se pueden calcular también de acuerdo a las relaciones:

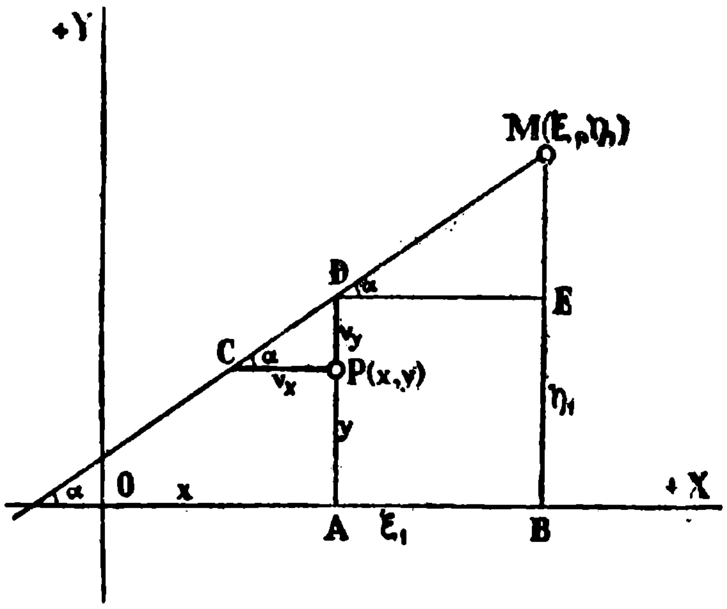

Fig. 4.

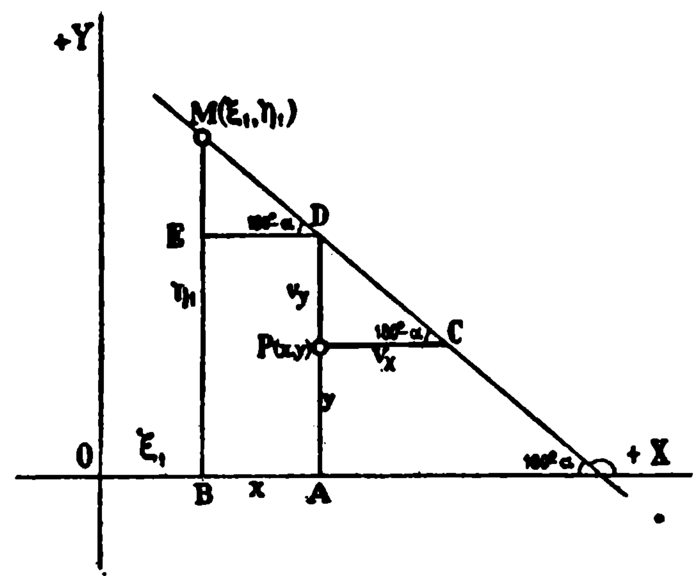

Fig. 5.

$$\left.\begin{aligned}(v_y)_1 &= (\eta_1 - y_1) + (x_1 - \xi_1)\ \mathrm{tg}\,\alpha \\ (v_y)_1 &= (\eta_1 - y_1) - (x_1 - \xi_1)\ \mathrm{tg}\,(180^\circ - \alpha)\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

$$\left.\begin{aligned}(v_x)_1 &= (\eta_1 - y_1)\ \mathrm{ctg}\,\alpha + (x_1 - \xi_1) \\ (v_x)_1 &= (\eta_1 - y_1)\ \mathrm{ctg}\,(180^\circ - \alpha) - (x_1 - \xi_1)\end{aligned}\right\} \qquad (14')$$

6. Compensación por cuadrados mínimos de una recta determinada por una serie de puntos (valores de observación) (x_i, y_i). Para conseguir una comparación entre la compensación gráfica arriba indicada y la compensación por cuadrados mínimos, indicaremos también la ecuación que hubiéremos obtenido, en el caso de calcular la recta compensadora, mediante la aplicación del criterio de GAUSS.

Sean (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, \quad k$, los pares de valores dados por la observación.

La ecuación de la recta buscada (compensadora): $y = mx + n$.

Las ecuaciones de error (sólo las y admiten errores): $v_i = m x_i + n - y_i$. En base a la condición de GAUSS, $[vv]$ ha de ser un mínimo, es decir,

$$\frac{\partial [vv]}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial [vv]}{\partial n} = 0.$$

En nuestro caso será, pues,

$$\frac{\partial [(mx + n - y)^2]}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial [(mx + n - y)^2]}{\partial n} = 0 \qquad \ldots \quad (15)$$

De las (15) obtenemos

$$[(mx + n - y)\ x] = 0 \quad \text{o} \quad m[xx] - [xy] + n[x] = 0$$
$$[(mx + n - y)] = 0 \quad \text{o} \quad kn + m[x] - [y] = 0$$

de donde

$$m = \frac{[xy] - n\,[x]}{[xx]}, \qquad n = \frac{[y] - m\,[x]}{k} \qquad (16), (17)$$

y la ecuación de la recta buscada es:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} k & [x] \\ [y] & [xy] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & [x] \\ [x] & [xx] \end{vmatrix}}\, x + \frac{\begin{vmatrix} [y] & [x] \\ [xy] & [xx] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & [x] \\ [x] & [xx] \end{vmatrix}} \qquad (18)$$

También es fácil ver que esta recta pasará siempre por el centro de gravedad (S_o) de los puntos dados. Es decir, pasará por

$$S_o \left(\frac{[x]}{k}, \frac{[y]}{k}\right).$$

7. Ejemplos para la compensación de algunas relaciones lineales. — No se ha tratado aquí de hacer una comparación directa entre las cantidades m y n calculadas en las fórmulas (8) y (18). Los extensos ejemplos adjuntos permiten, a nuestro juicio, una apreciación completamente suficiente de la coincidencia de los resultados finales derivados por ambos métodos.

Ejemplo 1º *) — El 8 de febrero de 1950 se recibieron en la Estación Astronómica Félix Aguilar (La Leona), radiotelegráficamente las señales horarias del Observatorio Naval de Buenos Aires, según el método de ojo y oído, para determinar las correcciones Δ T y la marcha ΔT^2 del cronómetro Callier 730. Los resultados de la recepción fueron los siguientes:

1950.	Febrero 8	10^h	$H_{(+3)}$ — Callier 730 =	$+ 1^m 43^s3$
		12		+ 1 44.0
		17		+ 1 45.2
		19		+ 1 45.6
		20.5		+ 1 46.4
		22		+ 1 46.5

Bajo la suposición de que la corrección del cronómetro varía linealmente durante la comparación, las ecuaciones de condición son de la forma siguiente:

$$\Delta T_i = \Delta T^2 (T_i - T_o) + \Delta T_o,$$

donde:

ΔT_o es la corrección del cronómetro para el instante T_o (Epoca 0),
ΔT^2 — la marcha horaria del cronómetro,
T_i — el instante de recepción de las señales horarias,
ΔT_i — la corrección del cronómetro para los instantes T_i.

Para la compensación poseemos, pues, los siguientes datos observacionales, si fijamos 16^h como época cero:

*) Las observaciones indicadas en los ejemplos fueron realizadas por el mismo autor.

$x_i = T_i - T_o$	$y_i = \Delta T_i$
-6^h	$+1^m 43^s 3$
-4	44.0
$+1$	45.2
$+3$	45.6
$+4.5$	46.4
$+6$	46.5

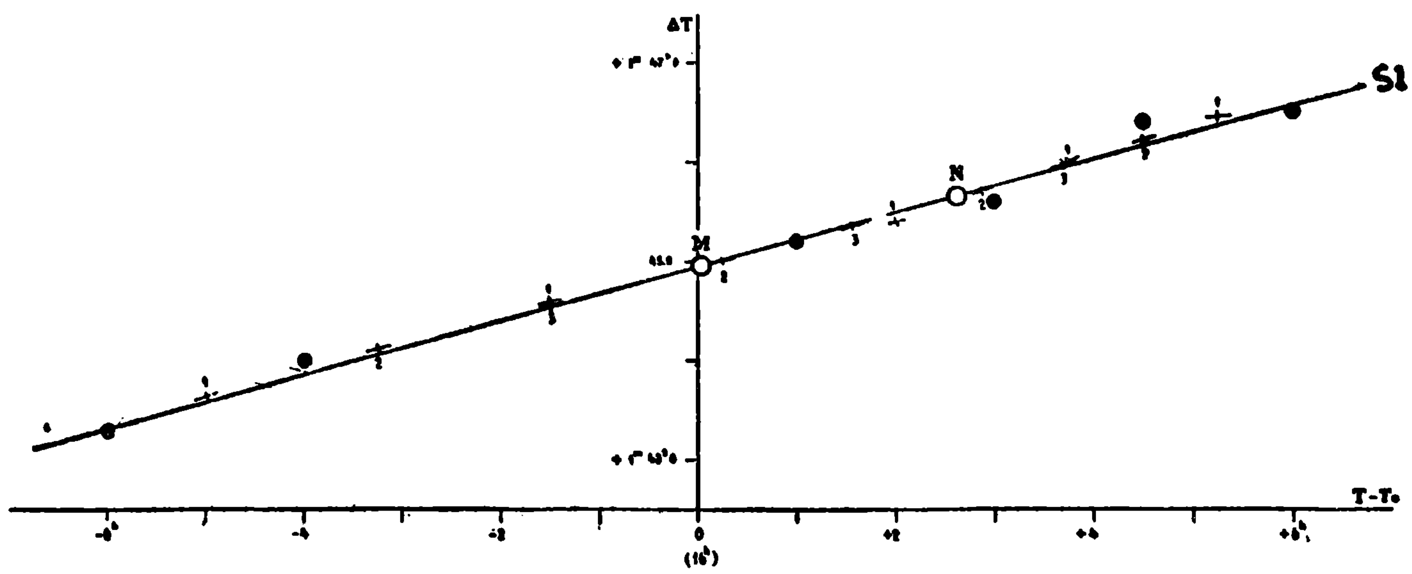

Fig. 6.

En la figura 6, la recta (Sl) representa la recta compensadora obtenida mediante el método gráfico expuesto anteriormente.

De la figura 6 sacamos:

$$\alpha = 15°1 \ , \quad n = +\ 1^m 44^s 9_5$$

por lo tanto:

$$m = \operatorname{tg} \alpha = +0.27$$

y en consecuencia, la ecuación de la recta compensadora será:

$$y = +0.27\ x + 104.9_5 \qquad \text{(Sl)}$$

y $$\Delta T_{16\ h} = +1^m 44^s 9_5 \ , \quad \Delta T^2{}_{1\ h} = +0^s 27.$$

El error medio cuadrático de una observación de Δ T, de peso 1, es (según la fórmula (10)):

$$\varepsilon_1 = \pm\ 0^s 1_6$$

La ecuación de la recta compensadora, calculada según la fórmula (18) es:

$$y = +\ 0.26_8\ x + 104.9_7 \qquad \text{(G)}$$

y el error medio cuadrático de una observación, $\varepsilon_1 = \pm\ 0^s 1_6$.

La recta (G) no ha sido dibujada en la fig. 6 por superponerse con la recta (Sl).

Ejemplo 2º. — El 22 de mayo de 1949 se hizo en el Círculo Meridiano Repsold del Observatorio de La Plata, una determinación de azimut k del instrumento y de la corrección del reloj $\triangle$ T Riefler 325, utilizándose micrómetro autorregistrador. Para la reducción de la determinación de tiempo se empleó la fórmula de T. MAYER. Para las distintas estrellas se obtuvieron los siguientes valores, después de aplicar todas las correcciones convenientes para $\beta = AR - [T - 0^s 0213 \cos\varphi \sec\delta + (T - T_o) \triangle T^2 + I\,i \pm C\,c]$, $T_o =$ $= 1949$ mayo 22.909 T. U.:

1. α	Pyxidis	Fr. W	AR = $8^h 41^m5$	$\delta = -33°0$	$\beta = + 11^m35^s731$
2. o	Leonis	W	9 38.4	+ 10.1	36.076
3. η	Leonis	W	10 04.6	+ 17.0	36.143
4. ν	Octantis, inf.	W, E	22 22.6	— 86.2	42.14
5.46	L. Minoris	E	10 50.5	+ 34 5	36.268
6. β	Crateris	E	11 09.2	— 22.6	35.845
7. ν	Ursae Maj.	E	11 15.8	+ 33.4	36.264

Si se escribe la fórmula de T. MAYER: $\triangle T = AR - [T - 0^s 0213 \cos\varphi \sec\delta + (T - T_o) \triangle T^2 + I\,i + K\,k \pm C\,c]$ para cada estrella horaria, numerando las estrellas en forma creciente del norte al sur: 1, 2, 3, 6, obtenemos 6 ecuaciones de condición de la forma $\beta = k\,K + \triangle T$ para la determinación de las incógnitas k y $\triangle$ T * En consecuencia, los pares de valores que entran en la compensación son los dados en la tabla 1.

TABLA 1

Nº	$x_i = K_i$	$y_i = \beta_i - 695^s$
1 (5)	— 1.136	+ 1.268
2 (7)	— 1.112	+ 1.264
3 (3)	— 0.823	+ 1.143
4 (2)	— 0.719	+ 1.076
5 (6)	— 0.232	+ 0.845
6 (1)	— 0.040	+ 0.731

a) Determinación de la recta compensadora, según la fórmula (8) **.

1. Cálculo de los $a_{k-p} = \dfrac{(k-2)!\,(k-2p-1)}{p!\,(k-p-1)!}$

$$k = 6;\ p = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Es fácil ver que en todos los casos en que $p = 0$,

$$a_{k-p} = a_6 = +1$$

y si $p = k - 1$

$$a_{k-p} = a_1 = -1.$$

* La estrella circumpolar ν Octantis no se incluyó en la compensación.

** Véase también pág. 14, p. b., tabla 5.

Pero además los a_{k-p} situados simétricamente respecto del centro tienen igual valor absoluto. Por esto sólo es menester en este caso, calcular dos valores de a_{k-p}, es decir:

$$p = 1,\ k - p = 5,\ a_{k-p} = a_5 = \frac{1.2.3.4.3}{1.1.2.3.4} = +3$$

$$p = 2,\ k - p = 4,\ a_{k-p} = a_4 = \frac{1.2.3.4.1}{1.2.1.2.3} = +2.$$

Todos los a_{k-p} buscados son pues (tabla 2):

TABLA 2

p	a_{k-p}
0	+ 1
1	+ 3
2	+ 2
3	— 2
4	— 3
5	— 1

2. Cálculo de $m = \dfrac{\sum\limits_{p=o}^{k-1} a_{k-p}\, y_{k-p}}{\sum\limits_{p=o}^{k-1} a_{k-p}\, x_{k-p}}$

Para el cálculo práctico de m es conveniente ordenar los distintos factores y sus productos según la forma de la tabla 3.

TABLA 3

x_{k-p}	y_{k-p}	a_{k-p}	$a_{k-p}\, x_{k-p}$	$a_{k-p}\, y_{k-p}$
— 0.040	+ 0.731	+ 1	— 0.040	+ 0.731
— 0.232	+ 0.845	+ 3	— 0.696	+ 2.535
— 0.719	+ 1.076	+ 2	— 1.438	+ 2.152
— 0.823	+ 1.143	— 2	+ 1.646	— 2.286
— 1.112	+ 1.264	— 3	+ 3.336	— 3.792
— 1.136	+ 1.268	— 1	+ 1.136	— 1.268
m = — 0.489			Σ = + 3.944	Σ = — 1.928

3. Cálculo de $n = -\ 2^{k-2} \left\{ m \sum\limits_{p=o}^{k-2} \binom{k-2}{p} x_{k-p} - \sum\limits_{p=o}^{k-2} \binom{k-2}{p} y_{k-p} \right\}.$

Es fácil ver que el cómputo de las sumas $\sum_{p=o}^{k-2} \binom{k-2}{p} x_{k-p}$ y $\sum_{p=o}^{k-2} \binom{k-2}{p} y_{k-p}$ es muy sencillo, si se aplica el siguiente esquema de cálculo.

Se escribe los x y sus correspondientes y, ordenados según el valor de x (con el índice decreciente): x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, ... x_2, y_k, y_{k-1}, y_{k-2}, y_2 en dos columnas y entre ellas los correspondientes coeficientes binominales C *) tal como puede verse en la tabla 4. Luego se multiplican los números situados en una misma fila y pertenecientes a las columnas I y III y III y V. Los productos así obtenidos se suman al pie.

TABLA 4

x_i	$C_i x_i$	C_i	$C_i y_i$	y_i
— 0.040	— 0.040	1	+ 0.731	+ 0.731
— 0.232	— 0.928	4	+ 3.380	+ 0.845
— 0.719	— 4.314	6	+ 6.456	+ 1.076
— 0.823	— 3.292	4	+ 4.572	+ 1.143
— 1.112	— 1.112	1	+ 1.264	+ 1.264
	Σ = — 9.686	n = + 0.729	Σ = + 16.403	

b) En caso de que se desee utilizar el método numérico para la determinación de la recta compensadora, es más simple (como se ve inmediatamente de la tabla 5, que contiene todas las cifras necesarias para la reducción) calcular las coordenadas de los puntos M y N directamente mediante la fórmula (1).

TABLA 5

ξ_1		x	ξ_2		η_1		y	η_2	
Cx	C		C	Cx	Cy	C		C	Cy
— 1.136	1	— 1.136			+ 1.268	1	+ 1.268		
— 4.448	4	— 1.112	1	— 1.112	+ 5.056	4	+ 1.264	1	+ 1.264
— 4.938	6	— 0.823	4	— 3.292	+ 6.858	6	+ 1.143	4	+ 4.572
— 2.876	4	— 0.719	6	— 4.314	+ 4.304	4	+ 1.076	6	+ 6.456
— 0.232	1	— 0.232	4	— 0.928	+ 0.845	1	+ 0.845	4	+ 3.380
		— 0.040	1	— 0.040			+ 0.731	1	+ 0.731
— 13.630 = $2^{k-2}\xi_1$		$2^{k-2}\xi_2$ = — 9.686			+ 18.331 = $2^{k-2}\eta_1$		$2^{k-2}\eta_2$ = + 16.403		
ξ_1 = — 0.852		ξ_2 = — 0.605			η_1 = + 1.146		η_2 = + 1.025		
$\xi_2 - \xi_1$ = + 0.247		m = — 0.489			n = + 0.729		$\eta_2 - \eta_1$ = — 0.121		

*) Los coeficientes binominales pueden sacarse de la siguiente tabla:

$$
\begin{array}{cccccc}
1 \rightarrow 1 \\
\quad\downarrow \\
1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \\
\quad\downarrow \quad \downarrow \\
1 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \\
\quad\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}
$$

etc.

En consecuencia, la ecuación de la recta compensadora es:

$$y = -\,0.489\ x + 0.729 \quad (\mathrm{Sl})$$

y

$$k = -\,0^{s}489\ ,\quad \Delta T_{o} = +\,695^{s}729.$$

El error medio cuadrático de una observación de ΔT, de peso 1 es

$$\varepsilon_1 = \pm\ 0^{s}014$$

La ecuación de la recta compensadora, calculada según el método de los cuadrados mínimos, es:

$$y = -\,0.489\ x + 0.723 \quad (\mathrm{G})$$

y el error medio cuadrático de una observación

$$\varepsilon_1 = \pm\ 0^{s}013$$

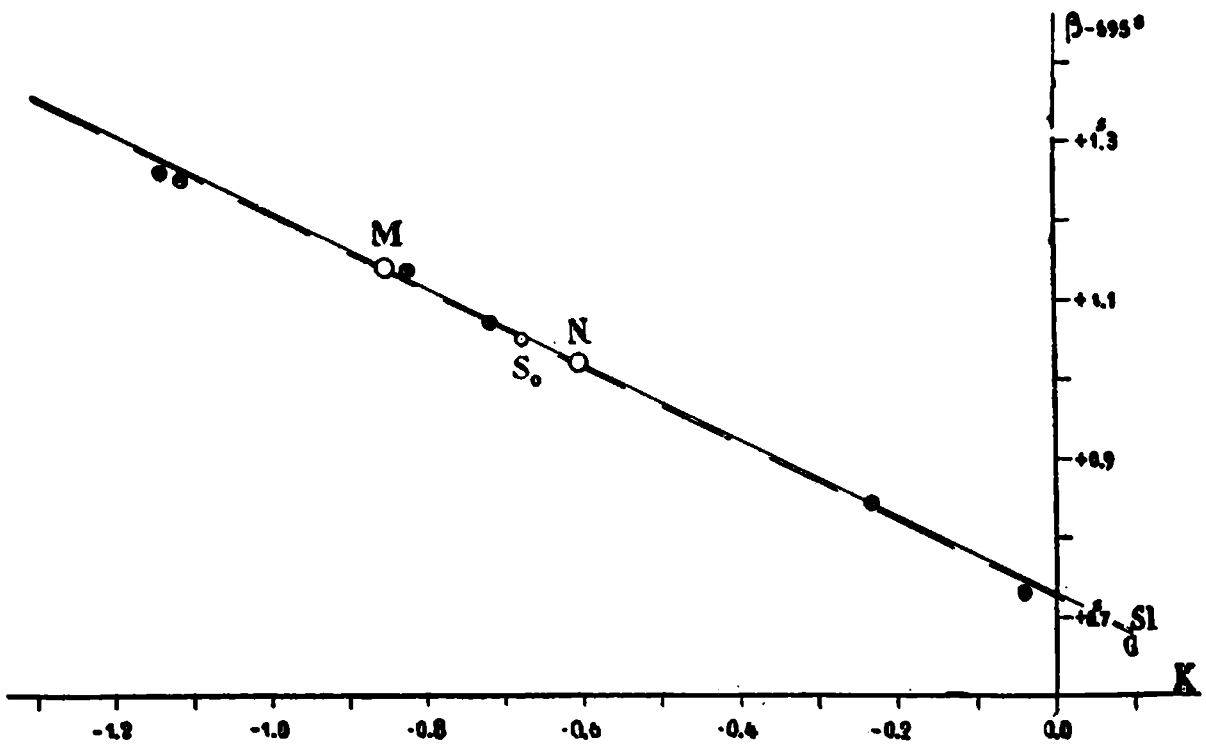

Fig. 7.

En la figura 7, la recta (Sl) es la determinada por los puntos M (ξ_1, η_1) y N (ξ_2, η_2), y la recta (G) la determinada por medio de una compensación de cuadrados mínimos.

Me complazco en expresar aquí mi más vivo agradecimiento a mis colegas Prof. Dr. A. Zaggers (U. S. A.), ex-Director del Observatorio Astronómico de la Universidad de Riga, y al Prof. Dr. E. Leimanis (Canadá), por las valiosas conversaciones acerca del método de compensación antes expuesto.

"Año del Libertador General San Martín".
La Plata, noviembre de 1950.

Impreso en los Talleres Gráficos del
Centro Estudiantes de Ingeniería de
La Plata, calle 47 Nº 279, La Plata
República Argentina