OBSERVATORIO ASTRONOMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

SERIE ASTRONOMICA - Tomo XXXII

DEDUCCION DIRECTA DE LAS ECUACIONES PLANETARIAS

POR

REYNALDO P. CESCO

LA PLATA

1966

DEDUCCION DIRECTA DE LAS ECUACIONES PLANETARIAS

Por

R. P. Cesco

A Straightforward Derivation of the Planetary Equations. By R. P. Cesco. — It is the object of this expository paper to derive the differential equations of the Keplerian elements (planetary equations) in the problem of n-bodies merely as a change of variables, that is to say, without the use of the method of variation of arbitrary constants. In celestial mechanics this method is applied to the problem of three bodies after a set of canonic constants for the elliptic orbit have been found by solving the Hamilton-Jacobi partial differential equation [1, 2, 3, 4]. The use of canonic equations may be avoided if the brackets of Lagrange (appearing in the equations for the derivatives of the six elliptic elements) are evaluated directly or by means of some special method (Campbell, Whittaker), [4, 5].

The straightforward derivation now proposed is particularly useful for obtaining the planetary equations for more than three bodies, since the known equations may be written without assuming (tacitly) as usual the additivity of the disturbing functions when the equations for $n = 3$ bodies are extended for any n (cf. 1, p. 190; 4, p. 205; 5, p. 515).

For the sake of completeness, we have also included the equation for the semi-major axis of the orbit, frequently derived from the energy integral, as well as the equations for the inclination of the orbit, the eccentricity and the longitude of the ascending node, which have been obtained by Chazy [6] by application of the principle of angular momentum.

1. — El carácter de este trabajo es más bien didáctico: me propongo deducir a continuación las ecuaciones diferenciales de los elementos osculadores elípticos (ecuaciones planetarias) en el problema de los n cuerpos, como un mero cambio de variables dependientes, esto es sin integrar previamente, como se acostumbra, la ecuación diferencial en derivadas parciales de Hamilton-Jacobi para determinar cierto conjunto de constantes canónicas y recurriendo luego al método de variación de las constantes arbitrarias, o bien aplicando primero este método y calculando después los paréntesis de Lagrange, es decir los coeficientes de las derivadas de los seis elementos elípticos en el sistema de ecuaciones que resulta de aplicar dicho método, ya sea directamente o mediante alguno de los métodos conocidos (Campbell, Whittaker). La deducción directa que ahora proponemos * es particularmente útil para obtener las ecuaciones planetarias del problema de más de tres cuerpos, aun en el caso en que alguna de las órbitas osculadoras no sea elíptica. Las conocidas ecuaciones pueden en efecto escribirse sin admitir tácitamente, como es común, la aditividad de las funciones perturbadoras, cuando se pasa del problema de tres al de n cuerpos.

---

* Aplíquela el lector al caso de una ecuación diferencial lineal completa de segundo orden con coeficientes constantes (equivalente a un sistema de dos ecuaciones lineales de primer orden en las funciones incógnitas y e y'), resolviendo el sistema

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2; \quad y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$$

(y_1, y_2: sistema fundamental) respecto de C_1 y C_2. Tomando estas funciones como nuevas variables dependientes, la ecuación o sistema dado se transforma directamente en el de Lagrange: $C_1' = F_1(x)$; $C_2' = F_2(x)$, en el cual las variables están separadas.

2. — Sean x_ν, y_ν, z_ν las coordenadas heliocéntricas del punto masa m_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n-1$) con origen en el sol, de masa m_0, y sean

$$r_\nu^2 = x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2 \quad \text{y} \quad \Delta_{\nu j}^2 = (x_\nu - x_j)^2 + (y_\nu - y_j)^2 + (z_\nu - z_j)^2$$

respectivamente, los cuadrados de los radios vectores y de las distancias mutuas.

Las ecuaciones diferenciales de movimiento de m_ν pueden escribirse en la forma

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_\nu + \mu_\nu \frac{x_\nu}{r_\nu^3} &= \frac{\partial R^{(\nu)}}{\partial x_\nu} \\
\ddot{y}_\nu + \mu_\nu \frac{y_\nu}{r_\nu^3} &= \frac{\partial R^{(\nu)}}{\partial y_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1) \\
\ddot{z}_\nu + \mu_\nu \frac{z_\nu}{r_\nu^3} &= \frac{\partial R^{(\nu)}}{\partial z_\nu}
\end{aligned}\right. \tag{S}$$

siendo

$$R^{(\nu)} = \varkappa^2 \sum_{j(\neq \nu)=1}^{n-1} m_j \left(\frac{1}{\Delta_{\nu j}} - \frac{x_\nu x_j + y_\nu y_j + z_\nu z_j}{r_j^3} \right)$$

($\varkappa^2$: constante de Gauss), $\mu_\nu = \varkappa^2(m_0 + m_\nu)$

Supongamos que a partir de cierto valor de t (época de osculación), cese la influencia sobre cada punto masa m_ν de los restantes $n - 2$ cuerpos, es decir que sean nulas todas las funciones perturbadoras $R^{(\nu)}$. El sistema (S) se reduce en tal caso al siguiente:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_\nu + \mu_\nu \frac{x_\nu}{r_\nu^3} &= 0 \\
\ddot{y}_\nu + \mu_\nu \frac{y_\nu}{r_\nu^3} &= 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1) \\
\ddot{z}_\nu + \mu_\nu \frac{z_\nu}{r_\nu^3} &= 0
\end{aligned}$$

cuya solución (en el caso elíptico) está dada por las siguientes fórmulas, en las cuales hemos suprimido los índices ν:

$$\begin{aligned}
x &= l_1 \xi + l_2 \eta \\
y &= m_1 \xi + m_2 \eta \\
z &= n_1 \xi + n_2 \eta \\
\dot{x} &= l_1 \dot{\xi} + l_2 \dot{\eta} \\
\dot{y} &= m_1 \dot{\xi} + m_2 \dot{\eta} \\
\dot{z} &= n_1 \dot{\xi} + n_2 \dot{\eta}
\end{aligned} \tag{1}$$

siendo

$$\xi = a(\cos E - e) \qquad \dot{\xi} = -a \operatorname{sen} E \frac{dE}{dt}$$

$$\eta = a\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} E \qquad \dot{\eta} = a\sqrt{1-e^2} \cos E \frac{dE}{dt} \tag{2}$$

$$r = a(1 - e\cos E) \qquad \dot{r} = ae \operatorname{sen} E \frac{dE}{dt}$$

$$E - e \operatorname{sen} E = nt + \varepsilon - \tilde{\omega} = M; \qquad \frac{dE}{dt} = \frac{na}{r} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos \Omega \cos \omega - \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \omega \cos i \\ m_1 &= \operatorname{sen} \Omega \cos \omega + \cos \Omega \operatorname{sen} \omega \cos i \\ n_1 &= \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} i \\ l_2 &= -\cos \Omega \operatorname{sen} \omega - \operatorname{sen} \Omega \cos \omega \cos i \\ m_2 &= -\operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i \\ n_2 &= \cos \omega \operatorname{sen} i \end{aligned} \tag{4}$$

donde $\omega = \tilde{\omega} - \Omega$, con las integrales

$$\begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= C \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} i \\ x\dot{z} - z\dot{x} &= C \cos \Omega \operatorname{sen} i \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= C \cos i \end{aligned} \tag{5}$$

siendo

$$C = \sqrt{\mu a(1-e^2)} = na^2\sqrt{1-e^2}, \qquad \mu = n^2a^3$$

y

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \tag{6}$$

de donde

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{V^2}{\mu} \tag{7}$$

En el caso general, o sea si actúan las $n - 2$ masas perturbadoras, transformaremos el sistema (S) de $6(n-1)$ ecuaciones diferenciales de primer orden en las funciones incógnitas x_ν, y_ν, z_ν, $\dot{x}_\nu$, $\dot{y}_\nu$, $\dot{z}_\nu$, en otro del mismo orden con las variables dependientes (elementos elípticos) a_ν, e_ν, i_ν, Ω_ν, $\tilde{\omega}_\nu$, ε_ν definidas en función de t y de las anteriores variables mediante el conjunto de fórmulas (1), (2), ..., (7).

3. — Calculemos, ante todo, para ello las derivadas parciales de $R^{(\nu)} \equiv R$ respecto de las nuevas variables dependientes, observando que si σ es uno cualquiera de los elementos elípticos se tiene

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \sigma} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \sigma} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \sigma}$$

En particular, para $\sigma = a$ se tiene, si no se hace variar n con a, es decir si suponemos como conviene y se hace de ordinario, que la anomalía media M y por tanto también la excéntrica E, es independiente de a,

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{1}{a}\left(x\frac{\partial R}{\partial x} + y\frac{\partial R}{\partial y} + z\frac{\partial R}{\partial z}\right) \tag{8}$$

Si $\sigma = e$ se tiene

$$\frac{\partial x}{\partial e} = \left(-a - a \operatorname{sen} E \frac{\partial E}{\partial e}\right) l_1 + \left(\frac{-ae}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{sen} E + a\sqrt{1-e^2}\cos E\frac{\partial E}{\partial e}\right) l_2$$

Pero

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \frac{a \operatorname{sen} E}{r} = \frac{1}{n}\operatorname{sen} E\frac{dE}{dt}$$

luego, en virtud de las (2),

$$\frac{\partial x}{\partial e} = -al_1 - \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}} l_2 \operatorname{sen} E + \frac{\dot{x}}{n}\operatorname{sen} E \tag{9}$$

y análogamente se calculan $\dfrac{\partial y}{\partial e}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial e}$ Es pues

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \left(-al_1 - \frac{ael_2}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{sen} E + \frac{\dot{x}}{n}\operatorname{sen} E\right)\frac{\partial R}{\partial x} + \left(-am_1 - \frac{aem_2}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{sen} E + \right.$$
$$\left. + \frac{\dot{y}}{n}\operatorname{sen} E\right)\frac{\partial R}{\partial y} + \left(-an_1 - \frac{aen_2}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{sen} E + \frac{\dot{z}}{n}\operatorname{sen} E\right)\frac{\partial R}{\partial z}$$

Para $\sigma = \tilde{\omega}$ resulta

$$\frac{\partial x}{\partial \tilde{\omega}} = \xi\frac{\partial l_1}{\partial \tilde{\omega}} + \eta\frac{\partial l_2}{\partial \tilde{\omega}} + \left(l_1\frac{\partial \xi}{\partial E} + l_2\frac{\partial \eta}{\partial E}\right)\frac{\partial E}{\partial \tilde{\omega}}$$

Pero

$$\frac{\partial l_1}{\partial \tilde{\omega}} = -\cos\Omega \operatorname{sen}\omega - \operatorname{sen}\Omega\cos\omega\cos i = l_2;\quad \frac{\partial l_2}{\partial \tilde{\omega}} = -l_1;$$

$$\frac{\partial E}{\partial \tilde{\omega}} = -\frac{a}{r} = -\frac{1}{n}\frac{dE}{dt}$$

luego

$$\frac{\partial x}{\partial \tilde{\omega}} = l_2\xi - l_1\eta - \frac{\dot{x}}{n}$$

y análogamente se hallan $\dfrac{\partial y}{\partial \tilde{\omega}}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial \tilde{\omega}}$. Es pues

$$\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} = \left(l_2\xi - l_1\eta - \frac{\dot{x}}{n}\right)\frac{\partial R}{\partial x} + \left(m_2\xi - m_1\eta - \frac{\dot{y}}{n}\right)\frac{\partial R}{\partial y} + \left(n_2\xi - n_1\eta - \frac{\dot{z}}{n}\right)\frac{\partial R}{\partial z} \tag{10}$$

y puesto que

$$\frac{\partial x}{\partial \epsilon} = \left(l_1 \frac{\partial \xi}{\partial E} + l_2 \frac{\partial \eta}{\partial E}\right)\frac{\partial E}{\partial \epsilon} \quad \text{y} \quad \frac{\partial E}{\partial \epsilon} = \frac{a}{r} = \frac{1}{n}\frac{dE}{dt}$$

resulta

$$\frac{\partial x}{\partial \epsilon} = \frac{1}{n}(l_1\dot{\xi} + l_2\dot{\eta}) = \frac{\dot{x}}{n}$$

y análogamente se tiene $\dfrac{\partial y}{\partial \epsilon} = \dfrac{\dot{y}}{n}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial \epsilon} = \dfrac{\dot{z}}{n}$. Es pues

$$\frac{\partial R}{\partial \epsilon} = \frac{\dot{x}}{n}\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\dot{y}}{n}\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\dot{z}}{n}\frac{\partial R}{\partial z} \tag{11}$$

y en virtud de (10):

$$\frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} = (l_2\xi - l_1\eta)\frac{\partial R}{\partial x} + (m_2\xi - m_1\eta)\frac{\partial R}{\partial y} + (n_2\xi - n_1\eta)\frac{\partial R}{\partial z} \tag{12}$$

Pero

$$l_1 = m_2 \cos i + n_2 \cos \Omega \operatorname{sen} i$$

$$l_2 = - m_1 \cos i - n_1 \cos \Omega \operatorname{sen}$$

luego

$$l_2\xi - l_1\eta = - y \cos i - z \cos \Omega \operatorname{sen} i$$

y análogamente

$$m_2\xi - m_1\eta = x \cos i - z \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} i$$

$$n_2\xi - n_1\eta = (x \cos \Omega + y \operatorname{sen} \Omega) \operatorname{sen} i$$

Es pues, también

$$\frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} = -(y \cos i + z \cos \Omega \operatorname{sen} i)\frac{\partial R}{\partial x} + (x \cos i - z \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} i)\frac{\partial R}{\partial y}$$

$$+ (x \cos \Omega + y \operatorname{sen} \Omega) \operatorname{sen} i \frac{\partial R}{\partial z} \tag{13}$$

Sea ahora $\sigma = \Omega$. Se tiene

$$\frac{\partial l_1}{\partial \Omega} = - \operatorname{sen} \Omega \cos \omega + \cos \Omega \operatorname{sen} \omega - (\cos \Omega \operatorname{sen} \omega - \operatorname{sen} \Omega \cos \omega) \cos i$$

o sea

$$\frac{\partial l_1}{\partial \Omega} = - m_1 - l_2 \quad \text{y, análogamente} \quad \frac{\partial l_2}{\partial \Omega} = l_1 - m_2$$

Es pues

$$\frac{\partial x}{\partial \Omega} = \xi \frac{\partial l_1}{\partial \Omega} + \eta \frac{\partial l_2}{\partial \Omega} = - l_2 \xi + l_1 \eta - y$$

y análogamente

$$\frac{\partial y}{\partial \Omega} = - m_2 \xi + m_1 \eta + x; \qquad \frac{\partial z}{\partial \Omega} = - n_2 \xi + n_1 \eta$$

luego

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = (- l_2 \xi + l_1 \eta - y) \frac{\partial R}{\partial x} + (- m_2 \xi + m_1 \eta + x) \frac{\partial R}{\partial y} + (- n_2 \xi + n_1 \eta) \frac{\partial R}{\partial z} \tag{14}$$

o todavía

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = - \left(\frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} \right) - y \frac{\partial R}{\partial x} + x \frac{\partial R}{\partial y}$$

de donde

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} = - y \frac{\partial R}{\partial x} + x \frac{\partial R}{\partial y} \tag{15}$$

Finalmente, si $\sigma = i$ se tiene

$$\frac{\partial l_1}{\partial i} = \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} i = n_1 \operatorname{sen} \Omega$$

$$\frac{\partial l_2}{\partial i} = \operatorname{sen} \Omega \cos \omega \operatorname{sen} i = n_2 \operatorname{sen} \Omega$$

Luego

$$\frac{\partial x}{\partial i} = \xi \frac{\partial l_1}{\partial i} + \eta \frac{\partial l_2}{\partial i} = (n_1 \xi + n_2 \eta) \operatorname{sen} \Omega = z \operatorname{sen} \Omega$$

y análogamente

$$\frac{\partial y}{\partial i} = - z \cos \Omega$$

$$\frac{\partial z}{\partial i} = \xi\,(m_1 \cos \Omega - l_1 \operatorname{sen} \Omega) + \eta\,(m_2 \cos \Omega - l_2 \operatorname{sen} \Omega)$$

$$= y \cos \Omega - x \operatorname{sen} \Omega$$

Es pues

$$\frac{\partial R}{\partial i} = z \operatorname{sen} \Omega \frac{\partial R}{\partial x} - z \cos \Omega \frac{\partial R}{\partial y} + (y \cos \Omega - x \operatorname{sen} \Omega) \frac{\partial R}{\partial z} \tag{16}$$

4. — De (7) se obtiene, derivando respecto de t:

$$\frac{1}{a^2} \frac{da}{dt} = \frac{2}{r^3} r\dot{r} + \frac{2}{\mu} (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) \tag{17}$$

Pero en virtud de (8) y de (11):

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = n \frac{\partial R}{\partial \epsilon} - \mu \frac{r\dot{r}}{r^3}$$

y reemplazando en (17) sigue

$$\frac{1}{a^2} \frac{da}{dt} = \frac{2n}{\mu} \frac{\partial R}{\partial \epsilon}$$

de donde

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \tag{I}$$

o sea la ecuación diferencial del semieje mayor.

5. — De (2) y (3) resulta

$$e \operatorname{sen} E = \frac{r\dot{r}}{\sqrt{\mu}\,\sqrt{a}} \tag{18}$$

y de la expresión de r sigue

$$e \cos E = 1 - \frac{r}{a} \tag{19}$$

es pues, para cada valor de t:

$$e^2 = \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 + \frac{1}{\mu} \frac{r^2 \dot{r}^2}{a} \tag{20}$$

De aquí se obtiene, derivando respecto de t:

$$e \frac{de}{dt} = \left(1 - \frac{r}{a}\right)\left(\frac{r\dot{a}}{a^2} - \frac{\dot{r}}{a}\right) + \frac{r\dot{r}}{\mu a^2} \left[a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) - \frac{1}{2} r\dot{r}\dot{a}\right] \tag{21}$$

Pero de la expresión de r^2 resulta, derivando sucesivamente respecto de t:

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}$$

$$\dot{r}^2 + r\ddot{r} = V^2 + x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{a} + x\frac{\partial R}{\partial x} + y\frac{\partial R}{\partial y} + z\frac{\partial R}{\partial z} \tag{22}$$

en virtud de (8) y de la integral (6). Pero de la expresión (20) sigue también

$$\frac{r^2\dot{r}^2}{2\mu a^2} = \frac{1}{2a}\left(e^2 - \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2\right)$$

Reemplazando en (21); utilizando la (I) y simplificando queda

$$na^2e\frac{de}{dt} = (1 - e^2)\frac{\partial R}{\partial \epsilon} - \frac{r^2}{a^2}\frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \frac{r\dot{r}}{na^2}\left(x\frac{\partial R}{\partial x} + y\frac{\partial R}{\partial y} + z\frac{\partial R}{\partial z}\right)$$

Si en el segundo término del segundo miembro se reemplaza $\dfrac{\partial R}{\partial \epsilon}$ por su valor (11) y si además se sustituyen r^2 y $r\dot{r}$ por sus respectivos valores se obtiene, después de dividir por $\sqrt{1 - e^2}$ y de agrupar:

$$\frac{na^2e}{\sqrt{1 - e^2}}\frac{de}{dt} = \sqrt{1 - e^2}\frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \frac{1}{C}\left[(z(x\dot{z} - z\dot{x}) + y(x\dot{y} - y\dot{x}))\frac{\partial R}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + (x(y\dot{x} - x\dot{y}) + z(y\dot{z} - z\dot{y}))\frac{\partial R}{\partial y} + (x(z\dot{x} - x\dot{z}) + y(z\dot{y} - y\dot{z}))\frac{\partial R}{\partial z}\right]$$

o sea finalmente, en virtud de las integrales (5) del momento angular:

$$\frac{na^2e}{\sqrt{1 - e^2}}\frac{de}{dt} = \sqrt{1 - e^2}\frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \left[(y\cos i + z\cos\Omega\,\mathrm{sen}\,i)\frac{\partial R}{\partial x} - (x\cos i - \right.$$

$$\left. - z\,\mathrm{sen}\,\Omega\,\mathrm{sen}\,i)\frac{\partial R}{\partial y} - (x\cos\Omega + y\,\mathrm{sen}\,\Omega)\,\mathrm{sen}\,i\,\frac{\partial R}{\partial z}\right]$$

vale decir

$$\frac{na^2e}{\sqrt{1 - e^2}}\frac{de}{dt} = \sqrt{1 - e^2}\frac{\partial R}{\partial \epsilon} - \left(\frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}\right) \tag{II}$$

en virtud de (13), o sea la ecuación diferencial de la excentricidad.

6. — De las integrales (5) se obtiene

$$\mathrm{tg}^2 i = \frac{1}{(x\dot{y} - y\dot{x})^2}\left[(y\dot{z} - z\dot{y})^2 + (x\dot{z} - z\dot{x})^2\right]$$

y derivando y simplificando con ayuda de (5) y de (S) queda

$$C\,\frac{di}{dt} = \left(y\,\frac{\partial R}{\partial z} - z\,\frac{\partial R}{\partial y}\right)\operatorname{sen}\Omega\cos i + \left(x\,\frac{\partial R}{\partial z} - z\,\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\Omega\cos i -$$

$$-\left(x\,\frac{\partial R}{\partial y} - y\,\frac{\partial R}{\partial x}\right)\operatorname{sen} i$$

$$= (y\operatorname{sen} i - z\cos\Omega\cos i)\,\frac{\partial R}{\partial x} - (x\operatorname{sen} i + z\operatorname{sen}\Omega\cos i)\,\frac{\partial R}{\partial y} +$$

$$+ (x\cos\Omega + y\operatorname{sen}\Omega)\cos i\,\frac{\partial R}{\partial z}$$

y de aquí, en virtud de (13) y (15) sigue

$$C\operatorname{sen} i\,\frac{di}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial\Omega} - \frac{\partial R}{\partial\epsilon} - \frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}} + \left(\frac{\partial R}{\partial\epsilon} + \frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}}\right)\cos i \qquad (23)$$

$$= -\frac{\partial R}{\partial\Omega} - 2\left(\frac{\partial R}{\partial\epsilon} + \frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}}\right)\operatorname{sen}^2\frac{i}{2}$$

es decir

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{C\operatorname{sen} i}\,\frac{\partial R}{\partial\Omega} - \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{C}\left(\frac{\partial R}{\partial\epsilon} + \frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}}\right) \qquad \text{(III)}$$

o sea la ecuación diferencial de la inclinación.

Pero de las dos primeras de las integrales (5) se obtiene también

$$\Omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{y\dot{z} - z\dot{y}}{x\dot{z} - z\dot{x}}$$

Derivando y haciendo uso de (5) y del sistema (S) sigue

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{C\operatorname{sen} i}\left[\left(y\,\frac{\partial R}{\partial z} - z\,\frac{\partial R}{\partial y}\right)\cos\Omega - \left(x\,\frac{\partial R}{\partial z} - z\,\frac{\partial R}{\partial x}\right)\operatorname{sen}\Omega\right]$$

$$= \frac{1}{C\operatorname{sen} i}\left[z\operatorname{sen}\Omega\,\frac{\partial R}{\partial x} - z\cos\Omega\,\frac{\partial R}{\partial y} + (y\cos\Omega - x\operatorname{sen}\Omega)\,\frac{\partial R}{\partial z}\right] \qquad (24)$$

o sea, en virtud de (16):

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{C\operatorname{sen} i}\,\frac{\partial R}{\partial i} \qquad \text{(IV)}$$

vale decir, la ecuación diferencial del nodo ascendente.

7. — De la expresión

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(v - \bar{\omega}) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sqrt{\frac{1-\cos E}{1+\cos E}} = \sqrt{\frac{(1+e)r - p}{p - (1-e)r}}$$

donde v es la longitud verdadera en el instante t y $p = a(1 - e^2)$, se obtiene

$$\bar{\omega} = v - 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{(1+e)r - p}{p - (1-e)r}} \equiv v - \vartheta$$

Pero

$$\operatorname{tg}(v - \Omega) \cos i = \operatorname{tg}(\lambda - \Omega)$$

donde λ es la longitud heliocéntrica en el instante t, es decir

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{y}{x}$$

Luego

$$\operatorname{tg}(v - \Omega) = \frac{1}{\cos i} \frac{y - x \operatorname{tg} \Omega}{x + y \operatorname{tg} \Omega}$$

de donde

$$v = \Omega + \operatorname{arc\,tg} \left\{ \frac{1}{\cos i} \frac{y \cos \Omega - x \operatorname{sen} \Omega}{x \cos \Omega + y \operatorname{sen} \Omega} \right\}$$

Para hallar $\dot{\bar{\omega}}$ calculemos separadamente $\dot{v}$ y $\dot{\vartheta}$. Se tiene ante todo, en virtud de (1) y (4)

$$x \cos \Omega + y \operatorname{sen} \Omega = \xi \cos \omega - \eta \operatorname{sen} \omega \tag{25}$$

y análogamente

$$y \cos \Omega - x \operatorname{sen} \Omega = (\xi \operatorname{sen} \omega + \eta \cos \omega) \cos i \tag{26}$$

Es pues,

$$\frac{dv}{dt} = \dot{\Omega} + \frac{Q\dot{P} - P\dot{Q}}{P^2 + Q^2}$$

donde

$$P = y \cos \Omega - x \operatorname{sen} \Omega$$

$$Q = (x \cos \Omega + y \operatorname{sen} \Omega) \cos i$$

y por tanto

$$P^2 + Q^2 = r^2 \cos^2 i$$

$$Q\dot{P} - P\dot{Q} = (x\dot{y} - y\dot{x}) \cos i - (x^2 + y^2) \cos i \dot{\Omega} +$$

$$+ (y \cos \Omega - x \operatorname{sen} \Omega)(x \cos \Omega + y \operatorname{sen} \Omega) \operatorname{sen} i \frac{di}{dt}$$

Es pues, en virtud de (5):

$$\frac{dv}{dt} - \frac{C}{r^2} = \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{r^2 \cos i}\right) \dot{\Omega} + \frac{\operatorname{sen} i}{r^2 \cos^2 i} (y \cos \Omega - x \operatorname{sen} \Omega)(x \cos \Omega + y \operatorname{sen} \Omega) \frac{di}{dt}$$

y reemplazando $\operatorname{sen} i \dfrac{di}{dt}$ y $\dot{\Omega}$ por sus valores (23) y (24) queda

$$\frac{dv}{dt} - \frac{C}{r^2} = \frac{r^2 \cos i - x^2 - y^2}{C r^2 \operatorname{sen} i \cos i} \left[z \operatorname{sen} \Omega \frac{\partial R}{\partial x} - z \cos \Omega \frac{\partial R}{\partial y} + (y \cos \Omega - x \operatorname{sen} \Omega) \frac{\partial R}{\partial z} \right]$$

$$+ \frac{1}{C r^2 \cos^2 i} (y \cos \Omega - x \operatorname{sen} \Omega)(x \cos \Omega + y \operatorname{sen} \Omega) \Bigg| (l_2 \xi - l_1 \eta + y) \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$+ (m_2 \xi - m_1 \eta - x) \frac{\partial R}{\partial y} + (n_2 \xi - n_1 \eta) \frac{\partial R}{\partial z} -$$

$$- (1 - \cos i) \left((l_2 \xi - l_1 \eta) \frac{\partial R}{\partial x} + (m_2 \xi - m_1 \eta) \frac{\partial R}{\partial y} + (n_2 \xi - n_1 \eta) \frac{\partial R}{\partial z} \right) \Bigg|$$

$$\equiv \alpha \frac{\partial R}{\partial x} + \beta \frac{\partial R}{\partial y} + \gamma \frac{\partial R}{\partial z}$$

en virtud de (12) y (14), donde

$$\alpha = \frac{r^2 \cos i - x^2 - y^2}{C r^2 \operatorname{sen} i \cos i} z \operatorname{sen} \Omega +$$

$$+ \frac{1}{C r^2 \cos^2 i} (y \cos \Omega - x \operatorname{sen} \Omega)(x \cos \Omega + y \operatorname{sen} \Omega) \left((l_2 \xi - l_1 \eta) \cos i + y \right)$$

$$\beta = \frac{r^2 \cos i - x^2 - y^2}{C r^2 \operatorname{sen} i \cos i} z \cos \Omega +$$

$$+ \frac{1}{C r^2 \cos^2 i} (y \cos \Omega - x \operatorname{sen} \Omega)(x \cos \Omega + y \operatorname{sen} \Omega) \left((m_2 \xi - m_1 \eta) \cos i - x \right)$$

$$\gamma = (y \cos \Omega - x \operatorname{sen} \Omega) \left[\frac{r^2 \cos i - x^2 - y^2}{C r^2 \operatorname{sen} i \cos i} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{C r^2 \cos^2 i} (x \cos \Omega + y \operatorname{sen} \Omega)(n_2 \xi - n_1 \eta) \right]$$

Reemplazando ahora en α, β y γ, r^2 por $\xi^2 + \eta^2$ y x, y y z por sus valores (1) y observando que

$$\frac{z}{\operatorname{sen} i} = \frac{n_1}{\operatorname{sen} i}\,\xi + \frac{n_2}{\operatorname{sen} i}\,\eta = \xi \operatorname{sen} \omega + \eta \cos \omega$$

$$(l_2\xi - l_1\eta) \cos i + y = (\xi \cos \omega - \eta \operatorname{sen} \omega) \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen}^2 i$$

resulta

$$\alpha = \frac{z \operatorname{sen} \Omega}{Cr^2 \operatorname{sen} i \cos i}\,(\xi^2 + \eta^2)\,(\cos i + n_1^2 + n_2^2 - 1) = \frac{1}{C}\,z \operatorname{sen} \Omega \operatorname{tg} \frac{1}{2}\,i$$

en virtud de (25) y (26), ya que

$$l_\nu^2 + m_\nu^2 + n_\nu^2 = 1, \quad (\nu = 1, 2) \text{ y } l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$$

y análogamente

$$\beta = -\frac{1}{C}\,z \cos \Omega \operatorname{tg} \frac{1}{2}\,i \qquad \gamma = \frac{1}{C}\,(y \cos \Omega - x \operatorname{sen} \Omega) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\,i$$

Es pues

$$\frac{dv}{dt} - \frac{C}{r^2} = \frac{1}{C} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\,i \left[z \operatorname{sen} \Omega\,\frac{\partial R}{\partial x} - z \cos \Omega\,\frac{\partial R}{\partial y} + (y \cos \Omega - x \operatorname{sen} \Omega)\,\frac{\partial R}{\partial z}\right]$$

$$= \frac{1}{C} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\,i\,\frac{\partial R}{\partial i}$$

Calculemos ahora $\dot{\vartheta}$. Se tiene

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 2\,\frac{d}{dt} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{(1 + e)\,r - p}{p - (1 - e)r}} = \frac{P_1}{2er\,Q_1\sqrt{\dfrac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \dfrac{1}{2}\,E}$$

donde

$$P_1 = ep\dot{r} + (p - r)r\dot{e} - er\dot{p}; \quad Q_1 = p - (1 - e)r = 2ae(1 - e) \cos^2 \frac{1}{2}\,E$$

Reemplazando y simplificando queda

$$\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{C}{r^2} = \frac{e + \cos E}{e \operatorname{sen} E}\,\frac{\dot{e}}{\sqrt{1 - e^2}} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{ae \operatorname{sen} E}\,\frac{da}{dt}$$

Reemplazando ahora $\dot{a}$ y $\dot{e}$ por sus valores (I) y (II) se obtiene

$$\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{C}{r^2} = -\frac{2\sqrt{1 - e^2}}{na^2e \operatorname{sen} E}\left(\frac{\dot{x}}{n}\,\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\dot{y}}{n}\,\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\dot{z}}{n}\,\frac{\partial R}{\partial z}\right) +$$

$$+ \frac{e + \cos E}{na^2e^2 \operatorname{sen} E} \left[\left(\frac{\dot{x}}{n} \sqrt{1 - e^2} - (l_2\xi - l_1\eta) \right) \frac{\partial R}{\partial x} + \right.$$

$$+ \left(\frac{\dot{y}}{n} \sqrt{1 - e^2} - (m_2\xi - m_1\eta) \right) \frac{\partial R}{\partial y} +$$

$$\left. + \left(\frac{\dot{z}}{n} \sqrt{1 - e^2} - (n_2\xi - n_1\eta) \right) \frac{\partial R}{\partial z} \right]$$

es decir

$$\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{C}{r^2} = - \left(\alpha_1 \frac{\partial R}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial R}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial R}{\partial z} \right) \sqrt{1 - e^2}$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{1}{na^2e^2 \operatorname{sen} E} \left[(e - \cos E) \frac{\dot{x}}{n} + (e + \cos E) \frac{l_2\xi - l_1\eta}{\sqrt{1 - e^2}} \right]$$

$$\beta_1 = \frac{1}{na^2e^2 \operatorname{sen} E} \left[(e - \cos E) \frac{\dot{y}}{n} + (e + \cos E) \frac{m_2\xi - m_1\eta}{\sqrt{1 - e^2}} \right]$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{na^2e^2 \operatorname{sen} E} \left[(e - \cos E) \frac{\dot{z}}{n} + (e + \cos E) \frac{n_2\xi - n_1\eta}{\sqrt{1 - e^2}} \right]$$

Pero por ser

$$e - \cos E = e \operatorname{sen}^2 E - \frac{r}{a} \cos E$$

y además

$$\dot{x} = l_1\dot{\xi} + l_2\dot{\eta} = (- al_1 \operatorname{sen} E + al_2\sqrt{1 - e^2} \cos E) \frac{na}{r}$$

se obtiene, reemplazando en α_1 y simplificando:

$$\alpha_1 = \frac{1}{na^2e^2 \operatorname{sen} E} \left[\frac{\dot{x}}{n} e \operatorname{sen}^2 E + al_1 \operatorname{sen} E \cos E - al_2\sqrt{1 - e^2} \cos^2 E + \right.$$

$$\left. + \frac{(\cos E - e)(\cos E + e)}{\sqrt{1 - e^2}} al_2 - al_1 (e + \cos E) \operatorname{sen} E \right]$$

$$= \frac{1}{na^2e} \left(\frac{\dot{x}}{n} \operatorname{sen} E - \frac{ael_2}{\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{sen} E - al_1 \right)$$

es decir

$$\alpha_1 = \frac{1}{na^2e} \frac{\partial x}{\partial e}$$

en virtud de (9), y análogamente

$$\beta_1 = \frac{1}{na^2e}\frac{\partial y}{\partial e}\,; \qquad \gamma = \frac{1}{na^2e}\frac{\partial z}{\partial e}$$

Es pues

$$\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{C}{r^2} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}$$

y por tanto

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e} \tag{V}$$

es decir, la ecuación diferencial de la longitud del perihelio.

8. — De (18) y (19) sigue, por último

$$\operatorname{tg} E = \frac{r\dot{r}}{na(a-r)}$$

Y reemplazando en la ecuación de Kepler (3):

$$M = nt + \epsilon - \tilde{\omega} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a}\,r\dot{r}}{\sqrt{\mu}\,(a-r)} - \frac{r\dot{r}}{\sqrt{\mu}\,\sqrt{a}}$$

Se tiene

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu}\,a^2e^2}\left[\sqrt{a}\,(a-r)\,(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + \left(\frac{a-r}{2\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)r\dot{r}\dot{a} + \frac{\sqrt{a}}{r}\,r^2\dot{r}^2\right] -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\mu}\,\sqrt{a}}\,(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + \frac{r\dot{r}\dot{a}}{2a\,\sqrt{\mu}\,\sqrt{a}}$$

Pero reemplazando $\dot{r}^2 + r\ddot{r}$ por su valor (22); $r\dot{r}$ por su valor deducido de (18); $\dot{a}$ por (I) y la diferencia $\frac{1}{r} - \frac{1}{a}$ por $\frac{e}{r}\cos E$, se obtiene

$$\frac{dM}{dt} = \frac{na}{r}(\cos E - e)\cos E + \frac{\cos E - e}{na^2e}\left(x\frac{\partial R}{\partial x} + y\frac{\partial R}{\partial y} + z\frac{\partial R}{\partial z}\right)$$

$$-\frac{(r+p)\operatorname{sen} E}{na^3e}\frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \frac{na}{r}\operatorname{sen}^2 E$$

$$\equiv n + \alpha_2\frac{\partial R}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial R}{\partial y} + \gamma_2\frac{\partial R}{\partial z}$$

donde

$$\alpha_2 = \frac{\cos E - e}{na^2e} x - \frac{r+p}{na^3e} \frac{\dot{x}}{n} \operatorname{sen} E$$

$$\beta_2 = \frac{\cos E - e}{na^2e} y - \frac{r+p}{na^3e} \frac{\dot{y}}{n} \operatorname{sen} E$$

$$\gamma_2 = \frac{\cos E - e}{na^2e} z - \frac{r+p}{na^3e} \frac{\dot{z}}{n} \operatorname{sen} E$$

Se tiene

$$\alpha_2 = -\frac{2}{na}\frac{x}{a} + \frac{(\cos E + e)x}{na^2e} - \frac{r + a(1-e^2)}{na^3e}\frac{\dot{x}}{n}\operatorname{sen} E$$

$$= -\frac{2}{na}\frac{x}{a} - \frac{1}{na^2e}\Big[(1-e^2)\frac{\dot{x}}{n}\operatorname{sen} E + \frac{r\dot{x}}{na}\operatorname{sen} E -$$

$$- (\cos E + e)(l_1\xi + l_2\eta)\Big]$$

Pero

$$\frac{r\dot{x}}{na}\operatorname{sen} E = -al_1 \operatorname{sen}^2 E + al_2\sqrt{1-e^2}\operatorname{sen} E \cos E$$

Luego

$$\alpha_2 = -\frac{2}{na}\frac{x}{a} - \frac{1-e^2}{na^2e}\left[\frac{\dot{x}}{n}\operatorname{sen} E - \frac{ael_2}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{sen} E - al_1\right]$$

es decir

$$\alpha_2 = -\frac{2}{na}\frac{x}{a} - \frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial x}{\partial e}$$

y análogamente

$$\beta_2 = -\frac{2}{na}\frac{y}{a} - \frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial y}{\partial e}; \quad \gamma_2 = -\frac{2}{na}\frac{z}{a} - \frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial z}{\partial e}$$

Es pues, en virtud de (8)

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt} + n + t\frac{dn}{dt} - \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = n - \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}$$

y reemplazando $\dot{\omega}$ por su valor (V) queda finalmente

$$\frac{d\epsilon}{dt} + t\,\frac{dn}{dt} = -\frac{2}{na}\,\frac{\partial R}{\partial a} + \sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\,\frac{\partial R}{\partial e} +$$

$$+ \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\partial R}{\partial i} = \frac{d\epsilon^I}{dt} \qquad \text{(VI)}$$

o sea la ecuación diferencial de la longitud media de la época.

Si en las ecuaciones (I), (II), . . ., (VI) se restituye el índice ν en R y se afectan los elementos elípticos y el movimiento medio de cada cuerpo con el subíndice ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n-1$), se obtienen las $6(n-1)$ ecuaciones planetarias, c. q. d.

Observatorio Astronómico de La Plata, Junio 20 de 1966.

REFERENCIAS

1. — TISSERAND, F.: *Traité de Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, Paris, 1889.
2. — CHARLIER, C. V. L.: *Die Mechanik des Himmels*, W. de Gruyter, Leipzig, 1902
3. — BROWN, E. W. and SHOOK, C. A.: *Planetary Theory*, Cambridge Univ. Press, 1933.
4. — SMART, W. M.: *Celestial Mechanics*, Longmans-Green, London, New York, 1953.
5. — BROUWER, D. and CLEMENCE, G. M.: *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York, London, 1961.
6. — CHAZY, J.: *Mécanique Céleste*, Presses Universitaires de France, Paris, 1953.

SE TERMINÓ DE IMPRIMIR
EL DÍA 6 DE DICIEMBRE
DEL AÑO MIL NOVE-
CIENTOS SESENTA Y SEIS,
EN LA IMPRENTA LÓPEZ,
PERÚ 666, BUENOS AIRES,
REPÚBLICA ARGENTINA.