Libros de Cátedra

Matemáticas especiales

con actividades resueltas

Diana Leonor Kleiman y Jorge Gastón Argeri
(coordinadores)

FACULTAD DE
INGENIERÍA

exactas

EDITORIAL DE LA UNLP

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA

Matemáticas especiales con actividades resueltas

Diana Leonor Kleiman
Jorge Gastón Argeri
(Coordinadores)

Facultad de Ingeniería

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

edulp
EDITORIAL DE LA UNLP

Presentación

Este libro está pensado para el cuarto curso semestral de Matemática que corresponde al área Matemáticas Especiales de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata. Resulta apropiado como guía para la cursada tanto presencial como a distancia. Sus contenidos abordan el análisis de funciones de variable compleja.

Comenzamos con la extensión del Cálculo en variable real a funciones de una variable compleja, reconociendo similitudes y diferencias. Irrumpe el concepto fundamental de analiticidad, su relación con las funciones armónicas y las transformaciones conformes; enfocamos estas herramientas en la resolución del problema de Dirichlet. Luego, las series de potencias dan lugar al desarrollo de Laurent, al estudio y clasificación de singularidades y a la teoría de residuos, resultando eficaces en el cálculo de ciertas integrales reales. Por último, introducimos las transformadas de Fourier y de Laplace, sus propiedades y su aplicación a las ecuaciones diferenciales parciales e integrodiferenciales ordinarias.

En cada capítulo incluimos actividades complementarias que permitan afianzar e integrar los conocimientos adquiridos y propicien la autoevaluación. Posteriormente, en el mismo sentido, es posible acceder a la sección de actividades resueltas para reflexionar sobre los desarrollos y resultados obtenidos.

Cabe destacar las contribuciones con parte de las actividades resueltas de Cintia N. Perrone, Germán I. Brunini, Federico G. Vega, Alfredo C. López y Sergio D. Rodríguez Ruiz, quien además aportó la historicidad en la introducción. Resaltamos la participación enjundiosa de Cintia y Sergio en la etapa de corrección.

Confiamos en que los lectores asimilen los procesos como preparación para un estudio más profundo y especializado según las distintas ramas de interés.

Diana L. Kleiman
Jorge G. Argeri
Carlos D. Sorichetti
Cecilia Z. González

Índice

Introducción

Para poner en contexto los contenidos específicos programados, a continuación, una reseña histórica con anécdotas y aplicaciones.

Raíces cuadradas de números negativos

La primera referencia conocida a raíces cuadradas de números negativos proviene de los matemáticos griegos, como Herón de Alejandría en el siglo I antes de nuestra Era, resultado de la imposible sección de una pirámide.

Diofanto de Alejandría (s. III) fue uno de los primeros matemáticos en estudiar las ecuaciones de segundo grado de manera algebraica, ya que hasta allí los griegos solían hallar soluciones con métodos geométricos. Resolvía ecuaciones del tipo $x^2 + px = q$, incorporando "incógnitas auxiliares" obteniendo soluciones aproximadas y para casos particulares, pero siempre considerando una sola raíz, la positiva.

Siguiendo la línea cronológica, Al-Khuwarizmi (s. IX) recibió influencias griegas e hindúes, es de quien por deformación de su nombre deriva el término "algoritmo", también resolvió ecuaciones de la forma $x^2 + px = q$ con coeficientes positivos y agregó comprobaciones geométricas.

Durante la Alta Edad Media, Bhaskara (s. XII) vive una época en la que ya se hacía uso del cero, se distinguían los números positivos de los negativos y se disponía de un simbolismo precursor del Álgebra. Esto permitió unificar los casos de ecuaciones de segundo grado en un solo tipo, cualquiera fueran los coeficientes y admitiendo las soluciones negativas aunque sin considerarlas pues, a decir de Bhaskara, "la gente no aprueba las raíces negativas" [14].

Se atribuye a Scipione Del Ferro (1465-1526), profesor en Bologna, haber sido el primero en resolver la ecuación cúbica de la forma $x^3 + px = q$, en 1506 según Tartaglia (1499-1557) o en 1515 según Cardano (1501-1576), aunque el hecho nunca fue comprobado.

Cuenta la historia que Del Ferro resolvió la ecuación cúbica pero no comunicó a nadie el método utilizado, solo divulgó la solución. Sin embargo, poco antes de morir pasó el secreto a su discípulo Antonio María del Fiore. En aquella época (Renacimiento) era común que un matemático desafíe públicamente a otro con problemas no resueltos, apuestas mediante. Fue así que Del Fiore retó a Niccolò Tartaglia (1499-1557), ingeniero y matemático que había alcanzado fama resolviendo problemas de artillería. Intercambiaron treinta problemas. Los que recibió Tartaglia constituían ecuaciones de tercer grado, luego de un mes encontró las soluciones a todos los problemas mientras que del Fiore a ninguno.

El suceso llegó a oídos de Gerolamo Cardano, quien pidió a Tartaglia que le revelara el método de resolución mediante una carta en la que juraba "por los Santos Evangelios y su fe de caballero" que nunca lo haría público, a lo que accedió [14].

Ambas fórmulas, la de del Ferro y la de Tartaglia, incluían raíces que, en algunos casos, podrían tener radicandos negativos.

Poco tiempo después, Cardano y su discípulo Ludovico Ferrari (1522-1565) descubrieron la solución de del Ferro, y al considerar que Tartaglia no era el único, decidieron publicarla en el famoso libro *Ars Magna*; allí quedó una laguna, el llamado "caso irreducible", que se presentaba cuando se obtenían soluciones que involucraban raíces cuadradas de números negativos. Este libro puede ser considerado como el principio del álgebra moderna y en el cual se plantea el problema de las raíces cuadradas de números negativos.

Los números imaginarios

Rafael Bombelli (1526-1572) ingeniero y matemático, alumno de Cardano, en alguno de sus descansos, motivado por la paralización momentánea de alguna obra de ingeniería, decidió escribir un libro de álgebra, *Álgebra*, en 1572. Había leído detalladamente el *Ars Magna* de Cardano, la *Arithmetica* de Diofanto,de la que hizo una completa traducción; y básicamente todo lo escrito sobre el tema. Allí tuvo la idea original de que existía un nuevo tipo de números cuyo cuadrado era negativo.

Aparecían en algunas ecuaciones de segundo grado, entonces, sus soluciones debían involucrar raíces cuadradas de números negativos. Por ejemplo, $x^2 = -1$, cuyas soluciones involucran la raíz cuadrada de -1.

Como ningún número real tiene cuadrado negativo, eso contrariaba tremendamente a los matemáticos de siglo XVI. Mencionamos antes que las raíces de números negativos estaban en los escritos de Cardano, pero consideraba que eran "tan sutiles que eran inútiles", y no investigó más sobre ellos [14]. Sin embargo, Bombelli, en sus estudios algebraicos, de forma secundaria, dio con una de sus principales contribuciones a la matemática: la creación de los que hoy se conocen como los números imaginarios. Desarrolló la aritmética, descubriendo las reglas de su suma y su multiplicación. Para trabajar con estos números, inventó una sofisticada notación y se se refería a los números imaginarios $\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$ como "più di meno" y "meno di meno".

René Descartes (1596-1650), refiriéndose a una ecuación cúbica con una raíz real y otras dos no calculables en ese momento, expresó que "únicamente una de ellas es real (...) las otras dos... son simplemente imaginarias"; fue la primera vez que se usó la palabra "imaginario" [11].

En palabras del ilustre matemático Gottfried Leibniz (1646-1716), creador del cálculo diferencial, Bombelli se adelantó a su tiempo y decía "los números imaginarios son (...) una especie de anfibio entre el ser y el no ser" [11].

Los matemáticos no habían sido capaces de ver la utilidad de esta construcción abstracta, pero a Bombelli, con su mentalidad de ingeniero, le resultaban necesarios para sus cálculos. Así surgen algunos avances matemáticos, de la necesidad de nuevos instrumentos para tratar fenómenos físicos o aplicaciones a la ingeniería. De todas maneras, entre los matemáticos, incluyendo al propio Bombelli, había más dudas que certezas sobre estos nuevos números. Solían plantearse problemas sin sentido, como imaginar un cuadrado de lado igual a $\sqrt{-1}$ cuya área sea igual a -1 [11].

El número i

Fue el gran matemático Leonhard Euler (1707-1783) el primero que denotó $i = \sqrt{-1}$, en 1777, eligió esa letra por ser la inicial de la palabra "imaginario". Así, i es tal $i^2 = -1$. Definido i de esta manera, se puede expresar la raíz cuadrada de cualquier número negativo del siguiente modo: $\sqrt{-n} = i\sqrt{n}$ [2]. Euler se dedicó a estudiar estos números en profundidad.

El matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855) fue quien dio el nombre Números Complejos, los definió rigurosamente y los utilizó en la demostración original del Teorema Fundamental del Álgebra. También se le debe la introducción sistemática de los números complejos en la Matemática y su representación gráfica tal cual se la conoce hoy. Propuso representar un número complejo $z = a + ib$ como un par ordenado de números reales a y b escribiendo $z = (a, b) = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$, de modo que en el eje de abscisas se represente "la parte real" y en el de ordenadas la "parte imaginaria". Caspar Wessel en 1799 y Jean-Robert Argand en 1806, propusieron el plano complejo y la representación de la unidad imaginaria i, mediante el punto $(0, 1)$ del eje vertical [11].

¿Tiene "realidad" un imaginario?

El nuevo concepto provocó polémicas entre matemáticos y entre muchos hubo reticencias a admitir la "realidad" de los números imaginarios. Pero para el matemático actual son tan "reales" como los enteros o los fraccionarios.

Cuenta el gran divulgador científico Isaac Asimov [2], que al matemático los números imaginarios les parecen bien "en tanto que a una cantidad definida se le puedan aplicar las reglas de operación que no contradigan ninguna otra cosa dentro de la matemática", sin importarle demasiado qué significan. A su vez, remarca la gran utilidad de los Números Imaginarios al ubicarlos sobre una recta perpendicular a la recta de los Números Reales: se obtiene un par de ejes sobre el cual puede establecerse la posición de cualquier punto en el plano, el cual estará representado por un Número Complejo de la forma $a+ib$, y con él podrán hacerse todas las operaciones matemáticas conocidas. Si se ven como puntos cardinales a los imaginarios por un lado y a los reales por otro, «nos damos cuenta de que ningún conjunto de números es más "imaginario" ni tampoco más "real" que cualquier otro».

Asimismo, los Números Reales son todos aquellos cuya parte imaginaria es nula, y los Números Imaginarios Puros son aquellos cuya parte real es nula. No hay mayor o menor estatus entre un conjunto y el otro. Los Números Complejos son de gran utilidad para representar magnitudes vectoriales que poseen módulo y dirección, y con ello, poseen algún tipo de correspondencia con una "realidad" tan válida como la de los Números Reales al representar magnitudes escalares [11].

El conjunto de los Números Complejos comprende a los Reales y los Imaginarios, y estos últimos son, para el matemático actual, tan "reales" como los naturales o las fracciones [7].

Interpretaciones y confusiones

Una interpretación grotesca de los Números Imaginarios es brillantemente analizada por Alan Sokal y Jean Bricmont [16]. Este libro se ocupa, entre otras cosas y a decir de los propios autores, «de la mistificación, del lenguaje deliberadamente oscuro, la confusión de ideas y el mal uso de conceptos científicos» realizado por corrientes intelectuales posmodernas. En el apartado "Los números Imaginarios" correspondiente al capítulo 1 dedicado al psicoanalista Jacques Lacan, se cuenta el (mal) uso del concepto de estos números. Los autores transcriben un seminario de Lacan en el cual confunde los Números Irracionales con los Imaginarios y utiliza los números como metáforas o analogías que no conducen a nada sino que crean más confusión. En otro seminario, el psicoanalista se ocupa de los Imaginarios en el que habla de "significados" y "significantes" (erróneamente como significante/significado = enunciado) relacionándolos mediante operaciones matemáticas fantasiosas y sin sentido.

Las funciones de variable compleja

Se puede considerar al siglo XIX como el más fecundo para la Matemática en convergencia con el gran desarrollo científico y tecnológico. Se "amplía de modo imponente el horizonte de los conocimientos adquiridos” e irrumpe “una creciente marejada de aplicaciones científicas sobre las condiciones de la vida humana”. Entre los aportes científicos están los descubrimientos de Volta, Oersted, Arago, Ampere y Faraday sobre la electricidad y el magnetismo; la Teoría Ondulatoria de la Luz (Young); la Teoría electromagnética de la luz (Maxwell), los procesos Termodinámicos (Carnot), los estudios sobre la energía (Joule) [13]. Mientras que entre los aportes tecnológicos se puede nombrar la fotografía, el motor eléctrico, el motor de combustión, la locomotora, el refrigerador, el poliestireno, el teléfono, el fonógrafo, la lámpara incandescente, el automóvil, la comunicación sin cables, el cinematógrafo, la radio.

La Matemática adquirió autonomía, bases más sólidas en sus fundamentos y se distribuyó en varias ramas: geometría analítica, álgebra, cálculo infinitesimal, etc.

La definición de una función de variable compleja a valores complejos es idéntica a la conocida para variable real en cuanto al emparejamiento de valores de una variable independiente con otra dependiente: si la imagen de $z = x + i$ por f es $w = u + iv$, se escribe $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, donde $u(x, y)$, $v(x, y)$ son funciones de dos variables reales a valores reales y se llaman parte real y parte imaginaria de $f(z)$, respectivamente.

El hecho de que las funciones complejas $f(z)$ estén compuestas por dos funciones de variable real $u(x, y)$ y $v(x, y)$ puede hacer pensar que su estudio se reduce al de estas dos últimas. Sin embargo, el concepto de derivabilidad en variable compleja es algo más exigente, $u(x, y)$ y $v(x, y)$ deben estar ligadas entre sí de una manera especial: verificando las Ecuaciones de Cauchy-Riemann. Como su nombre lo indica, estas ecuaciones son atribuidas a estos dos matemáticos, fundadores del análisis complejo moderno, pero es justo recordar que fueron propuestas por primera vez por D’Alembert en 1752 en el contexto de la dinámica de fluidos.

Si bien, el que da una nueva dirección al estudio de las funciones analíticas de variable compleja es Karl Weiestrass (1815-1897), quien llama “analítica” a una función compleja cuando puede expresarse mediante una serie de potencias convergente en una región, uno de los matemáticos que más aportes realizó a la teoría de esas funciones fue Agustin-Louis Cauchy (1789-1857), apoyándose en trabajos de Euler, Clairaut, D’Alembert, Poisson y Lagrange. Extendió la serie de Taylor a las funciones de variable compleja, estableció su fórmula de “la integral de Cauchy” y desarrolló la teoría de polos y residuos, lo que llevó a su discípulo Pierre-Alphonse Laurent (1814-1854) a crear su “serie de Laurent”, de la cual la de Taylor pasa a ser un caso particular. Asimismo, esa teoría permitió resolver integrales de funciones reales imposibles de abordar con métodos de análisis real.

Casi paralelamente, Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), asesor de Gauss en la cátedra de Göttingen, a través del estudio de funciones propuso un tipo de problema que consiste en determinar una función continua de dos variables reales que satisfaga la ecuación de Laplace en el interior de un recinto y tome determinados valores en su borde; problema que hoy se conoce como “problema de Dirichlet”. Se utilizan, por ejemplo, para hallar la temperatura de una placa delgada en una región del plano xy, el potencial electrostático en una región libre de cargas, flujo de fluidos irrotacionales y solenoidales.

Pocos años más tarde, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) estudió las funciones de variable compleja mediante la ecuación de Laplace e ideó las llamadas “superficies de Riemann”.

Vale destacar, que ya en 1749, basándose en la definición de $\ln(z) = \lim_{n\to\infty} n\left(z^{1/n} - 1\right)$, Euler había establecido la primera teoría satisfactoria de las funciones logarítmicas en el plano complejo [1].

La denominada “Fórmula de Euler” es la conclusión de un largo pleito con Leibniz acerca de los logaritmos de los números negativos e imaginarios, al cual Euler pone fin mediante la multiplicidad de los logarítmos. La fórmula siguiente, según Richard Feynman [11], “la más notable en Matemática”, es descubierta por Euler durante su etapa en Basilea (hasta 1726). En ella, relaciona la constante matemática e, los números complejos y las funciones trigonométricas:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x, \quad x \in \mathbb{R},$$

cuando $x = \pi$, se obtiene una ecuación que relaciona cinco números esenciales: $0, 1, e, i, \pi$:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Euler, además, utilizó los números complejos para conectar las funciones de variable compleja con los números primos y respaldar la idea de Gauss de que los números primos, a pesar de estar aleatoriamente distribuidos en la recta numérica, presentan ciertas regularidades estadísticas.

Las transformaciones complejas

Para representar una función de variable compleja $w = f(z)$ serían necesarios cuatro ejes mutuamente perpendiculares, para salvar esa imposibilidad se emplean dos planos, el plano z donde viven los $z = x + iy$ del dominio y el plano w donde se pintan las imágenes $w = u + iv$. De este modo, se habla de cómo la función transforma un punto z de un dominio en el punto w de su imagen.

Interpretar las funciones complejas como "transformaciones" de un conjunto de puntos en el plano z en otro conjunto de puntos del plano w constituye una de las propiedades más interesantes y fructíferas.

Las transformaciones permiten llevar un problema de difícil resolución en un conjunto del plano z a su imagen en plano w donde es posible resolverlo de manera más sencilla. Luego, cumplidas ciertas condiciones, se encuentra la solución al problema original mediante la transformación inversa.

Una tipo de transformación de gran importancia es la transformación conforme, preserva los ángulos entre curvas y la forma de figuras infinitesimales aunque no necesariamente su tamaño o curvatura. Una de sus aplicaciones más conocida se da en cartografía: muchas proyecciones de la esfera terrestre en mapas, como la estereográfica o la Mercator, son conformes.

El ingeniero ruso Nikolái Zhukovsky (1847-1921) propuso una transformación compleja que lleva un círculo a una figura geométrica muy parecida a un perfil de ala de avión. Como la resolución matemática del flujo de aire a través del perfil alar es complicada, puede resolverse de manera más sencilla en el círculo, para luego, encontrar la solución en el perfil original.

Como dato anecdótico se puede citar una especial vinculación entre la metemática y el arte. Es el caso de la litografía Prententententoonstelling (Galería de grabados) del artista Maurits C. Escher (1898-1972) en la cual se representa una imagen distorsionada de un muchacho en una galería. La distorsión, según el autor, pretende representar "una superficie que se hincha, de forma anular, sin principio ni fin". Escher pintó y cuadriculó una versión "realista" la cual distorsionó mediante una retícula que se inflaba desde el borde inferior derecho a medida que giraba en sentido horario, y luego traspasó cada celda de la versión realista a su correspondiente celda del plano deformado; no pudo completar la parte central de su obra y en ese lugar dejó un hueco sin pintar en el cual colocó su firma. Los matemáticos Bart de Smit y Hendrik Lenstra Jr. pensaron que el problema podía abordarse con variable compleja y así encontraron una transformación que recorría el camino inverso al de Escher: llevaba la figura distorsionada a la versión realista. Una vez hallada esta transformación, Smit y Lenstra completaron el hueco y paso seguido, aplicaron la transformación inversa para obtener la versión distorsionada pero ahora "completa" [11].

Sergio Daniel Rodríguez Ruiz

CAPÍTULO 1

Funciones de variable compleja

En este capítulo presentaremos las herramientas clásicas del cálculo diferencial en el campo complejo. Comenzaremos recordando aspectos básicos del sistema de números complejos. Extenderemos al plano complejo las nociones de función, límite, continuidad y diferenciabilidad. Definiremos y estudiaremos la analiticidad, concepto fundamental en la teoría de funciones complejas y sus aplicaciones. Por último definiremos las funciones armónicas, estableceremos su relación con las analíticas y las utilizaremos en la resolución de problemas de contorno.

1.1. Sistema de números complejos

La importancia de los sistemas numéricos no radica en su naturaleza como conjuntos, sino como estructuras algebraicas en las que se definen operaciones que gozan de determinadas propiedades, las cuales suelen enriquecerse definiendo estructuras adicionales (por ejemplo topológicas).

El sistema $(\mathbb{C}, +, .)$ de los números complejos es un conjunto numérico con dos operaciones básicas, suma $(+)$ y producto $(.)$. Dicho sistema está sujeto a las siguientes condiciones:

(C1) Las operaciones básicas de suma y producto entre complejos gozan de las propiedades usuales de la aritmética: son asociativas, conmutativas, el producto distribuye con respecto a la suma, poseen elementos neutros, cada complejo admite un opuesto aditivo y cada complejo no nulo posee un inverso multiplicativo.

(C2) Todo número real es un número complejo. La suma y el producto entre complejos extienden a las respectivas operaciones entre números reales (es decir, si dos números reales se suman o multiplican como complejos el resultado es un número real, el mismo que se obtiene al efectuar la operación en los reales).

(C3) Existe un número complejo, llamado **unidad imaginaria** y denotado i, que verifica

$$i^2 = -1$$

(C4) Todo número complejo z se escribe de modo único en **forma binómica**:

$$z = x + iy \quad \text{donde} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Anotamos $x = \text{Re}(z)$, $y = \text{Im}(z)$ y los denominamos respectivamente la **parte real** y la **parte imaginaria** de z. El complejo $\overline{z} = x - iy$ se denomina el **conjugado** de z.

Dos consecuencias importantes de las condiciones anteriores:

- La ecuación $z^2 + 1 = 0$ de grado 2, si bien carece de soluciones reales, admite dos soluciones complejas i y $-i$. Este es un caso particular del siguiente resultado general.

  Teorema Fundamental del Álgebra *Todo polinomio no constante a coeficientes complejos admite al menos una raíz compleja.*
  Se deduce que todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n raíces complejas (pueden estar repetidas).

- No es posible ordenar los números complejos (compatiblemente con las operaciones de suma y producto).

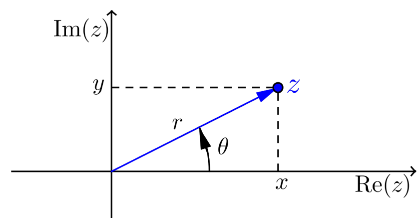
Otra posible representación del número complejo $z = x + iy$ es en **forma cartesiana**:

$$z = (x, y)$$

Este par corresponde a un punto o vector en el plano cartesiano, en este contexto denominado **plano complejo**. Los ejes coordenados x e y se llaman respectivamente *eje real* y *eje imaginario*.

Alternativamente si en lugar de las coordenadas cartesianas se utilizan coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$



el número complejo $z = x + iy$ queda expresado en su **forma polar o trigonométrica**:

$$z = r(\cos\theta + i\ \operatorname{sen}\theta) \ \text{ donde } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \ \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

Como existe una infinidad de ángulos cuya tangente es igual a un número real dado, θ no queda definido de manera unívoca. Recordemos que la función arcotangente es inversa de la tangente sólo en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, por lo que $\operatorname{arctg}(y/x)$ determina correctamente θ solamente cuando el complejo z se sitúa en el primero o el cuarto cuadrantes. En otros casos será necesario efectuar una reducción al cuadrante que corresponda (por ejemplo sumando o restando al arcotangente un número entero de veces π). En el caso $x = 0$ e $y > 0$ podemos tomar $\theta = \frac{\pi}{2}$, mientras que cuando $x = 0$ e $y < 0$ podemos considerar $\theta = -\frac{\pi}{2}$. En el origen el ángulo polar θ no está definido, en ese caso $r = 0$ es suficiente para caracterizar a dicho punto.

La coordenada polar r se denomina el **módulo de** z y se anota $|z|$. Es el número real no negativo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

que representa la distancia del punto (x, y) al origen o la longitud del vector z. Además, dados $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ el módulo de la diferencia entre ellos está dado por:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

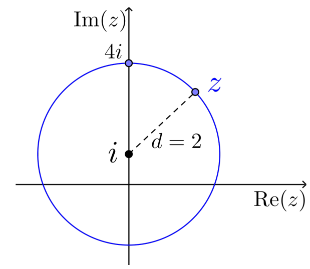
Luego, $|z_1 - z_2|$ mide la distancia entre los puntos z_1 y z_2.

Ejemplo 1.1.1.

$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 2\}$ es el lugar geométrico de los puntos z del plano cuya distancia al punto i es igual a dos, en efecto:

$$|z - i| = |(x + iy) - i| = |x + i(y - 1)| =$$
$$= \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = 2$$

Resulta $x^2 + (y-1)^2 = 4$, ecuación de la circunferencia de radio 2 centrada en el punto i.



Desigualdades importantes

a) $|\operatorname{Re}(z)| \le |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \le |z|$

b) $|z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$ Desigualdad triangular

c) $|z_1 \pm z_2| \ge \Big||z_1| - |z_2|\Big|$

Volviendo a la forma polar, si $z \neq 0$:

- La coordenada θ se dice un **argumento de** z, y se denota $\arg(z)$ al conjunto de todos los argumentos de z, es decir los números $\theta + 2k\pi$ con $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$, donde θ es cualquiera de los ángulos, medido en radianes desde el eje real positivo hasta el vector de componentes (x, y). El signo del ángulo se utiliza para definir su orientación: antihoraria para ángulos positivos y horaria para negativos.
  De acuerdo con la definición, si θ_1 y θ_2 son argumentos de un mismo complejo z, entonces su diferencia es un múltiplo entero de giros completos, es decir que existe algún entero k tal que $\theta_2 - \theta_1 = k2\pi$.

- El único elemento del conjunto $\arg(z)$ que pertenece al intervalo $(-\pi, \pi]$ es la **determinación o valor principal del argumento** o **argumento principal de** z, que indicamos $\operatorname{Arg}(z)$.

A partir de la forma polar o trigonométrica y la **identidad de Euler** $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta = e^{i\theta}$ llegamos a la **forma exponencial**:

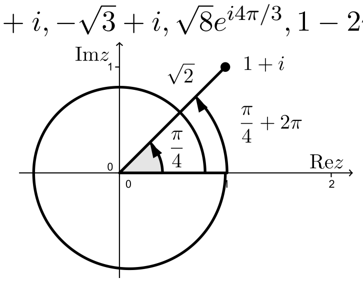
$$z = re^{i\theta}$$

Ejemplo 1.1.2.

Hallemos módulo, argumento y argumento principal: $1 + i, -\sqrt{3} + i, \sqrt{8}e^{i4\pi/3}, 1 - 2i$

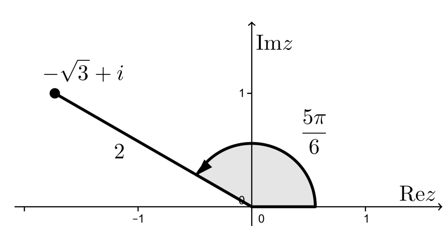
a)

$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
$\operatorname{Arg}(1 + i) = \pi/4$
$\arg(1 + i) = \{\pi/4 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
En la figura se indica $\operatorname{Arg}(1 + i)$ y dos elementos de $\arg(1 + i)$ correspondientes a los valores $k = 0, 1$.



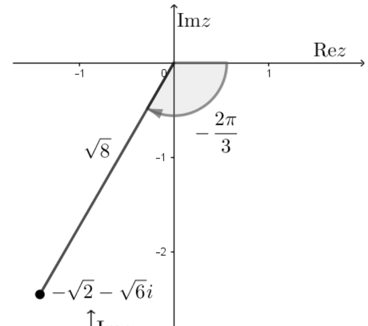
b)

$|-\sqrt{3} + i| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$
$\operatorname{Arg}(-\sqrt{3} + i) = 5\pi/6$
$\arg(-\sqrt{3} + i) = \{5\pi/6 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
En la figura se indica $\operatorname{Arg}(-\sqrt{3} + i)$.
Grafique los elementos de $\arg(-\sqrt{3} + i)$ correspondientes a los valores $k = -1, 2$.



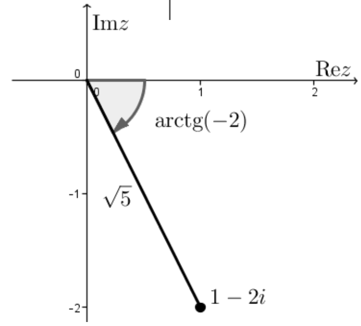
c)

$\left|\sqrt{8}e^{i4\pi/3}\right| = \sqrt{8}$
$\arg\left(\sqrt{8}e^{i4\pi/3}\right) = \{4\pi/3 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
$\mathrm{Arg}\left(\sqrt{8}e^{i4\pi/3}\right) = -2\pi/3$
En las figura se indica el argumento principal,
le proponemos graficar algunos otros argumentos.



d)

$|1 - 2i| = \sqrt{5}$
$\mathrm{Arg}(1 - 2i) = \arctan(-2)$
$\arg(1 - 2i) = \{\arctan(-2) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
En las figura se indica el argumento principal,
le proponemos graficar algunos otros argumentos.



Ejemplo 1.1.3.

Resolvamos la ecuación $z^3 + 8 = 0$ y verifiquemos las soluciones obtenidas.

Para resolver empleamos la fórmula:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right] \qquad k = 0, 1, \cdots, (n-1)$$

En este caso, $z = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{|-8|}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)$ para $k = 0, 1, 2$:

$$z_1 = 2\left(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\pi}{3}\right) = 2\left(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3} \qquad (k = 0)$$

$$z_2 = 2\left(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi\right) = -2 \qquad (k = 1)$$

$$z_3 = 2\left(\cos\tfrac{5\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3} \qquad (k = 2)$$

Para verificar usamos la **fórmula de De Moivre**:

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n\left[\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)\right]$$

$$z_1^3 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^3 = 2^3\left[\cos\left(3\tfrac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(3\tfrac{\pi}{3}\right)\right] = 8\left(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi\right) = -8$$

$$z_2^3 = (-2)^3 = -8$$

$$z_3^3 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^3 = 2^3\left[\cos\left(3\tfrac{5\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(3\tfrac{5\pi}{3}\right)\right] = 8\left(\cos 5\pi + i\,\mathrm{sen}\,5\pi\right) = -8$$

Actividad 1.1.4.

Dados $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = \sqrt{3}e^{i9\pi/4}$, $z_3 = \sqrt{3} - i$, $z_4 = -\sqrt{3} - 3i$, $z_5 = -4$, $z_6 = -i\pi$

a) Halle módulo, argumento y argumento principal.

b) Calcule: $\overline{z_1 - 3iz_2} + z_4^2$, $\dfrac{z_1}{z_4}$, z_2^6 , $\sqrt[4]{z_5}$, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{\mathrm{Im}(z_2)}{z_6}\right)$

Algunas nociones topológicas

Entorno de z_0 de radio $R > 0$: $E(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$, figura 1.1.
Entorno reducido de z_0 de radio $R > 0$: $E^*(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$, figura 1.2.

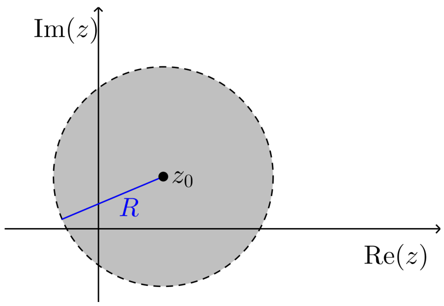


Figura 1.1: entorno de z_0

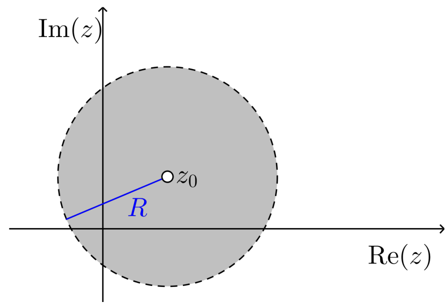


Figura 1.2: entorno reducido de z_0

Sea S un subconjunto de $\mathbb{C}$

- Un punto z_0 está en la **frontera** de S si en todo entorno de z_0 hay al menos un punto de S y al menos uno que no pertenece a S.
- S es **abierto** si para cada punto $z_0 \in S$ existe un entorno de z_0 incluido en S.
- S es **cerrado** si incluye a su frontera.
- S es **acotado** si existe $M > 0$ tal que S está incluido en el disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq M\}$.
- S es **abierto conexo** si es abierto y cualquier par de puntos de S se pueden unir mediante una curva completamente incluida en S. La conexidad corresponde a la idea intuitiva de "conjunto de una sola pieza".
- S es **abierto simplemente conexo** si es abierto conexo y toda curva cerrada simple contenida en S encierra solo puntos de S. Corresponde a la idea intuitiva de "no tiene agujeros".

Ejemplo 1.1.5.

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = -2,\ 0 \leq \text{Im}(z) < 5\}$ no es abierto ni cerrado y es acotado.

b) $B = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 3,\ \text{Im}(z) \geq -2\}$ no es abierto ni cerrado ni acotado.

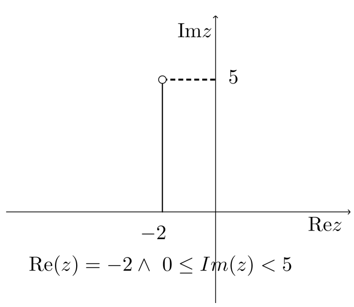


Figura 1.3: conjunto A

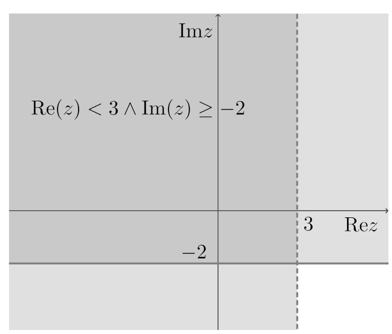


Figura 1.4: conjunto B

c) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3 + i2| > 2\}$ es abierto conexo no simplemente conexo ni acotado.

d) $D = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} < Arg(z) < \frac{3\pi}{4}\right\}$ es abierto simplemente conexo y no acotado.

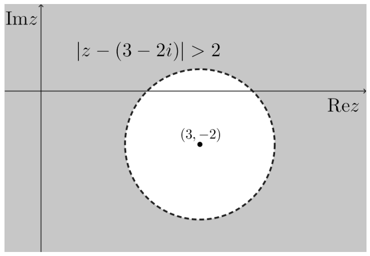


Figura 1.5: conjunto C

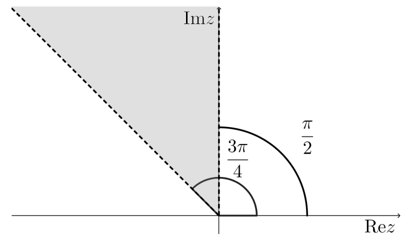


Figura 1.6: conjunto D

e) $E = \left\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 4,\ |Arg(z)| \leq \frac{\pi}{3}\right\}$ es cerrado y acotado.

f) $F = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| > 1\}$ es abierto no conexo y no acotado.

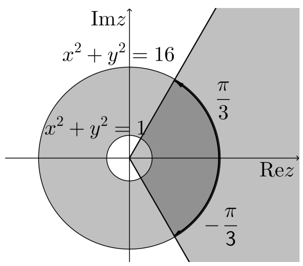


Figura 1.7: conjunto E

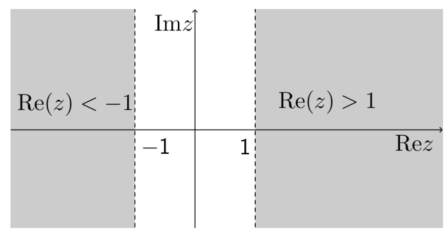


Figura 1.8: conjunto F

Actividad 1.1.6.

Grafique el lugar geométrico de los complejos z que satisfacen las siguientes relaciones y clasifique como en el ejemplo anterior:

a) $\mathrm{Im}(z) > 2\,\mathrm{Re}(z-2)$	b) $0 < \|z-i\| < 3$	c) $\|z-4-3i\| > 1$ y $\mathrm{Re}(z) > 2$
d) $1 < \|z-i\| < 3$ y $\mathrm{Im}(z) > 0$	e) $\sqrt{2}\,\|z\| > \|z-i\|$	f) $\|z+4+3i\| < 1$ o $\mathrm{Re}(z) > 2$
g) $\mathrm{Re}((1+i)z) \leq 1$	h) $\left\|\frac{z-2}{z+i}\right\| \geq \sqrt{2}$	i) $\|z\| \geq 4$ y $-\frac{\pi}{4} < Arg(z) \leq \frac{\pi}{6}$

1.2. Funciones de variable compleja

Si D es un conjunto de números complejos, una función de dominio D y codominio $\mathbb{C}$ es una relación que permite asignar a cada elemento z de D un único número complejo w. Se dice que w es el valor de f en z o la imagen de z por f y se indica $w = f(z)$. Anotamos $f : D \to \mathbb{C}$ y decimos que f es una función de D en $\mathbb{C}$.
Si $z = x + iy,\ w = u + iv$ entonces $w = f(z)$ puede escribirse mediante la igualdad:

$$u + iv = f(x + iy)$$

donde u y v son funciones reales de dos variables reales $\left(u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\right)$ llamadas respectivamente la **parte real** y la **parte imaginaria** de $f(z)$:

$$\mathrm{Re}(f(z)) = u(x,y) \qquad \mathrm{Im}(f(z)) = v(x,y)$$

La imagen por f de un subconjunto A del dominio D es el conjunto $f(A) = \{f(z) : z \in A\}$.
Se dice que f está acotada si el conjunto $f(D)$ es acotado.

Ejemplo 1.2.1.

a) $f(z) = z^2$ es una función de dominio $\mathbb{C}$ que a cada complejo le asigna su cuadrado:

$$w = f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy$$

b) $f(z) = \dfrac{i}{|z|^2}$ es una función de dominio $\mathbb{C} - \{0\}$ que verifica:

$$w = f(z) = \frac{i}{|z|^2} = \frac{i}{x^2+y^2}, \quad \text{donde} \quad u(x,y) = 0, \;\; v(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

c) $\arg(z)$ no es una función, pues cada complejo z no nulo tiene infinitos valores del argumento, en cambio $f(z) = \text{Arg}(z)$ es una función de dominio $\mathbb{C} - \{0\}$ pues el 0 es el único complejo que no tiene argumento y cada complejo no nulo, si bien posee infinitos argumentos, solamente uno de ellos es principal.

Actividad 1.2.2.

En cada caso halle y grafique el dominio más amplio de la función dada y escriba la parte real y la parte imaginaria de la misma.

a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ b) $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{\text{Im}(z)}$ c) $f(z) = \dfrac{i}{|z-i|-3}$ d) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+\overline{z}^2}$

1.3. Límite

Definición 1.3.1. *(Intuitiva) Diremos que* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L$ *si los valores* $f(z)$ *se acercan arbitrariamente a* L *eligiendo* z *suficientemente cercano a* z_0 *pero distinto de* z_0.

Observaciones

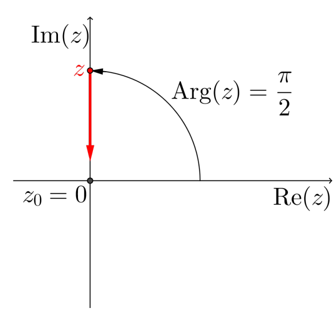
1. En el concepto de límite es irrelevante si z_0 pertenece o no al dominio de la función. Para que esta definición tenga sentido es necesario que existan puntos en el dominio de la función, tan cerca de z_0 como se quiera pero distintos de z_0. Cuando esto ocurre se dice que z_0 es *punto de acumulación* del dominio de f.

2. Cuando el límite existe, su valor no depende del camino por el cual z se acerca a z_0.

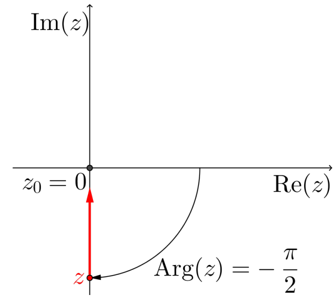
Ejemplo 1.3.2.

El dominio de $f(z) = \text{Arg}(z)$ es $D = \mathbb{C} - \{0\}$. A pesar de no pertenecer a D, $z_0 = 0$ es de acumulación de D pues hay puntos en D tan cercanos al origen como se quiera y distintos de él, entonces el límite de $\text{Arg}(z)$ cuando $z \to 0$ tiene sentido. Sin embargo no existe porque encontramos dos caminos por los cuales da valores distintos:

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ \text{Re}(z)=0\\ \text{Im}(z)>0}} \text{Arg}(z) = \lim_{y\to 0^+} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$



$$\lim_{\substack{z\to 0\\ \mathrm{Re}(z)=0\\ \mathrm{Im}(z)<0}} \mathrm{Arg}(z) = \lim_{y\to 0^-} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$



Proposición 1.3.3. *Dados* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $L = L_1 + iL_2$.

a) $\displaystyle\lim_{z\to z_0} f(z) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = L_1 \quad \wedge \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = L_2$

b) $\displaystyle\lim_{z\to z_0} f(z) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z\to z_0} |f(z) - L| = 0$
En particular cuando $L = 0$*:* $\displaystyle\lim_{z\to z_0} f(z) = 0 \ \Leftrightarrow \ \lim_{z\to z_0} |f(z)| = 0$

Empleando la proposición 1.3.3a) y las propiedades de los límites reales, se deduce:

Propiedad Si existen $\displaystyle\lim_{z\to z_0} f(z)$ y $\displaystyle\lim_{z\to z_0} g(z)$ entonces

a) $\displaystyle\lim_{z\to z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z\to z_0} f(z) + \lim_{z\to z_0} g(z)$

b) $\displaystyle\lim_{z\to z_0} (f(z)\, g(z)) = \lim_{z\to z_0} f(z) \ \lim_{z\to z_0} g(z)$

c) $\displaystyle\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\displaystyle\lim_{z\to z_0} f(z)}{\displaystyle\lim_{z\to z_0} g(z)}$ siempre que $\displaystyle\lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0$

Proposición 1.3.4. *Sean* $f(z), g(z)$ *funciones complejas.*

a) Si en un entorno reducido de z_0 *se verifica* $|f(z)| \leq |g(z)|$ *y* $\displaystyle\lim_{z\to z_0} |g(z)| = 0$ *entonces* $\displaystyle\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$.

b) Si $\displaystyle\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$ *y* $f(z)$ *está acotada en un entorno reducido de* z_0 *entonces* $\displaystyle\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0$.

Demostración

a) Dado que $|f(z)|, |g(z)|$ verifican $0 \leq |f(z)| \leq |g(z)|$ y $\displaystyle\lim_{z\to z_0} |g(z)| = 0$, por el teorema de intercalación para funciones reales, se desprende que $\displaystyle\lim_{z\to z_0} |f(z)| = 0$. De acuerdo con la proposición 1.3.3b) se deduce que $\displaystyle\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$.

b) Supongamos que en un entorno reducido de z_0 se cumple $|f(z)| \leq M$.
Dado que $|f(z)g(z)| = |f(z)|\,|g(z)| \leq M\,|g(z)| = |Mg(z)|$. Por el inciso a) y la proposición 1.3.3b) se deduce $\displaystyle\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0$. □

Ejemplo 1.3.5.

Analicemos $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ para las siguientes funciones.

a) $f(z) = z^2, \quad z_0 = 2+i$. Dado que $u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy$

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(2,1)} (x^2 - y^2) = 3$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} v(x,y) = \lim_{(x,y)\to(2,1)} (2xy) = 4$$

Entonces por la proposición 1.3.3a): $\lim\limits_{z\to 2+i} z^2 = 3+4i$

b) $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{z}, \quad z_0 = 0$. En este caso probaremos que $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ no existe, mostrando que tiene valores distintos por dos caminos del plano complejo, $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0\}$ y $S_2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0\}$, en efecto:

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in S_1}} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x-iy}{x+iy} = \lim_{y\to 0} \frac{-iy}{iy} = -1$$

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in S_2}} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x-iy}{x+iy} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

c) $f(z) = \dfrac{\mathrm{Re}(z^2)}{\overline{z}}, \quad z_0 = 0$. Dejamos al lector proponer distintos caminos cuando $z \to 0$ y observar que por esos caminos el límite vale 0, lo que no alcanza para concluir acerca del límite de $f(z)$ cuando $z \to 0$. En este caso conviene utilizar la proposición 1.3.4a):

$$\left|\frac{\mathrm{Re}(z^2)}{\overline{z}}\right| = \frac{\left|\mathrm{Re}(z^2)\right|}{|\overline{z}|} \leq \frac{\left|z^2\right|}{|z|} = \frac{|z|^2}{|z|} = |z|$$

y como $\lim\limits_{z\to 0} |z| = 0$ entonces $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\mathrm{Re}(z^2)}{\overline{z}} = 0$.

d) $f(z) = z\,\mathrm{Arg}(z), \quad z_0 = 0$. Puesto que $\lim\limits_{z\to 0} z = 0$ y $\mathrm{Arg}(z)$ está acotada ($|\mathrm{Arg}(z)| \leq \pi$), aplicando la propiedad 1.3.4b) resulta $\lim\limits_{z\to 0} z\,\mathrm{Arg}(z) = 0$.

Actividad 1.3.6.

Estudie los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z-i}{z^2+iz+2}$ b) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{i\,\mathrm{Im}(z)}{|z|}$ c) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\mathrm{Re}(z^3)}{z^2}$ □

1.4. Continuidad

Definición 1.4.1. *Dada la función $f(z)$ de variable compleja*

- ***$f(z)$ es continua en el punto z_0*** *si y sólo si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$*
- ***$f(z)$ es continua en un conjunto D*** *si lo es en cada punto de D*

Ejemplo 1.4.2.

Estudiemos la continuidad de las siguientes funciones en el origen:

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}}{z} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases} \qquad h(z) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Re}(z^2)}{\overline{z}} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$$

De acuerdo a los resultados del ejemplo 1.3.5 la función $g(z)$ carece de límite cuando $z \to 0$, por lo que resulta discontinua en ese punto; en cambio $\lim\limits_{z \to 0} h(z) = 0 = h(0)$, de modo que h es continua en el origen.

Proposición 1.4.3. *$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es continua en $z_0 = x_0 + iy_0 \Leftrightarrow u(x,y)$ y $v(x,y)$ son continuas en (x_0, y_0)*

Propiedades

La suma y el producto de funciones continuas es continua. El cociente de funciones continuas es continua salvo en los puntos en que se anula el denominador.

Si $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = w_0$ y f es continua en w_0 entonces $\lim\limits_{z \to z_0} f\left(g(z)\right) = f\left(\lim\limits_{z \to z_0} g(z)\right)$, esta propiedad se conoce como corrimiento del límite. En particular, la composición de funciones continuas es continua.

Las demostraciones son exactamente las mismas que las utilizadas en el caso real.

Se deduce inmediatamente de las propiedades anteriores:

- Las funciones polinómicas $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ son continuas para todo z.
- Las funciones racionales $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ (p, q polinómicas) son continuas en su dominio, es decir en $\{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$.

Ejemplo 1.4.4.

a) Como la función $f(z) = z^2$ es polinómica, es continua en $\mathbb{C}$. Volviendo al ejemplo 1.3.5a), podríamos haber calculado el límite directamente evaluando la función en el punto:

$$\lim_{z \to 2+i} z^2 = (2+i)^2 = 3 + 4i$$

b) $f(z) = \overline{z} = x - iy$ no es polinómica en z. Sin embargo $u(x,y) = x, \quad v(x,y) = -y$ son polinómicas en x e y y por lo tanto continuas en $\mathbb{R}^2$. Entonces $f(z)$ es continua en $\mathbb{C}$.

c) Queremos hallar el dominio de definición y el de continuidad de $f(z) = \mathrm{Arg}(z)$.
El argumento principal está definido para complejos no nulos, por lo que el dominio de definición de f es $\mathbb{C} - \{0\}$. Es evidente que f es discontinua en $z_0 = 0$ ya que este punto no pertenece a su dominio. Veamos que también es discontinua en los puntos del semieje real negativo, es decir si $z_0 = x_0$ con $x_0 < 0$ se tiene:

$$\lim_{\substack{z \to x_0 \\ \mathrm{Im}(z) > 0}} \mathrm{Arg}(z) = \pi \qquad \text{y} \qquad \lim_{\substack{z \to x_0 \\ \mathrm{Im}(z) < 0}} \mathrm{Arg}(z) = -\pi$$

esto muestra que por dos caminos los límites son diferentes y que el límite no existe.
En los demás puntos del plano complejo se puede comprobar analíticamente que f es continua.
Entonces el dominio de continuidad de f es $\mathbb{C} - \{z : \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$.

Actividad 1.4.5.

Justifique que los siguientes enunciados son verdaderos:

a) $f(z) = \dfrac{z-8}{z^3+3z}$ es continua en $\mathbb{C} - \left\{0, -\sqrt{3}i, \sqrt{3}i\right\}$

b) $g(z) = \operatorname{Im}(z)$ es continua en $\mathbb{C}$

c) $h(z) = z^2 \operatorname{Im}(z)$ es continua en $\mathbb{C}$

d) $k(z) = \operatorname{Arg}(z-2)$ es continua en $\mathbb{C} - \{z : \operatorname{Im}(z) = 0, \operatorname{Re}(z) \leq 2\}$.

1.5. Derivabilidad y analiticidad

La definición de derivada para funciones complejas de variable compleja es la misma que para funciones reales de variable real.

Definición 1.5.1. *Sea $f(z)$ una función compleja de variable compleja definida en un entorno del punto z_0. La **derivada de f en el punto z_0** es*

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

cuando este límite existe.

Cuando se considera una función que es derivable en un punto y en todo un entorno del mismo, surge el concepto de analiticidad, en el que nos enfocaremos en gran parte de este texto.

Definición 1.5.2. *Una función de variable compleja $f(z)$ se dice*

- ***analítica en el punto z_0*** *si f es derivable en todo un entorno de z_0.*
- ***analítica en un conjunto D*** *si lo es en cada punto de D.*

Ejemplo 1.5.3.

Consideremos la función $f(z) = \dfrac{1}{z}$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{1}{z+\Delta z} - \dfrac{1}{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-\Delta z}{\Delta z(z+\Delta z)z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-1}{(z+\Delta z)z} = -\frac{1}{z^2}$$

Entonces f es derivable en todo punto salvo el origen, figura 1.9. Además para cualquier

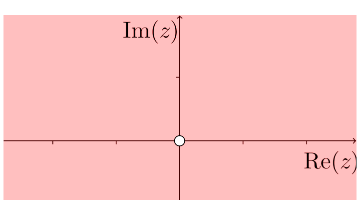


Figura 1.9: dominio de derivabilidad

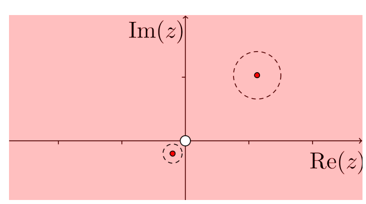


Figura 1.10: estudio de la analiticidad

punto donde f es derivable es posible encontrar un entorno del mismo en el que f es también derivable, figura 1.10. El dominio de analiticidad coincide con el de derivabilidad. $\square$

Continúan válidas las reglas de derivación usuales (cuyas demostraciones son exactamente las mismas que en variable real). Estas reglas permiten analizar la derivabilidad de funciones que se obtienen mediante operaciones combinadas de suma, resta, producto, cociente y composición, a partir de funciones más sencillas cuya derivabilidad es conocida. Análogamente para la analiticidad.

Propiedades. Reglas de derivación

a) Las funciones constantes tienen derivada nula en todo punto.

b) Si k es un número entero, $f(z)=z^k$ es derivable en su dominio y $f'(z)=kz^{k-1}$.

c) Si f y g son derivables en z_0 entonces $f+g$, fg son derivables en z_0, y si $g(z_0)\neq 0$ entonces f/g es derivable en z_0. Se cumple:

$$
\begin{aligned}
&(f+g)'(z_0)=f'(z_0)+g'(z_0)\\
&(fg)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)\\
&\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0)=\frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}\quad \text{si}\quad g(z_0)\neq 0
\end{aligned}
$$

d) Regla de la cadena: si g es derivable en z_0 y f es derivable en $g(z_0)$ entonces la composición $f\circ g$ es derivable en z_0 y $(f\circ g)'(z_0)=f'(g(z_0))g'(z_0)$

Propiedad Si $f(z)$ es derivable en z_0 entonces $f(z)$ es continua en z_0. Luego, si $f(z)$ es discontinua en z_0 no puede ser derivable en z_0.

Se deduce inmediatamente las propiedades de las funciones analíticas.
Propiedades

a) Si f y g son analíticas en z_0 entonces $f+g$, fg son analíticas en z_0, y si $g(z_0)\neq 0$ entonces f/g es analítica en z_0.

b) Si g es analítica en z_0 y f es analítica en $g(z_0)$ entonces la composición $f\circ g$ es analítica en z_0.

En particular:

- Las funciones polinómicas $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$ son derivables y analíticas para todo z.
- Las funciones racionales son derivables y analíticas en todo su dominio.

En las secciones anteriores se justificó que la existencia de límite y la continuidad para funciones complejas de variable compleja equivalen a la existencia de los límites y la continuidad de sus partes real e imaginaria. Veamos que no sucede lo mismo con la derivabilidad.

Ejemplo 1.5.4.

Sea $f(z)=\overline{z}=x-iy$. Si bien en variable real las funciones $u(x,y)=x$, $v(x,y)=-y$ son ambas diferenciables en el origen por ser polinómicas, f no es derivable en el origen:
$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\overline{\Delta z}-\overline{0}}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ no existe (ejemplo 1.3.5b).

Ejemplo 1.5.5.

Analicemos los dominios de derivabilidad y analiticidad de las siguientes funciones y calculemos la derivada.

a) $f(z) = \left(\dfrac{z+1}{z^2-3iz}\right)^3$. Aplicamos las reglas de derivación:

$$f'(z) = \left[\left(\frac{z+1}{z^2-3iz}\right)^3\right]' = 3\left(\frac{z+1}{z^2-3iz}\right)^2 \left[\frac{\left(z^2-3iz\right)-(z+1)(2z-3i)}{\left(z^2-3iz\right)^2}\right] =$$

$$= \frac{3(z+1)^2\left(-z^2-2z+3i\right)}{\left(z^2-3iz\right)^4}$$

El dominio de derivabilidad es $\mathbb{C} - \{0, 3i\}$, que coincide en este caso con el dominio de analiticidad.

b) $f(z) = \overline{z}$. En este caso no podemos aplicar las reglas de derivación.
En el ejemplo 1.5.4 recurrimos a la definición de derivada para mostrar que f no es derivable en el origen. Lo mismo puede hacerse en un punto cualquiera:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z+\Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

que no existe (cualquiera sea z). Luego, los dominios de derivabilidad y analiticidad son vacíos.

c) $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z)$. Anotemos $z = x+iy$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)\,\mathrm{Re}(z+\Delta z) - z\,\mathrm{Re}(z)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{(x+iy+\Delta x+i\Delta y)\,\mathrm{Re}(x+iy+\Delta x+i\Delta y) - (x+iy)\,\mathrm{Re}\,(x+iy)}{\Delta x + i\Delta y}$$

Si $\Delta y = 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+iy+\Delta x)\,\mathrm{Re}(x+iy+\Delta x) - (x+iy)\,\mathrm{Re}\,(x+iy)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+iy+\Delta x)(x+\Delta x) - (x+iy)\,x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x+iy+\Delta x) = 2x+iy$$

Si $\Delta x = 0$:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{(x+iy+i\Delta y)\,\mathrm{Re}(x+iy+i\Delta y) - (x+iy)\,\mathrm{Re}\,(x+iy)}{i\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(x+iy+i\Delta y)\,x - (x+iy)\,x}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(i\Delta y)\,x}{i\Delta y} = x$$

Luego, para que f sea derivable en z es necesario que se verifique $2x+iy = x$, es decir que (x,y) sea solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x &= x \\ y &= 0 \end{cases}$

Como las partes real e imaginaria de $f(z)$ son $u(x,y) = x^2$, $v(x,y) = yx$, podemos observar que el sistema anterior coincide con

$$\begin{cases} u_x(x,y) &= \ \ v_y(x,y) \\ u_y(x,y) &= -v_x(x,y) \end{cases}$$

Dado que su única solución es $(x, y) = (0, 0)$ se deduce que si $z \neq 0$ entonces f no es derivable en z.
Queda por ver si f es derivable en el origen. Analicemos la existencia de derivada en este punto particular:

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(0 + \Delta z)\,\mathrm{Re}(0 + \Delta z) - 0\ \mathrm{Re}(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \mathrm{Re}(\Delta z) = 0$$

Esto muestra que f es derivable en el origen. Luego, el dominio de derivabilidad es $\{0\}$ y en consecuencia el de analiticidad es vacío.

Actividad 1.5.6.

Halle el dominio de derivabilidad y calcule la derivada en los puntos donde exista:

a) $f(z) = \left(\dfrac{z}{z^2+4}\right)^3$ b) $f(z) = z\left(1 - \dfrac{1}{z}\right)^4$ c) $f(z) = i\,\mathrm{Re}(z)$

La observación hecha en el ejemplo 1.5.5c) no es casual. Los teoremas que enunciaremos a continuación formalizan lo visto allí y permiten analizar la derivabilidad de una función $f(z)$ sin recurrir a la definición de derivada.

El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} u_x(x,y) &= v_y(x,y) \\ u_y(x,y) &= -v_x(x,y) \end{cases}$$

se conoce como las ***condiciones de Cauchy-Riemann*** (CR).

Teorema 1.5.7. ***Condición necesaria de derivabilidad***
Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ entonces existen las derivadas parciales $u_x(x_0,y_0), u_y(x_0,y_0), v_x(x_0,y_0), v_y(x_0,y_0)$ y verifican las condiciones CR en (x_0, y_0). Además

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$$

Demostración

Supongamos que f es derivable en z_0. Entonces el siguiente límite existe:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

En particular, su valor no depende del camino particular elegido.
Anotemos $z_0 = x_0 + iy_0$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$
Si $\Delta y = 0$:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + \Delta x) - f(x_0 + iy_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0,y_0)) + i(v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0,y_0)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0,y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0,y_0)}{\Delta x} =$$

$$= u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$$

Si $\Delta x = 0$:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + i\Delta y) - f(x_0 + iy_0)}{i\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)) + i(v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{i\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} =$$

$$= \frac{1}{i} u_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

Tenemos dos expresiones para la derivada:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0)$$

Comparando se deduce que $\begin{cases} u_x(x_0, y_0) & = & v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) & = & -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$ □

Teorema 1.5.8. ***Condición suficiente de derivabilidad***
Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Si las derivadas parciales $u_x(x, y), u_y(x, y), v_x(x, y), v_y(x, y)$ existen en un entorno de (x_0, y_0), son continuas en (x_0, y_0) y satisfacen las condiciones de Cauchy Riemann en (x_0, y_0), entonces f es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$.

Ejemplo 1.5.9.

a) Visitemos la función $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z)$ del ejemplo 1.5.5c) para mostrar cómo los teoremas anteriores simplifican el análisis.

$$\begin{array}{ll} u_x(x, y) = 2x & v_x(x, y) = y \\ u_y(x, y) = 0 & v_y(x, y) = x \end{array}$$

Las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ por ser polinómicas. Luego f es derivable en los puntos que satisfacen Cauchy-Riemann: $\begin{cases} 2x & = & x \\ 0 & = & -y \end{cases}$

La solución de este sistema de ecuaciones lineales es $(x, y) = (0, 0)$. Entonces f solamente es derivable en el origen. Además $f'(0) = u_x(0, 0) + iv_x(0, 0) = 0 + i0 = 0$.
El dominio de derivabilidad es $\{0\}$ y el de analiticidad es el conjunto vacío.

b) $f(z) = (x^2 - y) + ixy^2$ es una función de dominio $\mathbb{C}$.

$$\begin{array}{ll} u_x(x, y) = 2x & v_x(x, y) = y^2 \\ u_y(x, y) = -1 & v_y(x, y) = 2xy \end{array}$$

Las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ por ser polinómicas. Luego f es derivable en los puntos que satisfacen Cauchy-Riemann: $\begin{cases} 2x & = & 2xy \\ -1 & = & -y^2 \end{cases}$

Como se trata de un sistema no lineal deberemos ser muy cuidadosos de no perder soluciones al resolverlo.

$$\begin{cases} 2xy - 2x & = & 0 \\ y^2 & = & 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} 2x(y - 1) & = & 0 \\ y^2 & = & 1 \end{cases}$$

La segunda ecuación se satisface si $y = 1$ o $y = -1$. Sustituyendo en la primera ecuación:

- Si $y = 1$, la primera ecuación se satisface para todo x. Luego, $(x, 1)$ son soluciones del sistema cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$.
- Si $y = -1$, la primera ecuación da $x = 0$. Entonces $(0, -1)$ es solución de CR.

El dominio de derivabilidad está formado por la recta de ecuación $y = 1$ y el punto $z = -i$, es decir $\{x + i : x \in \mathbb{R}\} \cup \{-i\}$.
Además

$$f'(x+i) = u_x(x,1) + iv_x(x,1) = 2x + i$$

$$f'(-i) = u_x(0,-1) + iv_x(0,-1) = i$$

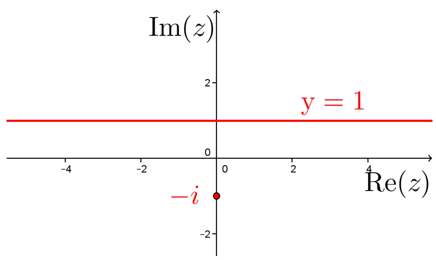


Figura 1.11: dominio de derivabilidad

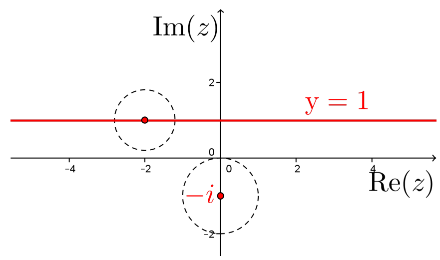


Figura 1.12: estudio de la analiticidad

En el punto $z = -i$ la función f es derivable pero no analítica: en la figura 1.12 se muestra un entorno genérico del punto $-i$ en el cual hay puntos donde la función no es derivable. Lo mismo sucede con cualquier punto de la recta $y = 1$. El dominio de analiticidad es $\emptyset$.

c) $f(z) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\text{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ es una función de dominio $\{x + iy : \ x \neq 0\}$.
Como $f(z)$ no está definida en el eje imaginario, las derivadas parciales de $u(x,y)$ y $v(x,y)$ no existen allí. Luego, f no es derivable en esos puntos. Fuera del eje imaginario dichas derivadas parciales son continuas y están dadas por:

$$u_x(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad v_x(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$u_y(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad v_y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Las ecuaciones CR son:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & = & \dfrac{x}{x^2+y^2} \\[2ex] -\dfrac{y}{x^2+y^2} & = & -\dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Luego, el dominio de derivabilidad de f es $\{x + iy : \ x \neq 0\}$, figura 1.13.
Además

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

Para cualquier punto donde f es derivable es posible encontrar un entorno del mismo en el que f es también derivable, figura 1.14. El dominio de analiticidad coincide con el de derivabilidad.

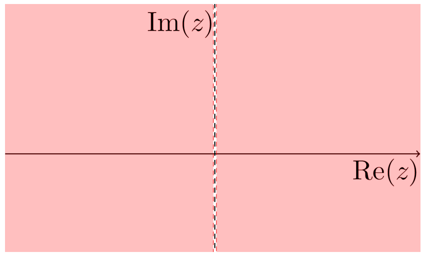


Figura 1.13: dominio de derivabilidad

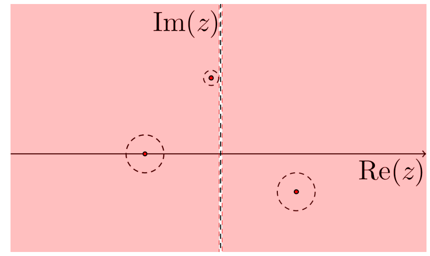


Figura 1.14: estudio de la analiticidad

d) $f(z) = \operatorname{sen} y - ix \cos y$ es una función de dominio $\mathbb{C}$

$$u_x(x,y) = 0 \qquad\qquad v_x(x,y) = -\cos y$$
$$u_y(x,y) = \cos y \qquad\qquad v_y(x,y) = x \operatorname{sen} y$$

Las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ por ser productos de continuas. Las ecuaciones CR son:

$$\begin{cases} 0 & = & x \operatorname{sen} y \\ \cos y & = & \cos y \end{cases}$$

La segunda ecuación no impone condiciones sobre las coordenadas del punto y se verifica en todo el plano.
Las soluciones de CR son: $x = 0 \ \vee \ \operatorname{sen} y = 0$. Es decir: $x = 0 \ \vee \ y = k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$. Luego, el dominio de derivabilidad de f es $\{z : \operatorname{Re}(z) = 0\} \cup \{z : \operatorname{Im}(z) = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, figura 1.15. El dominio de analiticidad resulta vacío, figura 1.16. Calculemos la derivada en los puntos donde existe, es decir en los del dominio de derivabilidad:

$$f'(iy) = u_x(0,y) + iv_x(0,y) = -i \cos y$$

$$f'(x + ik\pi) = u_x(x,k\pi) + iv_x(x,k\pi) = -i \cos(k\pi) = (-1)^{k+1}\, i$$

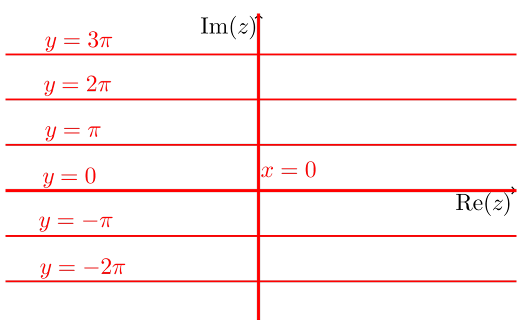


Figura 1.15: dominio de derivabilidad

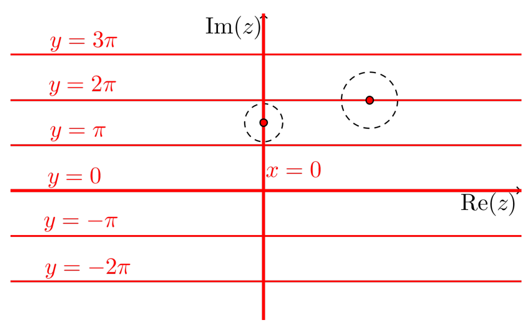


Figura 1.16: estudio de la analiticidad

e) $f(z) = \left(\dfrac{2x^2}{y} - 2y^2\right) + i\left(x^2 + 4xy\right)$ es una función de dominio $\{x + iy : \ y \neq 0\}$.
Observamos que f es discontinua en el eje real, por lo que allí no es derivable. Para los puntos con $y \neq 0$ se tiene:

$$u_x(x,y) = \frac{4x}{y} \qquad\qquad v_x(x,y) = 2x + 4y$$

$$u_y(x,y) = -\frac{2x^2}{y^2} - 4y \qquad\qquad v_y(x,y) = 4x$$

Las derivadas parciales son continuas en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ por ser racionales. Las ecuaciones CR son:

$$\begin{cases} \dfrac{4x}{y} & = & 4x \\ -\dfrac{2x^2}{y^2} - 4y & = & -2x - 4y \end{cases} \equiv \begin{cases} x\,(y-1) & = & 0 \\ \dfrac{x^2}{y^2} & = & x \end{cases}$$

Para que se cumpla la primera ecuación: $x = 0 \;\vee\; y = 1$
Si $x = 0$ se reemplaza en la segunda ecuación, esta se verifica para todo $y \neq 0$. Los puntos del eje imaginario son soluciones de CR, excepto el origen.
Si $y = 1$ se reemplaza en la segunda ecuación se obtiene: $x^2 = x$, es decir $x\,(x-1) = 0$, que se satisface si $x = 0$ o $x = 1$. Los puntos $z = i, z = 1 + i$ son soluciones de CR.
El dominio de derivabilidad de f es $\{iy : y \in \mathbb{R}, y \neq 0\} \cup \{1 + i\}$ y el dominio de analiticidad vacío. Además,

$$f'(iy) = 4yi \text{ si } \mathrm{y} \neq 0$$

$$f'(1+i) = 4 + 6i$$

Actividad 1.5.10.

Halle los dominios de derivabilidad y analiticidad y calcule $f'(z)$ donde exista:

a) $f(z) = i\,\mathrm{Re}(z)$ (comparar con actividad 1.5.6c)

b) $f(z) = y^3 - ix^3$

c) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

d) $f(z) = 3x^2 - y^2 + i(xy^2 + x^3)$

1.6. Funciones elementales

Exponencial compleja

Comencemos preguntándonos si es posible dar un significado a la expresión e^z cuando $z = x + iy$ es un número complejo. Sea cual fuera la definición, quisiéramos que se reduzca a la conocida función exponencial real cuando z sea un número real. Y dado que la derivada (en el sentido real) de la exponencial real es ella misma, parece natural requerir la misma condición sobre e^z.
La siguiente definición resuelve ambas cuestiones.

Definición 1.6.1. ***Función exponencial***

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x\,(\cos y + i \operatorname{sen} y)\,, \; z = x + iy \in \mathbb{C}$$

Entonces

- Si $z = x + i0$ entonces $e^z = e^x\,(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^x$. Esto muestra que e^z es una función que extiende la exponencial real al campo complejo.

- Las partes real e imaginaria de e^z son $u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$. Resultan $u_x = e^x \cos y$, $u_y = -e^x \operatorname{sen} y$, $v_x = e^x \operatorname{sen} y$, $v_y = e^x \cos y$ continuas en $\mathbb{R}^2$ y las ecuaciones CR se verifican en todo punto. Entonces e^z es derivable y analítica para todo $z \in \mathbb{C}$, además

$$(e^z)' = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = e^x\,(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z$$

Algunas propiedades

a) $\left|e^{iy}\right| = 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$
En efecto: $\left|e^{iy}\right| = |\cos y + i \operatorname{sen} y| = \sqrt{(\cos y)^2 + (\operatorname{sen} y)^2} = 1$

b) Si $z = x + iy$:

- $|e^z| = e^x$
En efecto: $|e^z| = \left|e^x e^{iy}\right| = |e^x| \left|e^{iy}\right| = |e^x| = e^x$ porque $|e^x| = e^x$ ya que $e^x > 0$
- $\arg(e^z) = y + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{Arg}(e^z) = y \ \Leftrightarrow\ -\pi < y \leq \pi$

c) $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$
En efecto, como su módulo e^x no se anula nunca entonces e^z tampoco puede anularse.

d) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$
$\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$

Ejemplo 1.6.2.

Para hallar el dominio D de $f(z) = \dfrac{e^z}{e^{3z} + 1}$ debemos resolver $e^{3z} = -1$.
Escribiendo ambos miembros en forma exponencial: $e^{3x} e^{i3y} = 1 e^{i\pi}$
y considerando que la igualdad se cumple si y solo si los módulos son iguales y los argumentos difieren en múltiplos enteros de 2π:

$$|e^{3z}| = |-1| \ \Leftrightarrow\ e^{3x} = 1 \ \Leftrightarrow\ 3x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$$

$$3y = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ y = \pi/3 + 2k\pi/3,\ k \in \mathbb{Z}$$

Resulta $D = \mathbb{C} - \{i(2k+1)\pi/3 : k \in \mathbb{Z}\}$.
El numerador e^z es derivable y analítico en $\mathbb{C}$. La función e^{3z} es derivable y analítica en $\mathbb{C}$ por ser composición de $3z$ con e^z, derivables y analíticas en $\mathbb{C}$. Luego el denominador $e^{3z} + 1$ es derivable y analítica en $\mathbb{C}$ pues ambos términos lo son.
La función $f(z)$ es derivable y analítica en D puesto que es cociente de derivables y analíticas con denominador no nulo. Su derivada se calcula aplicando reglas:

$$f'(z) = \left(\frac{e^z}{e^{3z} + 1}\right)' = \frac{e^z\left(e^{3z} + 1\right) - e^z 3e^{3z}}{\left(e^{3z} + 1\right)^2} = \frac{e^z - 2e^{4z}}{\left(e^{3z} + 1\right)^2}$$

Actividad 1.6.3.

a) Expese los siguientes números complejos en forma binómica:

$z_1 = \overline{e^{(3 - i\pi)/4}}$ $\qquad z_2 = e^{(1 + i\pi)/2}$ $\qquad z_3 = \dfrac{e^{(3 + i\pi)/4}}{e^{(1 - i\pi)/4}}$

b) Resuelva la ecuación: $e^z + i = 0$

c) Halle los dominios de definición, derivabilidad y analiticidad y la derivada donde exista:

$f(z) = \dfrac{z}{e^z + i}$ $\qquad g(z) = \dfrac{1}{e^{1/z}}$ $\qquad h(z) = e^{\overline{z}}$

Logaritmo complejo

Dados números complejos z, w diremos que w es un logaritmo de z si $e^w = z$.
Por ejemplo, $w = i\pi$ es un logaritmo de $z = -1$ porque $e^{i\pi} = -1$. Más generalmente, cualquier complejo de la forma $w = i(\pi + 2k\pi)$ es también un logaritmo de -1, cualquiera sea el entero k, puesto que $e^{i(\pi+2k\pi)} = -1$. Como muestra este ejemplo en general un complejo no tiene un único logaritmo.
Anotaremos $\ln(z)$ al conjunto de todos los logaritmos de z. Entonces:

$$\boxed{w \in \ln(z) \quad \Leftrightarrow \quad z = e^w}$$

En particular $z = 0$ no puede tener logaritmos ya que la exponencial compleja nunca se anula. Si $z \neq 0$ se escribe en forma exponencial $z = re^{i\theta}$, donde $r = |z|, \theta \in \arg(z)$, y $w = u + iv$ en forma binómica:

$$w \in \ln(z) \quad \Leftrightarrow \quad e^w = z \quad \Leftrightarrow \quad e^{u+iv} = re^{i\theta} \quad \Leftrightarrow \quad e^u e^{iv} = re^{i\theta}$$

- Comparando módulos: $e^u = r$. Por lo tanto: $u = \ln(r) = \ln|z|$ (este logaritmo es el real, función inversa de la exponencial real).
- Comparando argumentos: $v = \theta + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, que equivale a $v \in \arg(z)$.

Definición 1.6.4. ***Conjunto de los logaritmos de un complejo***
Si $z \neq 0$, $z = re^{i\theta}$,

$$\ln(z) = \ln|z| + i\,\arg(z) = \ln r + i\,(\theta + 2k\pi)\,, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

Es importante observar que $\ln(z)$ no es una función ya que dado $z \neq 0$, $\ln(z)$ toma infinitos valores.

Función logaritmo principal

Restringiendo los valores de θ a intervalos adecuados se obtienen diferentes funciones o "determinaciones" del logaritmo. Si se considera $f(z) = \ln r + i\theta$ con $\theta \in (-\pi, \pi]$ es la rama o determinación principal del logaritmo ya que corresponde a la determinación principal del argumento de z.

Definición 1.6.5. ***Función logaritmo principal***
Si $z \neq 0$,

$$Ln(z) = \ln|z| + i\,\operatorname{Arg}(z)$$

Otra determinación del logaritmo es $g(z) = \ln r + i\theta$ con $\theta \in (0, 2\pi]$. Más generalmente, cualquier intervalo real semiabierto I de longitud 2π permite elegir uno entre los infinitos argumentos θ de z, mediante la condición que $\theta \in I$; cada uno de estos intervalos da origen a una determinación del logaritmo. El logaritmo principal tiene la ventaja de ser una función continua en el semieje real positivo (como sucede con el logaritmo real, al que extiende).

Ejemplo 1.6.6.

a) $\ln(-1) = \ln|-1| + i\arg(-1) = \ln(1) + i\,(\pi + 2k\pi) = i\,(2k+1)\,\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{Ln}(-1) = \ln|-1| + i\operatorname{Arg}(-1) = \ln(1) + i\pi = i\pi$

b) $\ln(2-2i) = \ln|2-2i| + i\arg(2-2i) = \ln\sqrt{8} + i\left(-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) =$
$= \frac{3}{2}\ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{Ln}(2-2i) = \ln|2-2i| + i\,\mathrm{Arg}(2-2i) = \dfrac{3}{2}\ln 2 - i\dfrac{\pi}{4}$

c) $\mathrm{Ln}((-1+i)^2) = \mathrm{Ln}(-2i) = \ln|-2i| + i\,\mathrm{Arg}(-2i) = \ln(2) - i\dfrac{\pi}{2}$
$\mathrm{Ln}(-1+i) = \ln|-1+i| + i\,\mathrm{Arg}(-1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\ln(2)}{2} + i\dfrac{3\pi}{4}$
Observemos que
$$\mathrm{Ln}((-1+i)^2) \neq 2\mathrm{Ln}((-1+i))$$
Este ejemplo muestra que debemos tener cuidado de no atribuirle al logaritmo complejo algunas propiedades del logaritmo real

Algunas propiedades

a) Si $z \neq 0$: $\qquad e^{\ln(z)} = z \qquad e^{\mathrm{Ln}(z)} = z$
En efecto:
$$e^{\ln(z)} = e^{\ln|z| + i\arg(z)} = e^{\ln|z|}e^{i\arg(z)} = |z|e^{i\arg(z)} = z$$
$$e^{\mathrm{Ln}(z)} = e^{\ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)} = e^{\ln|z|}e^{i\,\mathrm{Arg}(z)} = |z|e^{i\,\mathrm{Arg}(z)} = z$$

b) $\ln(e^z) = z + i2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, para todo z.
En efecto:
$$\ln(e^z) = \ln|e^z| + i\,\arg(e^z) = \ln(e^x) + i\,(y + 2k\pi) =$$
$$= x + i\,(y + 2k\pi) = (x + i\,y) + i2k\pi = z + i2k\pi$$
En general $\mathrm{Ln}(e^z) \neq z$. Por ejemplo para $z = 2\pi i$ resulta:
$$\mathrm{Ln}(e^z) = \mathrm{Ln}\left(e^{2\pi i}\right) = \mathrm{Ln}(1) = 0 \neq 2\pi i$$

c) El dominio de definición $\mathrm{Ln}(z)$ es $\mathbb{C} - \{0\}$. La parte real de $\mathrm{Ln}(z)$ es $\ln|z| = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. La parte imaginaria es $\mathrm{Arg}(z)$, continua excepto en el origen y en el semieje real negativo. Por lo tanto el dominio de continuidad de $\mathrm{Ln}(z)$ es $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$. En particular, $\mathrm{Ln}(z)$ no es derivable ni en el origen ni en el semieje real negativo.

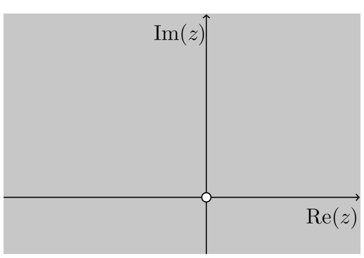


Figura 1.17: dominio de $\mathrm{Ln}(z)$

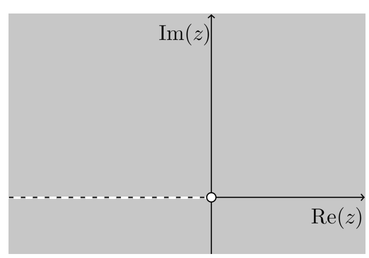


Figura 1.18: dominio de analiticidad de $\mathrm{Ln}(z)$

d) $(\mathrm{Ln}(z))' = 1/z$
En efecto, las partes real e imaginaria de $\mathrm{Ln}(z)$ expresadas en coordenadas polares son $U(r,\theta) = \ln r, V(r,\theta) = \theta$ si $-\pi < \theta < \pi$. En estas coordenadas las condiciones CR pueden expresarse:
$$\begin{cases} U_r(r,\theta) &= \frac{1}{r}V_\theta(r,\theta) \\ V_r(r,\theta) &= -\frac{1}{r}U_\theta(r,\theta) \end{cases}$$

La función $\mathrm{Ln}(z)$ las verifica para todo $r > 0$ y todo $\theta \in (-\pi, \pi)$. Luego, los dominios de derivabilidad y analiticidad de $\mathrm{Ln}(z)$ coinciden con el de continuidad. Además, la derivada puede calcularse en coordenadas polares a partir de:

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left(U_r(r,\theta) + iV_r(r,\theta)\right)$$

Entonces:

$$(\mathrm{Ln}(z))' = e^{-i\theta}\left(U_r(r,\theta) + iV_r(r,\theta)\right) = e^{-i\theta}\left(\frac{1}{r} + i0\right) = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}$$

Ejemplo 1.6.7.

a) Visitemos el ejemplo 1.6.2 para resolver la ecuación $e^{3z} = -1$ empleando logaritmos. Una forma es aplicando la definición del conjunto de los logaritmos de un complejo:

$$e^{3z} = -1 \;\Leftrightarrow\; 3z \in \ln(-1)$$

los números z tales que $3z$ están en el conjunto $\ln(-1)$ son los que satisfacen la ecuación, entonces

$$3z = \ln|-1| + i\,\arg(-1) = 0 + i(\pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; z = i(2k+1)\pi/3,\ k \in \mathbb{Z}$$

Otra manera es aplicando logaritmos a ambos miembros:

$$e^{3z} = -1 \;\Leftrightarrow\; \ln(e^{3z}) = \ln(-1) \;\Leftrightarrow\; 3z + i2h\pi = i(2l+1)\pi,\ h, l \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 3z = i(2(l-h)+1)\pi,\ h, l \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; z = i(2k+1)\pi/3,\ k \in \mathbb{Z}$$

b) Resolvamos la ecuación $\mathrm{Ln}(2z) = i\pi + \mathrm{Ln}(z-i)$
Aplicaremos la exponencial compleja en ambos miembros de la ecuación y usaremos que para $z \neq 0$, $e^{\mathrm{Ln}(z)} = z$ (propiedad de los logaritmos):

$$\mathrm{Ln}(2z) = i\pi + \mathrm{Ln}(z-i) \;\Rightarrow\; e^{\mathrm{Ln}(2z)} = e^{i\pi + \mathrm{Ln}(z-i)} \;\Rightarrow\; e^{\mathrm{Ln}(2z)} = e^{i\pi}e^{\mathrm{Ln}(z-i)} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 2z = -(z-i) \;\Leftrightarrow\; 3z = i \;\Leftrightarrow\; z = i/3$$

Como $\mathrm{Ln}(e^z) \neq z$ en general, la primera no puede ser una equivalencia, de aquí es que no podemos estar seguros que $z = i/3$ sea una solución y debemos corroborarlo, en efecto, reemplazando $z = i/3$ en cada uno de los miembros de la ecuación se obtiene el mismo resultado:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(2i/3) &= \ln|2i/3| + i\ \mathrm{Arg}(2i/3) = \ln(2/3) + i\,\pi/2\\ i\pi + \mathrm{Ln}(i/3 - i) &= i\pi + \mathrm{Ln}(-2i/3) = i\pi + \ln|-2i/3| + i\ \mathrm{Arg}(-2i/3) =\\ &= i\pi + \ln(2/3) - i\,\pi/2 = \ln(2/3) + i\,\pi/2\end{aligned}$$

c) Resolvamos la ecuación $\mathrm{Ln}(z) = i3\pi$
Aplicaremos la exponencial compleja en ambos miembros de la ecuación y usaremos que para $z \neq 0$, $e^{\mathrm{Ln}(z)} = z$ (propiedad de los logaritmos):

$$\mathrm{Ln}(z) = 3i\pi \;\Rightarrow\; e^{\mathrm{Ln}(z)} = e^{3i\pi} \;\Leftrightarrow\; z = \cos 3\pi + i\,\mathrm{sen}\,3\pi = -1$$

Como $\mathrm{Ln}(e^z) \neq z$ en general, la primera no puede ser una equivalencia, de aquí es que no podemos estar seguros que $z = -1$ sea una solución y debemos corroborarlo:

$$\mathrm{Ln}(-1) = \ln|-1| + i\ \mathrm{Arg}(-1) = \ln(1) + i\,\pi = i\,\pi$$

El número $z = -1$ no satisface la ecuación y entonces no existe solución. La misma conclusión se obtiene directamente de la ecuación original pues $\mathrm{Arg}(z) < \pi$.

Actividad 1.6.8.

a) Empleando logaritmos resuelva la ecuación: $e^z + i = 0$ (compare con 1.6.3b)

b) Halle las soluciones de: $e^z + 2e^{-z} = i$

c) Halle los dominios de definición, derivabilidad y analiticidad y la derivada:

$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{Ln}(z)} \qquad g(z) = z\mathrm{Ln}(iz) \qquad h(z) = \frac{1}{i\pi + 2\mathrm{Ln}(z)}$$

Funciones trigonométricas e hiperbólicas

De acuerdo con la identidad de Euler podemos escribir, para $\theta \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$$

Si ambas identidades se suman o se restan miembro a miembro:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \qquad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\operatorname{sen}\theta$$

Por lo tanto, cuando θ es real:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Los miembros derechos de estas dos identidades tienen sentido cuando se reemplaza $\theta \in \mathbb{R}$ por $z \in \mathbb{C}$, dando lugar a funciones complejas de variable compleja que extienden al coseno y al seno reales.

Definición 1.6.9. ***Funciones coseno y seno***

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Aún más sencillo resulta definir las funciones hiperbólicas. Dado que en los reales vienen definidas como combinaciones de exponenciales pueden extenderse fácilmente al campo complejo a partir de la exponencial compleja.

Definición 1.6.10. ***Funciones coseno y seno hiperbólicos***

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{senh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Aplicando reglas de derivación se prueba fácilmente que $\operatorname{sen}(z), \cos(z), \operatorname{senh}(z), \cosh(z)$ son analíticas en todo el plano complejo y que sus derivadas coinciden con las clásicas:

$$(\cos(z))' = -\operatorname{sen}(z) \qquad (\operatorname{sen}(z))' = \cos(z)$$

$$(\cosh(z))' = \operatorname{senh}(z) \qquad (\operatorname{senh}(z))' = \cosh(z)$$

Ejemplo 1.6.11.

Calculemos $\operatorname{sen}(2+i)$ y $\cosh(i\pi/4)$ y expresemos el resultado en forma binómica.

$$\operatorname{sen}(2+i) = \frac{e^{i(2+i)} - e^{-i(2+i)}}{2i} = \frac{e^{-1+2i} - e^{1-2i}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{-1}e^{2i} - e^{1}e^{-2i}}{2i} = \frac{e^{-1}\left(\cos(2) + i\operatorname{sen}(2)\right) - e^{1}\left(\cos(2) - i\operatorname{sen}(2)\right)}{2i} =$$

$$= \frac{\cos(2)\left(e^{-1} - e^{1}\right) + i\operatorname{sen}(2)\left(e^{-1} + e^{1}\right)}{2i} =$$

$$= \cos(2)\frac{\left(e^{-1} - e^{1}\right)}{2i} + i\operatorname{sen}(2)\frac{\left(e^{-1} + e^{1}\right)}{2i} =$$

$$= \operatorname{sen}(2)\left(\frac{e^{1} + e^{-1}}{2}\right) + i\cos(2)\left(\frac{e^{1} - e^{-1}}{2}\right) = \operatorname{sen}(2)\cosh(1) + i\cos(2)\operatorname{senh}(1)$$

$$\cosh(i\pi/4) = \frac{e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}}{2} = \frac{\left(\cos(\pi/4) + i\operatorname{sen}(\pi/4)\right) + \left(\cos(\pi/4) - i\operatorname{sen}(\pi/4)\right)}{2} =$$

$$= \frac{2\cos(\pi/4)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo 1.6.12.

Resolvamos las ecuaciones: a) $\operatorname{sen} z = 0$ b) $\cos z = -2$

a)

$$\operatorname{sen} z = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{iz} - e^{-iz} = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{iz} = e^{-iz} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; iz + i\,2h\pi = -iz + i\,2l\pi,\; h, l \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; 2iz = i2k\pi \;\Leftrightarrow\; z = k\pi,\; k \in \mathbb{Z}$$

b)

$$\cos z = -2 \;\Leftrightarrow\; \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = -2 \;\Leftrightarrow\; e^{iz} + e^{-iz} = -4 \;\Leftrightarrow\; e^{iz} + 4 + e^{-iz} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left(e^{iz}\right)^2 + 4e^{iz} + 1 = 0$$

Anotando $w = e^{iz}$ la ecuación anterior se transforma en una cuadrática:

$$w^2 + 4w + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; w = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \;\Leftrightarrow\; w = -2 \pm \sqrt{3}$$

Quedan dos posibilidades:

$$e^{iz} = -2 + \sqrt{3}$$
$$e^{iz} = -2 - \sqrt{3}$$

Resolviendo la primera ecuación:

$$e^{iz} = -2 + \sqrt{3} \;\Leftrightarrow\; iz \in \ln(-2 + \sqrt{3}) \;\Leftrightarrow\; iz = \ln|-2 + \sqrt{3}| + i\,\arg(-2 + \sqrt{3}) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; iz = \ln(2 - \sqrt{3}) + i\,(\pi + 2k\pi) \;\Leftrightarrow\; iz = \ln(2 - \sqrt{3}) + i\,(2k+1)\pi$$

Luego:

$$z = (2k+1)\pi - i\ln(2 - \sqrt{3}),\; k \in \mathbb{Z}$$

Análogamente para la segunda ecuación:

$$z = (2k+1)\pi - i\ln(2 + \sqrt{3}),\; k \in \mathbb{Z}$$

Actividad 1.6.13.

a) Exprese en forma binómica:

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+i\right)$ $\qquad\qquad$ $\cosh\left(1+i\frac{\pi}{4}\right)$

b) Resuelva la ecuación: $1+i\operatorname{sen}(z)=0$

c) Halle los dominios de definición, derivabilidad y analiticidad y la derivada:

$f(z)=\dfrac{\operatorname{sen}(z)}{2-\cos(z)}$ $\qquad\qquad$ $g(z)=\dfrac{z}{\operatorname{senh}(iz)+\cos(z)}$

$h(z)=\dfrac{1}{\cos(z)+i+e^{-iz}}$ $\qquad\qquad$ $k(z)=\dfrac{\cos(z)}{i+\operatorname{sen}(z)}$

Propiedad Sea $z=x+i\,y$

a) $\operatorname{sen}(z)=\operatorname{sen}(x)\cosh(y)+i\cos(x)\operatorname{senh}(y)$

b) $\cos(z)=\cos(x)\cosh(y)-i\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)$

c) $\operatorname{senh}(z)=\operatorname{senh}(x)\cos(y)+i\cosh(x)\operatorname{sen}(y)$

d) $\cosh(z)=\cosh(x)\cos(y)+i\operatorname{senh}(x)\operatorname{sen}(y)$

Demostración de a)

$$\operatorname{sen}(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{e^{i(x+i\,y)}-e^{-i(x+i\,y)}}{2i}=\frac{e^{-y}e^{i\,x}-e^{y}e^{-i\,x}}{2i}=(-i)\,\frac{e^{-y}e^{i\,x}-e^{y}e^{-i\,x}}{2}$$

$$=(-i)\,\frac{e^{-y}(cosx+i\ \operatorname{sen}x)-e^{y}(cosx-i\ \operatorname{sen}x)}{2}=\frac{e^{-y}(-i\,cosx+\operatorname{sen}x)+e^{y}(i\,cosx+\ \operatorname{sen}x)}{2}=$$

$$=\operatorname{sen}x\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)+i\ \cos x\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)=\operatorname{sen}x\cosh y+i\ \cos x\operatorname{senh}y$$

■

Observaciones

1. Las funciones $\operatorname{sen}(z),\cos(z)$ no son acotadas en $\mathbb{C}$. Se puede comprobar utilizando el hecho que $\operatorname{senh}(y)$ no está acotada y las siguientes igualdades:

$$|\operatorname{sen}(z)|=\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)+\operatorname{senh}^2(y)} \qquad\qquad |\cos(z)|=\sqrt{\cos^2(x)+\operatorname{senh}^2(y)}$$

2. Si $t\in[-1,1]$ entonces $\operatorname{sen}z=t,\cos z=t$ se verifican exactamente en los mismos puntos que $\operatorname{sen}x=t,\cos x=t$. En particular $\operatorname{sen}z,\cos z$ se anulan en los puntos $z=k\pi$ y $z=(2k+1)\pi/2$ respectivamente ($k\in\mathbb{Z}$).

Actividad 1.6.14.

Teniendo en cuenta las propiedades y las observaciones anteriores rehaga los ejemplos 1.6.11 y 1.6.12a).

Exponenciación generalizada

Para $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ se define $a^b = e^{b\ln(a)}$. Basados en esto podemos definir de modo natural la exponenciación compleja.

Definición 1.6.15. ***Exponenciación***
Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq 0$,

$$z_1^{z_2} = e^{z_2 \ln(z_1)}$$

Como el logaritmo complejo es multivaluado, la exponenciación compleja también lo es.

Ejemplo 1.6.16.

a) $(-1)^i = e^{i\ln(-1)} = e^{i[\ln|-1|+i\arg(-1)]} = e^{i[\ln(1)+i(\pi+2k\pi)]} = e^{-(2k+1)\pi}$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $i^i = e^{i\ln(i)} = e^{i(\ln|i|+i\arg(i))} = e^{i\left[\ln(1)+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right]} = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}$ con $k \in \mathbb{Z}$

c) $(2i)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\ln(2i)} = e^{\frac{1}{2}[\ln|2i|+i\arg(2i)]} = e^{\frac{1}{2}\left[\ln(2)+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right]} =$
$= e^{\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)} = \sqrt{2}e^{ik\pi}e^{i\pi/4} = (-1)^k\sqrt{2}\,(cos(\pi/4) + i\,\text{sen}(\pi/4)) =$
$= (-1)^k\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (-1)^k(1+i) = \pm(1+i)$

Observemos que se trata de las dos raíces cuadradas complejas de $2i$.

Actividad 1.6.17.

Utilice la definición de exponenciación para calcular $z^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$. Corrobore la consistencia con la fórmula para calcular raíces n-ésimas de un complejo. □

Función exponencial generalizada

Si en la exponenciación generalizada se considera una determinación del logaritmo complejo, queda definida una función de la exponencial generalizada. Llamaremos rama principal de la exponencial compleja a la definida utilizando el logaritmo principal.

Definición 1.6.18. ***Función exponencial principal de base*** a
Si $a, z \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$,

$$a^z = e^{zLn(a)}$$

Ejemplo 1.6.19.

Calculemos los valores principales en el ejemplo anterior.

a) $(-1)^i = e^{i\text{Ln}(-1)} = e^{i[\ln|-1|+i\,\text{Arg}(-1)]} = e^{i(\ln(1)+i\pi)} = e^{-\pi}$

b) $(2i)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\text{Ln}(2i)} = e^{\frac{1}{2}[\ln|2i|+i\,\text{Arg}(2i)]} = e^{\frac{1}{2}\left(\ln(2)+i\frac{\pi}{2}\right)} =$
$= e^{\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2}\,(cos(\pi/4) + i\,\text{sen}(\pi/4)) =$
$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (1+i) = 1+i$

c) $i^i = e^{i\text{Ln}(i)} = e^{i(\ln|i|+i\,\text{Arg}(i))} = e^{i\left[\ln(1)+i\frac{\pi}{2}\right]} = e^{-\frac{\pi}{2}}$

1.7. Funciones armónicas

Consideremos un campo vectorial $\vec{F}(x,y) = \langle M(x,y), N(x,y)\rangle$ cuyas componentes poseen derivadas parciales de primer orden continuas en un disco abierto $D \subset \mathbb{R}^2$.
Si $\vec{F}$ es irrotacional en D, es decir si $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ en D, entonces puesto que D es simplemente conexo resulta $\vec{F}$ conservativo en D [17], de modo que existe una función potencial $u(x,y)$ tal que $\vec{F}(x,y) = \vec{\nabla}u(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$. Por lo tanto $M = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $N = \dfrac{\partial u}{\partial y}$. Observemos que como $M(x,y)$, $N(x,y)$ admiten derivadas parciales de primer orden continuas en D entonces las derivadas parciales de segundo orden de $u(x,y)$ también lo son.
Si además $\vec{F}$ es un campo solenoidal en D, es decir si $\text{div}(\vec{F}) = 0$ en D, entonces:

$$0 = \text{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Se llama **laplaciano** al operador diferencial parcial de segundo orden en dos variables definido por:

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

La ecuación diferencial parcial de segundo orden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{o bien} \qquad \nabla^2 u = 0$$

se denomina **ecuación de Laplace**.

Definición 1.7.1. *Sea D abierto y conexo en $\mathbb{R}^2$. La función **u(x,y)** es **armónica en D** si sus derivadas parciales de segundo orden son continuas y satisfacen $\nabla^2 u = 0$ en D.*

Por lo tanto el potencial $u(x,y)$ de un campo $\vec{F}(x,y)$ irrotacional y solenoidal en un disco abierto D resulta una función armónica en D. Lo mismo es cierto para un conjunto abierto D cualquiera puesto que $u(x,y)$ es armónica en D si y solo si lo es en cada disco abierto incluido en D.

Por ejemplo, la ecuación de Laplace permite modelizar la siguiente situación. Una lámina delgada conductora del calor, cuya forma está representada por una región del plano, se calienta manteniendo el contorno a temperaturas conocidas. El flujo de calor en la placa está representado por un campo vectorial. Si las caras superior e inferior se aislan térmicamente, impidiendo el flujo de calor hacia o desde el exterior, excepto a través del contorno, entonces en los puntos interiores de la placa no existen fuentes ni sumideros de calor de modo que el flujo de energía térmica es solenoidal. Bajo ciertas condiciones ideales el calor se distribuye sobre la placa hasta alcanzar, luego de un tiempo, un patrón estacionario de temperaturas $u(x,y)$, es decir que no varían con el tiempo. El flujo de calor es conservativo pues es el gradiente de $u(x,y)$. Por lo tanto la distribución estacionaria de temperaturas en el interior de la placa es una función armónica.
Situaciones similares se describen mediante funciones armónicas: el potencial electrostático en una región del plano que no contiene cargas eléctricas, el potencial asociado al campo de velocidades de un fluido irrotacional y solenoidal, etc.

Ejemplo 1.7.2.

La función $u(x,y) = e^{-x}\cos(y)$ es armónica en $\mathbb{R}^2$. En efecto:

$$u_x(x,y) = -e^{-x}\cos(y) \qquad u_y(x,y) = -e^{-x}\operatorname{sen}(y)$$
$$u_{xx}(x,y) = e^{-x}\cos(y) \qquad u_{yy}(x,y) = -e^{-x}\cos(y)$$

por lo tanto

$$u_{xx} + u_{yy} = e^{-x}\cos(y) + \left(-e^{-x}\cos(y)\right) = e^{-x}\cos(y) - e^{-x}\cos(y) = 0$$

Como las derivadas parciales de segundo orden de $u(x,y)$ son continuas en $\mathbb{R}^2$ y satisfacen allí la ecuación de Laplace, entonces $u(x,y)$ es armónica en $\mathbb{R}^2$.

Actividad 1.7.3.

Determine cuáles de las siguientes funciones son armónicas. ¿Dónde?

a) $u(x,y) = 3x^2y - y^3$ b) $u(x,y) = x^2y$ c) $u(x,y) = \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ □

La conexión entre las funciones armónicas en dominios del plano y la teoría de variable compleja se evidencia en el resultado siguiente.

Teorema 1.7.4. *Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica en un conjunto abierto conexo D entonces $u(x,y), v(x,y)$ son funciones armónicas en D.*

Demostración Es posible demostrar que si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica en D, entonces $f'(z)$ también lo es. En particular, $f'(z)$ es continua en D. Pero como $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$, se deduce que u_x, v_x son continuas en D. Como además se verifican las condiciones CR: $u_x = v_y, u_y = -v_x$, se deduce que u_y, v_y también son continuas en D.
Esto demuestra que si una función es analítica en D las derivadas parciales de primer orden de sus partes real e imaginaria son continuas en D. Aplicando este resultado a la función analítica $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$ deducimos que las derivadas paciales de segundo orden de u, v son continuas en D por lo que las derivadas segundas cruzadas son iguales. Entonces empleando CR:

$$u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = (v_y)_x + (-v_x)_y = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

lo que muestra que $u(x,y)$ es armónica en D. De modo análogo se demuestra que $v(x,y)$ es armónica en D. □

En general no es cierto que toda función armónica en D sea la parte real o imaginaria de una función analítica en D. El teorema 1.7.4 se complementa con el siguiente, que es una suerte de recíproco para dominios simplemente conexos.

Teorema 1.7.5. *Si $u(x,y)$ es armónica en un conjunto abierto simplemente conexo D, entonces existe $f(z)$ analítica en D tal que $u(x,y) = \operatorname{Re}(f(z))$ en D.*

Observación Para probar que $u(x,y)$ es armónica en D basta mostrarlo localmente, es decir, que en todo punto admite un entorno en el cual $u(x,y)$ es la parte real o imaginaria de una función analítica, pudiendo ser distintas esas funciones analíticas en distintos entornos.

Ejemplo 1.7.6.

La función $f(z) = z^2$ es analítica en $\mathbb{C}$. Sin necesidad de calcular las derivadas parciales, el teorema 1.7.4 asegura que las partes real e imaginaria

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \ \ , \ \ v(x, y) = 2xy$$

son funciones armónicas en $\mathbb{R}^2$.

Actividad 1.7.7.

Rehaga la actividad 1.7.3c) teniendo en cuenta el teorema anterior.

Actividad 1.7.8.

A partir de las funciones $f(z) = A\,\mathrm{Ln}(z) + B$, $g(z) = A\,\mathrm{Ln}(z) + Bi$, donde A, B son constantes reales, justifique: $A\ \ln(r) + B$, $A\,\theta + B$ son armónicas en $\{(r, \theta) : r > 0, -\pi < \theta < \pi\}$. $\square$

En realidad, por la observación anterior, la función $A\ \ln(r) + B$ es armónica en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ puesto que los puntos del semieje real negativo (donde $f(z) = A\,\mathrm{Ln}(z) + B$ deja de ser analítica) poseen un entorno en el cual $u(x, y) = A\ \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + B$ coincide con la parte real de la función analítica $f_1(z) = A\,\mathrm{Ln}(-z) + B$.

Definición 1.7.9. *Sean $u(x, y), v(x, y)$ armónicas en un conjunto abierto D. Se dice que $v(x, y)$ es una* ***conjugada armónica*** *de $u(x, y)$ en D si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en D.*

El teorema 1.7.5 asegura que toda función armónica en un abierto simplemente conexo, admite conjugada armónica. Por otra parte, conviene advertir que la relación "es conjugada armónica de" no es simétrica pues si v es conjugada armónica de u, u no es conjugada armónica de v, en cambio $-u$ sí lo es.

Ejemplo 1.7.10.

Mostremos que $u(x, y) = 2xy + 3x$ es armónica en $\mathbb{R}^2$ y hallemos una conjugada armónica.
Las derivadas parciales de primer orden están dadas por: $u_x = 2y + 3$, $u_y = 2x$
Entonces

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}(2y + 3) + \frac{\partial}{\partial y}(2x) = 0$$

Como además $\mathbb{R}^2$ es un dominio simplemente conexo, existe armónica conjugada $v(x, y)$ de $u(x, y)$. Es decir tal que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en $\mathbb{C}$. Luego, debe satisfacer CR:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_x & = & v_y \\ \\ u_y & = & -v_x \end{array} \right. \qquad \text{es decir} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} v_y & = & 2y + 3 \\ \\ v_x & = & -2x \end{array} \right.$$

La primera ecuación equivale a que $v(x, y) = \int (2y + 3)\, dy = y^2 + 3y + h(x)$
Derivando respecto de x se obtiene: $v_x = h'(x)$
En virtud de la segunda ecuación, debe ser: $h'(x) = -2x$. Entonces $h(x) = -x^2 + C$ donde C es una constante real.
Luego: $v(x, y) = y^2 + 3y - x^2 + C$

Actividad 1.7.11.

En la actividad 1.7.3 se comprobó que $u(x,y) = 3x^2y - y^3$ es armónica en $\mathbb{R}^2$. Proponga una función analítica en $\mathbb{C}$ cuya parte real sea $u(x,y)$. □

Otro resultado útil es el siguiente.

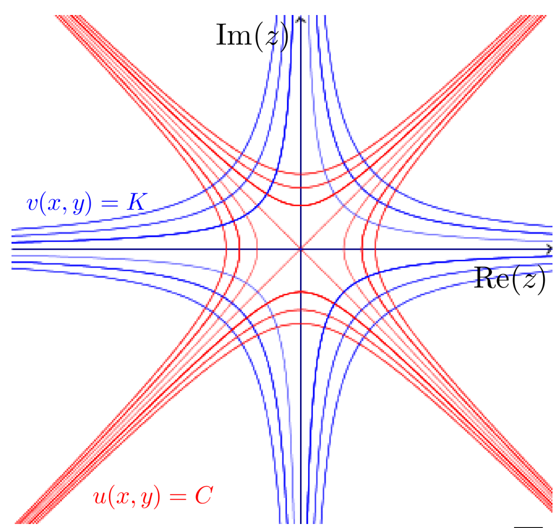
Proposición 1.7.12. *Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analítica en un conjunto abierto y conexo D. Entonces las curvas de nivel de $u(x,y)$ y las curvas de nivel de $v(x,y)$ son familias ortogonales en todo punto de D donde $\vec{\nabla}u \neq \vec{0}$.*

Demostración Sean $\mathcal{F}_1 : u(x,y) = C_1$ y $\mathcal{F}_2 : v(x,y) = C_2$. Basta probar que en cada punto (x,y) donde una curva de $\mathcal{F}_1$ se interseca con una de $\mathcal{F}_2$, las respectivas rectas tangentes son ortogonales. Pero siendo perpendiculares a los vectores gradiente $\vec{\nabla}u(x,y)$ y $\vec{\nabla}v(x,y)$, la ortogonalidad de las tangentes equivale a $\vec{\nabla}u(x,y) \cdot \vec{\nabla}v(x,y) = 0$ en todo punto de D donde $\vec{\nabla}u \neq \vec{0}$. Esto es cierto porque siendo f analítica, u, v satisfacen CR en D. Por lo tanto:

$$\vec{\nabla}u(x,y) \cdot \vec{\nabla}v(x,y) = (u_x, u_y) \cdot (v_x, v_y) = (u_x, -v_x) \cdot (v_x, u_x) = u_x v_x - v_x u_x = 0$$ □

Ejemplo 1.7.13.

Sea $f(z) = z^2$. La figura muestra algunas curvas de nivel de $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z))$ y algunas de $v(x,y) = \mathrm{Im}(f(z))$. Se observa su ortogonalidad, excepto en el origen.



□

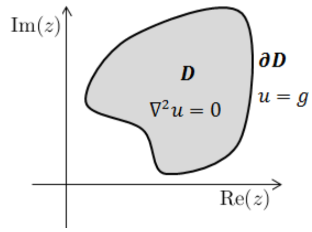
En el contexto de una distribución estacionaria de temperaturas, la proposición 1.7.12 establece la relación de ortogonalidad entre las isotermas y las líneas de flujo de calor. El calor fluye en sentido opuesto al gradiente de temperatura, el cual a su vez es ortogonal a las isotermas (o sea a las curvas de nivel de T). Luego, las líneas de flujo de calor son trayectorias ortogonales a las isotermas. Si conocemos $f(z)$ analítica en D cuya parte real sea $T(x,y)$, entonces de acuerdo a lo anterior, las curvas de nivel de la parte imaginaria $\mathrm{Im}(f(z))$ serán las líneas de flujo de calor.

1.8. Problema de Dirichlet en el plano - Primera Parte

Sea D un dominio del plano limitado por la curva frontera ∂D. Queremos hallar funciones $u(x, y)$ que sean armónicas en el interior de D y tomen valores prefijados sobre ∂D. Este problema se conoce como *problema de Dirichlet*:

$$\nabla^2 u = 0 \text{ en } D$$

$$u = g \text{ en } \partial D$$



La función g representa los valores de u en ∂D. Se quiere hallar soluciones $u(x, y)$ que sean continuas en $D \cup \partial D$. Más generalmente, si g es seccionalmente continua, se quiere que $u(x, y)$ resulte continua en $D \cup \partial D$ excepto en los puntos de discontinuidad de g sobre ∂D. Bajo condiciones generales el problema de Dirichlet admite una única solución.

Si bien es posible emplear el método de separación de variables y la teoría de Fourier para encontrar soluciones a estos problemas para cierto tipo de regiones, en esta sección veremos cómo aprovechar la teoría de las funciones analíticas para hallar soluciones en cierta clase de dominios elementales D cuando la condición de contorno g es sencilla.

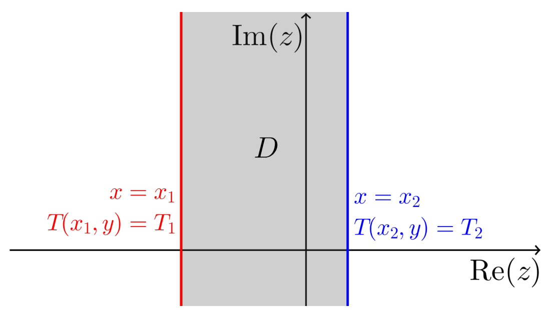
Franjas horizontales o verticales

Supongamos que se quiere hallar la distribución estacionaria de temperaturas sobre una placa térmicamente aislada D, con forma de franja vertical, sujeto a condiciones de borde:

$$D = \{(x, y) : x_1 \leq x \leq x_2\,,\ -\infty < y < \infty\}$$

$$T = T_1 \text{ sobre la frontera } x = x_1$$

$$T = T_2 \text{ sobre la frontera } x = x_2$$



Consideremos constantes $A, B \in \mathbb{R}$. Cada función de la familia $u(x, y) = Ax + B$ es armónica en $\mathbb{R}^2$ puesto que es la parte real de $f(z) = Az + B$ analítica en $\mathbb{C}$. En particular $u(x, y)$ es armónica en $D = \{(x, y) : x_1 < x < x_2\,,\ -\infty < y < \infty\}$.
Por otra parte, los parámetros A, B de esta familia permiten satisfacer las condiciones de borde requeridas sobre $u(x, y)$. En efecto, bastará determinar los valores A, B que satisfagan las ecuaciones:

$$\begin{cases} Ax_1 + B &= T_1 \\ \\ Ax_2 + B &= T_2 \end{cases}$$

Como se supone que $x_1 < x_2$, este sistema posee solución única para A, B. Reemplazando estos valores en $u(x, y) = Ax + B$ obtenemos una solución del problema. Se puede probar que dicha solución es única.

Ejemplo 1.8.1.

Determinemos la distribución estacionaria de temperaturas $T(x, y)$ en la lámina conductora delgada, térmicamente aislada, representada por

$$\{(x, y) : -1 < x < 2\,,\, -\infty < y < \infty\}$$

sabiendo que $T(-1, y) = 1\,, T(2, y) = 7$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

Proponemos una solución de la forma $T(x, y) = Ax + B$, cuya armonicidad ya se justificó. Para satisfacer las condiciones de borde planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -A + B &= 1 \\ 2A + B &= 7 \end{cases}$$

cuya solución es $(A, B) = (2, 3)$.
Luego, la función buscada es

$$T(x, y) = 2x + 3$$

Actividad 1.8.2.

A partir del ejemplo anterior y con las modificaciones necesarias, determine la distribución estacionaria de temperaturas $T(x, y)$ en la lámina conductora delgada, térmicamente aislada, representada por

$$\{(x, y) : 1 < y < 3\,,\, -\infty < x < \infty\}$$

sabiendo que $T(x, 1) = -2\,, T(x, 3) = 6$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Regiones angulares con vértice el origen

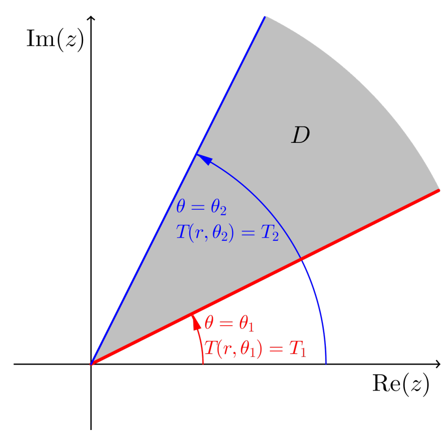
Supongamos que se quiere hallar la distribución estacionaria de temperaturas sobre una placa conductora térmicamente aislada D, con forma de ángulo con vértice el origen, sujeto a condiciones de borde:

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 \leq \mathrm{Arg}(z) \leq \theta_2\}$$

$$T = T_1 \text{ sobre la frontera } \mathrm{Arg}(z) = \theta_1$$

$$T = T_2 \text{ sobre la frontera } \mathrm{Arg}(z) = \theta_2$$

$$(-\pi < \theta_1 < \theta_2 \leq \pi)$$



En este caso consideramos $f(z) = A\mathrm{Ln}(z) + Bi$ analítica en el interior de D, entonces su parte imaginaria $v(r, \theta) = A\theta + B$, con $\theta = \mathrm{Arg}(z)$, es armónica allí.
Para satisfacer las condiciones de borde planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A\theta_1 + B &= T_1 \\ A\theta_2 + B &= T_2 \end{cases}$$

Este sistema tiene solución única. Si se reemplazan esos valores en $v(r,\theta) = A\theta + B$ se obtiene una solución al problema, expresada en términos de $\theta = \mathrm{Arg}(z)$. Para encontrar una solución en términos de (x, y) basta con expresar $\mathrm{Arg}(z)$ en dichos términos. Esto es particularmente sencillo si $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ puesto que en ese caso $\theta = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Ejemplo 1.8.3.

Hallemos la distribución estacionaria de temperaturas $T(x, y)$ en la lámina conductora delgada, térmicamente aislada, representada por

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Arg}(z) \leq \pi/4\}$$

sabiendo que para todo $x > 0$, $T(x, 0) = 2, \quad T(x, x) = 5$.

Proponemos una solución de la forma $T(r, \theta) = A\theta + B$, cuya armonicidad ya se justificó. Para satisfacer las condiciones de borde planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} B & = & 2 \\ A\frac{\pi}{4} + B & = & 5 \end{cases}$$

cuya solución es $(A, B) = \left(\dfrac{12}{\pi}, 2\right)$.
Luego

$$T(r, \theta) = \frac{12}{\pi}\theta + 2$$

y como en el interior de D es $0 < \theta < \pi/4$, podemos escribir

$$T(x, y) = \frac{12}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + 2$$

Las isotermas son las curvas de nivel de $T(x, y)$, dadas por $\dfrac{12}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) + 2 = C_1$.
Equivalentemente, son las semirrectas desde el origen:

$$y = Cx$$

Las líneas de flujo de calor son ortogonales a las isotermas. Serán las curvas de nivel de la parte real $\mathrm{Re}\left(\dfrac{12}{\pi}\mathrm{Ln}(z) + 2i\right) = \dfrac{12}{\pi}\ln r$. Es decir tendrán ecuaciones $\dfrac{12}{\pi}\ln r = C_2$.
Equivalentemente, son las circunferencias centradas en el origen:

$$r = C^*$$

Actividad 1.8.4.

Encuentre las temperaturas estacionarias $T(x, y)$ en la lámina conductora delgada, térmicamente aislada, representada por

$$\left\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} \leq \mathrm{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

sabiendo que para todo $y > 0$, $T(0, y) = -1$ y para todo $y < 0$, $T(0, y) = 1$.

Anillos centrados en el origen

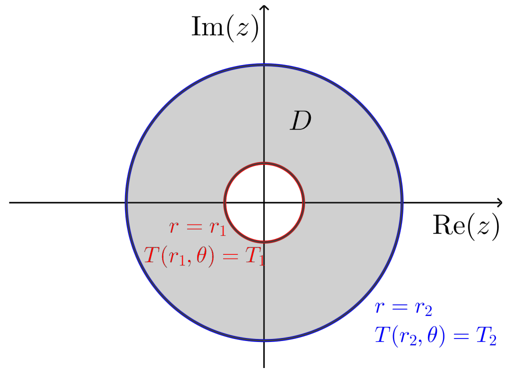
Supongamos que se quiere hallar la distribución estacionaria de temperaturas sobre una placa conductora térmicamente aislada D, con forma de anillo o corona circular centrada en el origen, sujeto a las condiciones de borde:

$$D = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$$

$$T = T_1 \text{ sobre la frontera } |z| = r_1$$

$$T = T_2 \text{ sobre la frontera } |z| = r_2$$

$$(0 < r_1 < r_2 < \infty)$$



En este caso consideramos la familia de soluciones $u(r, \theta) = A\ln(r) + B$, con $r = |z|$.
Veamos que son funciones armónicas en el interior de D. En efecto:
$u(r, \theta) = \text{Re}\,(f(z))$ donde $f(z) = A\text{Ln}(z) + B$ es analítica en el interior de D excepto posiblemente sobre el segmento situado sobre el semieje real negativo.
$u(r, \theta) = \text{Re}\,(h(z))$ donde $h(z) = A\text{Ln}(-z) + B$ es analítica en el interior de D excepto posiblemente sobre el segmento situado sobre el semieje real positivo.

Ejemplo 1.8.5.

Hallemos las temperaturas estacionarias $T(x, y)$ en la lámina delgada $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 3\}$ sabiendo que $T = 2$ sobre $|z| = 1$ y $T = 8$ sobre $|z| = 3$.

Proponemos una solución de la forma $T(r, \theta) = A\ln(r) + B$, cuya armonicidad ya se justificó. Para satisfacer las condiciones de borde planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A\ln(1) + B &= 2 \\ A\ln(3) + B &= 8 \end{cases}$$

cuya solución es $(A, B) = \left(\dfrac{6}{\ln(3)}, 2\right)$.
Luego $T(r, \theta) = \dfrac{6}{\ln(3)}\ln(r) + 2$ de modo que

$$T(x, y) = \frac{3}{\ln(3)}\ln(x^2 + y^2) + 2$$

Las isotermas son las curvas de nivel de $T(x, y)$, dadas por $\dfrac{3}{\ln(3)}\ln(x^2 + y^2) + 2 = C_1$. Equivalentemente, familia de circunferencias centradas en el origen: $x^2 + y^2 = C$. Las líneas de flujo de calor son ortogonales a las isotermas. Están representadas por las curvas de nivel de la conjudada armónica $\text{Im}(\dfrac{3}{\ln(3)}\text{Ln}(z) + 2) = \dfrac{3}{\ln(3)}\theta$, es decir son de la forma $\dfrac{3}{\ln(3)}\theta = C_2$. Equivalentemente, semirrectas con vértice en el origen: $\theta = C^*$. $\square$

En el capítulo 2 consideraremos el problema de Dirichlet en regiones no elementales. Daremos las herramientas que nos permitirán pasar a resolver un problema en regiones elementales y, entonces, proceder como en el presente capítulo.

Actividades complementarias

1) Halle el dominio más amplio de las funciones:

a) $f(z) = \dfrac{z}{z + i\,\overline{z}}$ b) $g(z) = \dfrac{\mathrm{Im}(1/z)}{z^2 + 2iz + 3}$

c) $h(z) = \dfrac{\overline{z}}{z^3 + 27i}$ d) $k(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2z + 1 - 2i}$

2) Analice la posibilidad de extender el dominio de f para incluir el punto z_0 de manera que la función extendida sea continua en ese punto.

a) $f(z) = \dfrac{iz^3 + z^2}{z^2 + 1}$, $z_0 = i$ b) $f(z) = z^2\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $z_0 = 0$ c) $f(z) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right)$, $z_0 = 0$

3) Halle el dominio de analiticidad de las siguientes funciones:

a) $f(z) = \dfrac{1}{4 + z^4}$ b) $f(z) = \dfrac{1}{i + e^{2z}}$ c) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z^2+1}}}{\cosh(iz) + \mathrm{sen}(z)}$

4) En cada caso determine y grafique el dominio de derivabilidad, calcule la derivada en los puntos donde exista. Halle también el dominio de analiticidad.

a) $f(z) = \left(x^2 - 2xy^2\right) + i\left(2x^2 + y^2\right)$ b) $f(z) = \left(x^4 + 4y^3\right) + i\left(4x^3 y\right)$
c) $f(z) = 8x^2 e^{-xy} + i2x^4 e^{-y}$ d) $f(z) = x^2\left(1 + \cos y\right) + i4x\,\mathrm{sen}\,y$
e) $f(z) = y^2\left(1 - \cos(2x)\right) + 2i\,\mathrm{sen}(2x)$ f) $f(z) = (x + 3i)\overline{z}$
g) $f(z) = \mathrm{Ln}(1 + iz)$

OPTATIVOS (con mayor grado de dificultad):

h) $f(z) = |z|^2 + z^5$ i) $f(z) = \overline{z}e^z$
j) $f(z) = \dfrac{z^7}{\overline{z}}$ k) $f(z) = \dfrac{|z|^2}{z^2 + 2iz}$

5) OPTATIVO Dada $f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$

comprobar que satisface las condiciones de Cauchy Riemann en $(0, 0)$ pero no es derivable en $z = 0$. ¿Por qué esto no representa contradición con los resultados teóricos?

6) Muestre que no existe ninguna función analítica de la forma

$$f(z) = \left(x^2 - xy^2\right) + iv(x, y)$$

7) Compruebe que las siguientes funciones son armónicas en $\mathbb{R}^2$ y halle una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analítica en $\mathbb{C}$

a) $u(x, y) = 2xy + e^{-x}\cos y$ b) $u(x, y) = (\mathrm{senh}\,x + \cosh x)\cos y$
c) $u(x, y) = 3x^2 y - y^3 - 4xy - 3y + 1$

8) Halle si es posible una función $h(x, y)$ tal que $f(z)$ sea analítica en $\mathbb{C}$

a) $f(z) = h(x, y) + 2y^2 - ixy$ b) $f(z) = \mathrm{Re}\left(z^3 - 2z\right) + ih(x, y)$

9) Encuentre una función

a) $u(x,y)$ armónica en $\mathbb{R}^2$ tal que $f(z) = u(x,y) + i\,\mathrm{Im}\,(ze^{-z})$ sea analítica en $\mathbb{C}$
b) $v(x,y)$ armónica en $\mathbb{R}^2$ tal que $f(z) = \left(x^3 - 3xy^2 + 2xy\right) + iv(x,y)$
sea analítica en $\mathbb{C}$ y $f(-1+i) = i$

10) Halle las familias de curvas de nivel de $\mathrm{Re}(f(z))$ y de $\mathrm{Im}(f(z))$. Representar en un mismo gráfico algunos de sus miembros (con algún software) y observe su ortogonalidad.

a) $f(z) = 3z + 2i$ b) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ c) $f(z) = \mathrm{Ln}(z)$

1.9. Actividades resueltas

Notación
D dominio de f, D_C dominio de continuidad de f, D_D dominio de derivabilidad de f, D_A dominio de analiticidad de f

Actividad 1.2.2

a) $D = \mathbb{C} - \{i, -i\}$.

b) Se puede escribir de diferentes formas, por ejemplo:
$D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \neq 0\} = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0\} = \mathbb{C} - \{x + iy : x \in \mathbb{R},\ y = 0\}$.
El dominio es el conjunto de todos los números complejos que no están en el eje real.

c) $D = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 3\}$.
El dominio es el conjunto de todos los números complejos que no están en la circunferencia de centro i y radio 3.

d) $D = \mathbb{C} - \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y = x \vee y = -x\}$.

Actividad 1.3.6

a) Factorice el denominador.
b) Estudie por caminos.
c) Acote el módulo de la función.

Actividad 1.5.10

a) $f(z) = iRe(z), \quad u(x,y) = 0, v(x,y) = x$
$D = D_C = \mathbb{C}$ por ser u y v polinómicas en x e y

$$\begin{array}{ll} u_x(x,y) = 0 & \qquad v_x(x,y) = 1 \\ u_y(x,y) = 0 & \qquad v_y(x,y) = 0 \end{array}$$

Las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ por ser funciones constantes. Luego f es derivable en los puntos que satisfacen Cauchy-Riemann:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_x(x,y) & = & v_y(x,y) \\ u_y(x,y) & = & -v_x(x,y) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & 0 \\ 0 & = & -1 \end{array} \right.$$

Este sistema no tiene solución. Entonces $D_D = D_A = \emptyset$

b) $f(z) = y^3 - ix^3, \quad u(x,y) = y^3, v(x,y) = -x^3$
$D = D_C = \mathbb{C}$ por ser u y v polinómicas en x e y

$$\begin{array}{ll} u_x(x,y) = 0 & \qquad v_x(x,y) = -3x^2 \\ u_y(x,y) = 3y^2 & \qquad v_y(x,y) = 0 \end{array}$$

Las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ por ser funciones polinómicas. Luego f es derivable en los puntos que satisfacen Cauchy-Riemann:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_x(x,y) & = & v_y(x,y) \\ u_y(x,y) & = & -v_x(x,y) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lrcl} (1) & 0 & = & 0 \\ (2) & 3y^2 & = & -(-3x^2) \end{array} \right.$$

(1) se verifica para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
De (2): $y^2 = x^2 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{y^2} = \sqrt{x^2} \;\Leftrightarrow\; |y| = |x| \;\Leftrightarrow\; y = x \vee y = -x$

La solución del sistema es el conjunto de puntos de las dos rectas. Luego
$D_D = \{x + ix : x \in \mathbb{R}\} \cup \{x - ix : x \in \mathbb{R}\}, \quad D_A = \emptyset$

Además, como $f'(x+iy) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$:

$f'(x+ix) = u_x(x,x) + iv_x(x,x) = 0 + i(-3x^2) = -i3x^2$
$f'(x-ix) = u_x(x,-x) + iv_x(x,-x) = 0 + i(-3x^2) = -i3x^2$

c) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3), \quad u(x,y) = x^3 - 3xy^2, v(x,y) = 3x^2y - y^3$
$D = D_C = \mathbb{C}$ por ser u y v polinómicas en x e y

$$\begin{array}{ll} u_x(x,y) = 3x^2 - 3y^2 & \qquad v_x(x,y) = 6xy \\ u_y(x,y) = -6xy & \qquad v_y(x,y) = 3x^2 - 3y^2 \end{array}$$

Las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ por ser funciones polinómicas. Luego f es derivable en los puntos que satisfacen Cauchy-Riemann:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_x(x,y) & = & v_y(x,y) \\ u_y(x,y) & = & -v_x(x,y) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x^2 - 3y^2 & = & 3x^2 - 3y^2 \\ -6xy & = & -6xy \end{array} \right.$$

Ambas ecuaciones se verifican para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Luego $D_D = D_A = \mathbb{C}$

Además para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + i6xy$

d) $f(z) = 3x^2 - y^2 + i(xy^2 + x^3) \quad u(x,y) = 3x^2 - y^2, v(x,y) = xy^2 + x^3$
$D = D_C = \mathbb{C}$ por ser u y v polinómicas en x e y

$$\begin{array}{ll} u_x(x,y) = 6x & \qquad v_x(x,y) = y^2 + 3x^2 \\ u_y(x,y) = -2y & \qquad v_y(x,y) = 2xy \end{array}$$

Las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ por ser funciones polinómicas. Luego f es derivable en los puntos que satisfacen Cauchy-Riemann:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_x(x,y) & = & v_y(x,y) \\ u_y(x,y) & = & -v_x(x,y) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lrcl} (1) & 6x & = & 2xy \\ (2) & -2y & = & -(y^2 + 3x^2) \end{array} \right.$$

De (1): $2x(3-y)=0 \;\Leftrightarrow\; x=0 \vee y=3$

Si $x=0$, en (2): $-2y=-y^2 \;\Leftrightarrow\; y^2-2y=0 \;\Leftrightarrow\; y(y-2)=0 \;\Leftrightarrow\; y=0 \vee y=2$
Entonces los pares $(0,0)$ y $(0,2)$ satisfacen ambas ecuaciones.

Si $y=3$, en (2): $-6=-9-3x^2 \;\Leftrightarrow\; x^2=-1$ esta ecuación no tiene solución (recordemos que x es un número real).

Luego $D_D=\{0,\,2i\}$, $\quad D_A=\emptyset$

Además, como $f'(x+iy)=u_x(x,y)+iv_x(x,y)$:

$f'(0)=u_x(0,0)+iv_x(0,0)=0+i0=0$
$f'(2i)=u_x(0,2)+iv_x(0,2)=0+i4=i4$

Actividad 1.6.3

b) $e^z+i=0 \;\Leftrightarrow\; e^z=-i$

El módulo de $-i$ es 1 y un argumento es $-\pi/2$ entonces $-i=1e^{-i\pi/2}$. Escribiendo ambos miembros en forma exponencial: $e^x e^{iy}=1e^{-i\pi/2}$
Considerando que la igualdad entre dos números complejos se cumple si y solo si los módulos son iguales y los argumentos difieren en múltiplos enteros de 2π:

$$|e^z|=|-i| \;\Leftrightarrow\; e^x=1 \;\Leftrightarrow\; x=0$$

$$y=-\pi/2+2k\pi,\; k\in\mathbb{Z}$$

Entonces los valores de z que satisfacen la ecuación son $z=x+iy=0+i(-\pi/2+2k\pi)=i(-\pi/2+2k\pi),\; k\in\mathbb{Z}$

c1) $f(z)=\dfrac{z}{e^z+i}$

Para hallar el dominio D de $f(z)=\dfrac{z}{e^z+i}$ debemos encontrar los valores de z que anulan el denominador, es decir, resolver $e^z=-i$. Por el inciso b) los valores de z que anulan el denominador son $i(-\pi/2+2k\pi),\; k\in\mathbb{Z}$. Resulta $D=\mathbb{C}-\{i(-\pi/2+2k\pi):k\in\mathbb{Z}\}$.

El numerador z es derivable y analítico en $\mathbb{C}$ por ser polinómico. La función e^z es derivable y analítica en $\mathbb{C}$, luego el denominador e^z+i es derivable y analítico en $\mathbb{C}$ pues ambos términos lo son.
La función $f(z)$ es derivable y analítica en D puesto que es cociente de derivables y analíticas con denominador no nulo. Su derivada se calcula aplicando reglas:

$$f'(z)=\left(\frac{z}{e^z+i}\right)'=\frac{1\,(e^z+i)-ze^z}{(e^z+i)^2}=\frac{e^z+i-ze^z}{(e^z+i)^2}$$

c2) $g(z)=\dfrac{1}{e^{1/z}}$

La función $1/z$ está definida en $\mathbb{C}-\{0\}$ y como $e^{1/z}\neq 0$, el dominio de $g(z)$ es $D=\mathbb{C}-\{0\}$.

La función $1/z$ es derivable y analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$ por ser racional en z, e^z es derivable y analítica en $\mathbb{C}$, entonces $e^{1/z}$ es derivable y analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$ por ser la composición de las anteriores. Finalmente, $g(z)$ es derivable y analítica en $D = \mathbb{C} - \{0\}$ puesto que es cociente de derivables y analíticas con denominador no nulo. Su derivada se calcula aplicando reglas:

$$g'(z) = \left(e^{-\frac{1}{z}}\right)' = e^{-\frac{1}{z}} \left(-\frac{1}{z}\right)' = e^{-\frac{1}{z}} \frac{1}{z^2}$$

c3) $h(z) = e^{\overline{z}}, \quad D = \mathbb{C}$

En este caso no podemos aplicar propiedades ni reglas de derivación entonces consideramos

$$h(z) = e^{\overline{z}} = e^{x-iy} = e^x (\cos y - i \operatorname{sen} y)$$

donde $u(x,y) = e^x \cos y,\ v(x,y) = -e^x \operatorname{sen} y$

$$\begin{array}{ll} u_x(x,y) = e^x \cos y & \qquad v_x(x,y) = -e^x \operatorname{sen} y \\ u_y(x,y) = -e^x \operatorname{sen} y & \qquad v_y(x,y) = -e^x \cos y \end{array}$$

Las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ por ser producto de exponenciales reales con senos o cosenos reales. Luego f es derivable en los puntos que satisfacen Cauchy-Riemann:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_x(x,y) & = & v_y(x,y) \\ u_y(x,y) & = & -v_x(x,y) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} e^x \cos y & = & -e^x \cos y \\ -e^x \operatorname{sen} y & = & -(-e^x \operatorname{sen} y) \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} e^x(\cos y + \cos y) & = & 0 \\ -e^x(\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} e^x 2 \cos y & = & 0 \\ -e^x 2 \operatorname{sen} y & = & 0 \end{array} \right.$$

Como e^x es positivo, para que (x,y) satisfaga las dos ecuaciones debería ser $\cos y = \operatorname{sen} y = 0$, luego el sistema no tiene solución pues $\cos y$ y $\operatorname{sen} y$ no se anulan simultáneamente. Resulta $D_D = D_A = \emptyset$

Actividad 1.6.8

b) $e^z + 2e^{-z} = i \ \Leftrightarrow \ e^z + 2\dfrac{1}{e^z} - i = 0 \ \Leftrightarrow \ \dfrac{(e^z)^2 + 2 - ie^z}{e^z} = 0 \ \Leftrightarrow \ (e^z)^2 - ie^z + 2 = 0$

Considerando $w = e^z$ la ecuación anterior se transforma en una cuadrática:

$$w^2 - iw + 2 = 0 \ \Leftrightarrow \ w = \frac{i \pm \sqrt{-1 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \ \Leftrightarrow \ w = \frac{i \pm 3i}{2} \ \Leftrightarrow \ w = 2i \ \vee \ w = -i$$

Sustituyendo en $w = e^z$ obtenemos $e^z = 2i \ \vee \ e^z = -i$

Resolvemos la ecuación $e^z = 2i$ aplicando la definición del conjunto de los logaritmos de un complejo:

$$e^z = 2i \ \Leftrightarrow \ z \in \ln(2i)$$

los números z del conjunto $\ln(2i)$ son los que satisfacen la ecuación, entonces

$$z = \ln|2i| + i \arg(2i) = \ln 2 + i\,(\pi/2 + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

Resolvemos la ecuación $e^z = -i$ de la misma forma:

$$e^z = -i \ \Leftrightarrow \ z \in \ln(-i)$$

$$z = \ln|-i| + i\ \arg(-i) = \ln 1 + i\,(-\pi/2 + 2k\pi) = i\,(-\pi/2 + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

Recordemos que estas dos ecuaciones también se pueden resolver aplicando logaritmo en ambos miembros como mostramos en el ejemplo 1.6.7.

Luego el conjunto solución de la ecuación $e^z + 2e^{-z} = i$ es

$$\{\ln 2 + i\,(\pi/2 + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{i\,(-\pi/2 + 2k\pi) :\ k \in \mathbb{Z}\}$$

c1) $f(z) = \dfrac{1}{\mathrm{Ln}(z)}$

El dominio de $\mathrm{Ln}(z)$ es $\mathbb{C} - \{0\}$ así que $z = 0$ no puede estar en el dominio de f.
Por otra parte $\mathrm{Ln}(z)$ está en el denominador entonces tampoco pueden estar los valores de z tales que $\mathrm{Ln}(z) = 0$. Para encontrarlos aplicaremos la exponencial compleja en ambos miembros de la ecuación y usaremos que para $z \neq 0$, $e^{\mathrm{Ln}(z)} = z$ (propiedad de los logaritmos):

$$\mathrm{Ln}(z) = 0 \ \Rightarrow\ e^{\mathrm{Ln}(z)} = e^0 \ \Leftrightarrow\ z = 1$$

Como $\mathrm{Ln}(e^z) \neq z$ en general, la primera no puede ser una equivalencia, de aquí es que no podemos estar seguros que $z = 1$ sea una solución y debemos verificarlo, en efecto:

$$\mathrm{Ln}(1) = \ln|1| + i\ \mathrm{Arg}(1) = 0$$

El dominio de f es $D = \mathbb{C} - \{0,\,1\}$ pues en este conjunto están definidos tanto el numerador como el denominador y este último no se anula.
La función constante 1 es derivable y analítica en $\mathbb{C}$, $\mathrm{Ln}(z)$ es derivable y analítica en $\mathbb{C} - \{x + iy :\ x \leq 0,\ y = 0\}$ *entonces* f es derivable y analítica en $\mathbb{C} - (\{x + iy :\ x \leq 0,\ y = 0\} \cup \{1\})$ pues en este conjunto es cociente de derivables y analíticas con denominador no nulo.

El *entonces* en el enunciado de las propiedades para el cociente de funciones, nos asegura derivabilidad y analiticidad en $\mathbb{C} - (\{x + iy :\ x \leq 0,\ y = 0\} \cup \{1\})$ pero no sabemos qué pasa en los puntos del dominio que están sobre el eje real negativo.
Para averiguarlo despejamos $\mathrm{Ln}(z)$ y queda

$$\mathrm{Ln}(z) = \frac{1}{f(z)}$$

Si f fuera derivable en algún z_0 del eje real negativo, $\mathrm{Ln}(z)$ sería cociente de derivables en z_0 con denominador no nulo y luego derivable en z_0, lo cual es una contradicción. Resulta que f no puede ser derivable en puntos del eje real negativo.

Concluimos que $D_D = D_A = \mathbb{C} - (\{x + iy :\ x \leq 0,\ y = 0\} \cup \{1\})$

Para derivar se pueden usar las reglas:

$$f'(z) = \left(\frac{1}{\mathrm{Ln}(z)}\right)' = \left((\mathrm{Ln}z)^{-1}\right)' = -\,(\mathrm{Ln}z)^{-2}\ \frac{1}{z} = \frac{-1}{z\,(\mathrm{Ln}z)^2}$$

c2) $g(z) = z\mathrm{Ln}(iz)$
El dominio de z es $\mathbb{C}$ y el de $\mathrm{Ln}(iz)$ son todos los complejos salvo donde $iz = 0$ o equivalentemente donde $z = 0$. Luego el dominio de g es $D = \mathbb{C} - \{0\}$.

La función z es derivable y analítica en $\mathbb{C}$ por ser polinómica. Para analizar derivabilidad y analiticidad de $\mathrm{Ln}(iz)$ debemos encontrar los valores de z tales que $\mathrm{Re}(iz) \leq 0,\ \mathrm{Im}(iz) = 0$. Como $iz = i(x + iy) = -y + ix$ resulta

$$\mathrm{Re}(iz) = -y \leq 0,\, \mathrm{Im}(iz) = x = 0 \;\Leftrightarrow\; y \geq 0,\, x = 0$$

de donde $\mathrm{Ln}(iz)$ es derivable y analítica en $\mathbb{C} - \{x + iy :\ x = 0,\ y \geq 0\}$, es decir, los complejos salvo el origen y el eje imaginario positivo.

Luego usando las propiedades, por ser producto de z y $\mathrm{Ln}(iz)$, g resulta derivable y analítica en $\mathbb{C} - \{x + iy :\ x = 0,\ y \geq 0\}$, faltaría analizar en los demás puntos del dominio de g, los que están sobre el eje imaginario positivo.

Despejamos $\mathrm{Ln}(iz)$ y queda

$$\mathrm{Ln}(iz) = \frac{g(z)}{z}$$

Si g fuera derivable en algún z_0 del eje imaginario positivo, $\mathrm{Ln}(iz)$ sería cociente de derivables en z_0 con denominador no nulo y luego derivable en z_0, lo cual es una contradicción. Resulta que g no puede ser derivable en puntos del eje imaginario positivo.

Concluimos que $D_D = D_A = \mathbb{C} - \{x + iy :\ x = 0,\ y \geq 0\}$

Para derivar se pueden usar las reglas:

$$g'(z) = (z\mathrm{Ln}(iz))' = 1\mathrm{Ln}(iz) + z\frac{1}{iz}i = \mathrm{Ln}(iz) + 1$$

c3) $h(z) = \dfrac{1}{i\pi + 2\mathrm{Ln}(z)}$

El dominio de $\mathrm{Ln}(z)$ es $\mathbb{C} - \{0\}$ así que $z = 0$ no puede estar en el dominio de h.
Por otra parte $i\pi{+}2\mathrm{Ln}(z)$ está en el denominador entonces tampoco pueden estar los valores de z tales que $i\pi{+}2\mathrm{Ln}(z) = 0$, es decir los valores de z tales que $\mathrm{Ln}(z) = -i\pi/2$. Para encontrarlos aplicaremos la exponencial compleja en ambos miembros de la ecuación y usaremos que para $z \neq 0$, $e^{\mathrm{Ln}(z)} = z$ (propiedad de los logaritmos):

$$\mathrm{Ln}(z) = -i\pi/2 \;\Rightarrow\; e^{\mathrm{Ln}(z)} = e^{-i\pi/2} \;\Leftrightarrow\; z = -i$$

Como $\mathrm{Ln}(e^z) \neq z$ en general, la primera no puede ser una equivalencia, de aquí es que no podemos estar seguros que $z = -i$ sea una solución y debemos verificarlo, en efecto:

$$\mathrm{Ln}(-i) = \ln|-i| + i\ \mathrm{Arg}(-i) = \ln 1 - i\,\pi/2 = -i\,\pi/2$$

El dominio de f es $D = \mathbb{C} - \{0, -i\}$ pues en este conjunto están definidos tanto el numerador como el denominador y este último no se anula.
Las funciones constantes 1 y $i\pi$ son derivables y analíticas en $\mathbb{C}$, $i\pi + 2\mathrm{Ln}(z)$ es derivable y analítica en $\mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0,\, y = 0\}$ entonces h es derivable y analítica en $\mathbb{C} - (\{x + iy :\ x \leq 0,\ y = 0\} \cup \{-i\})$ pues en este conjunto es cociente de derivables y analíticas con denominador no nulo.

Para analizar en los puntos del dominio que están sobre el eje real negativo despejamos $\mathrm{Ln}(z)$ y queda

$$\mathrm{Ln}(z) = \frac{1}{2h(z)} - i\pi/2$$

Si h fuera derivable en algún z_0 del eje real negativo, $\text{Ln}(z)$ sería la diferencia entre un cociente de derivables en z_0 con denominador no nulo y una constante, luego derivable en z_0 lo cual es una contradicción. Resulta que h no puede ser derivable en puntos del eje real negativo.

Concluimos que $D_D = D_A = \mathbb{C} - (\{x + iy : \, x \leq 0, \, y = 0\} \cup \{-i\})$

Para derivar se pueden usar las reglas:

$$f'(z) = \left(\frac{1}{i\pi + 2\text{Ln}(z)} \right)' = \left((i\pi + 2\text{Ln}(z))^{-1} \right)' = -\,(i\pi + 2\text{Ln}(z))^{-2} \, \frac{2}{z} = \frac{-2}{z\,(i\pi + 2\text{Ln}(z))^2}$$

Actividad 1.6.13

c1) $f(z) = \dfrac{\text{sen}(z)}{2 - \cos(z)}$

Las funciones $\text{sen}(z)$, 2 (constante) y $\cos(z)$ están definidas, son derivables y analíticas en $\mathbb{C}$ y $2 - \cos(z)$ también por ser la diferencia. Solamente resta encontrar los valores de z que anulan el denominador, es decir, resolver la ecuación $\cos(z) = 2$.

$$\cos z = 2 \;\Leftrightarrow\; \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2 \;\Leftrightarrow\; e^{iz} + e^{-iz} = 4 \;\Leftrightarrow\; e^{iz} - 4 + e^{-iz} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left(e^{iz}\right)^2 - 4e^{iz} + 1 = 0$$

Considerando $w = e^{iz}$ la ecuación anterior se transforma en una cuadrática:

$$w^2 - 4w + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; w = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \;\Leftrightarrow\; w = 2 \pm \sqrt{3}$$

Quedan dos posibilidades:

$$e^{iz} = 2 + \sqrt{3}$$
$$e^{iz} = 2 - \sqrt{3}$$

Resolvemos la primera ecuación:

$$e^{iz} = 2 + \sqrt{3} \;\Leftrightarrow\; iz \in \ln(2 + \sqrt{3})$$

Como $2 + \sqrt{3}$ es real positivo entonces $|2 + \sqrt{3}| = 2 + \sqrt{3}$ y su argumento principal es 0 resulta

$$iz = \ln|2 + \sqrt{3}| + i \,\arg(2 + \sqrt{3}) = \ln(2 + \sqrt{3}) + i\, 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

Luego:

$$z = 2k\pi - i\ln(2 + \sqrt{3}), \;\; k \in \mathbb{Z}$$

Análogamente para la segunda ecuación teniendo en cuenta que $2 - \sqrt{3}$ es real positivo:

$$z = 2k\pi - i\ln(2 - \sqrt{3}), \; k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto $D = D_D = D_A = \mathbb{C} - \left(\left\{2k\pi - i\ln(2 + \sqrt{3}), \, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2k\pi - i\ln(2 - \sqrt{3}), \, k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$
Para derivar se pueden usar las reglas:

$$f'(z) = \left(\frac{\text{sen}(z)}{2 - \cos(z)} \right)' = \frac{\cos(z)\,(2 - \cos(z)) - \text{sen}^2(z)}{(2 - \cos(z))^2} = \frac{2\cos(z) - \cos^2(z) - \text{sen}^2(z)}{(2 - \cos(z))^2}$$

$$f'(z) = \frac{2\cos(z) - 1}{(2 - \cos(z))^2}$$

c2) $g(z) = \dfrac{z}{\operatorname{senh}(iz) + \cos(z)}$

Las funciones z, iz (polinómicas), $\operatorname{senh}(z)$, $\cos(z)$ y $\operatorname{senh}(iz)$ (composición de iz con $\operatorname{senh}(z)$) están definidas, son derivables y analíticas en $\mathbb{C}$, asimismo la suma $\operatorname{senh}(iz)+\cos(z)$. Solamente resta encontrar los valores de z que anulan el denominador, es decir, resolver la ecuación $\operatorname{senh}(iz) + \cos(z) = 0$.

$$\operatorname{senh}(iz) + \cos(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{iz} = 0$$

Debido a que la exponencial compleja nunca toma el valor 0 podemos afirmar que la ecuación no tiene solución.
Otra forma de analizar la última ecuación es considerar

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix)} = e^{-y}e^{ix} = e^{-y}\left(\cos x + i \operatorname{sen} x\right) = 0$$

Como la exponencial real es siempre positiva, para que se verifique la igualdad deberían ser $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ simultáneamente nulos, lo que no cumple ningún x real.

Por lo tanto $D = D_D = D_A = \mathbb{C}$
Para derivar se pueden usar las reglas:

$$g'(z) = \left(\frac{z}{\operatorname{senh}(iz) + \cos(z)}\right)' = \frac{\operatorname{senh}(iz) + \cos(z) - z\left(i\cosh(iz) - \operatorname{sen}(z)\right)}{\left(\operatorname{senh}(iz) + \cos(z)\right)^2}$$

c3) $h(z) = \dfrac{1}{\cos(z) + i + e^{-iz}}$

Las funciones 1, i, iz (polinómicas), $\cos(z)$ y e^{-iz} (composición de iz con e^z están definidas, son derivables y analíticas en $\mathbb{C}$, asimismo la suma $\cos(z)+i+e^{-iz}$. Solamente resta encontrar los valores de z que anulan el denominador, es decir, resolver la ecuación $\cos(z) + i + e^{-iz}$.

$$\cos(z) + i + e^{-iz} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + i + e^{-iz} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{e^{iz}}{2} + \frac{1}{2e^{iz}} + i + \frac{1}{e^{iz}} = 0$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{\left(e^{iz}\right)^2 + 1 + 2ie^{iz} + 2}{2e^{iz}} = 0 \Leftrightarrow\; \left(e^{iz}\right)^2 + 2ie^{iz} + 3 = 0$$

Considerando $w = e^{iz}$ la ecuación anterior se transforma en una cuadrática:

$$w^2 + 2iw + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; w = \frac{-2i \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} = \frac{-2i \pm \sqrt{-4 - 12}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$w = \frac{-2i \pm 4i}{2} = -i \pm 2i \;\Leftrightarrow\; w = i \;\vee\; w = -3i$$

Sustituyendo en $w = e^{iz}$ obtenemos

$$e^{iz} = i \;\vee\; e^{iz} = 3i$$

Resolvemos la primera ecuación:

$$e^{iz} = i \;\Leftrightarrow\; iz \in \ln(i)$$

$$iz = \ln|i| + i\,\arg(i) = \ln(1) + i(\pi/2 + 2k\pi),\;\; k \in \mathbb{Z}$$

Luego:

$$z = \pi/2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Análogamente para la segunda ecuación:

$$e^{iz} = -3i \ \Leftrightarrow\ iz \in \ln(-3i)$$

$$iz = \ln|-3i| + i\ \arg(-3i) = \ln(3) + i(-\pi/2 + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

Luego:

$$z = (-\pi/2 + 2k\pi) - i\ln(3),\ k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto $D = D_D = D_A = \mathbb{C} - (\{\pi/2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-\pi/2 + 2k\pi) - i\ln(3),\, k \in \mathbb{Z}\})$
Para derivar se pueden usar las reglas:

$$h'(z) = \left(\frac{1}{\cos(z) + i + e^{-iz}}\right)' = \left(\left(\cos(z) + i + e^{-iz}\right)^{-1}\right)' =$$

$$= -\left(\cos(z) + i + e^{-iz}\right)^{-2}\ \left(-\operatorname{sen}(z) - ie^{-iz}\right) = \frac{\operatorname{sen}(z) + ie^{-iz}}{\left(\cos(z) + i + e^{-iz}\right)^2}$$

Actividad 1.7.7

La función $\dfrac{1}{z}$ es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$ entonces $u(x, y) = \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ es armónica en $\mathbb{C} - \{0\}$.

Actividad 1.7.8

Las funciones $f(z) = A\mathrm{Ln}(z) + B$ y $g(z) = A\mathrm{Ln}(z) + Bi$ son analíticas en
$\mathbb{C} - \{x + iy :\ x \leq 0,\, y = 0\} = \left\{z = re^{i\theta} :\ r > 0,\, -\pi < \theta < \pi\right\}$.

Además
$f(z) = A\mathrm{Ln}(z) + B = A(\ln|z| + i\ \mathrm{Arg}(z)) + B = A(\ln r + i\,\theta) + B = A\ln r + B + iA\,\theta$

$g(z) = A\mathrm{Ln}(z) + Bi = A(\ln|z| + i\ \mathrm{Arg}(z)) + Bi = A(\ln r + i\,\theta) + Bi = A\ln r + i(A\,\theta + B)$

Observamos que $A\ln r + B = \operatorname{Re}(f(z))$ y $A\,\theta + B = \operatorname{Im}(g(z))$ entonces resultan armónicas en $\{(r, \theta) :\ r > 0,\, -\pi < \theta < \pi\}$.

Actividad 1.8.2

Consideremos $f(z) = Az + Bi$ con constantes $A, B \in \mathbb{R}$,

$$f(z) = Az + Bi = A(x + iy) + Bi = Ax + i(Ay + B)$$

La función $f(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$ entonces su parte imaginaria $Ay + B$ es armónica en $\mathbb{R}^2$, en particular es armónica en $\{(x, y) : 1 < y < 3\,,\, -\infty < x < \infty\}$.
Proponemos la solución $T(x, y) = Ay + B$ y usaremos las condiciones en los bordes para hallar las constantes:

$$\left\{\begin{array}{rcr} T(x,1) & = & -2 \\ \\ T(x,3) & = & 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} A + B & = & -2 \\ \\ A3 + B & = & 6 \end{array}\right.$$

La solución del sistema de ecuaciones es $(A, B) = (4, -6)$ luego la función buscada es

$$T(x, y) = 4y - 6$$

Actividad 1.8.4

Consideremos la función $g(z) = A\text{Ln}(z) + Bi$ con constantes $A, B \in \mathbb{R}$. Si $\theta = \text{Arg}(z)$

$$g(z) = A\text{Ln}(z) + Bi = A(\ln|z| + i\ \text{Arg}(z)) + Bi = A(\ln r + i\,\theta) + Bi = A\ln r + i(A\,\theta + B)$$

La función $g(z)$ es analítica en $\mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0,\ y = 0\} = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Arg}(z) < \pi\}$ entonces su parte imaginaria $= A\,\theta + B$ es armónica en $\{(r, \theta) :\ r > 0,\ -\pi < \theta < \pi\}$. En particular es armónica en $\left\{(r, \theta) :\ r > 0, -\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right\}$. Proponemos la solución $T(r, \theta) = A\theta + B$ con $\theta = \text{Arg}(z)$ y usaremos las condiciones en los bordes para hallar las constantes:

$$\begin{cases} T(0, y) &= -1 \text{ si y} > 0 \\ \\ T(0, y) &= 1 \text{ si y} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\frac{\pi}{2} + B &= -1 \\ \\ A\left(-\frac{\pi}{2}\right) + B &= 1 \end{cases}$$

La solución del sistema de ecuaciones es $(A, B) = \left(-\dfrac{2}{\pi}, 0\right)$ luego $T(r, \theta) = -\dfrac{2}{\pi}\theta$

Para encontrar la solución en términos de (x, y) basta con expresar $\theta = \text{Arg}(z)$ en dichos términos. Como $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ resulta $\theta = \text{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ para $x > 0$ y la función buscada es

$$T(x, y) = -\frac{2}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), \quad x > 0$$

Actividades complementarias

Ejercicio 4)

Desarrollaremos la resolución completa de los incisos d) y g), en los demás presentaremos el sistema de ecuaciones que deben resolver y las respuestas finales.

a) $f(z) = \left(x^2 - 2xy^2\right) + i\left(2x^2 + y^2\right), \quad D = \mathbb{C}$

$$\begin{array}{ll} u_x(x, y) = 2x - 2y^2 & \qquad v_x(x, y) = 4x \\ u_y(x, y) = -4xy & \qquad v_y(x, y) = 2y \end{array}$$

Las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ por ser funciones polinómicas. Luego f es derivable en los puntos que satisfacen Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x(x, y) &= v_y(x, y) \\ u_y(x, y) &= -v_x(x, y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y^2 &= 2y \\ -4xy &= -4x \end{cases}$$

$D_D = \{0,\ -i,\ 2 + i\} \quad D_A = \emptyset$

$f'(0) = 0$
$f'(-i) = -2$
$f'(2 + i) = 2 + 8i$

b) $f(z) = \left(x^4 + 4y^3\right) + i\left(4x^3y\right), \quad D = \mathbb{C}$

$$\begin{array}{ll} u_x(x, y) = 4x^3 & \qquad v_x(x, y) = 12x^2y \\ u_y(x, y) = 12y^2 & \qquad v_y(x, y) = 4x^3 \end{array}$$

Las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ por ser funciones polinómicas. Luego f es derivable en los puntos que satisfacen Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x(x,y) &= v_y(x,y) \\ u_y(x,y) &= -v_x(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 &= 4x^3 \\ 12y^2 &= -12x^2y \end{cases}$$

$D_D = \{x+iy: \ x \in \mathbb{R}, \ y=0\} \cup \left\{x+iy: \ x \in \mathbb{R}, \ y=-x^2\right\} \quad D_A = \emptyset$

$f'(x+i0) = 4x^3 \quad$ para todo $\ x \in \mathbb{R}$
$f'(x-ix^2) = 4x^3 - i12x^4 \quad$ para todo $\quad x \in \mathbb{R}$

c) $f(z) = 8x^2e^{-xy} + 2ix^4e^{-y}, \quad D = \mathbb{C}$

$$u_x(x,y) = 16xe^{-xy} - 8x^2ye^{-xy} \qquad v_x(x,y) = 8x^3e^{-y}$$
$$u_y(x,y) = -8x^3e^{-xy} \qquad v_y(x,y) = -2x^4e^{-y}$$

Las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ por ser funciones polinómicas. Luego f es derivable en los puntos que satisfacen Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x(x,y) &= v_y(x,y) \\ u_y(x,y) &= -v_x(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16xe^{-xy} - 8x^2ye^{-xy} &= -2x^4e^{-y} \\ -8x^3e^{-xy} &= -8x^3e^{-y} \end{cases}$$

$D_D = \{x+iy: \ x=0, \ y \in \mathbb{R}\} \cup \{-2, \ 1+i9/4\} \quad D_A = \emptyset$

$f'(0+iy) = 0$ para todo y $\in \mathbb{R}$
$f'(-2) = -32 - i64$
$f'(1+i9/4) = -2e^{-9/4} + i8e^{-9/4}$

d) $f(z) = x^2\,(1+\cos y) + i4x \operatorname{sen} y, \quad D = \mathbb{C}$

$$u_x(x,y) = 2x\,(1+\cos y) \qquad v_x(x,y) = 4\operatorname{sen} y$$
$$u_y(x,y) = -x^2 \operatorname{sen} y \qquad v_y(x,y) = 4x\cos y$$

Las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ (justifique usando las propiedades). Luego f es derivable en los puntos que satisfacen Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x(x,y) &= v_y(x,y) \\ u_y(x,y) &= -v_x(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\,(1+\cos y) &= 4x\cos y \\ -x^2 \operatorname{sen} y &= -4\operatorname{sen} y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \quad 2x\cos y - 2x &= 0 \\ (2) \quad \left(x^2-4\right)\operatorname{sen} y &= 0 \end{cases}$$

De (2): $\left(x^2-4\right) = 0 \ \vee \ \operatorname{sen} y = 0 \ \Leftrightarrow \ x=2 \ \vee \ x=-2 \ \vee \ y=k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Sustituyendo $x=2$ en (1): $-4\cos y + 4 = 0 \ \Leftrightarrow \ \cos y = 1 \ \Leftrightarrow \ y = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ entonces

$$z = x+iy = 2 + i2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Sustituyendo $x=-2$ en (1): $4\cos y - 4 = 0 \ \Leftrightarrow \ \cos y = 1 \ \Leftrightarrow \ y = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ entonces

$$z = x+iy = -2 + i2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Sustituyendo $y=k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ en (1): $2x(\cos k\pi - 1) = 0, \ k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow \ x=0 \ \vee \ \cos k\pi = 1$ (debe ser k par, escribimos $k=2l$) entonces

$$z = x+iy = 0 + i2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \ \vee \ z = x+iy = x + i2l\pi, \ x \in \mathbb{R}, \ l \in \mathbb{Z}$$

$D_D = \{2 + i2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-2 + i2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{i2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x + i2l\pi,\ x \in \mathbb{R},\ l \in \mathbb{Z}\}$
$D_A = \emptyset$

Las derivadas: $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 2x\,(1 + \cos y) + i4 \operatorname{sen} y$

$f'(2 + i2k\pi) = 8$ para todo $k \in \mathbb{Z}$
$f'(-2 + i2k\pi) = -8$ para todo $k \in \mathbb{Z}$
$f'(0 + ik\pi) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$
$f'(x + i2l\pi) = 4x$ para todo $x \in \mathbb{R},\ l \in \mathbb{Z}$

e) $f(z) = y^2\,(1 - \cos(2x)) + i2 \operatorname{sen}(2x), \quad D = \mathbb{C}$

$$\begin{cases} u_x(x,y) = 2y^2 \operatorname{sen} 2x & v_x(x,y) = 4\cos 2x \\ u_y(x,y) = 2y\,(1 - \cos(2x)) & v_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

Las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ (justifique usando las propiedades). Luego f es derivable en los puntos que satisfacen Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x(x,y) &= v_y(x,y) \\ u_y(x,y) &= -v_x(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 \operatorname{sen} 2x &= 0 \\ 2y\,(1 - \cos(2x)) &= -4\cos 2x \end{cases}$$

$D_D = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi/2 + i0,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{k\frac{\pi}{2} + i1,\ k \in \mathbb{Z} \text{ impares}\right\} =$
$= \left\{\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{(2l+1)\frac{\pi}{2} + i,\ l \in \mathbb{Z}\right\}$
$D_A = \emptyset$

Las derivadas: $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 2y^2 \operatorname{sen} 2x + i4\cos 2x$

$f'(\frac{\pi}{4}(2k+1) + i0) = i4\cos\left[2\frac{\pi}{4}(2k+1)\right] = i4\cos\left[\frac{\pi}{2}(2k+1)\right] =$
$= i4(-1)^k = \begin{cases} i4 & \text{para todo k} \in \mathbb{Z} \text{ par} \\ -4i & \text{para todo k} \in \mathbb{Z} \text{ impar} \end{cases}$

$f'((2l+1)\frac{\pi}{2} + i1) = 2\operatorname{sen}\left[2\frac{\pi}{2}(2l+1)\right] + i4\cos\left[2\frac{\pi}{2}(2l+1)\right] =$
$= 2\operatorname{sen}\left[\pi(2l+1)\right] + i4\cos\left[\pi(2l+1)\right] = -4i$

f) $f(z) = (x + 3i)\overline{z} = x^2 + 3y + ix(3 - y), \quad D = \mathbb{C}$

$$\begin{cases} u_x(x,y) = 2x & v_x(x,y) = 3 - y \\ u_y(x,y) = 3 & v_y(x,y) = -x \end{cases}$$

Las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ por ser funciones polinómicas. Luego f es derivable en los puntos que satisfacen Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x(x,y) &= v_y(x,y) \\ u_y(x,y) &= -v_x(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x &= -x \\ 3 &= -(3 - y) \end{cases}$$

$D_D = \{6i\} \quad D_A = \emptyset \quad f'(6i) = -3i$

g) $f(z) = \operatorname{Ln}(1 + iz), \quad D = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} :\ 1 + iz = 0\} = \mathbb{C} - \{i\}$

La función $1 + iz$ es derivable y analítica en $\mathbb{C}$ por ser polinómica y $\operatorname{Ln}(z)$ es derivable y analítica en $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re}(z) \le 0,\ \operatorname{Im}(z) = 0\}$. Por ser la composición de $1 + iz$ con $\operatorname{Ln}(z)$, la función $\operatorname{Ln}(1 + iz)$ es derivable y analítica en

$$\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re}(1 + iz) \le 0,\ \operatorname{Im}(1 + iz) = 0\} = \mathbb{C} - \{x + iy :\ y \ge 1,\ x = 0\}$$

Para analizar en los puntos del dominio que están en $A = \{x + iy : \ y \geq 1, \ x = 0\}$ usaremos la función inversa de $g(z) = 1 + iz$, $g^{-1}(w) = i(1 - w)$ que es derivable y analítica en $\mathbb{C}$ por ser polinómica.

Consideremos $z_0 \in A, \ z_0 \neq i$, es muy sencillo comprobar que $g(z_0) = w_0$ está en el eje real negativo.
Si f es derivable en $z_0 = g^{-1}(w_0)$, como g^{-1} es derivable en w_0 resulta que la composición de g^{-1} con f es derivable en w_0. Además

$$\left(f \circ g^{-1}\right)(w_0) = \mathrm{Ln}\left(g\left(g^{-1}(w_0)\right)\right) = \mathrm{Ln}(w_0)$$

de donde Ln sería derivable en un punto del eje real negativo lo que es una contradicción.

En conclusión $D_D = D_A = \mathbb{C} - \{x + iy : \ y \geq 1, \ x = 0\}$

Ejercicio 6)
Ayuda: muestre que $u(x, y) = \mathrm{Re}(f(z))$ no es armónica y use el teorema 1.7.4.

Ejercicio 8)

a) $f(z) = h(x, y) + 2y^2 - ixy$
$v_x(x, y) = -y, \ v_y(x, y) = -x$ y $v_{xx}(x, y) = v_{yy}(x, y) = 0$ entonces $\nabla^2 v = v_{xx} + v_{yy} = 0$ y v es armónica en $\mathbb{R}^2$.

Consideremos $u(x, y)$ tal que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en $\mathbb{C}$. Luego, debe satisfacer CR:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_x & = & v_y \\ u_y & = & -v_x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lrcl} (1) & u_x & = & -x \\ (2) & u_y & = & y \end{array} \right.$$

Usando (1): $u(x, y) = \int u_x(x, y)dx = \int (-x)\, dx = -x^2/2 + \phi(y)$
Derivando respecto de y se obtiene: $u_y(x, y) = \phi'(y)$
Por (2): $\phi'(y) = y$ entonces $\phi(y) = y^2/2 + C$ donde C es una constante real.
Luego $u(x, y) = -x^2/2 + y^2/2 + C$ y como $u(x, y) = h(x, y) + 2y^2$ resulta

$$h(x, y) = -x^2/2 - 3y^2/2 + C$$

CAPÍTULO 2

Transformaciones complejas

En este capítulo estudiaremos las transformaciones del plano complejo como perspectiva geométrica de la noción de función. Mostraremos que gozan de propiedades muy interesantes cuando están asociadas con funciones analíticas. En primer lugar introduciremos las generalidades y las transformaciones lineales. Luego extenderemos el plano complejo agregando el punto del infinito para emplearlo en el análisis de la inversión y de las transformaciones lineales fraccionarias. También consideraremos las transformaciones de tipo potencia. Presentaremos la noción de conformidad y su relación con las funciones analíticas. Por último aplicaremos todas las herramientas mencionadas para resolver el problema de Dirichlet en regiones no elementales.

2.1. Generalidades

En Matemática se llama gráfica de una función f de dominio D al conjunto

$$\{(P, f(P)) : P \in D\}.$$

Al estudiar funciones en el campo real la visualización de sus gráficas puede ser de mucha ayuda, revelando aspectos que algebraicamente pueden pasar inadvertidos. La gráfica de una función real de una variable real es una curva en $\mathbb{R}^2$, la de dos variables reales es una superficie en $\mathbb{R}^3$. En ambos casos se representan en un sistema de ejes cartesianos ortogonales. Para tres variables independientes la gráfica es un subconjunto de $\mathbb{R}^4$ entonces solamente es posible representar las superficies de nivel (subconjuntos de $\mathbb{R}^3$).

El lector se preguntará por qué en el capítulo 1 no graficamos las funciones complejas de variable compleja. El motivo es que la gráfica de $w = f(z)$ es un subconjunto de $\mathbb{C}^2$. Así, la noción de **transformación del plano** cobra importancia, enfocándose en el efecto geométrico sobre puntos del dominio de f. Para enfatizar esto anotamos $T : w = f(z)$. Es posible representar el punto y su imagen en el mismo plano complejo o reservar un plano para el dominio y otro para la imagen. Esta interpretación permite asimismo ver cómo actúa sobre curvas o regiones contenidas en su dominio. En general si A es un subconjunto del dominio de T se define la **imagen por T de A** como el conjunto que reúne a las imágenes de los puntos de A, es decir

$$T(A) = \{T(z) : z \in A\}$$

Para referirnos a la transformación T asociada a $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ anotaremos:

$$T : w = f(z) \qquad \text{o equivalentemente} \qquad T : \begin{cases} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{cases}$$

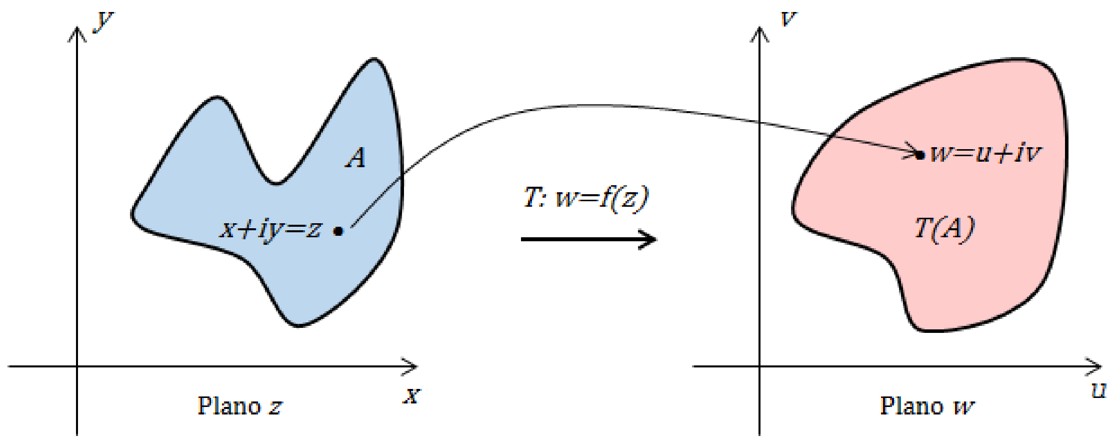


Figura 2.1: Transformación del plano complejo

El siguiente ejemplo ilustra algunas situaciones sencillas.

Ejemplo 2.1.1.

a) La transformación $T_1 : w = z + 2 - i$ se interpreta geométricamente como una traslación en la que cada punto se mueve de la misma manera que los demás, desplazándose dos unidades hacia la derecha y una unidad hacia abajo. Por ejemplo, el punto $z_0 = 2i$ es enviado en el punto $w_0 = 2 + i$, cualquier recta de pendiente $m = -1/2$ es enviada sobre sí misma, el triángulo de vértices $z_0 = 2i, z_1 = 4, z_2 = 0$ se transforma en el triángulo de vértices $w_0 = 2 + i, w_1 = 6 - i, w_2 = 2 - i$.

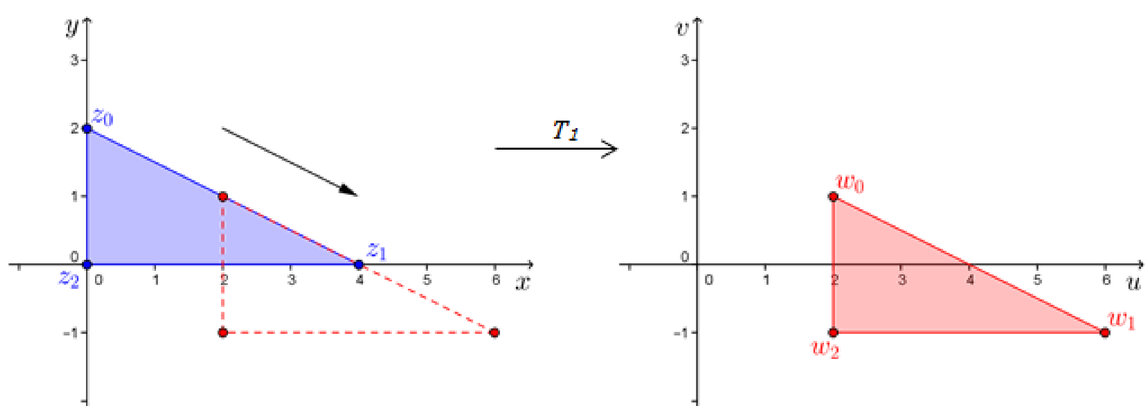


Figura 2.2: ejemplo 2.1.1a)

b) $T_2 : w = 2z$ consiste en una ampliación por el factor de escala $a = 2$. Si pensamos z como vector, entonces $w = 2z$ tiene la misma dirección y el mismo sentido que z, pero su longitud se duplica pues $|w| = |2z| = 2|z|$. Por ejemplo, el semiplano $y \geq 0$ es transformado en sí mismo y la recta $y = 1$ es transformada en la recta $v = 2$.

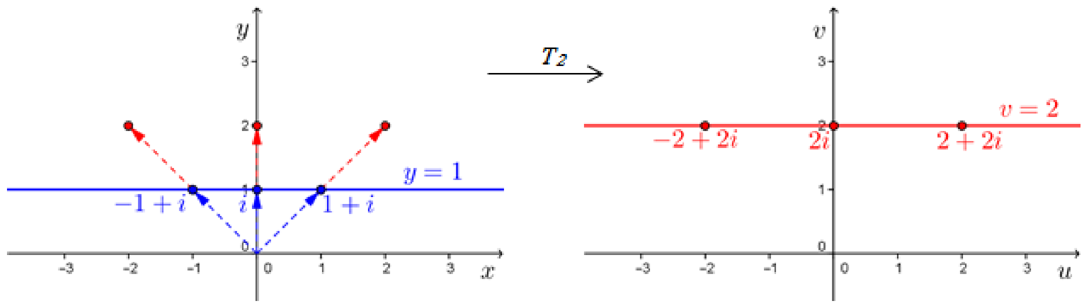


Figura 2.3: ejemplo 2.1.1b)

c) $T_3 : w = iz$ es una rotación de 90° alrededor del origen, en sentido antihorario. En efecto: dado cualquier punto z su distancia al origen no se modifica luego de la transformación porque $|w| = |iz| = |z|$. En cambio su argumento se modifica como $\arg(w) = \arg(iz) = \arg(i) + \arg(z) = \pi/2 + \arg(z)$. Es decir, para enviar z sobre $w = iz$ se gira en sentido antihorario el punto z sobre la circunferencia centrada en el origen de radio $r = |z|$, un ángulo de valor $\pi/2$. Este ángulo no depende del punto z particular. Por ejemplo, el semiplano $\mathrm{Im}(z) \leq 0$ se transforma en el semiplano $\mathrm{Re}(w) \geq 0$.

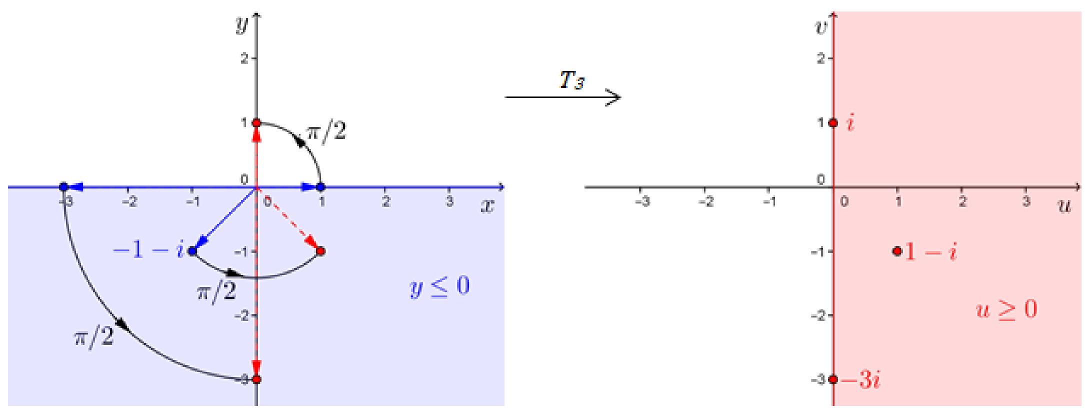


Figura 2.4: ejemplo 2.1.1c)

Composición de transformaciones

Se trata de una operación muy útil que permite construir transformaciones a partir de otras que actúan secuencialmente. Corresponde a la idea de concatenar transformaciones en un orden dado, es decir, una primera actúa y a continuación una segunda actúa sobre la imagen de la anterior. Esto último es importante pues alterando el orden de las transformaciones sucesivas, la composición y por ende su efecto geométrico puede resultar cualitativamente muy diferente. Dicho en otras palabras, la composición de transformaciones no es conmutativa en general. Por otra parte la operación de composición nos permitirá analizar transformaciones en términos de otras más sencillas actuando en secuencia. La definición formal es la siguiente. Dadas las transformaciones $T_1 : w = f_1(z)$ y $T_2 : w = f_2(z)$, la **composición** de T_1 con T_2 es la transformación $T : w = f(z)$ donde $f(z) = f_2(f_1(z))$. Anotamos $T = T_2 \circ T_1$. Podemos referirnos a ella como T_1 compuesta con T_2 o alternativamente T_2 luego de T_1.

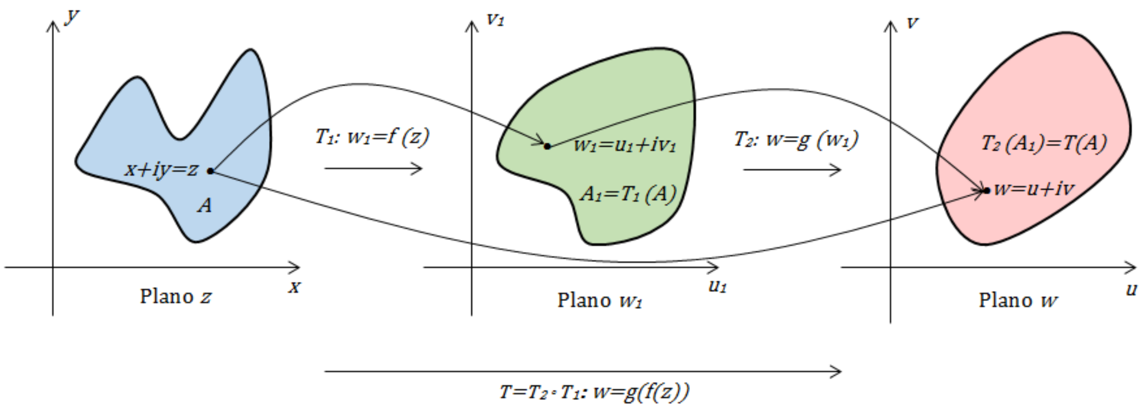


Figura 2.5: Composición de transformaciones

Ejemplo 2.1.2.

Compongamos las transformaciones T_1 y T_2 del ejemplo 2.1.1. Si queremos que primero actúe T_1 y a continuación T_2 debemos considerar $T_2 \circ T_1 : w = 2z + 4 - 2i$. En cambio si primero actúa T_2 y luego T_1 entonces la composición es $T_1 \circ T_2 : w = 2z + 2 - i$. Es claro que el orden en que se componen da lugar a dos transformaciones diferentes. Por ejemplo, ellas actúan de modo distinto sobre el punto $z = i$ pues $(T_2 \circ T_1)(i) = 4$ mientras que $(T_1 \circ T_2)(i) = 2+i$.

Definición 2.1.3. *Dada una transformación $T : w = f(z)$, se dice que z_0 es un **punto fijo** de T si $f(z_0) = z_0$*

Ejemplo 2.1.4.

Hallemos los puntos fijos de las siguientes transformaciones:

a) $T_1(z) = z + 2 - i$
$T_1(z) = z \Leftrightarrow z + 2 - i = z$. Esto no ocurre para ningún punto. La transformación carece de puntos fijos. Todo punto cambia de lugar al ser transformado puesto que es desplazado por el vector no nulo $B = 2 - i$

b) $T_3(z) = iz$
$T_3(z) = iz \Leftrightarrow iz = z \Leftrightarrow z(i-1) = 0 \Leftrightarrow z = 0$. Solamente deja fijo el origen.

c) $T_4(z) = -\dfrac{1}{z}$
Para determinar los puntos fijos de $T_4(z) = -\dfrac{1}{z}$ debemos hallar las soluciones de la ecuación $-\dfrac{1}{z} = z$ que equivale a $z^2 + 1 = 0$. Los puntos fijos son $z = \pm i$

Actividad 2.1.5.

Sean $T_1 : w = e^{-\pi z/2}$ y $T_2 : w = 1/z$. Halle los dominios de definición y las expresiones analíticas de $T_3 = T_2 \circ T_1$ y $T_4 = T_1 \circ T_2$. Muestre que $z = i$ es punto fijo de T_3 y de T_4.

2.2. Transformaciones lineales

Las transformaciones del ejemplo 2.1.1 son casos particulares de las que definimos a continuación.

Definición 2.2.1. *Una transformación $T : w = f(z)$ del plano complejo se dice **lineal** si es de la forma $f(z) = Az + B$* para ciertas constantes *$A, B \in \mathbb{C}$.*

El caso $A = 0$ es trivial dado que se trata de una transformación que colapsa todo el plano complejo en el único punto $z = B$. Exceptuando esta transformación constante, las demás transformaciones lineales son uno a uno (es decir puntos distintos tienen imágenes distintas), por lo que admiten inversa. De hecho, la inversa de una transformación lineal no constante es otra transformación lineal:

$$T : w = Az + B \text{ con } A \neq 0 \text{ entonces } T^{-1} : z = \frac{1}{A}w - \frac{B}{A}$$

Otra transformación lineal especial es la transformación identidad $T : w = z$, que actúa dejando cada punto fijo.

Ejemplo 2.2.2.

a) La transformación $T : w = (1-i)z - 3 + i$ es lineal, con $A = 1 - i$, $B = -3 + i$. Su inversa está dada por $T^{-1} : z = \dfrac{w + 3 - i}{1 - i}$ es decir $T^{-1} : z = \frac{1}{2}(1+i)w + 2 + i$

b) Si bien $T : \begin{cases} u = y \\ v = x \end{cases}$ es lineal como transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, no puede serlo como transformación del plano complejo $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por no ser analítica, dado que no satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Actividad 2.2.3.

Sean $z_1 = i, z_2 = -1, w_1 = 1, w_2 = 2 - i$

a) Muestre que existe una única transformación lineal $T : w = f(z)$ tal que $f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2$. Dé una expresión analítica para esa transformación.

b) Halle la transformación lineal que envía z_1 en w_1 y deja fijo el punto z_2.

c) Justifique que la transformación del inciso a) envía la recta L que pasa por z_1 y z_2 sobre la recta $f(L)$ que pasa por w_1 y w_2. Para ello parametrice $L : z = z_1 + t(z_2 - z_1)$, $t \in \mathbb{R}$ y verifique que $T(L) : w = w_1 + t(w_2 - w_1)$, $t \in \mathbb{R}$. ¿De qué manera debe restringirse el intervalo paramétrico para generar solamente el segmento de recta L de extremos z_1 y z_2? Compruebe que dicho segmento es enviado por T sobre el segmento de recta que une w_1 con w_2. Observe que estos resultados se pueden generalizar para cualquier función lineal y cualesquiera puntos z_1, z_2, w_1, w_2 con tal que $z_1 \neq z_2$ y $w_1 \neq w_2$.

A continuación consideramos algunas transformaciones lineales cuyo efecto geométrico es muy sencillo, por lo que nos referiremos a ellas como **transformaciones lineales elementales**: traslación, escalamiento y rotación alrededor del origen. Algunos casos particulares se vieron en el ejemplo 2.1.1.

Traslación $T : w = z + B, B \in \mathbb{C}$

En forma binómica $z = x + iy$, $w = u + iv$, $B = b_1 + ib_2$ se tiene

$$T : \begin{cases} u = x + b_1 \\ v = y + b_2 \end{cases}$$

que se corresponde con la suma de vectores. La imagen $w = T(z)$ se obtiene sumando el vector B al vector z. Y dado que B no depende de z, todos los vectores se trasladan en una misma dirección y una misma distancia.

Ejemplo 2.2.4.

a) La imagen por $T : w = z - 1 - 2i$ del paralelogramo de vértices $z_1 = 2, z_2 = i$, $z_3 = 1 + 2i, z_4 = 3 + i$ es el paralelogramo de vértices $w_1 = T(z_1) = 1 - 2i$, $w_2 = T(z_2) = -1 - i, w_3 = T(z_3) = 0, w_4 = T(z_4) = 2 - i$

b) Para hallar una transformación lineal que envíe $A = \left\{(x, y) : -\frac{x}{2} < y \leq 2\right\}$ sobre $B = \left\{(u, v) : -\frac{u}{2} < v \leq 0\right\}$, conviene graficar previamente, ver figura 2.6.

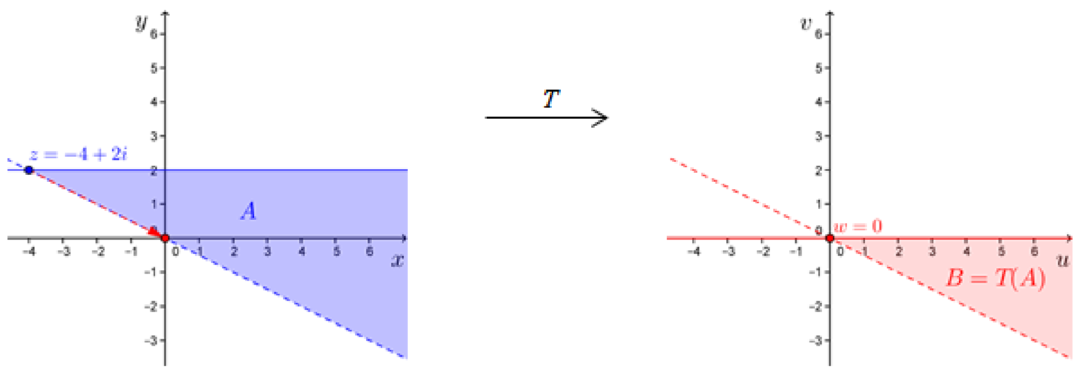


Figura 2.6: ejemplo 2.2.4b)

Los gráficos de A y B revelan que se trata de regiones angulares congruentes en las que basta desplazar el vértice de A al de B para hacerlas coincidir. Esto se consigue con la traslación $T : w = z + 4 - 2i$. Analíticamente lo confirmamos hallando la inversa $T^{-1} : z = w - 4 + 2i$ que en términos de x e y resulta

$$T^{-1} : \begin{cases} x = u - 4 \\ y = v + 2 \end{cases}$$

Reemplazamos estas expresiones de x e y en las inecuaciones que definen A para obtener las inecuaciones que definen B. En efecto:

$$-\frac{x}{2} < y \;\Leftrightarrow\; -\frac{u-4}{2} < v + 2 \;\Leftrightarrow\; -\frac{u-4}{2} - 2 < v \;\Leftrightarrow\; v > -\frac{u}{2}$$

$$y \leq 2 \;\Leftrightarrow\; v + 2 \leq 2 \;\Leftrightarrow\; v \leq 0$$

Luego, la imagen de A bajo la transformación T es B.

Actividad 2.2.5.

Dadas las regiones $A = \{z : |iz + 1| \geq 1\}$ $\quad B = \{w : |w - 2 + i| \geq 1\}$, represente gráficamente y halle una transformación $T : w = f(z)$ que envíe A sobre B.

Escalamiento $T : w = az, a \in \mathbb{R}, a > 0$

En este caso $w = T(z) = az = are^{i\theta}$. Esto significa que si $w = \rho e^{i\phi}$ es la forma exponencial del punto imagen, entonces

$$\begin{cases} \rho = ar \\ \phi = \theta + 2k\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad \text{o equivalentemente} \quad \begin{cases} |w| = a|z| \\ \arg(w) = \arg(z) \end{cases}$$

La segunda igualdad dice que la imagen del punto z se encuentra sobre la misma semirrecta desde el origen que z. Esto, junto con la primera igualdad, muestra que a se interpreta como un factor de escala. El efecto será una amplificación (o magnificación o dilatación) cuando $a > 1$, y una reducción (o contracción) cuando $0 < a < 1$.
El número real $a > 0$ se llama razón y cuantifica la relación de proporcionalidad entre un conjunto y su imagen. De hecho, a se llama así pues es la razón o cociente

$$\frac{|T(z)|}{|z|} = \frac{|az|}{|z|} = \frac{a|z|}{|z|} = a$$

Ejemplo 2.2.6.

a) Regresando a $T_2 : w = 2z$ del ejemplo 2.1.1, hallemos las imágenes de las siguientes regiones:

$$A_1 = \{(x, y) : x + y \leq 1\} \qquad A_2 = \{z : |z + i| \leq 1\}$$

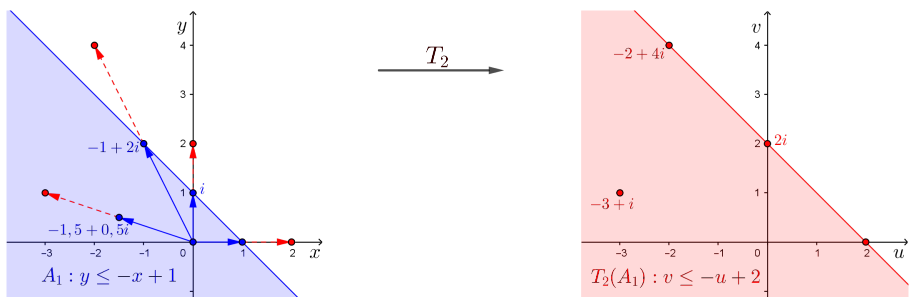


Figura 2.7: ejemplo 2.2.6a)A_1

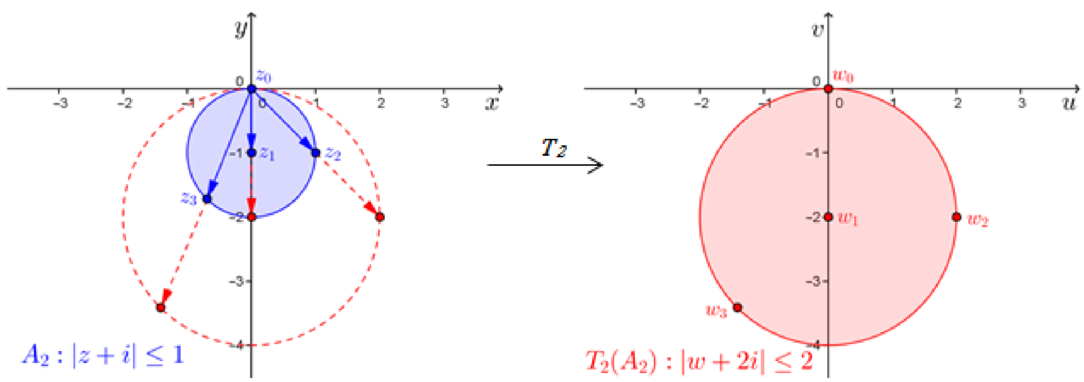


Figura 2.8: ejemplo 2.2.6a) A_2

b) Hallemos una transformación que envíe A sobre B, siendo

$$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\} \qquad B = \{(u, v) : -1 \leq u \leq 3, -2 \leq v \leq 0\}$$

Consideramos el escalamiento $T_1 : w_1 = 2z$ seguido por la traslación $T_2 : w = w_1 - 1 - 4i$, ver figura 2.9. Proponemos al lector ensayar componiendo otras transformaciones elementales.

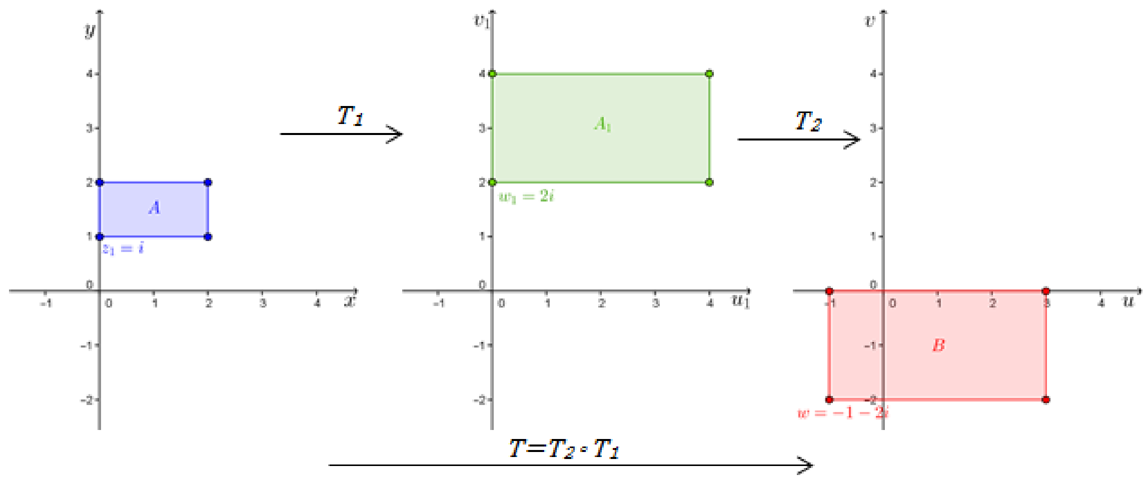


Figura 2.9: ejemplo 2.2.6b)

Actividad 2.2.7.

Dados $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 4i| \leq 2\}$ y las transformaciones $T_1 : w = z/2$, $T_2 : w = z - 4i$

a) ¿En qué orden deben componerse para obtener una transformación que envíe A sobre $B = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}$?

b) Halle la imagen de A por $T_2 \circ T_1$

Actividad 2.2.8.

Sean $A = \{z : |iz + 1| \leq 1\}$ y $B = \{w : |w + 1 - i| \leq 3\}$. Halle una transformación $w = f(z)$ que envíe A sobre B.

Rotación alrededor del origen $T : w = Az, |A| = 1$

Expresemos A, z y w en forma exponencial:

$$A = e^{i\alpha};\ \alpha \in \arg(A)$$

$$z = re^{i\theta};\ r = |z|,\ \theta \in \arg(z)$$

$$w = \rho e^{i\phi};\ \rho = |w|,\ \phi \in \arg(w)$$

Luego: $\rho e^{i\phi} = w = T(z) = Az = e^{i\alpha} r e^{i\theta} = re^{i(\theta+\alpha)}$
Entonces, comparando módulos y argumentos:

$$\begin{cases} \rho = r \\ \phi = \theta + \alpha + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad \text{o equivalentemente} \quad \begin{cases} |w| = |z| \\ \arg(w) = \arg(z) + \alpha \end{cases}$$

La primera igualdad dice que la imagen del punto z está a la misma distancia del origen que z, de manera que la transformación actúa moviendo z sobre la circunferencia centrada en el origen de radio $|z|$. Esto, junto con la segunda igualdad, muestran que α representa un ángulo de rotación alrededor del origen (α no depende de z, todos los puntos giran el mismo ángulo). Además, su signo determina si la rotación es en sentido antihorario ($\alpha > 0$) u horario ($\alpha < 0$). El caso $\alpha = 0$ corresponde a la transformación identidad.

Actividad 2.2.9.

¿Cuál de los gráficos de la figura 2.10 representa la recta $y = x + 1$ y su imagen por la transformación $T_3 : w = iz$ del ejemplo 2.1.1c)? Corrobore analíticamente.

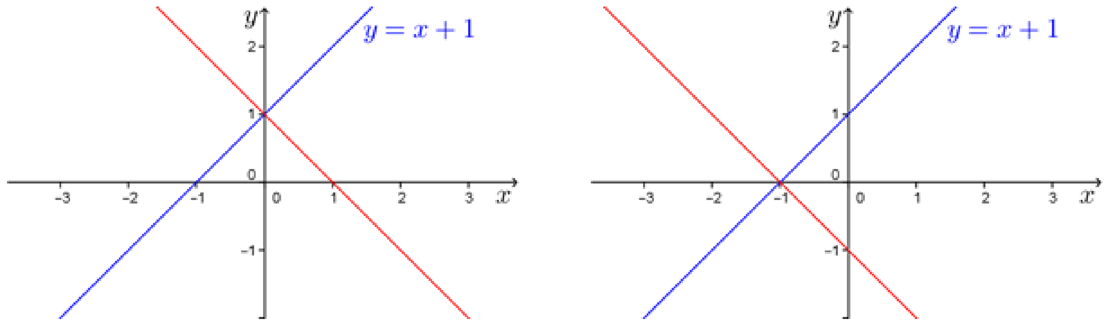


Figura 2.10: actividad 2.2.9

Ejemplo 2.2.10.

Buscamos una transformación lineal que envíe el conjunto $A = \{(x, y) : x \le y \le x + 2\}$ en el conjunto $B = \{(u, v) : -2 \le u \le 0\}$.

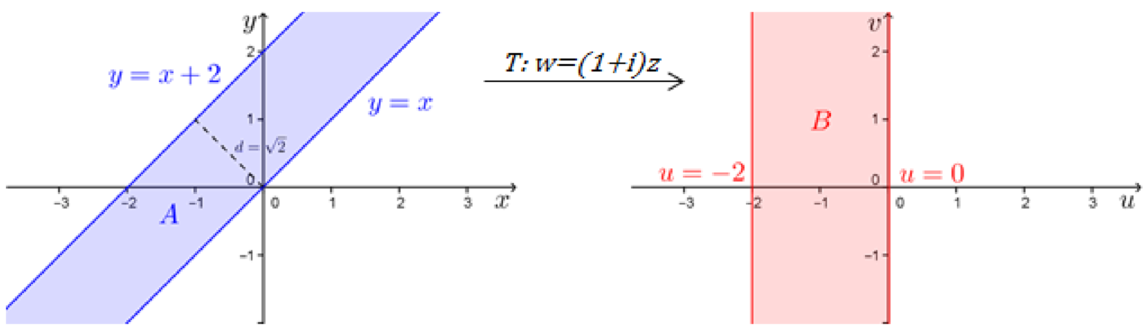


Figura 2.11: ejemplo 2.2.10

Comenzamos graficando los conjuntos A y B, se trata de dos franjas infinitas. Observamos que a partir de una amplificación y rotación de A obtenemos B. Para hallar el factor de escala podemos comparar los anchos de ambas. El de A es $\sqrt{2}$ y el de B es 2. Luego, el factor de proporcionalidad es $2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$. El ángulo de rotación alrededor del origen es 45° en sentido antihorario. Esto sugiere la transformación $T : w = (1+i)z$ porque $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ se desglosa en un escalamiento de razón $a = \sqrt{2}$ y una rotación antihoraria de ángulo $\alpha = \pi/4$ alrededor del origen.
Para confirmar esto analíticamente, siendo T biunívoca utilizamos su inversa
$T^{-1} : z = \dfrac{1}{1+i}w$. Es decir:

$$T^{-1} : \begin{cases} x = (v+u)/2 \\ y = (v-u)/2 \end{cases}$$

La región A es la intersección de los semiplanos $x \le y$ y $y \le x + 2$. La imagen de A será la intersección de las imágenes de estos semiplanos.

$$x \le y \;\Leftrightarrow\; \frac{v+u}{2} \le \frac{v-u}{2} \;\Leftrightarrow\; u \le 0$$

$$y \leq x+2 \Leftrightarrow \frac{v-u}{2} \leq \frac{v+u}{2}+2 \Leftrightarrow v-u \leq v+u+4 \Leftrightarrow -2u \leq 4 \Leftrightarrow u \geq -2$$

Luego la imagen de A es efectivamente B.

Actividad 2.2.11.

Escriba la transformación lineal $T : w = iz + 1 - i$ como composición de elementales y compruebe que envía el triángulo A de vértices 0, 1, $1+i$ en el triángulo B de vértices 0, 1, $1-i$. Observe que $T^* : w = \overline{z}$ envía A en B pero no es lineal (puesto que no es analítica).

Teniendo en cuenta el efecto geométrico de las transformaciones lineales elementales (rotaciones, escalamientos y traslaciones) cabe destacar algunas propiedades útiles:

- preservan globalmente la forma de un conjunto. Entre un conjunto y su imagen existe una relación de *semejanza*, es decir se mantiene una misma relación de proporcionalidad entre segmentos y sus imágenes. La forma del conjunto se preserva aunque no necesariamente el tamaño y la posición en el plano.
- envían (biunívocamente) la frontera de un conjunto sobre la frontera de su imagen.
- conservan tanto en magnitud como en orientación (signo) ángulos entre pares de curvas suaves. En particular, si la frontera de una región A es una curva suave o suave a trozos con determinada orientación (por ejemplo si se la recorre dejando A a izquierda), entonces su imagen por una transformación lineal elemental lleva la frontera sobre la frontera y preserva la orientación (la frontera de la imagen se recorre dejando $f(A)$ a izquierda).

Proposición 2.2.12. *Toda transformación lineal $T : w = Az + B$ con $A \neq 0$ es composición de transformaciones lineales elementales y admite inversa la cual es también una transformación lineal. La composición de transformaciones lineales es una transformación lineal.*

Demostración Escribamos $A = \lambda e^{i\alpha}$ donde $\lambda = |A| > 0, \alpha \in \arg(A)$. Consideremos las transformaciones elementales siguientes $T_1 : w = \lambda z$, $T_2 : w = e^{i\alpha} z$ y $T_3 : w = z + B$. Se verifica:

$$T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$$

Claramente T_1, T_2, T_3 admiten inversa: $T_1^{-1} : z = w/\lambda$, $T_2^{-1} : z = e^{-i\alpha} w$, $T_3^{-1} : z = w - B$. Por lo tanto $T^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1} \circ T_3^{-1}$

En virtud de la proposición 4.1.5 y de las propiedades mencionadas anteriormente respecto de las transformaciones lineales elementales, se concluye que toda transformación lineal no constante también gozará de las mismas.

Actividad 2.2.13.

Grafique las regiones

$$A = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\} \quad , \quad B = \{(u,v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 3\}$$

justifique que no existe ninguna transformación lineal que envíe A sobre B. La transformación $T : f(z) = \frac{x+1}{2} + i\frac{3y+6}{4}$ es tal que $T(A) = B$, ¿es una contradicción?

En ocasiones para hallar la imagen de un conjunto por una transformación lineal conviene operar algebraicamente, sin descomponerla en elementales.

Ejemplo 2.2.14.

Hallemos la imagen de los siguientes conjuntos por la transformación $T : w = (1-2i)z + i$.

La inversa es $T^{-1} : z = \dfrac{w-i}{1-2i}$

Es decir:

$$x + iy = \frac{u + iv - i}{1-2i} = \frac{u + i(v-1)}{1-2i} =$$

$$= \frac{[u + i(v-1)]\,(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{(u - 2v + 2) + i(2u + v - 1)}{5}$$

Por lo tanto:

$$T^{-1} : \begin{cases} x = (u - 2v + 2)/5 \\ y = (2u + v - 1)/5 \end{cases}$$

a) $A = \{(x, y) : x + y = 1\}$

$$x + y = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{u - 2v + 2}{5} + \frac{2u + v - 1}{5} = 1 \;\Leftrightarrow\; v = 3u - 4$$

Por lo tanto $T(A)$ es la recta $\{(u, v) : v = 3u - 4\}$

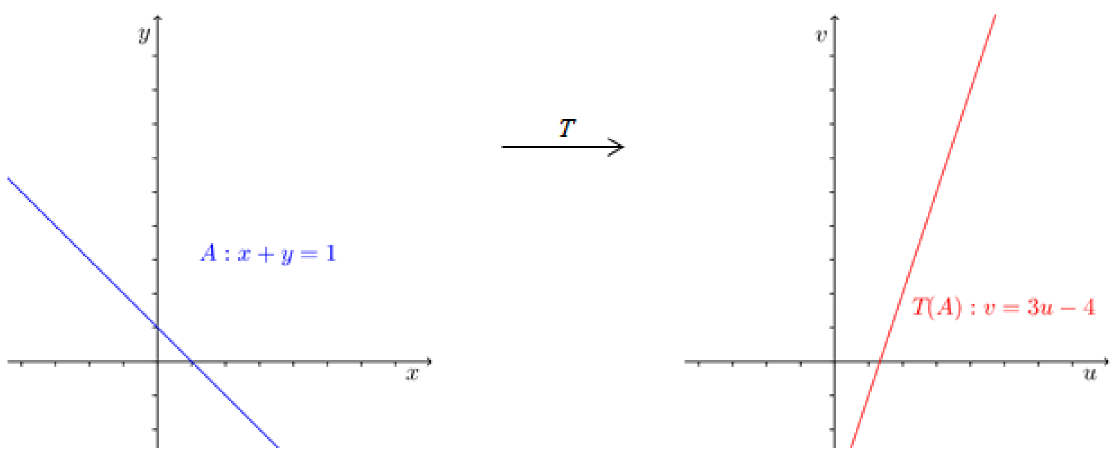


Figura 2.12: ejemplo 2.2.14a)

b) $B = \{z : \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$

$$x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{u - 2v + 2}{5} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; v \leq \frac{1}{2}u + 1$$

Luego la imagen de B es el semiplano $T(B) = \left\{(u, v) : v \leq \dfrac{1}{2}u + 1\right\}$

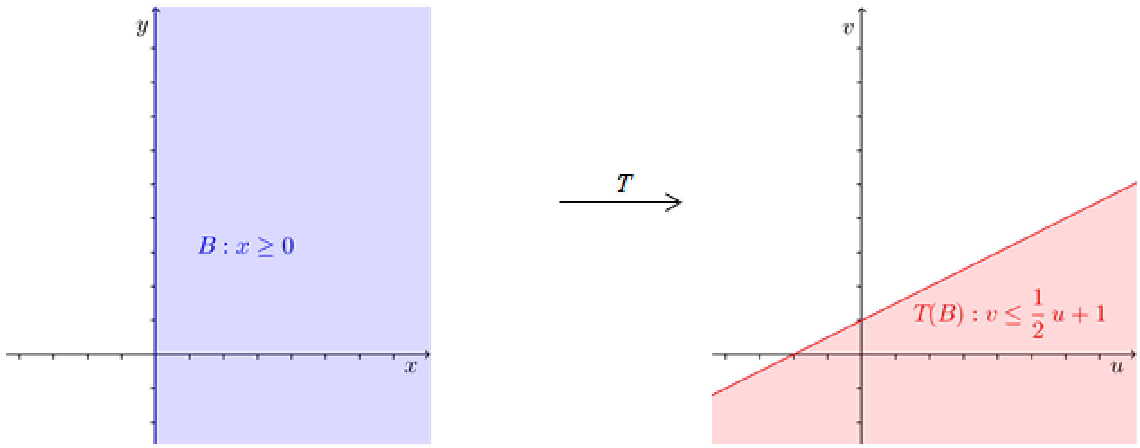


Figura 2.13: ejemplo 2.2.14b)

c) $C = \{z : |z + 1 - i| < 2\}$

$$|z+1-i| < 2 \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{w-i}{1-2i} + 1 - i\right| < 2 \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{w - i + (1-i)(1-2i)}{1-2i}\right| < 2 \;\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\; |w - 1 - 4i| < 2\sqrt{5}$. Entonces $T(C) = \left\{w : |w - 1 - 4i| < 2\sqrt{5}\right\}$ es un círculo.

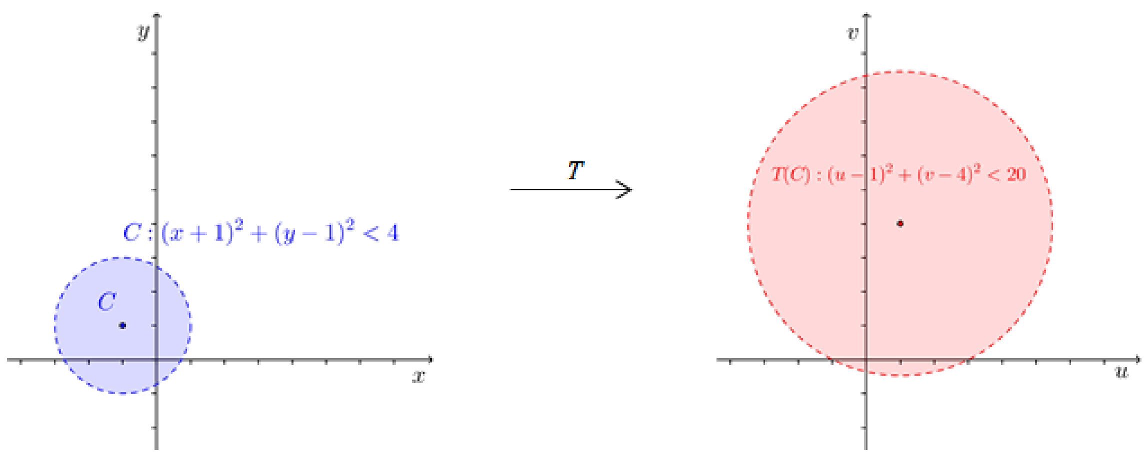


Figura 2.14: ejemplo 2.2.14c)

d) $D = \{(x, y) : x + y = 1, x \geq 0\}$
Empleando a) y b) e intersecando: $x + y = 1 \;\wedge\; x \geq 0 \;\Leftrightarrow v = 3u - 4 \;\wedge\; v \leq \frac{1}{2}u + 1$
Resulta la semirrecta $T(D) = \left\{(u, v) : v = 3u - 4, v \leq \frac{1}{2}u + 1\right\}$

e) $E = \{z : |z + 1 - i| < 2, \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$
Teniendo en cuenta a) y c) e intersecando:

$$|z + 1 - i| \leq 2 \;\wedge\; x \geq 0 \;\Leftrightarrow |w - 1 - 4i| \leq 2\sqrt{5} \;\wedge\; v \leq \frac{1}{2}u + 1$$

la imagen es $T(E) = \left\{w : |w - 1 - 4i| \leq 2\sqrt{5}, v \leq \frac{1}{2}u + 1\right\}$

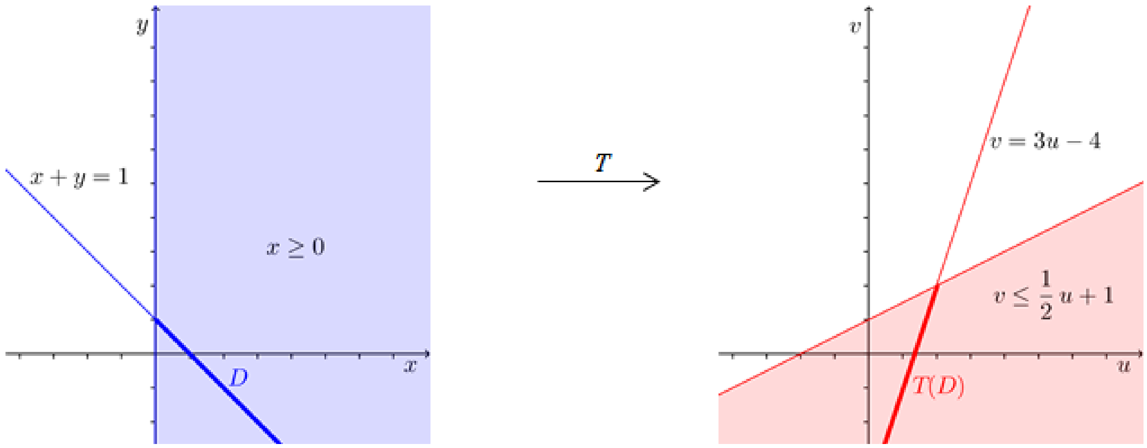


Figura 2.15: ejemplo 2.2.14d)

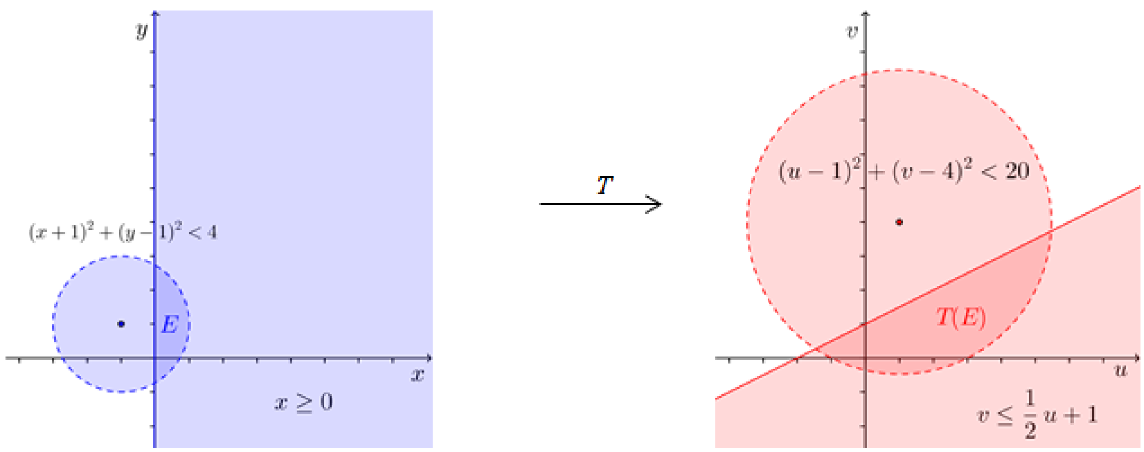


Figura 2.16: ejemplo 2.2.14e)

2.3. Plano complejo extendido

Se llama **plano complejo extendido** al conjunto $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ que se obtiene a partir del plano complejo $\mathbb{C}$ añadiéndole un "punto" $\infty \notin \mathbb{C}$ infinitamente alejado del origen, denominado **punto del infinito**.

La figura 2.17 ayuda a comprender la naturaleza del punto del infinito. Representa una correspondencia uno a uno del plano complejo sobre los puntos de una cáscara esférica exceptuando el "polo norte" que indicamos N. Esta correspondencia asigna a cada punto P el punto P_z que se identifica con un número complejo. Claramente el punto N no se corresponde con ningún punto del plano complejo. Si movemos P sobre la esfera acercándonos a N, el punto correspondiente en el plano complejo se aleja del origen arbirariamente. El punto del infinito ∞ es el que hay que agregar al plano complejo para que se corresponda con el punto N sobre la esfera.

Observar que toda recta pensada en el plano complejo extendido pasa por el punto del infinito, puesto que es un conjunto no acotado. De hecho, la imagen de cualquier recta del plano complejo sobre la esfera del gráfico, es una circunferencia que pasa por N. Podemos decir que en el plano complejo extendido las rectas pasan por el punto del infinito (o también que son circunferencias generalizadas, de radio infinitamente grande). En cambio las circunferencias

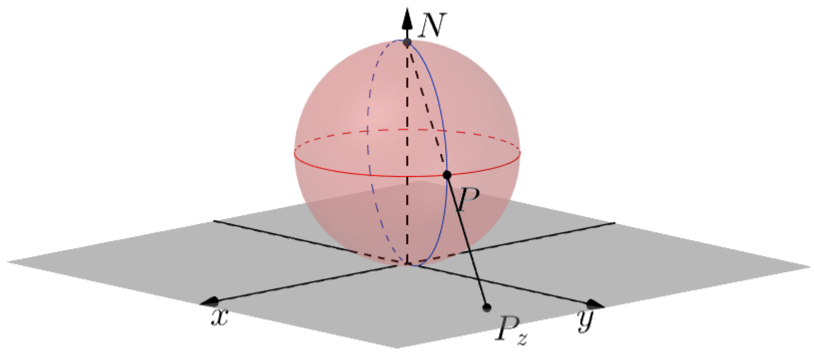


Figura 2.17: Proyección estereográfica

del plano complejo (es decir de radio finito), por ser conjuntos acotados, en el plano complejo extendido no pasan por el punto del infinito. Sus imágenes sobre la esfera del gráfico no pasan por N.

El punto del infinito permite extender la noción de límite de una función, de modo que refleje comportamientos como los que acabamos de ver.

Sea $f(z)$ una función cuyo dominio contiene puntos $z \in \mathbb{C}$ de módulo arbitrariamente grande. Si existe un número $L \in \mathbb{C}$ tal que los valores $f(z)$ se acercan arbitrariamente a L siempre que $|z|$ sea suficientemente grande, es decir $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z) - L| = 0$, entonces diremos $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = L$.

Si los valores $f(z)$ tienen módulo arbitrariamente grande siempre que $|z|$ sea suficientemente grande, es decir $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$, entonces diremos que $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$

De manera análoga, si $f(z)$ es una función definida en un entorno reducido de $z_0 \in \mathbb{C}$ y los valores $|f(z)|$ se hacen arbitrariamente grandes siempre que z sea suficientemente cercano a z_0 pero distinto de z_0, es decir $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$, diremos que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Ejemplo 2.3.1.

a) $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{4i}{z} = 0$ pues $\left|\dfrac{4i}{z}\right| = \dfrac{4}{|z|} \to 0$

b) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{4i}{z} = \infty$ pues $\left|\dfrac{4i}{z}\right| = \dfrac{4}{|z|} \to \infty$

c) $$\lim_{z\to\infty} \frac{iz - 4i}{z + 4i} = \lim_{z\to\infty} \frac{z\left(i - \frac{4i}{z}\right)}{z\left(1 + \frac{4i}{z}\right)} = \lim_{z\to\infty} \frac{i - \frac{4i}{z}}{1 + \frac{4i}{z}} = i$$

d) $\lim\limits_{z\to\infty} (3z^2 - 4iz) = \infty$ pues $|3z^2 - 4iz| = |z|^2 \left|3 - \dfrac{4i}{z}\right| \to \infty$

e) $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ no existe. Aquí, la dirección en la que z se aleja arbitrariamente del origen afecta el comportamiento de la imagen. Por ejemplo si $z = iy$ con $y \to \infty$ entonces $e^z = e^{iy} = \cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y)$ se mantiene girando sobre la circunferencia unitaria, por lo que no se aproxima arbitrariamente a ningún número complejo. □

2.4. Inversión

Definición 2.4.1. *Se llama* ***inversión*** *a la transformación* $T : w = 1/z$.
En términos de sus componentes

$$T : \begin{cases} u = x/\left(x^2+y^2\right) \\ v = -y/\left(x^2+y^2\right) \end{cases}$$

Es una correspondencia uno a uno de $\mathbb{C} - \{0\}$ sobre $\mathbb{C} - \{0\}$. Además $T^{-1} = T$, entonces

$$T^{-1} : \begin{cases} x = u/\left(u^2+v^2\right) \\ y = -v/\left(u^2+v^2\right) \end{cases}$$

La inversión se extiende de modo natural a una transformación $T^* : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mediante $T^*(z) = T(z)$ si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, $T^*(\infty) = 0$ y $T^*(0) = \infty$.
En lo que sigue no haremos distinción entre T y T^*, siendo el contexto el que determine a cuál de ellas nos estemos refiriendo.

Ejemplo 2.4.2.

Sea $A = \{z : |z| \leq R\}$ con $R > 0$. Hallemos su imagen por la inversión:

$$|z| \leq R \Leftrightarrow \frac{1}{|z|} \geq \frac{1}{R} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z}\right| \geq \frac{1}{R} \Leftrightarrow |w| \geq \frac{1}{R}$$

Observación 2.4.3.

- La imagen de una circunferencia centrada en el origen es una circunferencia centrada en el origen.
- Los puntos de la circunferencia de radio R centrada en el origen son enviados sobre los puntos de la de radio $1/R$ centrada en el origen. En particular la circunferencia $|z| = 1$ permanece invariante bajo una inversión.
- Los puntos interiores a la circunferencia de radio R centrada en el origen son enviados sobre los puntos exteriores de la de radio $1/R$ centrada en el origen. Teniendo en cuenta que T es inversa de sí misma, los puntos exteriores a la circunferencia de radio R centrada en el origen son enviados sobre los puntos interiores de la de radio $1/R$ centrada en el origen.

Ilustraremos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.4.4.

Hallemos la imagen de los siguientes conjuntos por la inversión $T : w = 1/z$

La inversa es $T^{-1} : z = 1/w$

a) $A = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \frac{1}{2}\right\}$

Es inmediato considerando la observación 2.4.3 para $R = \frac{1}{2}$:

$$T(A) = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 2\}$$

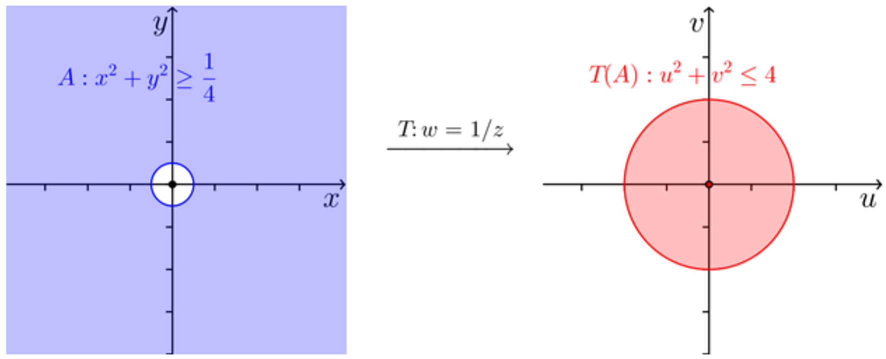


Figura 2.18: ejemplo 2.4.4a)

b) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = 1\}$

$$z \in B \;\Leftrightarrow\; |z - 2i| = 1 \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{1}{w} - 2i\right| = 1 \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{1 - 2iw}{w}\right| = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{|1 - 2iw|}{|w|} = 1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; |1 - 2iw| = |w| \;\Leftrightarrow\; |1 - 2i(u + iv)| = |u + iv| \;\Leftrightarrow\; |(2v + 1) - 2ui| = |u + iv| \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; |(2v + 1) - 2ui|^2 = |u + iv|^2 \;\Leftrightarrow\; (2v + 1)^2 + (-2u)^2 = u^2 + v^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 4v^2 + 4v + 1 + 4u^2 = u^2 + v^2 \;\Leftrightarrow\; 3\left(v^2 + \frac{4}{3}v\right) + 3u^2 + 1 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left(v^2 + \frac{4}{3}v\right) + u^2 + \frac{1}{3} = 0 \;\Leftrightarrow\; u^2 + \left(v + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \;\Leftrightarrow\; \left|w + \frac{2i}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

Se trata de una circunferencia de centro el punto $w_0 = -2i/3$ y de radio $1/3$

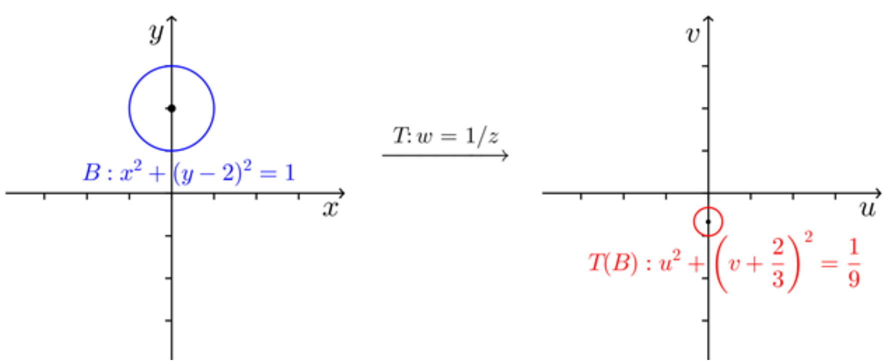


Figura 2.19: ejemplo 2.4.4b)

c) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = 2\}$

Las cuentas son similares a las del inciso anterior:

$$z \in C \;\Leftrightarrow\; |z - 2i| = 2 \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{1}{w} - 2i\right| = 2 \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{1 - 2iw}{w}\right| = 2 \;\Leftrightarrow\; \frac{|1 - 2iw|}{|w|} = 2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; |1 - 2iw| = 2|w| \;\Leftrightarrow\; |1 - 2i(u + iv)| = 2|u + iv| \;\Leftrightarrow\; |(2v + 1) - 2ui| = 2|u + iv| \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ |(2v+1)-2ui|^2 = 4|u+iv|^2\ \Leftrightarrow\ (2v+1)^2+(-2u)^2 = 4u^2+4v^2\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 4v^2+4v+1+4u^2 = 4u^2+4v^2\ \Leftrightarrow\ 4v+1=0\ \Leftrightarrow\ v=-\frac{1}{4}$$

Dio por resultado una recta horizontal.

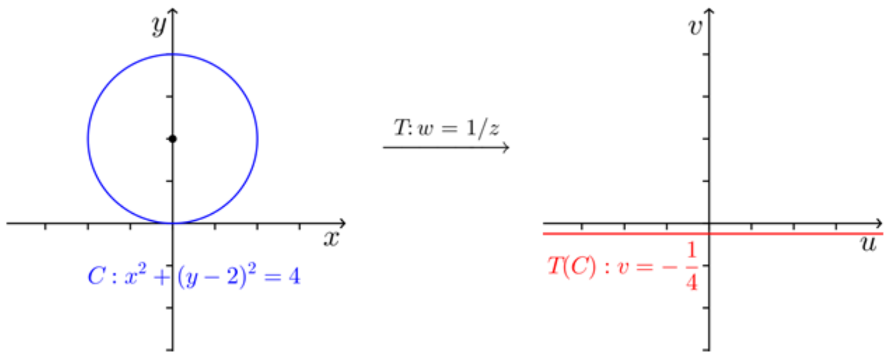


Figura 2.20: ejemplo 2.4.4c)

d) $D = \{x+iy : y = x\}$
En este caso conviene trabajar con las componentes cartesianas de la inversa

$$T^{-1} : \begin{cases} x = u/\left(u^2+v^2\right) \\ y = -v/\left(u^2+v^2\right) \end{cases}$$

$$D \in A\ \Leftrightarrow\ y = x\ \Leftrightarrow\ -v/\left(u^2+v^2\right) = u/\left(u^2+v^2\right)\ \Leftrightarrow\ v = -u$$

Se obtuvo como imagen una recta.

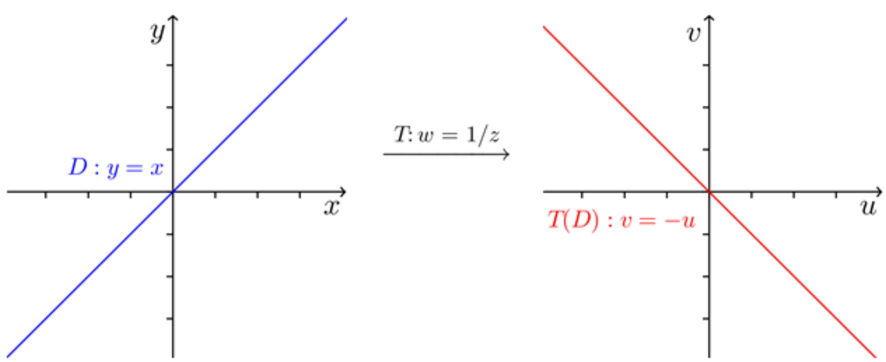


Figura 2.21: ejemplo 2.4.4d)

e) $E = \{x+iy : 2y = 2x-1\}$

Trabajamos como en el inciso anterior:

$$z \in E\ \Leftrightarrow\ 2y = 2x-1\ \Leftrightarrow\ -\frac{2v}{u^2+v^2} = \frac{2u}{u^2+v^2} - 1\ \Leftrightarrow\ -2v = 2u - u^2 - v^2$$

$$\Leftrightarrow\ (u^2-2u)+(v^2-2v)=0\ \Leftrightarrow\ (u-1)^2+(v-1)^2=2\ \Leftrightarrow\ |w-(1+i)|=\sqrt{2}$$

La imagen resultó una circunferencia.

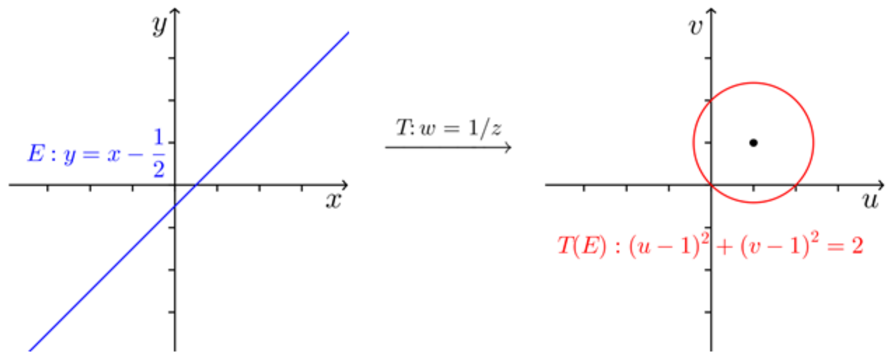


Figura 2.22: ejemplo 2.4.4e)

f) $F = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 2i| < \frac{5}{2} \right\}$

$$z \in F\ \Leftrightarrow\ |z-2i| < \frac{5}{2}\ \Leftrightarrow\ \left|\frac{1}{w} - 2i\right| < \frac{5}{2}\ \Leftrightarrow\ \left|\frac{1-2iw}{w}\right| < \frac{5}{2}\ \Leftrightarrow\ \frac{|1-2iw|}{|w|} < \frac{5}{2}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ |1-2iw| < \frac{5}{2}|w|\ \Leftrightarrow\ |1-2i(u+iv)| < \frac{5}{2}|u+iv|\ \Leftrightarrow\ |(2v+1)-2ui| < \frac{5}{2}|u+iv|\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ |(2v+1)-2ui|^2 < \frac{25}{4}|u+iv|^2\ \Leftrightarrow\ (2v+1)^2 + (-2u)^2 = \frac{25}{4}u^2 + \frac{25}{4}v^2\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 4v^2 + 4v + 1 + 4u^2 < \frac{25}{4}u^2 + \frac{25}{4}v^2\ \Leftrightarrow\ \frac{9}{4}u^2 + \frac{9}{4}v^2 - 4v > 1$$

$$\Leftrightarrow\ u^2 + v^2 - \frac{16}{9}v > \frac{4}{9}\ \Leftrightarrow\ u^2 + \left(v - \frac{8}{9}\right)^2 > \frac{100}{81}\ \Leftrightarrow\ \left|w - \frac{8}{9}i\right| > \frac{10}{9}$$

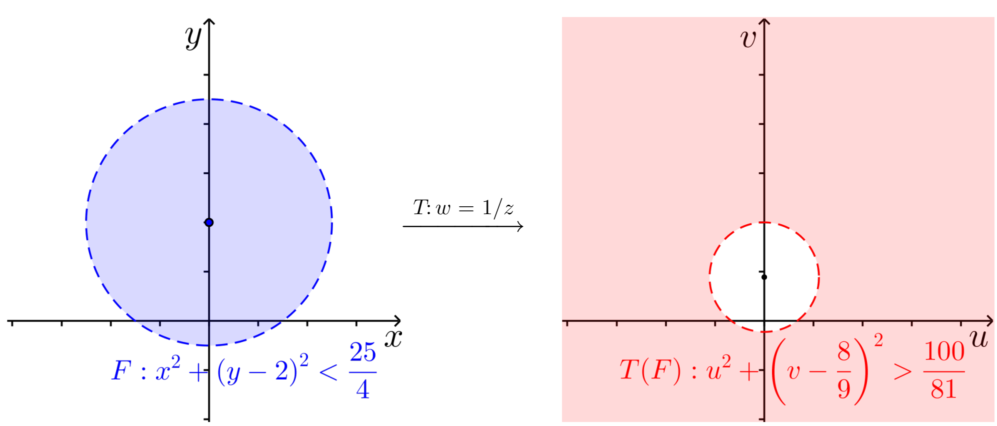


Figura 2.23: ejemplo 2.4.4f)

En los cuatro primeros incisos de este ejemplo habrá notado que las rectas o circunferencias involucradas tienen como imagen por la inversión también rectas o circunferencias. La proposición siguiente muestra que esto ocurre siempre.

Proposición 2.4.5. *La inversión $T : w = 1/z$ envía*

i) rectas en rectas o en circunferencias.

ii) circunferencias en rectas o en circunferencias.

Además, si en el plano z la recta o circunferencia pasa por el origen entonces su imagen en el plano w es una recta. Por el contrario, si la recta o circunferencia no pasa por el origen, su imagen es una circunferencia.

Demostración La ecuación general $Ax^2+Ay^2+Cx+Dy+E=0$ con coeficientes constantes $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$ permite describir tanto rectas ($A = 0$) como circunferencias ($A \neq 0$) en el plano xy. Para hallar la ecuación de la curva imagen en el plano uv debemos reemplazar en la anterior x, y en términos de u, v para la inversión.

$$A\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2 + A\left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right)^2 + C\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right) + D\left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right) + E = 0$$

Operando algebraicamente:

$$\frac{Au^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{Av^2}{(u^2+v^2)^2} + C\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right) - D\left(\frac{v}{u^2+v^2}\right) + E = 0$$

Extrayendo factor común entre los dos primeros términos de la izquierda y cancelando u^2+v^2:

$$\frac{A}{u^2+v^2} + \left(\frac{Cu}{u^2+v^2}\right) - \left(\frac{Dv}{u^2+v^2}\right) + E = 0$$

Multiplicando ambos miembros por u^2+v^2

$$A + Cu - Dv + E\left(u^2+v^2\right) = 0$$

Reordenando términos:

$$Eu^2 + Ev^2 + Cu - Dv + A = 0$$

que representa una curva de la misma familia que la de partida. Esto prueba los dos incisos del enunciado.

Además el origen es un punto de la recta o circunferencia de ecuación $Ax^2+Ay^2+Cx+Dy+E=0$ si y solo si $E=0$ si y solo si $Eu^2+Ev^2+Cu-Dv+A=0$ es una recta. □

Observación 2.4.6. *Intuitivamente, si en el plano z una recta o circunferencia pasa por el origen entonces su imagen por la inversión pasa por el punto del infinito, es decir que no está acotada y por lo tanto no puede ser una circunferencia, debe ser una recta . Más generalmente, la imagen por la inversión de un conjunto que contiene al origen no está acotada.*

Actividad 2.4.7.

Regrese al ejemplo 2.4.4 teniendo en cuenta la proposición 2.4.5.

Actividad 2.4.8.

Dadas la región $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1, |z-2| < 2\}$, discuta cualitativamente su imagen por $T : w = 1/z$. ¿Pueden cortarse las imágenes de las circunferencias frontera de A? Encuentre analíticamente $T(A)$.

Actividad 2.4.9.

Halle una transformación T que lleve $A = \{z : |z-2i| \leq 2\}$ sobre $B = \{w : \text{Re}(w) \geq 0\}$ componiendo transformaciones ya estudiadas. Muestre que puede escribirse $T : w = \dfrac{Az+B}{Cz+D}$ para ciertas constantes complejas A, B, C, D.

Hemos probado que componiendo transformaciones lineales obtenemos transformaciones del mismo tipo. Si añadimos la transformación inversión y las combinamos mediante composición ¿qué tipo de transformaciones esperamos obtener?

2.5. Transformación lineal fraccionaria (TLF)

Definición 2.5.1. *Una transformación se dice* ***lineal fraccionaria*** *si es de la forma*

$$T : w = \frac{Az+B}{Cz+D} \quad \text{donde } A, B, C, D \in \mathbb{C} \text{ son constantes tales que } AD - BC \neq 0$$

En particular si $C = 0$ se obtienen las transformaciones lineales, en tanto que cuando $A = D = 0, B = C \neq 0$ se obtiene la inversión.
La condición $AD - BC \neq 0$ garantiza que T no se reduce a una transformación constante.

Ejemplo 2.5.2.

Hallemos la imagen del conjunto A por $T : w = \dfrac{z-i}{z+i}$

Dejamos al lector la tarea de comprobar que la inversa está dada por

$$T^{-1} : z = \frac{iw+i}{1-w} \quad \text{es decir} \quad T^{-1} : \begin{cases} x &= \dfrac{-2v}{(u-1)^2+v^2} \\[2ex] y &= \dfrac{1-u^2-v^2}{(u-1)^2+v^2} \end{cases}$$

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

$$|z| < 1 \iff \left|\frac{iw+i}{1-w}\right| < 1 \iff |w+1| < |1-w| \iff$$

$$\iff (1+u)^2 + v^2 < (1-u)^2 + (-v)^2 \iff 1 + 2u + u^2 + v^2 < 1 - 2u + u^2 + v^2 \iff u < 0$$

Luego $T(A) = \{(u,v) : u < 0\}$

b) $A = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1, y < x - 1\right\}$

$$y < x - 1 \iff \frac{1-u^2-v^2}{(u-1)^2+v^2} < \frac{-2v}{(u-1)^2+v^2} - 1 \iff$$

$$\iff 1 - u^2 - v^2 < -2v - \left[(u-1)^2 + v^2\right] \iff$$

$$\Leftrightarrow\ 1-u^2-v^2 < -2v-(u^2-2u+1+v^2)\ \Leftrightarrow\ v < u-1$$

Entonces la imagen de A es $T(A) = \{(u,v) : u < 0, v < u-1\}$

Actividad 2.5.3.

Muestre analíticamente que la imagen por $T : w = \dfrac{6}{z-1}$ de
$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2, |z-5| > 2\}$ es $B = \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w-2| < 4\}$

Retomando el interrogante planteado anteriormente, enunciamos el siguiente resultado.

Propiedad 2.5.4. *El grupo de las transformaciones lineales fraccionarias tiene las siguientes propiedades.*

i) *La composición de dos TLF es también una TLF. Toda TLF admite inversa, la cual es también una TLF.*

ii) *La familia de las TLF es la que se obtiene componiendo las transformaciones lineales no constantes con la inversión.*

iii) *Toda TLF envía rectas en rectas o en circunferencias y envía circunferencias en rectas o en circunferencias.*

Actividad 2.5.5.

Se quiere hallar una TLF que envíe $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-3i| \leq 2\}$ sobre $B = \{w \in \mathbb{C} : |w-1| \geq 1\}$. Le proponemos que resuelva este problema componiendo las siguientes transformaciones en un orden apropiado: $T_1 : w = z/2$, $T_2 : w = z-3i$, $T_3 : w = z+1$, $T_4 : w = 1/z$

Cuando $C \neq 0$ la transformación lineal fraccionaria $T :\ w = \dfrac{Az+B}{Cz+D}$ es un mapeo

$$T : \mathbb{C} - \{-D/C\} \to \mathbb{C} - \{A/C\}$$

que se extiende de modo natural a una transformación uno a uno $T^* : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ del modo siguiente:

$$T^*(z) = T(z)\ \text{ si }\ z \in \mathbb{C}$$

$$T^*(-D/C) = \infty$$

$$T^*(\infty) = A/C$$

Para justificar esta definición basta considerar:

$$\lim_{z\to -D/C} \frac{Az+B}{Cz+D} = \infty\ \ (\text{recordar que } AD-BC \neq 0)$$

$$\lim_{z\to\infty} \frac{Az+B}{Cz+D} = \lim_{z\to\infty} \frac{z(A+B/z)}{z(C+D/z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{A+B/z}{C+D/z} = A/C$$

El punto que T envía a $w = \infty$ es $z = -D/C$. Razonando de manera análoga a lo hecho para la inversión, una recta o circunferencia pasa por el punto $z = -D/C$ si y solo si su imagen es una recta. Más generalmente, $z = -D/C$ pertenece a un conjunto A si y solo si $T(A)$ no está acotado.

Cuando $C = 0$ la TLF es lineal. En ese caso representa una biyección $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, que también puede extenderse a una transformación $T^* : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ del modo siguiente:

$$T^*(z) = T(z) \text{ si } z \in \mathbb{C}$$

$$T^*(\infty) = \infty$$

En lo que sigue, no haremos distinción entre T y T^*, siendo el contexto el que determine a cuál de ellas nos refiramos.

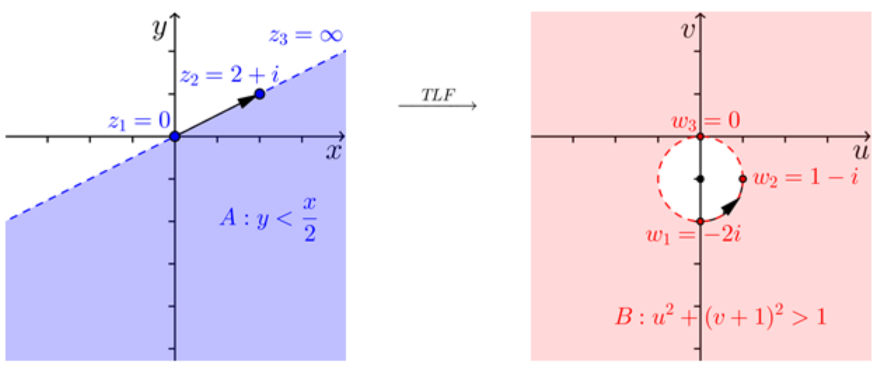
El resultado siguiente es útil a la hora de transformar mediante una TLF rectas o circunferencias en rectas o circunferencias.

Proposición 2.5.6. *Dados tres puntos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ y tres puntos distintos $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$, existe una y solo una transformación lineal fraccionaria $T : w = f(z)$ tal que $f(z_k) = w_k$ para $k = 1, 2, 3$, la cual está dada en forma implícita por la* ***razón doble:***

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

Ejemplo 2.5.7.

Hallemos una TLF que envíe $A = \{(x, y) : y < x/2\}$ en $B = \{w \in \mathbb{C} : |z + i| > 1\}$.



Fijamos una orientación de la frontera de A, por ejemplo recorriéndola de manera que deje A a la derecha. Elegimos tres puntos cualesquiera sobre la frontera de A en un orden que respete la orientación fijada: $z_1 = 0, z_2 = 2 + i, z_3 = \infty$. Orientamos la frontera de B de modo que al recorrerla, B también quede a la derecha. Elegimos tres puntos cualesquiera sobre la frontera de B en un orden que respete esta orientación: $w_1 = -2i, w_2 = 1 - i, w_3 = 0$. Reemplazamos los puntos en la razón doble:

$$\frac{(w + 2i)(1 - i)}{w(1 - i + 2i)} = \frac{z(2 + i - \frac{1}{z_3^*})}{(z - \frac{1}{z_3^*})(2 + i)}$$

Es decir

$$\frac{(w + 2i)(1 - i)}{w(1 + i)} = \frac{z((2 + i)z_3^* - 1)}{(zz_3^* - 1)(2 + i)}$$

Tomando límite cuando $z_3^* \to 0$ resulta

$$\frac{(w+2i)(1-i)}{w(1+i)} = \frac{z}{2+i}$$

Despejando:

$$T: w = \frac{4+2i}{z-1+2i}$$

Actividad 2.5.8.

Utilizando una razón doble halle una TLF que envíe $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-3i| \leq 2\}$ en $B = \{w \in \mathbb{C} : |w-1| \geq 1\}$. Compare con la actividad 2.5.5.

2.6. Transformación potencia

Definición 2.6.1. *Si $n \in \mathbb{N}$ la transformación potencia n-ésima es $T : w = z^n$.*

El origen es claramente un punto fijo. Veamos la imagen por T de un punto $z \neq 0$. Como en general la transformación potencia no es uno a uno, para hallar imágenes por T de conjuntos no podemos trabajar con la transformación inversa. Pero aún si resultara inversible restringida al conjunto que se quiere transformar, la expresión para la transformación inversa no es sencilla porque presupone elegir una rama particular de la raíz n-ésima.
Dado que es más sencillo calcular potencias de un complejo en notación exponencial, escribamos $z = re^{i\theta}$ y $w = \rho e^{i\phi}$. Entonces: $\rho e^{i\phi} = w = z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ Comparando módulos y argumentos de z y w deducimos que:

$$\begin{cases} \rho = r^n \\ \phi = n\theta + 2k\pi \ \ \text{para cierto entero}\, k \end{cases}$$

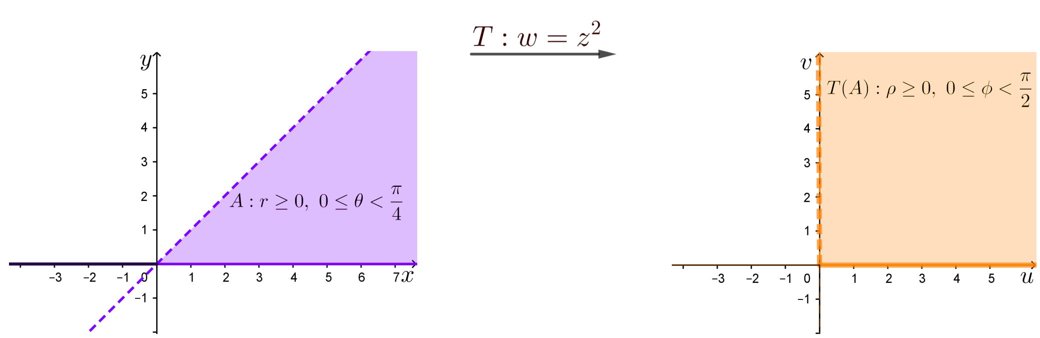
que representan las coordenadas polares del punto imagen.

Ejemplo 2.6.2.

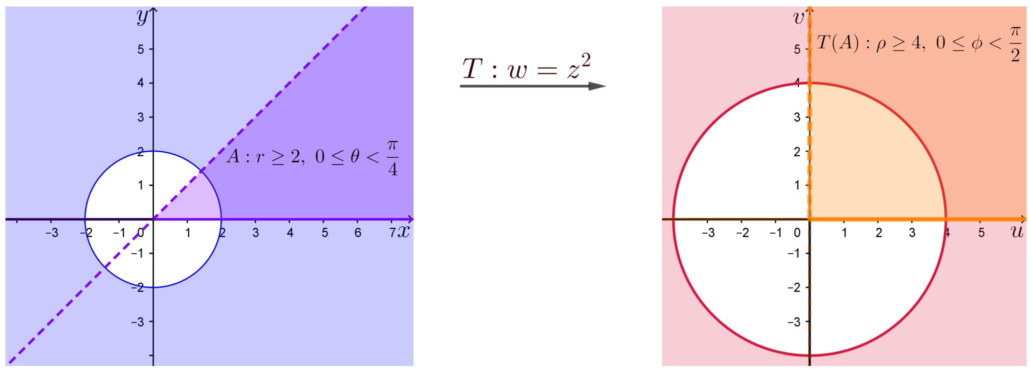
Hallemos la imagen del conjunto A por $T : w = z^2$

Escribamos $z = re^{i\theta}$ y $w = \rho e^{i\phi}$ de modo que $\begin{cases} \rho = r^2 \\ \phi = 2\theta + 2k\pi \ \ \text{para cierto entero}\, k \end{cases}$

a) $A = \{(x,y) : 0 \leq y < x\} = \left\{re^{i\theta} : r \geq 0, 0 \leq \theta < \pi/4\right\}$. Entonces $0 \leq 2\theta < \pi/2$ de modo que podemos considerar $0 \leq \phi < \pi/2$. Como además $\rho = r^2$ con $r \geq 0$, entonces $\rho \geq 0$. Por lo tanto la imagen de A es el primer cuadrante $T(A) = \left\{\rho e^{i\phi} : \rho \geq 0, 0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}\right\}$.



b) $A = \{(x, y) : 0 \leq y < x, x^2 + y^2 \geq 4\} = \{re^{i\theta} : r \geq 2, 0 \leq \theta < \pi/4\}$. En este caso debemos tener en cuenta que $\rho = r^2$ con $r \geq 2$ de manera que $\rho \geq 4$. Luego, la imagen es $T(A) = \{\rho e^{i\phi} : \rho \geq 4, 0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}\}$.



c) A el triángulo de vértices $z_1 = 0, z_2 = 2, z_3 = 2 + 2i$. Dos de los tres segmentos que conforman la frontera del triángulo A tienen un extremo en el origen. Las imágenes de esos dos segmentos pueden hallarse fácilmente a partir de la notación exponencial dado que en cada uno de ellos θ es constante, variando únicamente r. En cambio, sobre el lado que no contiene al origen varían tanto θ como r, por lo que el cálculo de la imagen no es tan sencillo. Tratándose de una potencia baja ($n = 2$), una forma alternativa es tabajar en forma binómica $z = z + iy$ y $w = u + iv$, es decir $u + iv = w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$. Comparando partes real e imaginaria:

$$T : \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

Hallemos las imágenes de los tres lados del triángulo.

La imagen del lado $\begin{cases} x \in [0, 2] \\ y = 0 \end{cases}$ está caracterizada por:

$$\begin{cases} u = x^2, x \in [0, 2] \\ v = 0 \end{cases} \quad \text{es decir el segmento horizontal} \quad \begin{cases} u \in [0, 4] \\ v = 0 \end{cases}$$

La imagen del lado $\begin{cases} x \in [0, 2] \\ y = x \end{cases}$ es:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 2x^2, x \in [0, 2] \end{cases} \quad \text{es decir el segmento vertical} \quad \begin{cases} u = 0 \\ v \in [0, 8] \end{cases}$$

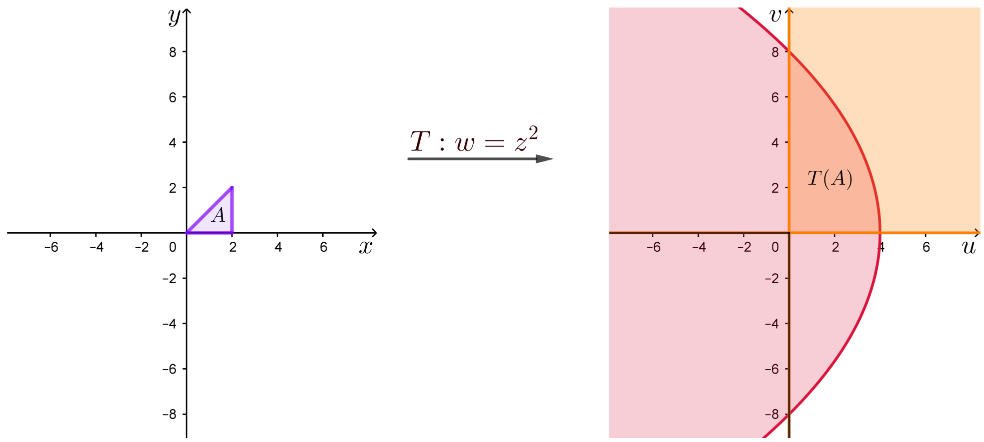
Para hallar la imagen del lado $\begin{cases} x = 2 \\ y \in [0, 2] \end{cases}$ lo parametrizamos trivialmente con parámetro $t = y$ de modo que su imagen es:

$$\begin{cases} u = 4 - t^2 \\ v = 4t, t \in [0, 2] \end{cases}$$

Se trata de un arco de parábola, como puede verse a partir del sistema anterior eliminando el parámetro t. Para ello, despejamos $t = v/4$ de la segunda ecuación y lo reemplazamos en la primera:

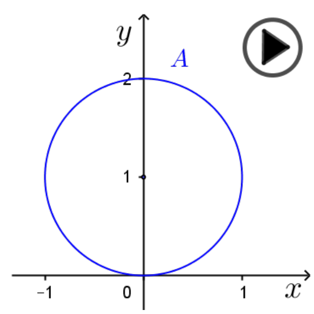
$$\begin{cases} u - 4 = -\frac{1}{16}v^2 \\ v \in [0, 8] \end{cases}$$

Los extremos de este arco son las imágenes de los extremos del segmento $z_1 = 2, z_2 = 2+2i$, es decir $w_1 = 4, w_2 = (2+2i)^2 = 8i$, que también pueden hallarse reemplazando en la ecuación de la parábola v por $v = 0$ y por $v = 8$, respectivamente. La imagen del triángulo es entonces $T(A) = \left\{(u,v) : u \leq 4 - \frac{1}{16}v^2, u \geq 0, v \geq 0\right\}$.



d) $A = \{z : |z - i| = 1\}$. Cliqueamos en el gráfico de la circunferencia A para ver el de su transformada.

Los comandos de Geogebra que utilizamos:
- centro $(0,1)$
- $a = b = 1$
- $Z = x(\text{centro}) + a\cos(t) + i\ (y(\text{centro}) + b\,\text{sen}(t))$ describe cada punto de A
- $W = Z^2$ describe $T(A)$ como número complejo



Actividad 2.6.3.

En cada caso halle la imagen de A por la transformación T

a) $A = \{(x,y) : -x < y \leq x\}$, $T : w = z^3$

b) $A = \{(x,y) : x < 0, y > 0\}$, $\quad T : w = iz^2$

c) $A = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \geq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$, $T : w = z^4/16$

Actividad 2.6.4.

Sombree las regiones $A = \{z : |z+2| \leq 2, \text{Re}(z) \geq -2\}$ y $B = \{w : |w+2| \geq 2\}$ en gráficos separados y proponga una transformación que envíe A sobre B.

Actividad 2.6.5.

Descargue el archivo .ggb del ejemplo 2.6.2d y modifique los parámetros centro, a y b para investigar el efecto de $T : w = z^2$ sobre otras circunferencias o elipses.

2.7. Curvas parametrizadas

Una curva C del plano se puede representar paramétricamente mediante un par de ecuaciones de la forma:

$$C : \begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases} , \quad t \in [a, b]$$

donde $X(t)$ e $Y(t)$ son funciones continuas en $[a, b]$ a valores reales.

Vectorialmente:

$$C : \vec{r} = \vec{r}(t), t \in [a, b] \text{ donde } \vec{r}(t) = X(t)\,\vec{i} + Y(t)\,\vec{j}$$

En notación compleja:

$$C : z = Z(t), t \in [a, b] \text{ donde } Z(t) = X(t) + iY(t)$$

La parametrización $Z(t)$ captura la forma de C, presentándola como el conjunto imagen del intervalo paramétrico, y además, permite establecer un sentido de recorrido u orientación: llamaremos **orientación inducida por la parametrización** a la que recorre C de acuerdo a valores crecientes del parámetro. Indicaremos $-C$ a la misma curva pero con la orientación opuesta. Los puntos $Z(a)$ y $Z(b)$ son los extremos de C. De acuerdo a la orientación inducida por $Z(t), t \in [a, b]$, el punto $Z(a)$ es el extremo inicial y $Z(b)$ el extremo final. Cuando $Z(a) \neq Z(b)$ hablamos de un *arco de curva* que conecta $Z(a)$ y $Z(b)$. Cuando $Z(a) = Z(b)$ se dice que C es una **curva cerrada**.

Un arco se dice **simple** si no se corta a sí mismo, es decir si admite una parametrización inyectiva. En tal caso, convenimos que $Z(t)$, excepto aclaración explícita, tendrá esta característica.

Un enunciado intuitivamente aceptable establece que toda curva cerrada y simple separa al plano en dos conjuntos abiertos disjuntos cuya frontera común es C, uno de ellos es acotado y se denomina el **interior de** C y el otro no acotado es el **exterior de** C. De las dos posibles orientaciones de C, la **antihoraria** es la que recorre la curva dejando la región interior a la izquierda. Convenimos que para curvas cerradas y simples la orientación será antihoraria, salvo mención expresa en contrario.

Una curva C se dice **suave** si admite una parametrización $Z(t)$ tal que $Z'(t)$ es continua en $[a, b]$ y no se anula para ningún $t \in (a, b)$ (intuitivamente, carece de puntos angulosos). Convenimos que la representación paramétrica que utilizaremos, salvo mención en contrario, cumplirá estas condiciones. En tal caso el vector tangente $Z'(t)$ se asocia a la orientación por valores crecientes del parámetro, es decir, la inducida por la parametrización.

Una curva C se dice **suave a trozos** si es la unión de una secuencia finita de curvas suaves $C_1, \cdots, C_N$ orientadas de manera que el extremo final de C_k coincide con el inicial de C_{k+1}, para todo $1 \leq k \leq N - 1$. En ese caso el extremo inicial de C es el inicial de C_1 y el extremo final de C es el final de C_N.

Un **cambio de parámetros** de clase $\mathcal{C}^1$ es una función biyectiva

$$h : [\alpha, \beta] \to [a, b], t = h(\tau)$$

tal que $h'(\tau)$ es continua en $[\alpha, \beta]$ y no nula en (α, β). Esto implica que el signo de h' es constante en dicho intervalo de modo que h es estrictamente monótona en él. Además, queda definida h^{-1} la cual también es un cambio de parámetros de clase $\mathcal{C}^1$.

Una tal función permite reparametrizar C preservando suavidad. En efecto, componiendo la función $t = h(\tau)$ con la parametrización suave $z = Z(t), t \in [a,b]$, obtenemos otra parametrización de C en la que el nuevo parámetro es τ. Es decir

$$C : z = Z^*(\tau), \tau \in [\alpha, \beta] \text{ donde } Z^*(\tau) = Z(h(\tau))$$

Por ejemplo para $Z_1(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t, t \in [0, 2\pi]$, y $Z_2(t) = \cos(2t) + i \operatorname{sen}(2t), t \in [0, \pi]$, el cambio de parámetros $h : [0, \pi] \to [0, 2\pi]$ dado por $t = h(\tau) = 2\tau$ permite pasar de una parametrización a la otra (conservando además la orientación). En este sentido ambas parametrizaciones se consideran “equivalentes”.
Cuando h es creciente el nuevo intervalo parámetrico tiene extremo izquierdo $\alpha = h^{-1}(a)$ y extremo derecho $\beta = h^{-1}(b)$. En cambio, si h es decreciente resulta $\alpha = h^{-1}(b)$ y $\beta = h^{-1}(a)$. Aplicando la regla de la cadena se comprueba que si la parametrización $C : z = Z(t), t \in [a, b]$, es suave, lo mismo ocurre con $C : z = Z^*(\tau), \tau \in [\alpha, \beta]$. De hecho, la relación entre los vectores tangentes obtenidos con ambas parametrizaciones es:

$$\frac{dZ^*}{d\tau} = \frac{dZ}{dt}\frac{dt}{d\tau} = Z'(h(\tau))h'(\tau)$$

En cuanto a la orientación inducida por estas dos parametrizaciones, lo anterior muestra que si $h'(\tau) > 0$ (es decir h crece estrictamente) entonces las dos parametrizaciones inducen sobre C la misma orientación puesto que los vectores tangentes resultan paralelos (el número real $h'(\tau)$ puede contribuir a modificar su longitud pero no su dirección dado que es real y positivo) y diremos que son equivalentes. En cambio, si $h'(\tau) < 0$ (es decir h decrece estrictamente) entonces las orientaciones inducidas por ambas parametrizaciones resultan opuestas (el signo negativo de $h'(\tau)$ da cuenta de ello).
Luego, si se dispone de una parametrización de C y se quiere parametrizar $-C$, bastará con proponer un cambio de parámetros estrictamente decreciente. En este sentido se suele considerar $h : [-b, -a] \to [a, b], h(\tau) = -\tau$. También es frecuente, luego de efectuar un cambio de parámetros, renombrar al nuevo parámetro con la misma letra que el parámetro original. Es por ello que cuando se reparametriza mediante $h(\tau) = -\tau$ se suele decir “cambiamos el parámetro t por $-t$” en lugar de decir “cambiamos el parámetro t por $-\tau$”.

Repasemos algunas parametrizaciones sencillas.

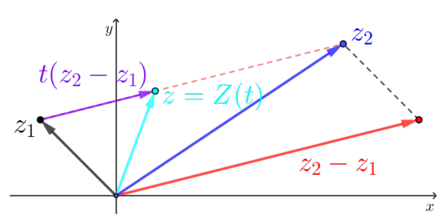
Segmentos de recta

Una forma sencilla de parametrizar un segmento de recta dirigido, es decir orientado distinguiendo un extremo inicial z_1 y un extremo final $z_2 \neq z_1$, se obtiene a partir de la representación vectorial de los complejos. Un punto genérico z perteneciente a la recta que pasa por z_1 y z_2 puede obtenerse sumando al vector z_1 un múltiplo escalar $t \in \mathbb{R}$ del vector $z_2 - z_1$ (cuya dirección es la del segmento en cuestión). Es decir: $Z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$. Si se restringe el parámetro al intervalo $[0, 1]$ se genera el segmento deseado.

Entonces,

$$C : z = z_1 + t(z_2 - z_1) \text{ donde } t \in [0, 1]$$

es una representación paramétrica del segmento dirigido desde z_1 a z_2.



Si se quiere orientar en sentido opuesto, basta intercambiar los roles de z_1 y z_2.

Ejemplo 2.7.1.

Parametricemos el segmento de recta entre los puntos $(-2, 1)$ y $(1, 3)$.

a) Dirigido desde $(-2, 1)$ hasta $(1, 3)$: $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 1 + 3i$.
Entonces $z_2 - z_1 = 3 + 2i$ y $C : z = (-2 + i) + t(3 + 2i),\ t \in [0, 1]$. Es decir,

$$C : z = (3t - 2) + i(2t + 1),\ t \in [0, 1]$$

b) Dirigido desde $(1, 3)$ hasta $(-2, 1)$: $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = -2 + i$.
Entonces $z_2 - z_1 = -3 - 2i$ y $C : z = (1 + 3i) + t(-3 - 2i),\ t \in [0, 1]$. Es decir,

$$C : z = (1 - 3t) + i(3 - 2t),\ t \in [0, 1]$$

□

Parametrizaciones triviales

Cuando un arco C es parte de la gráfica de una función $y = g(x)$ diferenciable con continuidad en un intervalo real I, una manera de parametrizar C es tomando como parámetro la abscisa, es decir $t = x$. La parametrización $C : z = t + i\,g(t),\ t \in I$, se dice trivial. La orientación inducida es en el sentido creciente de las abscisas. En forma análoga, cuando C es gráfica de una función $x = g(y)$ en un intervalo I, se definen las parametrizaciones triviales con parámetro la ordenada, es decir $t = y$, en cuyo caso la orientación que inducen es por ordenadas crecientes.

Ejemplo 2.7.2.

Parametricemos el arco de la parábola de ecuación $y = -x^2$ desde $A(2, -4)$ hasta $B(1, -1)$.

Observemos que dicho arco es parte de la gráfica de la función diferenciable $g(x) = -x^2$. Si lo recorremos desde A hasta B, las abscisas decrecen y entonces la parametrización trivial con $t = x$ no inducirá la orientación requerida. Sin embargo podemos comenzar parametrizando trivialmente el arco opuesto $-C : z = t - i\,t^2,\ t \in [1, 2]$, e invertir luego la orientación cambiando t por $-t$ y ajustando el intervalo paramétrico, es decir, $C : z = (-t) - i(-t)^2,\ t \in [-2, -1]$. Obtenemos

$$C : z = -t - it^2, t \in [-2, -1]$$

Podemos chequear la orientación calculando $X'(t) = -1 < 0$, así que efectivamente esta parametrización orienta C según abscisas decrecientes. □

Parametrización de arcos de circunferencias

Para $R > 0$ la circunferencia $C : x^2 + y^2 = R^2$ se puede parametrizar teniendo en cuenta la identidad trigonométrica fundamental $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, que sugiere dos alternativas:

$$C : \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\operatorname{sen} t \end{cases} \qquad C : \begin{cases} x = R\operatorname{sen} t \\ y = R\cos t \end{cases}$$

La primera induce orientación antihoraria y la segunda horaria. La notación exponencial resulta particularmente concisa, tomando como parámetro $t = \theta \in \arg(z)$

$$C : z = Re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$

La orientación inducida es en el sentido de argumentos crecientes, es decir antihorario, figura 2.24. Una parametrización que induce la orientación opuesta es $z = Re^{-it},\ t \in [0, 2\pi]$, obtenida

de la anterior cambiando t por $-t$, ajustando el intervalo paramétrico al $[-2\pi, 0]$ y luego cambiándolo por $[0, 2\pi]$ en base a la periodicidad de la función exponencial compleja.
Si la circunferencia está centrada en un punto z_0, figura 2.25, una parametrización posible es

$$C : z = z_0 + Re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$

Intervalos de menor longitud adecuadamente elegidos permitirán seleccionar arcos específicos.

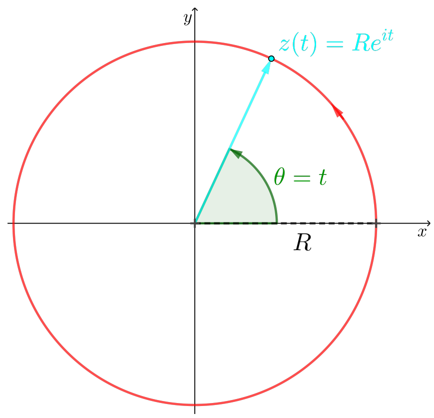


Figura 2.24: circunf. centrada en $z = 0$

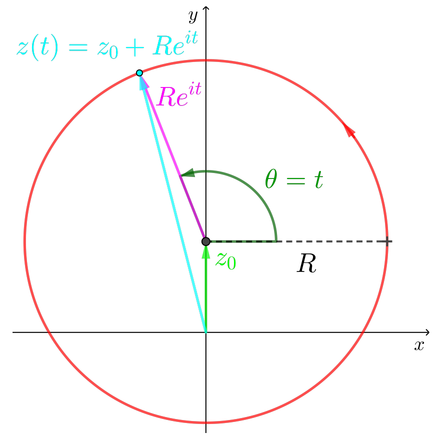


Figura 2.25: circunf. centrada en $z = z_0$

Ejemplo 2.7.3.

Parametricemos las siguientes curvas.

a) $C : |z - i| = 2$ con orientación antihoraria:

$$C : z = i + 2e^{it}, t \in [0, 2\pi]$$

Ella resume lo que en términos de las partes real e imaginaria se escribiría como

$$C : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 1 + 2\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

b) Arco de $|z - i| = 2$ desde $z_1 = 2 + i$ hasta $z_2 = 3i$ con orientación antihoraria: se utiliza la parametrización del inciso anterior pero restringiendo el intervalo paramétrico,

$$C : z = i + 2e^{it}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

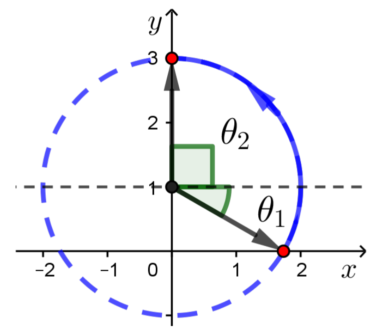
c) Arco de $|z - i| = 2$ desde $z_1 = 3i$ hasta $z_2 = 2 + i$ con orientación horaria: en la parametrización del inciso anterior basta cambiar t por $-t$, dando lugar a

$$C : z = i + 2e^{-it}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

d) Arco de $|z - i| = 2$ en el primer cuadrante con orientación antihoraria: es decir, desde la intersección $z_1 = \sqrt{3}$ con el eje de abscisas hasta la intersección $z_2 = 3i$ con el eje de ordenadas. Si empleamos la parametrización $z(t) = i + 2e^{it}$, el valor del parámetro $t = \theta_1$ que corresponde a este punto verifica $\tan\theta_1 = -1/\sqrt{3}$ y dado que pertenece al cuarto cuadrante, se tiene $\theta_1 = \mathrm{arctg}(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6$. Además como ya vimos para el punto $z_2 = 3i$ se tiene $t = \theta_2 = \pi/2$.

Una posible parametrización es

$$C : z = i + 2e^{it}; t \in [-\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{\pi}{2}]$$



Actividad 2.7.4.

Dados $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -4i$, parametrizar las siguientes curvas:

a) segmento dirigido desde z_1 hasta z_2.

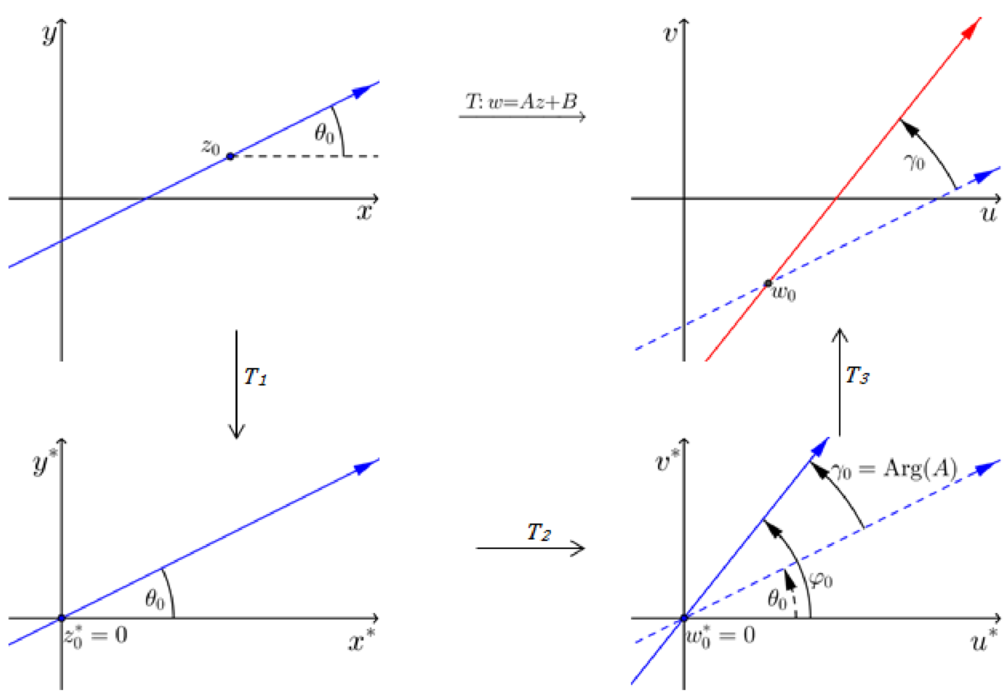
b) arco de la circunferencia $|z + 2i| = 2$ en sentido antihorario con extremo inicial z_1 y extremo final z_2.

c) arco de la circunferencia $|z+2i| = 2$ en sentido horario con extremo inicial z_1 y extremo final z_2.

2.8. Rotación de tangentes

Recordemos que las transformaciones lineales $T : w = Az + B$ donde $A \neq 0$, envían rectas por z_0 en rectas por el punto imagen $w_0 = T(z_0)$. Podemos descomponer T del modo siguiente:

$$w = Az + B = A((z - z_0) + z_0) + B = A(z - z_0) + (Az_0 + B) = A(z - z_0) + w_0$$



Es decir $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$ donde $T_1 : z^* = z - z_0$, $T_2 : w^* = Az^*$ y $T_3 : w = w^* + w_0$, como se muestra en la figura anterior. T_1 y T_3 son traslaciones y T_2 es un escalamiento de razón $|A|$ y una rotación de ángulo $\mathrm{Arg}(A)$. El escalamiento deja invariantes las rectas por el origen, de manera que T_2 actuará sobre ellas como una simple rotación.

Toda transformación f analítica en z_0 con $f'(z_0) \neq 0$, se puede aproximar linealmente en un entorno de z_0. Entonces por el efecto de rotación de las transformaciones lineales sobre rectas y, puesto que cualquier curva suave C por z_0 se comporta localmente como una pequeña porción de su recta tangente, cabe esperar el resultado siguiente.

Proposición 2.8.1. ***Rotación de tangentes***
Sea $f(z)$ analítica en z_0 y tal que $f'(z_0) \neq 0$. Si $C : z = z(t), t \in I$, es una curva suave por el punto $z_0 = z(t_0)$, con $t_0 \in I$, entonces su imagen $f(C) : w = w(t), t \in I$, donde $w(t) = f(z(t))$, es una curva suave por el punto $w_0 = f(z_0)$ y se verifica:

$$\arg(w'(t_0)) = \arg(z'(t_0)) + \arg(f'(z_0))$$

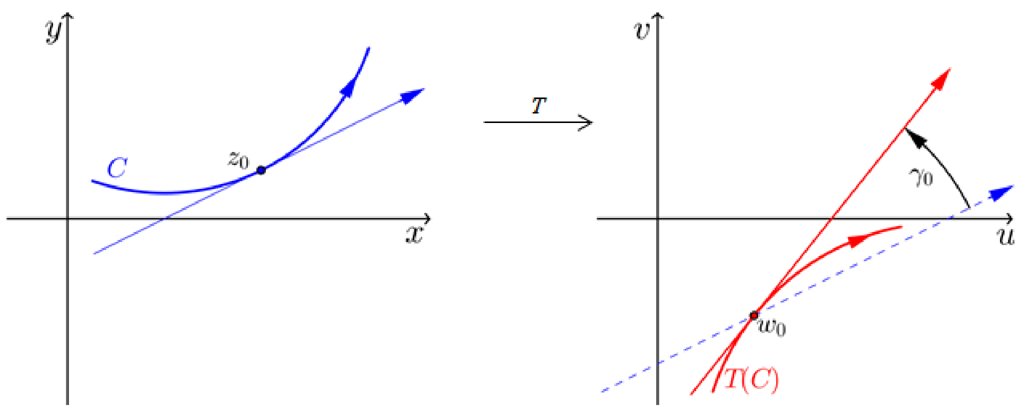


Figura 2.26: Rotación de tangentes

Demostración Sea $C : z = z(t), t \in I$, curva suave por $z_0 = z(t_0)$. Restringiendo eventualmente el intervalo I podemos suponer que f es analítica en C y que f' no se anula sobre C. La imagen de esta curva se puede parametrizar como $f(C) : w = w(t), t \in I$ donde $w(t) = f(z(t))$. Como $f'(z)$ y $z'(t)$ existen en cada punto de C, la regla de la cadena asegura que para $t \in I$ se verifica:

$$w'(t) = f'(z(t))z'(t)$$

Como f es analítica en C, también lo es f', por lo que $f'(z(t))$ es continua en I. Y siendo C suave sabemos que $z'(t)$ es continua en I. Luego $w'(t)$ es continua en I por ser producto de continuas. Además, los factores en el producto anterior no se anulan lo que asegura que $w'(t) \neq 0, t \in I$. Por lo tanto $f(C)$ es suave.
Recordando que al multiplicar complejos sus argumentos se suman, se deduce de la igualdad previa que:

$$\arg(w'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(z'(t_0))$$

$\square$

La proposición anterior expresa el hecho que todas las tangentes a curvas suaves por z_0 giran un mismo ángulo $\text{Arg}(f'(z_0))$, el cual depende de f y del punto z_0, pero no de la curva particular.

Definición 2.8.2. *Se llama* ***ángulo de rotación de tangentes*** *en z_0 al ángulo*

$$\gamma_0 = \text{Arg}(f'(z_0))$$

Ejemplo 2.8.3.

La función $f(z) = 3i/z$ es analítica en todo el plano complejo excepto en el origen, en particular lo es en $z_0 = 3$. Además

$$f'(3) = -\left.\frac{3i}{z^2}\right|_{z=3} = -\frac{i}{3} \neq 0 \qquad \text{Arg}(f'(3)) = \text{Arg}(-\frac{i}{3}) = -\pi/2$$

Luego las tangentes en $z_0 = 3$ giran un ángulo $\gamma_0 = -\pi/2$ en sentido horario.
Por ejemplo, si $C : |z-1| = 2$ con orientación antihoraria es fácil verificar que su imagen es $f(C) : |w+i| = 2$ con orientación horaria.

La recta tangente en $z_0 = 3$ es vertical y orientada hacia arriba, siendo su ángulo de inclinación $\alpha_0 = \pi/2$. La tangente en $w_0 = f(z_0) = i$ es horizontal y orientada hacia la derecha de modo que su ángulo de inclinación es $\beta_0 = 0$. Se cumple la relación prevista: $\beta_0 = \alpha_0 + \gamma_0 = \pi/2 + (-\pi/2) = 0$. Ver figura 2.27.

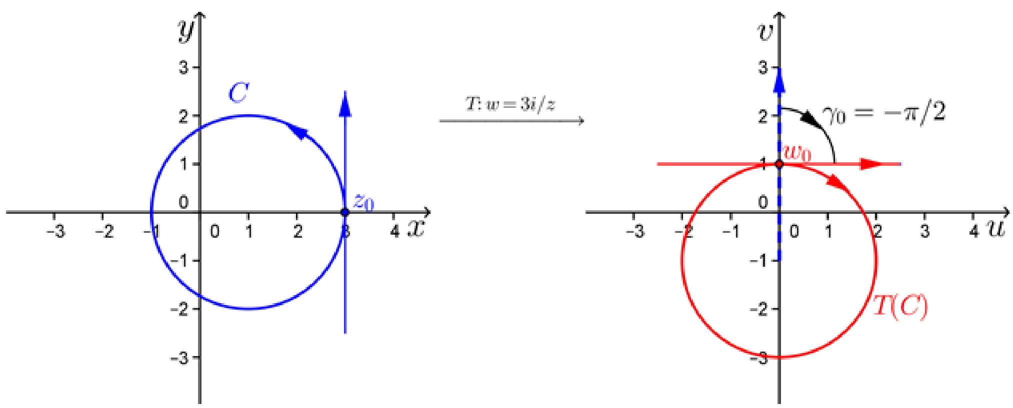


Figura 2.27: ejemplo 2.8.3

Actividad 2.8.4.

Sea $T : w = z^2$. Represente los segmentos

$$C_1 : x = 0,\ 0 \leq y \leq 1 \qquad C_2 : y = x+1,\ -1 \leq x \leq 0 \qquad C_3 : y = 0,\ -1 \leq x \leq 0$$

a) Determine el ángulo de rotación de tangentes en $z_0 = i$. Transforme C_1 y C_2 y corrobore.

b) Grafique las imágenes por T de C_1 y C_3 ¿Tiene sentido hablar de un ángulo de giro de tangentes en $z_1 = 0$?

c) Compare el ángulo entre C_1 y C_2 en $z_0 = i$ con el ángulo entre $T(C_1)$ y $T(C_2)$ en $w_0 = T(z_0)$

2.9. Transformaciones conformes

Hemos visto que en variable compleja las transformaciones lineales pueden trasladar, escalar y rotar. En consecuencia cuando $A \neq 0$ la transformación $T : w = Az + B$ preserva ángulos entre pares de curvas suaves del plano, tanto en magnitud como en orientación.

Ejemplo 2.9.1.

Consideremos la recta $L : y = x$ orientada según abscisas crecientes y la circunferencia $C : (x-2)^2 + y^2 = 4$ orientada en sentido horario. En el punto de intersección $z_0 = 2 + 2i$ dichas curvas se cortan en un ángulo $\pi/4$. Dadas $T_1 : w = iz/2 - i$ y $T_2 : w = \overline{z}$ ¿cuáles preservan dicho ángulo en magnitud y orientación?

Dejamos al lector verificar que $T_1(L) : v = -1 - u$ orientada según abscisas decrecientes, $T_1(C) : |w| = 1$ con orientación horaria, $T_2(L) : v = -u$ orientada según abscisas crecientes, $T_2(C) : |w - 2| = 2$ con orientación antihoraria.
En el caso de T_1 el ángulo desde la tangente a C en z_0 hasta la tangente a L (coincidente con L misma) en z_0, se preserva en magnitud y orientación pues es igual al ángulo desde la tangente a $T_1(C)$ hasta la tangente a $T_1(L)$ (coincidente con $T_1(L)$) en $w_0 = T_1(z_0)$. Sin embargo esto no es suficiente para asegurar la conformidad de T_1 en z_0 dado que ello requeriría probar con todo posible par de curvas por z_0.
En el caso de T_2 se conserva la magnitud pero la orientación se invierte. Esto alcanza para asegurar que T_2 no es conforme en z_0. Ver figura 2.28.

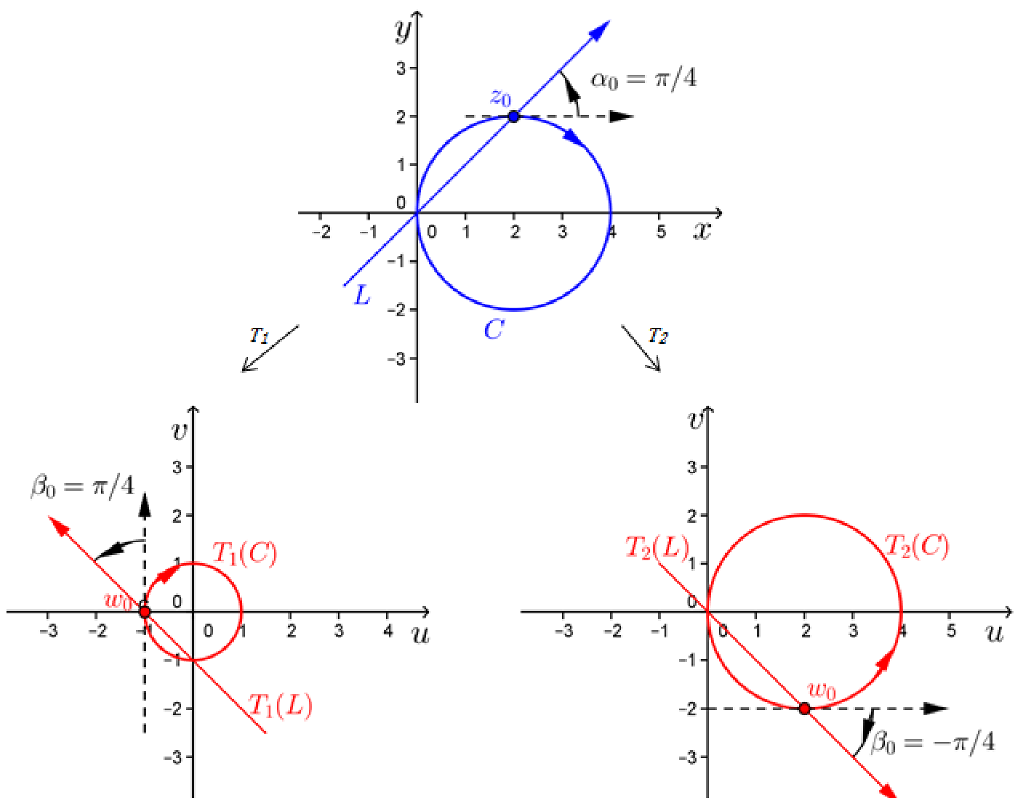


Figura 2.28: ejemplo 2.9.1

Definición 2.9.2. *Se dice que $T : w = f(z)$ es una **transformación conforme en el punto z_0** si preserva, tanto en magnitud como en orientación, el ángulo entre pares de curvas suaves por dicho punto. La transformación es **conforme en un dominio D** del plano si lo es en cada punto de D .*

Para precisar la condición de conformidad en un punto, consideremos dos curvas suaves C_1, C_2 por z_0 y sean $f(C_1), f(C_2)$ sus imágenes , las cuales pasan por $w_0 = f(z_0)$. Sea θ_0 el ángulo orientado cuyo lado inicial es la tangente a C_1 en z_0 y cuyo lado final es la tangente a C_2 en z_0. Sea φ_0 el ángulo orientado cuyo lado inicial es la tangente a $f(C_1)$ en w_0 y cuyo lado final es la tangente a $f(C_2)$ en w_0. La conformidad establece que $\varphi_0 = \theta_0$. Ver figura 2.29

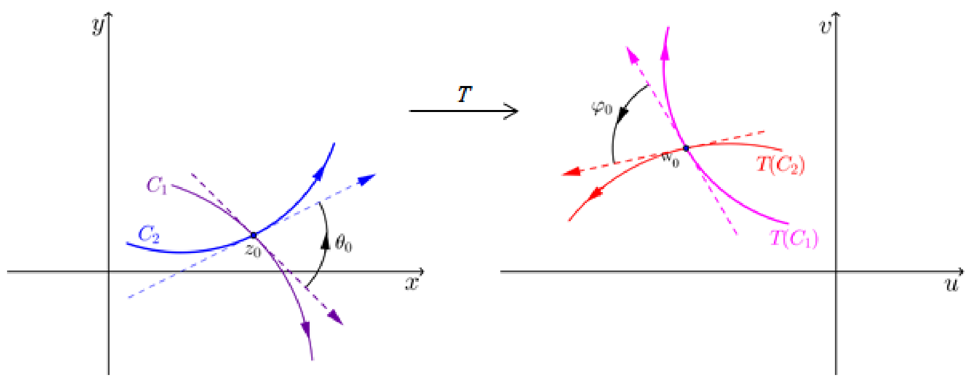


Figura 2.29: Transformación conforme en z_0

Es claro que la composición de dos transformaciones conformes es conforme. Se deduce que las transformaciones lineales no constantes también lo son en todo punto del plano complejo, pues se obtienen por composición de elementales que son conformes.
Para una transformación cualquiera no es posible mostrar la conservación del ángulo para todo par de curvas suaves por un punto dado. Necesitaremos algún criterio que permita decidir de un modo sencillo si $T : w = f(z)$ es conforme en un punto z_0. Si f es analítica en z_0, T se aproxima localmente por una transformación lineal $L : w = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ que gobierna el comportamiento de las tangentes a las curvas suaves por z_0. Esta linealización es conforme cuando $f'(z_0) \neq 0$. Luego, no debería sorprendernos el siguiente resultado.

Teorema 2.9.3. *Sea $f(z)$ analítica en el punto z_0. Son equivalentes:*

i) La transformación $T : w = f(z)$ es conforme en z_0

ii) $f'(z_0) \neq 0$

Demostración
ii) $\Rightarrow$ *i)* Supongamos que $f'(z_0) \neq 0$. Consideremos dos curvas suaves C_1, C_2 por el punto z_0. Por la propiedad de rotación de tangentes, las rectas tangentes a las curvas imágenes $f(C_1), f(C_2)$ giran el mismo ángulo $\text{Arg}(f'(z_0))$, por lo que el ángulo entre ellas se conserva. Por lo tanto T es conforme en z_0.
i) $\Rightarrow$ *ii)* La demostración excede el alcance del curso. □

Actividad 2.9.4.

Halle el dominio de conformidad de $T : w = f(z)$

a) $f(z) = z^3 + 3z$ b) $f(z) = \dfrac{1}{z^3 + i}$ c) $f(z) = \dfrac{1}{2\,\mathrm{sen}(z) + \mathrm{sen}(2z)}$

Actividad 2.9.5.

Sean $T : \dfrac{4}{i + e^{z/2}}$, $C_1 : y = x^2 + x$, $C_2 : y = x^2$

a) Compruebe que T es conforme en el origen.

b) Halle la ecuación de la recta tangente a $T\,(C_1)$ en $w_0 = T\,(0)$

c) ¿Cuál es el ángulo entre las rectas tangentes a las imágenes por T de C_1 y C_2 en el punto $w_0 = T(0)$?

Actividad 2.9.6.

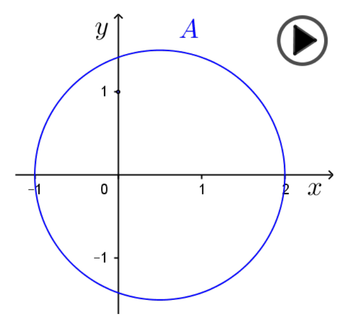
Aplicación a la aerodinámica. La transformación de Joukovsky (Zhukovsky) tiene la expresión $T(z) = z + \dfrac{b^2}{z}$, $b \in \mathbb{R}$, y convierte a una circunferencia de radio $a > |b|$ en una forma de perfil aerodinámico. Para profundizar en el tema puede consultar [15].

Considere $b = 1$, de donde

$$w = T(z) = z + \frac{1}{z}$$

a) Halle los puntos donde T es conforme.

b) Sea $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \dfrac{1}{2} \right| = \dfrac{3}{2} \right\}$



Cliquee en el gráfico de A.
Realice alguna observación relacionada con el inciso anterior.

Proponga una circunferencia B tal que el punto $w = 2$ pertenezca a $T(B)$ y sea un borde de fuga afilado del perfil.

c) Sea $C = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{1}{2} \right| = R \right\}$, considere $R = \sqrt{2{,}5}$ y $R = 2$.
¿En cuál de los dos casos C no genera un borde de fuga afilado? Justifique.
Utilice Geogebra para graficar.

2.10. Problema de Dirichlet en el plano - Segunda parte

En el capítulo 1 consideramos problemas de Dirichlet sobre franjas y regiones angulares o anulares centradas en el origen, a continuación enunciaremos un teorema que permite formularlos en otras regiones.

Teorema 2.10.1. *Sea una función analítica $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ que transforma un dominio D_z del plano z en un dominio D_w del plano w. Si $h(u, v)$ es una función armónica sobre D_w, entonces la función $H(x, y) = h\,[u(x, y), v(x, y)]$ es armónica en D_z.*

Ejemplo 2.10.2.

Halle una función $H(x,y)$ armónica en el interior de la región D, cuyos valores sobre la frontera sean los indicados en cada caso.

a) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| \geq 1, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, $H = -1$ sobre $y = 0$, $H = 1$ sobre $|z-i| = 1$

La frontera de D consta de la circuferencia $C : |z-i| = 1$ y la recta $L : y = 0$ que pasan por el origen. Esto sugiere considerar la transformación $T : w = 2/z$ ya que envía el origen en el punto del infinito asegurándonos que la imagen tendrá como frontera dos rectas (paralelas pues C y L se cortan en un único punto). Dejamos al lector la tarea de verificar que

$$T\,(C) : v = -1 \qquad T\,(L) : v = 0 \qquad T(D) : -1 \leq v \leq 0$$

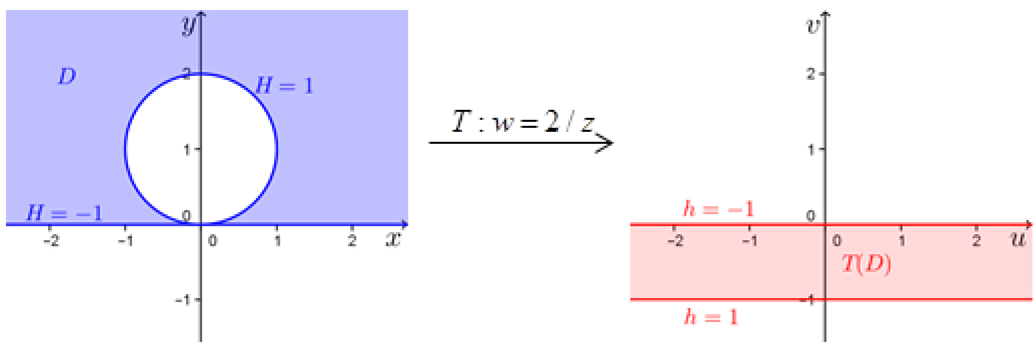


Figura 2.30: ejemplo 2.10.2a)

Debemos hallar una función $h(u,v)$ armónica en el interior de $T(D)$ sujeto a las condiciones de contorno $h(u,-1) = 1$ y $h(u,0) = -1$. En este caso en el plano w es $h(u,v) = Av + B$, donde A, B son constantes reales a determinar:

$$\begin{cases} -A + B &= \quad 1 \\ 0A + B &= \ -1 \end{cases}$$

cuya solución es $(A,B) = (-2,-1)$, luego $h(u,v) = -2v - 1$

Para hallar $H(x,y)$ solo resta componer $T : w = 2/z = \dfrac{2x}{x^2+y^2} + i\dfrac{-2y}{x^2+y^2}$ con h, es decir

$$H(x,y) = h(u(x,y), v(x,y)) = -2v - 1 = -2\left(\frac{-2y}{x^2+y^2}\right) - 1 = \frac{4y}{x^2+y^2} - 1$$

b) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\,,\ \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$, $H = -1$ sobre la porción de ∂D con $|z| = 1$, $H = 0$ sobre la porción de ∂D con $y = 0$

La figura 2.31 muestra la región D con las condiciones de borde y sucesivas transformaciones para llevarla en una de tipo elemental:

La función armónica en el plano $\tilde{w}$ es $h(\tilde{r}, \tilde{\theta}) = A\tilde{\theta} + B$, donde A, B se hallan resolviendo:

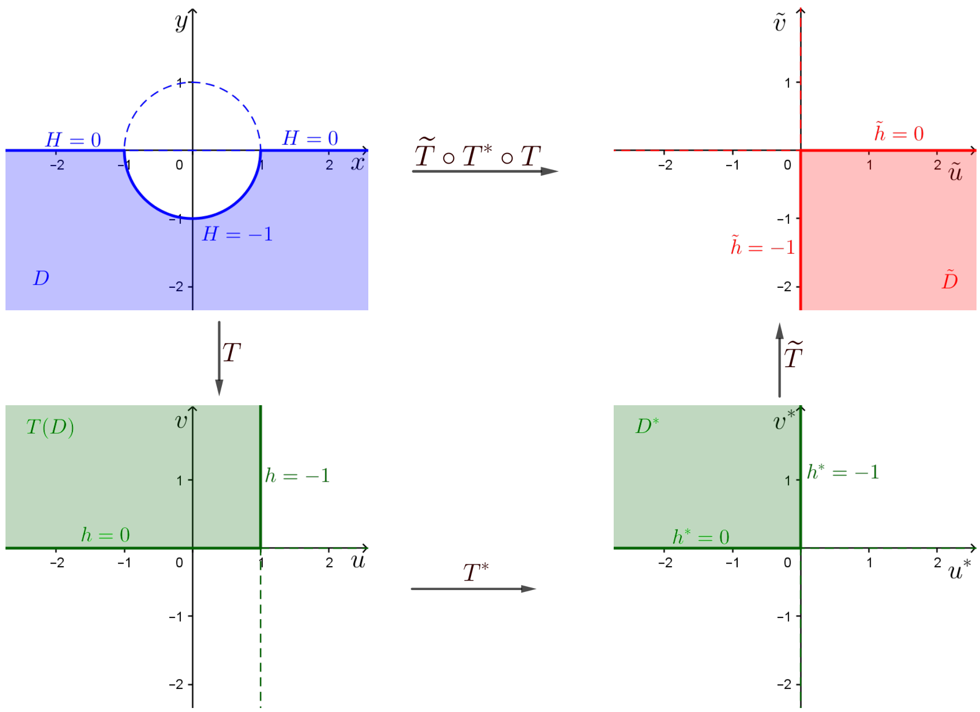


Figura 2.31: ejemplo 2.10.2b)

$$\begin{cases} -(\pi/2)A + B & = & -1 \\ \\ 0A + B & = & 0 \end{cases}$$

La solución de este sistema es $(A,B) = (2/\pi, 0)$, luego $h(\tilde{u},\tilde{v}) = (2/\pi)\tilde{\theta} = (2/\pi)\text{arctg}(\tilde{v}/\tilde{u})$. Componiendo las transformaciones $T : w = \dfrac{2}{z+1}$, $T^* : w^* = w - 1$ y $\tilde{T} : \tilde{w} = -w^*$ obtenemos:

$$\tilde{w} = -w^* = -(w-1) = 1 - w = 1 - \frac{2}{z+1}$$

Es decir:

$$\tilde{u} = 1 - \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}\ ,\ \tilde{v} = \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}$$

Por lo tanto:

$$H(x,y) = \frac{2}{\pi}\,\text{arctg}\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right)$$

c) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-5| \geq 3\ \wedge\ |z+5| \geq 3\}$, $H = -1$ sobre $|z+5| = 3$, $H = 0$ sobre $|z-5| = 3$

La figura 2.32 muestra la región D con las condiciones de borde y sucesivas transformaciones para llevarla en una de tipo anular:

La función armónica en el plano $\tilde{w}$ es $h(\tilde{r},\tilde{\theta}) = A\ln(\tilde{r}) + B$, donde A, B se hallan resolviendo:

$$\begin{cases} A\ln(1/24) + B & = & -1 \\ \\ A\ln(3/8) + B & = & 0 \end{cases}$$

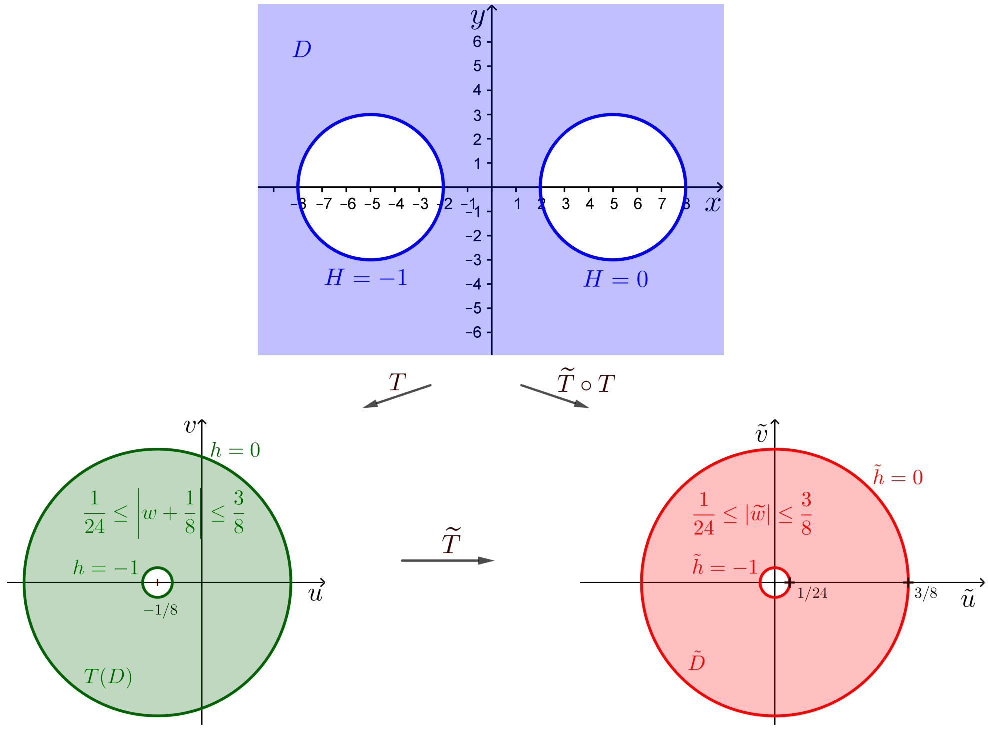


Figura 2.32: ejemplo 2.10.2c)

cuya solución es $(A,B)=\left(\dfrac{1}{\ln 9}, -\dfrac{\ln(3/8)}{\ln 9}\right)$.

Luego $h(\tilde{u},\tilde{v})=\dfrac{1}{\ln 9}\ln(\tilde{r})-\dfrac{\ln(3/8)}{\ln 9}=\dfrac{1}{\ln 9}\ln\left(\sqrt{\tilde{u}^2+\tilde{v}^2}\right)-\dfrac{\ln(3/8)}{\ln 9}$.

Componiendo las transformaciones $T: w=\dfrac{1}{z-4}$ y $\tilde{T}: \tilde{w}=w+\dfrac{1}{8}$ obtenemos:

$$\tilde{w}=w+\frac{1}{8}=\frac{1}{z-4}+\frac{1}{8}$$

Es decir:

$$\tilde{u}=\frac{x-4}{(x-4)^2+y^2}+\frac{1}{8}\ ,\ \tilde{v}=\frac{-y}{(x-4)^2+y^2}$$

Por lo tanto:

$$H(x,y)=\frac{1}{\ln 9}\ \ln\left(\sqrt{\left(\frac{x-4}{(x-4)^2+y^2}+\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{-y}{(x-4)^2+y^2}\right)^2}\right)-\frac{\ln(3/8)}{\ln 9}$$

Actividad 2.10.3.

Halle una función armónica H en el interior de la región D que satisfaga las condiciones de borde especificadas. Justifique la armonicidad.

a) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-2\leq y\leq x\right\}$, $H=-1$ sobre $y=x-2$, $H=5$ sobre $y=x$.

b) $D=\{z\in\mathbb{C}: |z-1|\geq 1, |z-2|\leq 2\}$, $H=4$ sobre $|z-1|=1$, $H=0$ sobre $|z-2|=2$.
Ayuda: considere la transformación $T:\ w=4/z$

c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x+1, x \geq 0\}$, $H(x,x+1) = 0$ si $0 < x < \infty$, $H(0,y) = 4$ para todo $y > 1$.

d) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$, $H = 2$ sobre la porción de ∂D con $x < 0$, $H = 1$ sobre la porción de ∂D con $x > 0$. Ayuda: considere la transformación $T:\ w = 2/(z+i)$

Actividades complementarias

1) Dados $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = 2, 0 < x < 2\}$ y $T(z) = \dfrac{4}{z-2}$

a) Sin hallar la imagen $T(A)$ determine si está acotada.
b) Corrobore su respuesta al inciso a) hallando $T(A)$.

2) Grafique la región $R = \{z : |z| \leq 2 \ \wedge \ |z-2+2i| \leq 2\}$

a) Inspeccionando la gráfica proponga un punto z_0 de modo que $T:\ w = \frac{1}{z-z_0}$ envíe R en una región angular. ¿Cuál es el vértice de dicho ángulo?
b) La imagen $T(R)$ por la transformación propuesta en a) es un ángulo cuya magnitud puede determinarse sin hacer las cuentas, argumentando en base a conformidad. ¿Cuál es dicha magnitud?
c) Confirme hallando analíticamente $T(R)$ siendo T la del inciso a).

3) Grafique $A = \{z : |z| = 1\}$ y $B = \{w : \mathrm{Re}(w) = 0\}$

a) ¿Cuántos puntos fijos puede tener una TLF que envíe A en B?
b) Halle una TLF que envíe A en B y deje dos puntos fijos.

4) Halle la imagen de A por la transformación dada.

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4, x \geq 1\}$, $T(z) = z^2$
b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq \sqrt{2}, 0 \leq y \leq x\}$, $T(z) = \dfrac{16}{z^8} + 2 - i$

5) Halle una función $H(x,y)$ armónica en el interior de la región D que satisfaga las condiciones de contorno especificadas. Justifique la armonicidad.

a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -2, y \leq 1\}$, $H(-2,y) = -1$, $H(x,1) = 1$.
b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, $H(x,0) = 2$ sobre la porción de ∂D con $x > 0$, $H(x,0) = 6$ sobre la porción de ∂D con $x < 0$.
c) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-2i| \geq 2, |z+2i| \geq 2\}$, $H = 4$ sobre $|z-2i| = 2$, $H = 2$ sobre $|z+2i| = 2$. Ayuda: considere la transformación $T:\ w = 4/z$
d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq -1, x \leq 0\}$, $H(x,-x-1) = 0$, $H(0,y) = 2$ para todo $y > -1$.
e) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-5i| \geq 4 \ \wedge \ |z+5i| \geq 4\}$, $H = 0$ sobre $|z-5i| = 4$, $H = 1$ sobre $|z+5i| = 4$. Ayuda: considere la transformación $T:\ w = 1/(z+3i)$
f) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, x+y \geq 1\}$, $H = 1$ sobre la porción de ∂D con $x+y = 1$, $H = 3$ sobre la porción de ∂D con $x^2+y^2 = 1$. Ayuda: considere la transformación $T:\ w = 2/(z-1)$

2.11. Actividades resueltas

Actividad 2.1.5

$T_3 = T_2 \circ T_1$
$T_3(z) = T_2\left(T_1(z)\right) = T_2\left(e^{-\pi z/2}\right) = \dfrac{1}{e^{-\pi z/2}} = e^{\pi z/2}$
$D_{Def}\left(T_3\right) = \left\{z \in D_{Def}\left(T_1\right) : T_1(z) \in D_{Def}\left(T_2\right)\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} : e^{-\pi z/2} \neq 0\right\} = \mathbb{C}$
$T_3(i) = e^{\pi i/2} = i$. Luego, $z = i$ es punto fijo de T_3.

$T_4 = T_1 \circ T_2$
$T_4(z) = T_1\left(T_2(z)\right) = T_1\left(1/z\right) = e^{-\frac{\pi}{2z}}$
$D_{Def}\left(T_4\right) = \left\{z \in D_{Def}\left(T_2\right) : T_2(z) \in D_{Def}\left(T_1\right)\right\} = \left\{z \neq 0 : 1/z \in \mathbb{C}\right\} = \mathbb{C} - \{0\}$
$T_4(i) = e^{-\frac{\pi}{2i}} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$. Luego, $z = i$ es punto fijo de T_4.

Actividad 2.2.3

a) Transformación lineal $T : w = Az + B$ con A, B constantes complejas a determinar de modo tal que $T(z_k) = w_k$ para $k = 1$ y $k = 2$. Se obtiene un sistema lineal de dos ecuaciones en las incógnitas A, B:

$$\left\{\begin{array}{l} Az_1 + B = w_1 \\ Az_2 + B = w_2 \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{l} Ai + B = 1 \\ A(-1) + B = 2 - i \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{l} iA + B = 1 \\ -A + B = 2 - i \end{array}\right.$$

De la primera ecuación: $B = 1 - iA$.
Reemplazando en la segunda ecuación:

$$-A + (1 - iA) = 2 - i \Leftrightarrow -(1 + i)A = 1 - i \Leftrightarrow A = -\frac{1 - i}{1 + i} = -\frac{(1 - i)^2}{(1 + i)(1 - i)} = i$$

Luego, $B = 1 - iA = 1 - i^2 = 2$
La transformación buscada es única y está dada por $T : w = iz + 2$

b) Transformación lineal $T : w = Az + B$ con A, B constantes complejas a determinar de modo tal que $T(z_1) = w_1$ y $T(z_2) = z_2$. Procedemos como en el inciso anterior:

$$\left\{\begin{array}{l} Az_1 + B = w_1 \\ Az_2 + B = z_2 \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{l} Ai + B = 1 \\ A(-1) + B = -1 \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{l} iA + B = 1 \\ -A + B = -1 \end{array}\right.$$

De la primera ecuación: $B = 1 - iA$.
Reemplazando en la segunda ecuación:

$$-A + (1 - iA) = -1 \Leftrightarrow -(1 + i)A = -2 \Leftrightarrow A = \frac{2}{1 + i} = \frac{2(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = 1 - i$$

Luego, $B = 1 - iA = 1 - i(1 - i) = -i$
La transformación buscada es única y está dada por $T : w = (1 - i)z - i$

c) Sea L la recta por z_1 y z_2 parametrizada por $T : z = \underbrace{z_1 + t(z_2 - z_1)}_{z(t)}, t \in \mathbb{R}$. $T : w = iz + 2$ la transformación lineal del primer inciso. Parametricemos su imagen $T(L) : w = T(z(t)), t \in \mathbb{R}$. Se tiene:

$$w = T(z(t)) = iz(t) + 2 = i(z_1 + t(z_2 - z_1)) + 2 = iz_1 + t(iz_2 - iz_1) + 2 =$$

$$= (iz_1 + 2) + t((iz_2 + 2) - (iz_1 + 2)) = w_1 + t(w_2 - w_1)$$

O sea $T(L) : w = w_1 + t(w_2 - w_1), t \in \mathbb{R}$. Se trata de la recta por los puntos imagen w_1 y w_2.

Para parametrizar el segmento L_{12} que une z_1 con z_2 debemos restringir el intervalo paramétrico al intervalo $[0, 1]$. La imagen de este segmento por T tiene la misma expresión paramétrica que en el caso de la recta L pero restringiendo $t \in [0, 1]$. Así:

$$T(L_{12}) : w = w_1 + t(w_2 - w_1).t \in [0, 1]$$

representa el segmento que une w_1 con w_2.
Esto se generaliza inmediatamente para $T : w = Az + B$ lineal. Se tiene:

$$w = T(z(t)) = Az(t) + B = A(z_1 + t(z_2 - z_1)) + B = (Az_1 + B) + t(Az_1 - Az_2) =$$

$$= (Az_1 + B) + t((Az_1 + B) - (Az_2 + B)) = w_1 + t(w_2 - w_1)$$

Actividad 2.2.5

$A = \{z : |z - i| \geq 1\}$ es el exterior del disco abierto unitario centrado en $z = i$
$B = \{w : |w - (2 - i)| \geq 1\}$ es el exterior del disco abierto unitario centrado en $w = 2 - i$
A y B son trasladados uno del otro. Para hallar el vector de traslación, tengamos en cuenta que ella afecta a todo el plano complejo. En particular desplazará el centro $z = i$, llevándolo al centro $w = 2 - i$. Entonces:
$T : w = z + 2 - 2i$.
Comprobemos analíticamente que $T(A) = B$. Para ello consideramos la transformación inversa.
$T^{-1} : z = w - 2 + 2i$
Se tiene:

$$z \in A \Leftrightarrow |z - i| \geq 1 \Leftrightarrow |(w - 2 + 2i) - i| \geq 1 \Leftrightarrow |w - 2 + i| \geq 1 \Leftrightarrow w \in B$$

Actividad 2.2.7

A es el disco cerrado de radio 2 centrado en $z = 4i$
B es el disco cerrado de radio 1 centrado en $w = 0$
$T_1 : w = z/2$ es un escalamiento de razón 1/2
$T_2 : w = z - 4i$ es una traslación vertical 4 unidades hacia abajo.

a) Corresponde primero trasladar el centro de A al origen aplicando T_2. Luego componer con el escalamiento T_1 para ajustar el radio final.
$T = T_1 \circ T_2 : w = (z - 4i)/2$ es decir la trasnformación lineal $T : w = \frac{1}{2}z - 2i$.
Analíticamente:
$T^{-1} : z = 2w + 4i$
Se tiene:

$$z \in A \Leftrightarrow |z - 4i| \leq 2 \Leftrightarrow |(2w + 4i) - 4i| \leq l \Leftrightarrow |2w| \leq 2 \Leftrightarrow |w| \leq 1 \Leftrightarrow w \in B$$

b) $\tilde{T} = T_2 \circ T_1 : w = \frac{1}{2}z - 4i$
Corresponde primero aplicar un escalamiento al 50 % del tamaño original. Esto llevará el centro $4i$ al $2i$ y reducirá el radio de 2 a 1. A continuación se traslada verticalmente cuatro unidades hacia abajo, aplicando T_2. Esto llevará el centro $2i$ al centro $-2i$ pero no modificará el radio. Por lo tanto $\tilde{T}$ será el disco centrado en $-2i$ de radio 1:

$\tilde{T}(A) = \tilde{B} = \{w : |w + 2i| \leq 1\}$
Analíticamente: $\tilde{T}^{-1} : z = 2w + 8i$

$$z \in A \Leftrightarrow |z - 4i| \leq 2 \Leftrightarrow |(2w + 8i) - 4i| \leq 2 \Leftrightarrow |2w + 4i| \leq 2 \Leftrightarrow |w + 2i| \leq 1 \Leftrightarrow w \in B$$

Actividad 2.2.8

$A = \{z : |iz + 1| \leq 1\} = \{z : |z - i| \leq 1\}$ es el disco cerrado de radio 1 centrado en i.
$B = \{w : |w + 1 - i| \leq 3\} = \{w : |w - (-1 + i)| \leq 3\}$ es el disco cerrado de radio 3 centrado en $-1 + i$.
Trasladamos el centro de A al origen mediante $T_1 : w_1 = z - i$.
A continuación ajustamos el tamaño por el factor de escala 3 mediante $T_2 : w_2 = 3w_1$. El centro permanece en el origen.
Finalmente se lo traslada al punto $-1 + i$ mediante $T_3 : w = w_2 - 1 + i$.
Luego, $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1 : w = 3(z - i) - 1 + i = 3z - 1 - 2i$
Observen que el resultado muestra que se podía lograr el mismo objetivo componiendo una traslación con un escalamiento (¿cuáles?).
Dejamos la comprobación analítica de la transformación propuesta a cargo del lector.

Actividad 2.2.9

$T_3 : w = iz$ es una transformación lineal. Lleva rectas en rectas. Representa una rotación alrededor del origen en sentido antihorario por un ángulo de 90°. En ambas figuras parece haber un tal ángulo involucrado. La respuesta correcta es la del gráfico de la derecha. En efecto, basta hallar las imágenes de dos puntos de la recta $L : y = x + 1$, por ejemplo $z_1 = -1$ y $z_2 = i$. Se tiene $w_1 = -i$ y $w_2 = -1$. La recta de color rojo en el gráfico de la derecha es la que pasa por estos dos puntos. También le sugerimos probar con un transportador, pinchándolo en el origen y abriéndolo hasta que el extremo libre caiga sobre un punto de L. Luego, gire en sentido antihorario un ángulo de 90° y vea en cuál recta cae.
Resolución analítica:

$T_3^{-1} : z = -iw$
$x + iy = z = -iw = -i(u + iv) = v - iu$
$T_3^{-1} : \begin{cases} x = v \\ y = -u \end{cases}$

$$z \in L \Leftrightarrow y = x + 1 \Leftrightarrow -u = v + 1 \Leftrightarrow v = -u - 1 \Leftrightarrow w \in T_3(L)$$

Actividad 2.2.11

$T : w = iz + 1 - i$
Consideremos las siguientes transformaciones lineales elementales:
$T_1 : w = iz$
$T_2 : w = z + 1 - i$
Entonces $T = T_2 \circ T_1$
Vértices de A: $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 1 + i$
Vértices de B: $w_0 = 0$, $w_1 = 1$, $w_2 = 1 - i$
Para ver que T lleva el triángulo A en el triángulo B:
$T_1(A)$ es un triángulo pues T_1 es una rotación alrededor del origen. Para ver cuál es este triángulo basta hallar las imágenes de los vértices:
$T_1(z_0) = w_0^* = 0$, $T_1(z_1) = w_1^* = i$, $T_1(z_2) = w_2^* = i(1 + i) = -1 + i$

$T_2(T_1(A))$ es un triángulo pues $T_1(A)$ lo es y T_2 es una traslación. Para determinar ese nuevo triángulo, basta hallar las imágenes de los vértices:
$T_2(w_0^*) = 1 - i = w_2$, $T_2(w_1^*) = 1 = w_1$, $T_2(w_2^*) = 0 = w_0$
Luego, $T_2(T_1(A)) = B$. Es decir, $T(A) = B$
La transformación $T^* : w = \overline{z}$ no es lineal dado que no es analítica (y las lineales siempre son analíticas por ser polinómicas). No obstante ello, la imagen $T^*(A) = B$ pues T^* actúa geométricamente como una reflexión en el eje real.

Actividad 2.2.13

A y B son rectángulos. Por lo mencionado inmediatamente encima del enunciado de esta actividad, existiría una transformación lineal T tal que $T(A) = B$ si y solo si A y B fueran semejantes (en el sentido de la geometría). Pero esto implica que T conserva relaciones de proporcionalidad. Esto no se cumple en este ejemplo puesto que la relación entre las longitudes de los lados mayor y menor de los rectángulos son $4/2 = 2$ en A y $3/1 = 1$ en B, es decir distintas. Por ende, no existe ninguna tranformación lineal que envíe A sobre B.

Actividad 2.4.7

En relación al ejemplo 2.4.4 y razonando en el plano complejo extendido:

a) La frontera de A es una circunferencia que no pasa por el origen, es decir $z = 0 \notin A$. Luego, $w = \infty \notin T(A)$. Por lo tanto esta imagen no puede ser una recta por lo que es una circunferencia.Como además A no está acotado, entonces $z = \infty \in A$ por lo que $w = 0 \in T(A)$. Luego, la imagen $T(A)$ es una circunferencia que pasa por el origen. Estas observaciones son consistentes con los resultados encontrados en el ejemplo 2.4.4.a).

b) A es una circunferencia que no pasa por el origen, es decir $z = 0 \notin A$. Luego, $w = \infty \notin T(A)$. Por lo tanto la imagen $T(A)$ no puede ser una recta y entonces es una circunferencia. Como además A es acotado, entonces $z = \infty \notin A$, por lo cual $w = 0 \notin T(A)$. Luego, $T(A)$ es una circunferencia que no pasa por el origen. Estos resultados son cualitativamente consistentes con los del ejemplo 2.4.4.b).

c) A es una circunferencia que pasa por el origen, de modo que $z = 0 \in A$. Luego, $w = \infty \in T(A)$. Luego, $T(A)$ no puede ser una circunferencia, debe ser una recta. Además como A está acotado entonces $z = \infty \notin A$. Por lo tanto $w = 0 \notin T(A)$. Es decir $T(A)$ es una recta que no pasa por el origen. Esto es consistente con lo visto en el ejemplo 2.4.4.c).

d) A es una recta que pasa por el origen, es decir $z = 0 \in A$. Entonces $w = \infty \in T(A)$. Luego, $T(A)$ no puede ser circunferencia, debe ser recta. Además A no está acotado, de manera que $z = \infty \in A$. Luego, $w = 0 \in T(A)$. Esto muestra que $T(A)$ es una recta que pasa por el origen, en consistencia con los hallado en el ejemplo 2.4.4.d).

e) A es una recta que no pasa por el origen, es decir $0 \notin A$. Luego, $W = \infty \notin T(A)$. Entonces $T(A)$ no puede ser una recta, debe ser una circunferencia. Además A no está acotado por lo que $z = \infty \in A$. Luego $w = 0 \in T(A)$ y entonces $T(A)$ pasa por el origen. El resultado es consistente con el ejemplo 2.4.4.e).

f) La frontera ∂A de A es una circunferencia que no pasa por el origen, es decir $z = 0 \notin \partial A$. Entonces $w = \infty \notin \partial T(A)$. Luego $\partial T(A)$ no puede ser una recta, debe ser una circunferencia. Además la frontera ∂A de A está acotada de manera que $z = \infty \notin \partial A$. Luego, $w = 0 \notin \partial T(A)$. Así, $\partial T(A)$ es una circunferencia que no pasa por el origen.

Por otra parte, $z = 0 \in A$ con lo cual $w = \infty \in T(A)$. Por lo tanto $T(A)$ no está acotada. Luego, $T(A)$ es el exterior de una circunferencia. Además, $z = \infty \notin A$ de modo que $w = 0 \notin T(A)$. Luego, $T(A)$ es el exterior de una circunferencia que deja al origen afuera. Los resultados son consistentes con los del ejemplo 2.4.4.f).

Actividad 2.4.8

El razonamiento cualitativo que sigue se aplica en el plano complejo extendido.
Las dos circunferencias que forman la frontera de A pasan por el origen $z = 0$. Luego, sus imágenes pasan por el punto del infinito $w = \infty$. Es decir, cada una es enviada en una recta. Estas rectas imagen solamente pueden cortarse en el punto del infinito puesto que siendo inyectiva la inversión, si se cortaran en otro punto del plano finito, provendría de algún punto del plano dominio distinto de $z = 0$ donde las circunferencias frontera de A se cortarían, cosa que no ocurre. Por lo tanto, las rectas imagen son paralelas entre sí.
Vamos a determinarlas en forma analítica:
$T : w = 1/z$ $\qquad\qquad$ $T^{-1} : z = 1/w$
Para el exterior del círculo pequeño:

$$|z-1| > 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{w} - 1\right| > 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1-w}{w}\right| > 1 \Leftrightarrow |1-w| > |w| \Leftrightarrow |1-(u+iv)| > |u+iv| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(1-u)+iv| > |u+iv| \Leftrightarrow (1-u)^2+v^2 > u^2+v^2 \Leftrightarrow 1-2u+u^2 > u^2 \Leftrightarrow -2u > -1 \Leftrightarrow u < \frac{1}{2}$$

Para el interior del círculo más grande:

$$|z-2| < 2 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{w} - 2\right| < 2 \Leftrightarrow \left|\frac{1-2w}{w}\right| < 2 \Leftrightarrow |1-2w| < 2|w| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |1-(2u+i2v)| < 2|u+iv| \Leftrightarrow |(1-2u)+i(-2v)| < |2u+i2v| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-2u)^2 + (-2v)^2 < (2u)^2 + (2v)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4u + 4u^2 < 4u^2 \Leftrightarrow -4u < -1 \Leftrightarrow u > \frac{1}{4}$$

Luego, $T(A) = \{u + iv : 1/4 < u < 1/2\}$ es una franja vertical.

Actividad 2.4.9

Mirando las respectivas fronteras, una circunferencia en el caso de A y una recta en el caso de B, y sabiendo que las trasnformaciones estudiadas llevan el interior en el interior y la frontera sobre la frontera, buscamos alguna transformación que lleve circunferencias en rectas. Claramente no podrá ser lineal.
Dado que $z = 0 \in A$ proponemos como primer paso considerar la inversión $T_1 : w_1 = 1/z$. Se tiene:

$$z \in A \Leftrightarrow |z-2i| \le 2 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{w_1} - 2i\right| \le 2 \Leftrightarrow \left|\frac{1-2iw_1}{w_1}\right| \le 2 \Leftrightarrow |1-2iw_1| \le 2|w_1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |1-2i(u_1+iv_1)| \le |2u_1+i2v_1| \Leftrightarrow |(1+2v_1)+i(-2v_1)| \le |2u_1+i2v_1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+2v_1)^2 + (-2v_1)^2| \le (2u_1)^2 + (2v_1)^2 \Leftrightarrow 1+4v_1+4v_1^2 \le 4u_1^2+4v_1^2 \le 1+4v_1 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4v_1 \le -1 \Leftrightarrow v_1 \le -\frac{1}{4}$$

Luego, $A_1 = T_1(A) = \left\{w_1 : \mathrm{Im}(w_1) \leq -\frac{1}{4}\right\}$ es un semiplano.
En segundo lugar trasladamos hacia arriba mediante $T_2 : w_2 = w_1 + i/4$.
Es claro que $A_2 = T_2(A_1) = \{w_2 : \mathrm{Im}(w_2) \leq 0\}$.
Finalmente rotamos un ángulo recto alrededor del origen en sentido antihorario mediante $T_3 : w = iw_2$. Es claro que $T_3(A_2) = B$.
Luego, una posible solución es aplicando la transformación compuesta

$$T = T_3 \circ T_2 \circ T_1 : w = i\left(\frac{1}{z} + \frac{i}{4}\right)$$

Esta transformación puede escribirse como

$$T : w = i\left(\frac{4 + iz}{4z}\right)$$

Es decir:

$$T : w = \frac{-z + 4i}{4z}$$

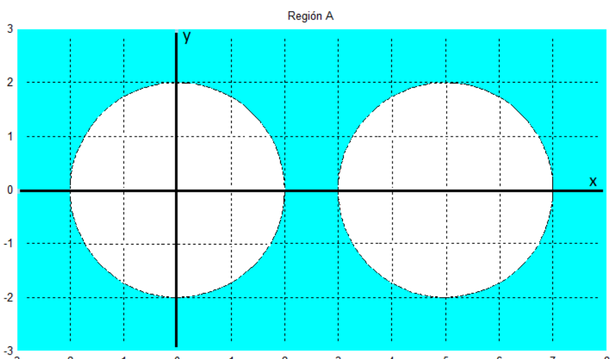
que tiene la forma indicada en el enunciado con $A = -1$, $B = 4i$, $C = 4$, $D = 0$. También se cumple $AD - BC = -16i \neq 0$.

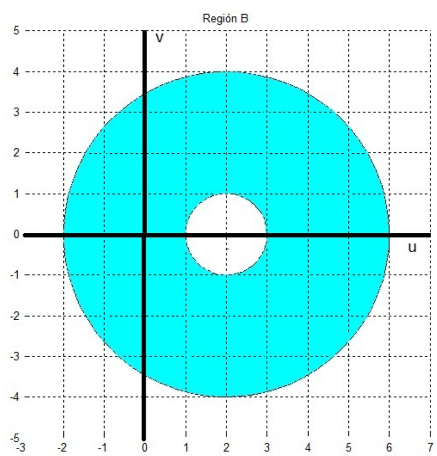
Actividad 2.5.3

La transformada que debemos aplicar es $T : w = \dfrac{6}{z-1}$ entonces despejando z queda

$$z = \frac{6}{w} + 1$$

Graficamos las regiones A y B:





Procederemos analíticamente a transformar la región A, la cual está compuesta por la intersección de dos regiones. Entonces transformaremos por separado cada una de dichas regiones y finalmente tomaremos su intersección.

$$|z| > 2 \Leftrightarrow \left|\frac{6}{w} + 1\right| > 2 \Leftrightarrow \left|\frac{6+w}{w}\right| > 2 \Leftrightarrow |6 + w| > 2|w| \Leftrightarrow \sqrt{(u+6)^2 + v^2} > 2\sqrt{u^2 + v^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2 + 12u + 36 + v^2 > 4u^2 + 4v^2 \Leftrightarrow 0 > 3u^2 + 3v^2 - 12u - 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 > 3(u^2 + v^2 - 4u - 12) \Leftrightarrow 16 > (u-2)^2 + v^2 \Leftrightarrow |w - 2| < 4$$

$$|z-5|>2 \Leftrightarrow \left|\frac{6}{w}+1-5\right|>2 \Leftrightarrow \left|\frac{6-4w}{w}\right|>2 \Leftrightarrow |6-4w|>2|w| \Leftrightarrow |-4||w-\frac{3}{2}|>2|w| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|w-\frac{3}{2}|>|w| \Leftrightarrow 2\sqrt{(u-\frac{3}{2})^2+v^2}>\sqrt{u^2+v^2} \Leftrightarrow 4\left[(u-\frac{3}{2})^2+v^2\right]>u^2+v^2 \Leftrightarrow$$

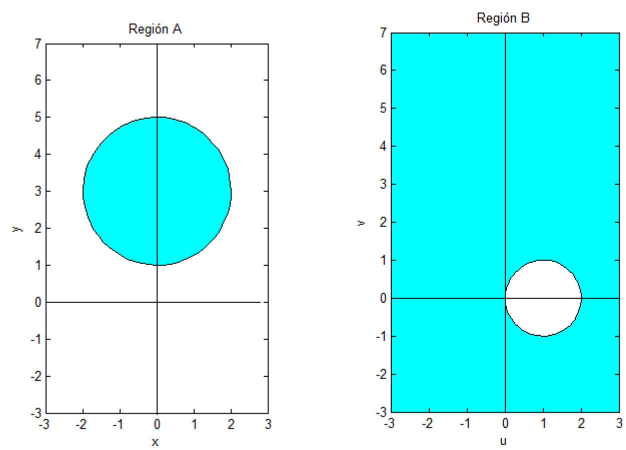
$$\Leftrightarrow 4u^2-12u+9+4v^2>u^2+v^2 \Leftrightarrow 3u^2+3v^2-12u+9>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(u^2+v^2-4u+3)>0 \Leftrightarrow (u-2)^2+v^2>1 \Leftrightarrow |w-2|>1$$

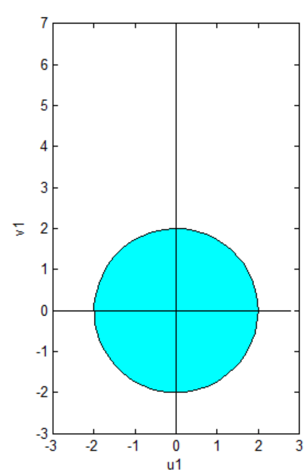
La intersección es la región B:

$$1<|w-2|<4$$

Actividad 2.5.5

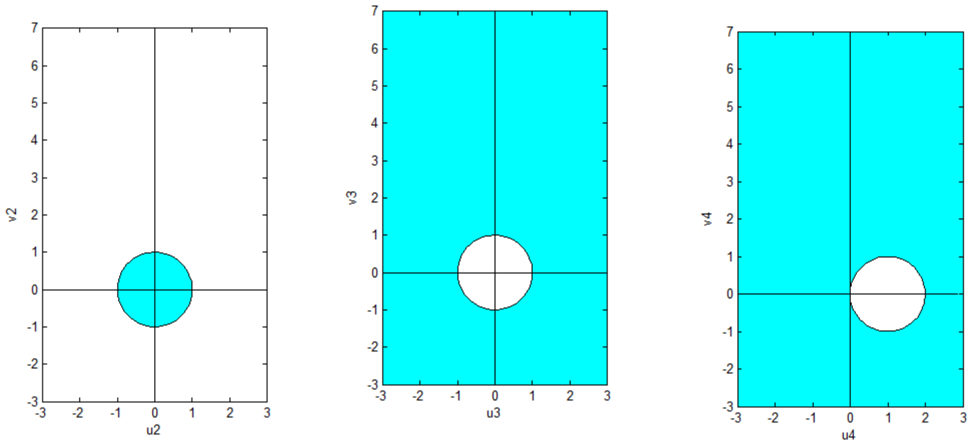


1) Trasladamos el centro al origen mediante $T_1 : w_1 = z - 3i$



2) Luego ajustamos el tamaño por el factor de escala 0,5 mediante $T_2 : w_2 = \frac{w_1}{2}$

3) A continuación invertimos la región interior y exterior de la circunferencia mediante la transformación $T_3 : w_3 = \frac{1}{w_2}$. Los puntos interiores de la circunferencia de radio $R = 1$ centrada en el origen, son enviados sobre los puntos exteriores de la circunferencia de radio $\frac{1}{R} = 1$ centrada en el origen.



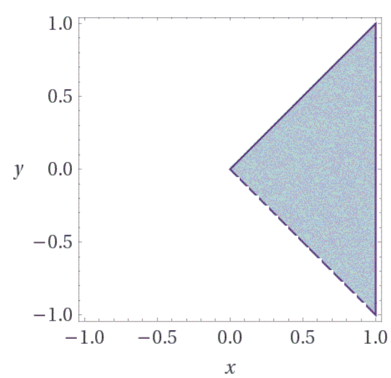
4) Finalmente trasladamos este centro al punto $1+0i$ mediante $T_4 : w_4 = w_3 + 1$.

Resulta

$$T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1 : w = \frac{1}{\frac{z-3i}{2}} + 1$$

Actividad 2.6.3

a) $A = \{(x,y) : -x < y \leq x\},\ T : w = z^3$
En primer lugar grafiquemos la región A:



De la anterior figura se ve que la región queda delimitada en el plano z por la condición

$$-\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

En este caso, es útil escribir a los complejos en forma exponencial:

$$z = re^{\imath\theta} \quad \text{y} \quad w = \rho e^{\imath\phi},$$

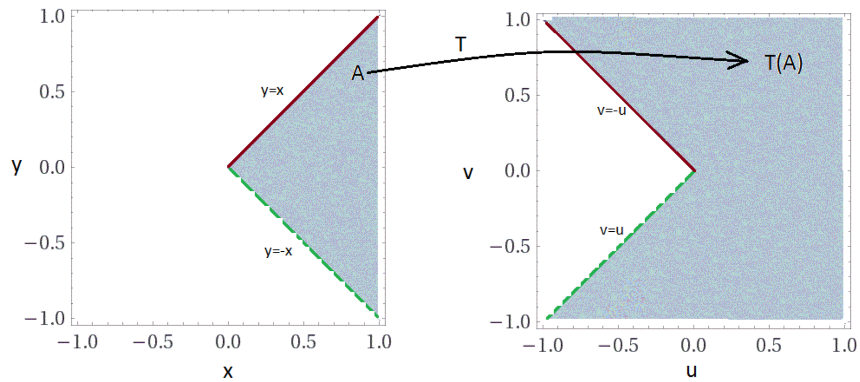
con $r = |z|, \rho = |w|$ y $\theta \in arg(z)$, $\phi \in arg(w)$.

Puesto que la transformación es $T : w = z^3$, se deduce que T mapea a los complejos cuyo módulo es r y ángulo θ a complejos cuyo módulo es $\rho = r^3$ y ángulo $\phi = 3\theta$.

Como A es una región caracterizada solamente por la condición $-\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ (pero ninguna condición en el módulo), entonces $3\left(-\frac{\pi}{4}\right) < 3\theta \leq 3\frac{\pi}{4}$ y se tiene que $T(A)$ satisface:

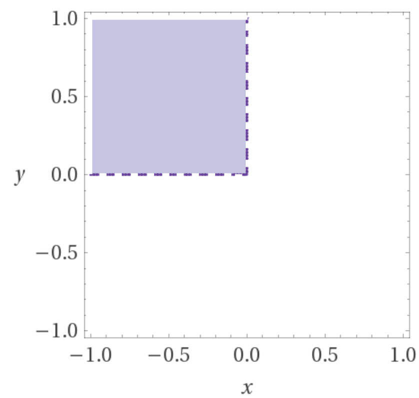
$$-\frac{3\pi}{4} < \phi \leq \frac{3\pi}{4}$$

Graficando se tiene:



b) $A = \{(x, y) : x < 0, y > 0\}, \ T : w = \imath z^2$

Grafiquemos la región A:



De la anterior figura se ve que la región queda delimitada en el plano z por la condición

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

Nuevamente escribiendo a los complejos en forma exponencial, se deduce que T mapea a los complejos z cuyo módulo es r y ángulo θ a complejos $w = iz^2$ cuyo módulo es $\rho = r^2$ y ángulo $\phi = 2\theta + \frac{\pi}{2}$ (resulta evidente escribiendo i en forma exponencial). Entonces como $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$:

$$2\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} < 2\theta + \frac{\pi}{2} < 2\pi + \frac{\pi}{2} \ \Leftrightarrow \ \frac{3\pi}{2} < \phi < \frac{5\pi}{2}$$

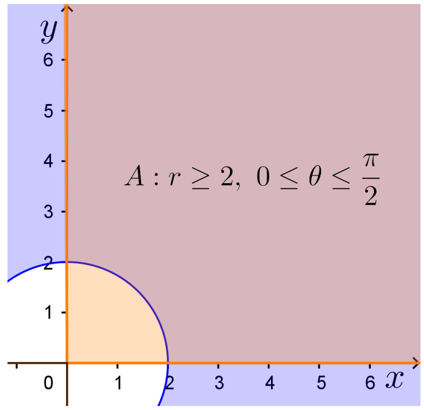
Obteniéndose finalmente

$$-\frac{\pi}{2} < Arg(w) < \frac{\pi}{2}$$

donde hemos utilizado el hecho que el argumento principal está definido en el intrevalo $(-\pi, \pi]$. Note que la anterior condición es análoga a $u > 0$. Grafique esta región.

c) $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 4, x \geq 0, \ y \geq 0\}, \ T : w = \dfrac{z^4}{16}$

Grafiquemos la región A:



De la figura anterior se ve que la región queda delimitada en el plano z por las condiciones

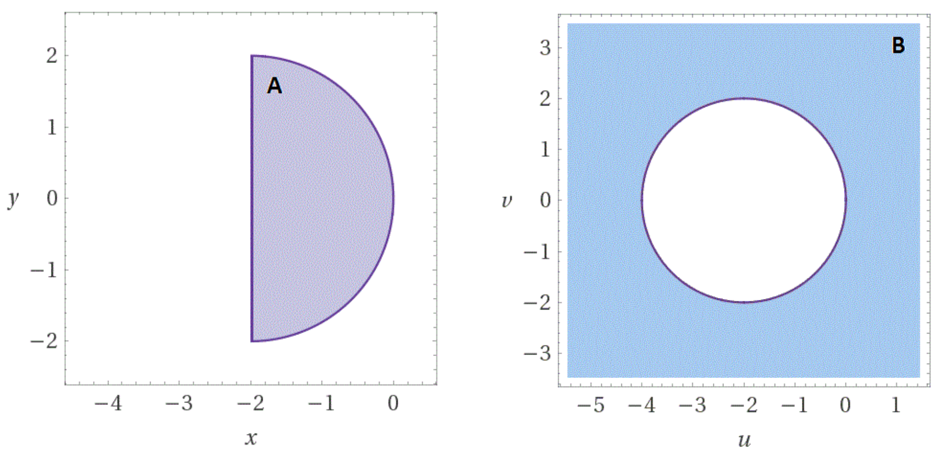
$$r \geq 2,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Nuevamente utilizando la forma exponencial, se deduce que T mapea los números complejos cuyo módulo es r y ángulo θ a complejos cuyo módulo es $\rho = \dfrac{r^4}{16}$ y ángulo $\phi = 4\theta$, obteniéndose finalmente:

$$\rho \geq 1\ \wedge\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Es decir $T(A) : \rho \geq 1$. Grafique esta región.

Actividad 2.6.4



Observamos que la región A es el interior de una semicircunferencia (con el centro corrido) y queremos mapear dicha región al exterior de una circunferencia completa (también de centro corrido), por tanto busquemos en primer lugar una transformación que centre en el origen la semicircunferencia. La transformación $w_0 = z + 2$ cumple con dicha función, de forma tal que $w_0(A) = \{w_0 : |w_0| \leq 2; Re(w_0) \geq 0\}$.

Una vez centrada en el origen podemos completar la semicircunferencia con la transformación $w_1 = w_0^2$ (revise la actividad anterior para recordar el efecto que tiene una transformación de la forma z^n con $n \in \mathbb{N}$), de forma tal que:

$$w_1 \circ w_0(A) = \{w_1 : |w_1| \leq 4\}$$

Puesto que queremos la parte exterior de esta circunferencia podemos aplicar la transformación $w_2 = 1/w_1$ y usted podrá corroborar que dicha transformación satisface:

$$w_2 \circ w_1 \circ w_0(A) = \{w_2 : |w_2| \geq \frac{1}{4}\}$$

Puesto que el radio de la circunferencia de B es 2 ajustemos el radio aplicando la transformación $w_3(w_2) = 8w_2$ para obtener:

$$w_3 \circ w_2 \circ w_1 \circ w_0(A) = \{w_3 : |w_3| \geq 2\}$$

Finalmente corramos la circunferencia para centrarla en el punto deseado aplicando $w_4(w_3) = w_3 - 2$ y obtenemos el resultado deseado:

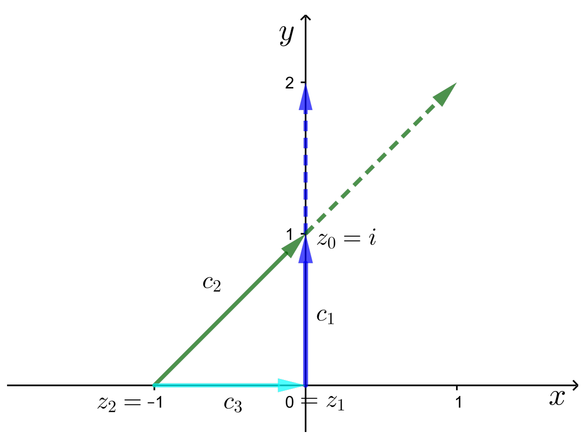
$$B = w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1 \circ w_0(A)$$

Escribamos explícitamente el resultado de la composición de estas transformaciones:

$$w = \frac{8}{(z+2)^2} - 2$$

Grafique para ver el proceso de cada transformación en cada uno de los pasos realizados.

Actividad 2.8.4



$T(z) = z^2$ es analítica en en todo el plano complejo, en particular lo es en $z_0 = i$. Además

$$T'(i) = 2z|_{z=i} = 2i \neq 0 \qquad \text{Arg}(T'(i)) = \text{Arg}(2i) = \pi/2$$

Luego las tangentes en $z_0 = i$ giran un ángulo $\gamma_0 = \pi/2$.

Recordemos que la tangente a una recta en cualquiera de sus puntos es la misma recta.

$C_1 : x = 0,\ 0 \leq y \leq 1$ es el segmento de la recta $x = 0$ entre $z_1 = 0$ y $z_0 = i$. Si parametrizamos de modo que la orientación sea yendo desde $z_1 = 0$ a $z_0 = i$ podemos escribir

$$C_1 : z = c_1(t) = 0 + it,\ \ 0 \leq t \leq 1$$

entonces

$$T(C_1) : w = d_1(t) = T\,(c_1(t)) = T(0 + it) = (it)^2 = -t^2,\ \ 0 \leq t \leq 1$$

Además

si $t = 0$, $c_1(0) = 0 = z_1$ y su imagen por T es $d_1(0) = 0 = w_1$

si $t = 1$, $c_1(1) = i = z_0$ y su imagen por T es $d_1(1) = -1 = w_0$

$d_1(t)$ es el segmento de la recta $v = 0$ con la orientación inducida por T, es decir que va de $w_1 = 0$ a $w_0 = -1$
Como $d_1'(t) = -2t$, $\quad d_1'(1) = -2$ entonces $\text{Arg}(d_1'(1)) = \pi$
Si consideramos que $c_1'(t) = i$, $\quad c_1'(1) = i$ entonces $\text{Arg}(c_1'(1)) = \pi/2$ y se verifica que

$$\text{Arg}(d_1'(1)) = \text{Arg}(c_1'(1)) + \gamma_0 = \pi/2 + \pi/2 = \pi$$

$C_2 : y = x + 1$, $-1 \leq x \leq 0$ es el segmento de la recta $y = x + 1$ entre $z_2 = -1$ y $z_0 = i$. Si parametrizamos de modo que la orientación sea yendo desde $z_2 = -1$ a $z_0 = i$ podemos escribir

$$C_2 : z = c_2(t) = t + i(t + 1), \ -1 \leq t \leq 0$$

entonces

$$T(C_2) : w = d_2(t) = T\left(c_2(t)\right) = T(t+i(t+1)) = (t+i(t+1))^2 = -2t-1+i(2t^2+2t), \ -1 \leq t \leq 0$$

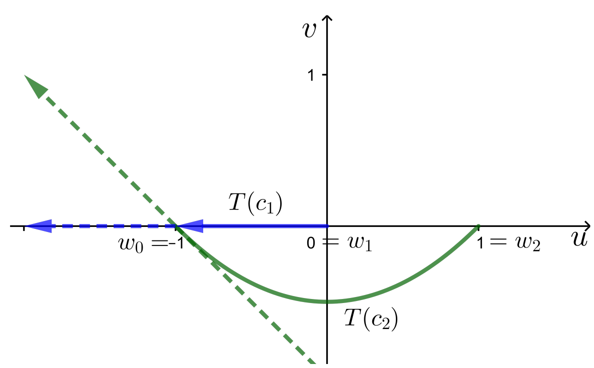
Además

si $t = -1$, $c_2(-1) = -1 = z_2$ y su imagen por T es $d_2(-1) = 1 = w_2$

si $t = 0$, $c_2(0) = i = z_0$ y su imagen por T es $d_1(0) = -1 = w_0$

Considerando $u = -2t - 1$ y $v = 2t^2 + 2t$ se puede ver que $d_1(t)$ es el trozo de la parábola $v = 1/2(u^2 - 1)$ con la orientación inducida por T, es decir que va de $w_2 = 1$ a $w_0 = -1$
Como $d_2'(t) = -2 + i(4t + 2)$, $\quad d_2'(0) = -2 + i2$ entonces $\text{Arg}(d_2'(0)) = 3\pi/4$
Si consideramos que $c_2'(t) = 1 + i$, $\quad c_2'(0) = 1 + i$ entonces $\text{Arg}(c_2'(0)) = \pi/4$ y se verifica que

$$\text{Arg}(d_2'(0)) = \text{Arg}(c_2'(0)) + \gamma_0 = \pi/4 + \pi/2 = 3\pi/4$$



El ángulo entre las tangentes a C_1 y a C_2 en $z_0 = i$ es el mismo que entre las tangentes a $T(C_1)$ y a $T(C_2)$ en $w_0 = -1$: $-\pi/4$

$C_3 : y = 0, -1 \leq x \leq 0$ es el segmento de la recta $x = 0$ entre $z_2 = -1$ y $z_1 = 0$. Si parametrizamos de modo que la orientación sea yendo desde $z_2 = -1$ a $z_1 = 0$ podemos escribir

$$C_3 : z = c_3(t) = t + i0,\ -1 \leq t \leq 0$$

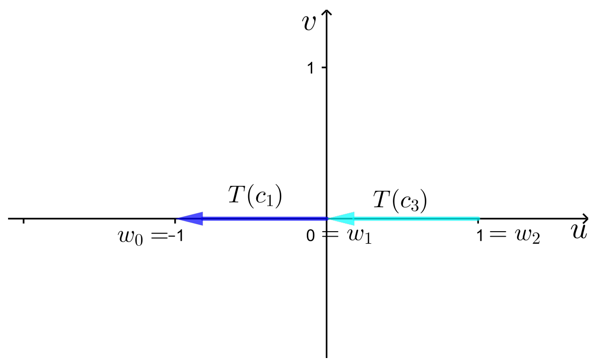
entonces

$$T(C_3) : w = d_3(t) = T\left(c_3(t)\right) = T(t) = t^2,\ -1 \leq t \leq 0$$

si $t = -1$, $c_3(-1) = -1 = z_2$ y su imagen por T es $d_1(-1) = 1 = w_2$

si $t = 0$, $c_3(0) = 0 = z_1$ y su imagen por T es $d_3(0) = 0 = w_1$

$d_3(t)$ es el segmento de la recta $v = 0$ con la orientación inducida por T, es decir que va de $w_2 = 1$ a $w_1 = 0$



No tiene sentido hablar de un ángulo de giro de tangentes en $z_1 = 0$ porque $T'(0) = 0$

Actividad 2.9.5

a) Debemos probar que la transformación $T : w = f(z)$, con $f(z) = \dfrac{4}{i + e^{z/2}}$ es conforme en el punto $z_0 = 0$.

Para esto, nos valemos del teorema 2.9.3, que indica que si $f(z)$ es analítica en el punto z_0 y $f'(z_0) \neq 0$, entonces $f(z)$ es conforme en z_0.

El dominio de analiticidad de nuestra función es $D_A = \mathbb{C} - \left\{z : i + e^{z/2} = 0\right\}$ pues f es un cociente de funciones analíticas con denominador no nulo allí. Dado que $i + e^{z/2}\Big|_{z=0} = i + 1 \neq 0$, entonces f es analítica en el punto $z_0 = 0$.

Finalmente, como $f'(z) = \dfrac{-2e^{z/2}}{(i + e^{z/2})^2}$, tenemos que $f'(0) = i \neq 0$.

Así, hemos verificado las condiciones y podemos afirmar que $f(z)$ es conforme en $z_0 = 0$.

b) Si consideramos a la curva $C_1 : y = x^2 + x$ como un arco suave parametrizado como $z(t) = (x(t), y(t)) = (t, t^2 + t)$, la función $f(z)$ permite parametrizar la curva imagen $T(C_1) : w = f(z(t))$. Luego, usando la proposición 2.8.1 tenemos que:

$$\arg\left(w'(t_0)\right) = \arg\left(f'(z(t_0))\right) + \arg\left(z'(t_0)\right)$$

En particular para $t_0 = 0$:

$$\arg\left(w'(0)\right) = \arg\left(f'(z(0))\right) + \arg\left(z'(0)\right)$$

teniendo en cuenta que $z(0) = z_0 = 0$:

$$\arg\left(w'(0)\right) = \arg\left(f'(0)\right) + \arg\left(z'(0)\right)$$

Ahora, como el ángulo de inclinación de la recta tangente pedida está dado por el valor de $\arg\left(w'(0)\right)$, necesitamos calcular los valores de $\arg\left(f'(0)\right)$ y $\arg\left(z'(0)\right)$.
Resolvemos entonces:
$z'(t) = (t, t^2 + t)' = (1, 2t + 1) \rightarrow z'(t_0) = z'(0) = (1, 1) = 1 + i \rightarrow \arg(1 + i) = \pi/4$.
y
$f'(0) = i \rightarrow \arg(i) = \pi/2$ "ángulo de giro de tangentes en el origen",
por lo que

$$\arg\left(w'(0)\right) = \pi/2 + \pi/4 = 3\pi/4$$

Como este es el ángulo de inclinación de la curva imagen en el punto imagen, su tangente es la pendiente de la curva imagen allí: $m^* = \tan(3\pi/4) = -1$
Por otro lado, sabemos que la recta tangente debe pasar por el punto imagen

$$w_0 = T(0) = \frac{4}{i+1} = \frac{4}{1+i}\,\frac{1-i}{1-i} = 2(1-i),$$

lo que finalmente nos conduce a la recta de ecuación:

$$v = v_0 + \tan(3\pi/4)(u - u_0),$$

Reemplazando la pendiente $m^* = -1$ y las coordenadas del punto imagen $w_0 = u_0 + iv_0 = 2-2i$ obtenemos:

$$v = -2 + (-1)(u - 2)$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a $T(C_1)$ por el punto imagen $w_0 = 2 - 2i$ es

$$v = -u$$

c) La parametrización de las curvas C_1 y C_2 vienen dadas por la expresiones $z_1(t) = (t, t^2 + t)$ y $z_2(t) = (t, t^2)$. Ambas parametrizaciones se intersectan en el punto $z_0 = 0$. Vemos, además, que esta intersección se da cuando $t = t_0 = 0$: $z_1(0) = z_2(0) = 0$.

Como antes, $z_1'(t) = (t, t^2+t)' = (1, 2t+1) \rightarrow z_1'(t_0) = z'(0) = (1, 1) = 1+i \rightarrow \arg(1+i) = \pi/4$
Además $z_2(t) = (t, t^2) \rightarrow z'_2(t) = (t, t^2)' = (1, 2t) \rightarrow z'_2(0) = (1, 0) = 1 \rightarrow \arg(1) = 0$.

Luego el ángulo entre las tangentes a C_1 y C_2 en $z_0 = 0$ es $-\pi/4$. Por ser $f(z)$ conforme en $z_0 = 0$, el ángulo entre las rectas tangentes a $T(C_1)$ y $T(C_2)$ en $f(z_0)$ debe ser el mismo: $-\pi/4$.

Actividad 2.9.6
c) www.geogebra.org/m/xggaypdq

Actividad 2.10.3

a) D es una banda inclinada 45°. La transformaremos en una banda horizontal mediante una rotación alrededor del origen en sentido horario por un ángulo de esa magnitud. Esto se logra multiplicando por el complejo $e^{-i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$, es decir mediante $w = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)z$. Sin embargo el factor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ resulta incómodo a la hora de operar, por lo que utilizaremos $T : w = (1-i)z$, que si bien además de una rotación involucra un escalamiento (por el factor de escala $\sqrt{2}$) , permite obtener de todas maneras una banda horizontal. Cabe mencionar que su ancho será diferente que el que obtendríamos mediante una rotación pura.

$T : w = (1-i)z$

$$u + iv = w = (1-i)z = (1-i)(x+iy) = (x+y) + i(y-x)$$

$T : \begin{cases} u = y + x \\ v = y - x \end{cases}$

$T^{-1} : z = \dfrac{w}{1-i}$

$$x + iy = z = \frac{w}{1-i} = \frac{u+iv}{1-i} = \frac{(u+iv)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(u-v)+i(u+v)}{2}$$

$T^{-1} : \begin{cases} x = (u-v)/2 \\ y = (u+v)/2 \end{cases}$

$$y \geq x - 2 \Leftrightarrow \frac{u+v}{2} \geq \frac{u-v}{2} - 2 \Leftrightarrow u + v \geq u - v - 4 \Leftrightarrow 2v \geq -4 \Leftrightarrow v \geq -2$$

$$y \leq x \Leftrightarrow \frac{u+v}{2} \leq \frac{u-v}{2} \Leftrightarrow u + v \leq u - v \Leftrightarrow 2v \leq 0 \Leftrightarrow v \leq 0$$

Por lo tanto $T(D) = \{u + iv : -2 \leq v \leq 0\}$.

Buscamos ahora una función armónica $h(u,v)$ en el interior de esta banda horizontal.
Las condiciones de borde ”se trasladan”. Esto significa:
Sobre $y = x - 2$ queremos $H = -1$. Luego, sobre $v = -2$ debe ser $h = -1$.
Sobre $y = x$ queremos $H = 5$. Luego, sobre $v = 0$ debe ser $h = 5$.
Es decir $h(u,-2) = -1$ y $h(u,0) = 5$.
Proponemos $h(u,v) = Av + B$ con A, B constantes reales a determinar.
Esta es una función armónica en el interior de $T(D)$ pues es la parte imaginaria de la función $g(w) = Aw + iB$, la cual es analítica en el interior de $T(D)$ (por ser polinómica). Pero además permite satisfacer las condiciones de borde requeridas:

$\begin{cases} A.(-2) + B = -1 \\ A.0 + \mathrm{B} = 5 \end{cases}$ cuya solución es $A = 3,\ B = 5$

Luego:

$$h(u,v) = 3v + 5$$

Para encontrar $H(x,y)$ aplicaremos el teorema 2.10.1. Es decir:

$$H(x,y) = h(T(x,y)) = h(u(x,y), v(x,y)) = h(y+x, y-x) = 3(y-x) + 5$$

Es decir:

$$H(x,y) = 3y - 3x + 5$$

El teorema 2.10.1 garantiza que esta función es armónica en el interior de D. Otra manera de justificarlo es observando que $H = \mathrm{Im}(g \circ T)$ y teniendo en cuenta que $g \circ T$ es analítica en el interior de D por ser composición de analíticas, T analítica en el interior de D y g analítica en el interior de $T(D)$.

b) La transformación T sugerida parece razonable. En efecto, enviará el origen al infinito, transformando las circunferencias frontera de D en rectas, que además serán paralelas. Ya hemos discutido esto en una actividad anterior.

$T : w = 4/z$

$$u + iv = w = \frac{4}{z} = \frac{4}{x+iy} = \frac{4(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{4x - i4y}{x^2+y^2} = \frac{4x}{x^2+y^2} - i\frac{4y}{x^2+y^2}$$

$$T : \begin{cases} u = \dfrac{4x}{x^2+y^2} \\ \\ v = \dfrac{-4y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$T^{-1} : z = \dfrac{4}{w}$

Es decir que la inversa de T es ella misma, lo que nos permite sin más deducir que:

$$T^{-1} : \begin{cases} x = \dfrac{4u}{u^2+u^2} \\ \\ y = \dfrac{-4v}{u^2+u^2} \end{cases}$$

$$|z-1| \geq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{4}{w} - 1\right| \geq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{4-w}{w}\right| \geq 1 \Leftrightarrow |4-w| \geq |w| \Leftrightarrow (4-u)^2 + (-v)^2 \geq u^2 + v^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 - 8u + u^2 \geq u^2 \Leftrightarrow 16 - 8u \geq 0 \Leftrightarrow -8u \geq -16 \Leftrightarrow u \leq 2$$

$$|z-2| \leq 2 \Leftrightarrow \left|\frac{4}{w} - 2\right| \leq 2 \Leftrightarrow \left|\frac{4-2w}{w}\right| \leq 2 \Leftrightarrow |4-2w| \leq 2\,|w| \Leftrightarrow (4-2u)^2 + (-2v)^2 \leq 4u^2 + 4v^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 - 16u + 4u^2 \leq 4u^2 \Leftrightarrow 16 - 16u \leq 0 \Leftrightarrow -16u \leq -16 \Leftrightarrow u \geq 1$$

Por lo tanto se obtiene una banda vertical:
$T(D) = \{u + iv : 1 \leq u \leq 2\}$

Buscamos ahora una función armónica $h(u,v)$ en el interior de esta banda vertical.
Las condiciones de borde ”se trasladan”. Esto significa:
Sobre $|z-1| = 1$ queremos $H = 4$. Luego, sobre $u = 2$ debe ser $h = 4$.
Sobre $|z-2| = 2$ queremos $H = 0$. Luego, sobre $u = 1$ debe ser $h = 0$.
Es decir $h(1,v) = 0$ y $h(2,v) = 4$.
Proponemos $h(u,v) = Au + B$ con A, B constantes reales a determinar.
Esta es una función armónica en el interior de $T(D)$ pues es la parte real de la función $g(w) = Aw + B$, la cual es analítica en el interior de $T())D$ (por ser polinómica). Pero además permite satisfacer las condiciones de borde requeridas:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B = 4 \end{cases} \quad \text{cuya solución es } A = 4,\ B = -4$$

Luego:

$$h(u,v) = 4u - 4$$

Para encontrar $H(x,y)$ aplicaremos el teorema 2.10.1. Es decir:

$$H(x,y) = h(T(x,y) = h(u(x,y), v(x,y)) = h\left(\frac{4x}{x^2+y^2}, \frac{-4y}{x^2+y^2}\right) = 4\left(\frac{4x}{x^2+y^2}\right) - 4$$

Es decir:

$$H(x,y) = \frac{16x}{x^2+y^2} - 4$$

El teorema 2.10.1 garantiza que esta función es armónica en el interior de D. Otra manera de jusiticarlo es observando que $H = \mathrm{Re}(g \circ T)$ y teniendo en cuenta que $g \circ T$ es analítica en el interior de D por ser composición de analíticas, T analítica en el interior de D y g analítica en el interior de $T(D)$.

c) La región T es un ángulo con vértice en el punto $z = i$, en el cual además cambia la condición de borde. Corresponde aplicar una traslación una unidad hacia abajo para llevarlo al origen.

$T : w = z - i$

$$u + iv = w = z - i = (x + iy) - i = x + i(y - 1)$$

$$T : \begin{cases} u = x \\ v = y - 1 \end{cases}$$

$T^{-1} : z = w + i$

$$x + iy = z = w + i = (u + iv) + i = u + i(v + 1)$$

$$T^{-1} : \begin{cases} x = u \\ y = v + 1 \end{cases}$$

$$y \geq x + 1 \Leftrightarrow v + 1 \geq u + 1 \Leftrightarrow v \geq u$$

$$x \geq 0 \Leftrightarrow u \geq 0$$

Por lo tanto se obtiene el ángulo con vértice en el origen:
$T(D) = \{w : \pi/4 \leq \mathrm{Arg}(w) \leq \pi/2\}$

Buscamos ahora una función armónica $h(u,v)$ en el interior de este ángulo.
Las condiciones de borde "se trasladan". Esto significa:
Sobre $y = x + 1$ queremos $H = 0$. Luego, sobre $v = u$ debe ser $h = 0$.
Sobre $x = 0$ queremos $H = 4$. Luego, sobre $u = 0$ debe ser $h = 4$.
Proponemos $h(u,v) = A\varphi + B$ donde $\varphi = \mathrm{Arg}(w)$ y A, B constantes reales a determinar.
Esta es una función armónica en el interior de $T(D)$ pues es la parte imaginaria de la función $g(w) = A\mathrm{Ln}(w) + iB$, la cual es analítica en el interior de $T(D)$ (pues aquí no hay puntos del semieje real negativo ni tampoco está el origen). Pero además permite satisfacer las condiciones de borde requeridas:
Sobre $v = u$ es $\varphi = \pi/4$ donde debe ser $h = 0$
Sobre $u = 0$ es $\varphi = \pi/2$ donde debe ser $h = 4$

$$\begin{cases} A\pi/4 + B = 0 \\ A\pi/2 + B = 4 \end{cases} \quad \text{cuya solución es } A = 16/\pi,\ B = -4$$

Luego:

$$h(u,v) = \frac{16}{\pi}\varphi - 4 = \frac{16}{\pi}\,\mathrm{Arg}(w) - 4 = \frac{16}{\pi}\arctan(v/u) - 4$$

En la última igualdad hemos reemplazado $\mathrm{Arg}(w)$ por $\arctan(v/u)$ debido a que el ángulo $T(D)$ está incluido en el primer cuadrante (no se necesitó una reducción a primero o cuarto

cuadrantes).
Para encontrar $H(x,y)$ aplicaremos el teorema 2.10.1. Es decir:

$$H(x,y) = h(T(x,y)) = h(u(x,y),v(x,y)) = h\left(x, y-1\right) = \frac{16}{\pi}\arctan\left(\frac{y-1}{x}\right) - 4$$

Es decir:

$$H(x,y) = \frac{16}{\pi}\arctan\left(\frac{y-1}{x}\right) - 4$$

El teorema 2.10.1 garantiza que esta función es armónica en el interior de D. Otra manera de jusiticarlo es observando que $H = \mathrm{Im}(g \circ T)$ y teniendo en cuenta que $g \circ T$ es analítica en el interior de D por ser composición de analíticas, T analítica en el interior de D y g analítica en el interior de $T(D)$.

d) La frontera de D es una circunferencia. Hay que prestar atención a los dos puntos donde cambia la condición de borde: $z = \pm i$. Dado que sabemos resolver problemas de Dirichlet en regiones elementales cuando las condiciones de borde cambian en un único punto, necesitamos que uno de dicho puntos "desaparezca del plano complejo". Esto sugiere llevar uno de los puntos $z = \pm i$ en el punto del infinito $w = \infty$. Por ello la sugerencia del enunciado de considerar por ejemplo $T : w = 2/(z+i)$. La constante 2 en el numerador puede reemplazarse por cualquier otra (no nula).

$T : w = 2/(z+i)$

$$u + iv = w = \frac{2}{(x+iy)+i} = \frac{2}{x+i(y+1)} = \frac{2\left[x - i(y+1)\right]}{\left[x+i(y+1)\right]\left[x-i(y+1)\right]} =$$

$$= \frac{\left[2x - i2(y+1)\right]}{x^2+(y+1)^2} = \frac{2x}{x^2+(y+1)^2} - i\frac{2(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$$

$$T : \begin{cases} u = \dfrac{2x}{x^2+(y+1)^2} \\[2ex] v = \dfrac{-2(y+1)}{x^2+(y+1)^2} \end{cases}$$

$T^{-1} : z = \dfrac{2}{w} - i$

$$x + iy = w = \frac{2}{u+iv} - i = \frac{2(u-iv)}{(u+iv)(u-iv)} - i =$$

$$= \frac{2u - i2v}{u^2+v^2} - i = \frac{2u}{u^2+v^2} - i\left(\frac{2v}{u^2+v^2} + 1\right)$$

$$T^{-1} : \begin{cases} x = \dfrac{2u}{u^2+v^2} \\[2ex] y = -\dfrac{2v}{u^2+v^2} - 1 \end{cases}$$

$$|z| \geq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2}{w} - i\right| \geq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2-iw}{w}\right| \geq 1 \Leftrightarrow |2 - iw| \geq |w| \Leftrightarrow |2 - i(u+iv)| \geq |u+iv| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(2+v) - iu| \geq |u+iv| \Leftrightarrow (v+2)^2 + (-u)^2 \geq u^2 + v^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2 + 4v + 4 \geq v^2 \Leftrightarrow 4v + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 4v \geq -4 \Leftrightarrow v \geq -1$$

Por lo tanto se obtiene un semiplano, que es un caso particular de ángulo de 180°:
$D_1 = T(D) = \{u + iv : v \geq -1\}$
Su vértice es la imgen del punto donde cambia la condición de borde, es decir $T(i) = -i$.
La frontera de D queda dividida de acuerdo a las condiciones de borde en dos semicircunferencias, una contenida en el semiplano izquierdo $x \leq 0$ y otra en el semiplano derecho $x \geq 0$.

$$x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2u}{u^2 + v^2} \geq 0 \Leftrightarrow 2u \geq 0 \Leftrightarrow u \geq 0$$

$$x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2u}{u^2 + v^2} \leq 0 \Leftrightarrow 2u \leq 0 \Leftrightarrow u \leq 0$$

Debemos buscar una función armónica $h(u, v)$ en el interior de $T(D)$.
Las condiciones de borde "se trasladan":
sobre $x^2 + y^2 = 1$ con $x \leq 0$ es $H = 2$. Luego, sobre $v = -1$ con $u \leq 0$ es $h = 2$
sobre $x^2 + y^2 = 1$ con $x \geq 0$ es $H = 1$. Luego, sobre $v = -1$ con $u \geq 0$ es $h = 1$

A continuación trasladamos el vértice $w = -i$ al origen mediante $T^* : w^* = w + i$.
$T^* : w^* = w + i$

$$w^* = u^* + iv^* = w + i = (u + iv) + i = u + i(v + 1)$$

Se tiene: $D^* = T^*(D_1) = \{u^* + iv^* : v^* \geq 0\}$

$$T^* : \begin{cases} u^* = u \\ \\ v^* = v + 1 \end{cases}$$

$(T^*)^{-1} : w = w^* - i$

$$u + iv = w = w^* - i = (u^* + iv^*) - i = u^* + i(v^* - 1)$$

$$(T^*)^{-1} : \begin{cases} u = u^* \\ \\ v = v^* - 1 \end{cases}$$

Debemos buscar una función armónica $h^*(u^*, v^*)$ en el interior de D^*.
Las condiciones de borde nuevamente "se trasladan":
sobre $v = -1$ con $u \leq 0$ es $h = 2$. Luego, sobre $v^* = 0$ con $u^* \leq 0$ es $h^* = 2$
sobre $v = -1$ con $u \geq 0$ es $h = 1$. Luego, sobre $v^* = 0$ con $u^* \geq 0$ es $h^* = 1$

Dado que D^* es un ángulo con vértice en el origen la función armónica h^* que propondremos involucrará el argumento principal en el plano w^*. Y dado que D^* incluye puntos tanto del primero como del segundo cuadrantes, para evitar dar una expresión de h^* "por tramos", aplicaremos una transformación más que consiste en rotar en sentido horario un ángulo de 90°, mediante $\tilde{T} : \tilde{w} = -iw^*$

$\tilde{T} : \tilde{w} = -iw^*$

$$\tilde{u} + i\tilde{v} = \tilde{w} = -iw^* = -i(u^* + iv^*) = v^* - iu^*$$

$$\tilde{T} : \begin{cases} \tilde{u} = v^* \\ \\ \tilde{v} = -u^* \end{cases}$$

$\tilde{T}^{-1} : w^* = i\tilde{w}$

$$w^* = u^* + iv^* = i(\tilde{u} + i\tilde{v}) = -\tilde{v} + i\tilde{u}$$

$$\tilde{T}^{-1} : \begin{cases} u^* = -\tilde{v} \\ \\ v^* = \tilde{u} \end{cases}$$

Aplicando $\tilde{T}$ se obtiene:
$\tilde{D} = \tilde{T}(D^*) = \{\tilde{u} + i\tilde{v} : \tilde{u} \geq 0\}$
Proponemos $\tilde{h}(u, v) = A\tilde{\varphi} + B$ donde $\tilde{\varphi} = \text{Arg}(\tilde{w})$ y A, B constantes reales a determinar. Esta es una función armónica en el interior de $\tilde{D}$ pues es la parte imaginaria de la función $g(\tilde{w}) = A\text{Ln}(\tilde{w}) + iB$, la cual es analítica en el interior de $\tilde{D}$ (pues aquí no hay puntos del semieje real negativo ni tampoco está el origen). Pero además permite satisfacer las condiciones de borde requeridas, las que una vez más "se trasladan":

Sobre $v^* = 0$ con $u^* \leq 0$ es $h^* = 2$. Luego, sobre $\tilde{u} = 0$ con $\tilde{v} \geq 0$ es $\tilde{h} = 2$
Sobre $v^* = 0$ con $u^* \leq 0$ es $h^* = 1$. Luego, sobre $\tilde{u} = 0$ con $\tilde{v} \leq 0$ es $\tilde{h} = 1$

$$\begin{cases} A\pi/2 + B = 2 \\ A(-\pi/2) + B = 1 \end{cases} \quad \text{cuya solución es } A = 1/\pi,\ B = 3/2$$

Luego,

$$\tilde{h}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{1}{\pi}\tilde{\varphi} + \frac{3}{2} = \frac{1}{\pi}\,\text{Arg}(\tilde{w}) + \frac{3}{2} = \frac{1}{\pi}\arctan(\tilde{v}/\tilde{u}) + \frac{3}{2}$$

Para obtener la función armónica del enunciado, debemos componer con las sucesivas transformaciones aplicadas para llegar de D hasta $\tilde{D}$. Es decir:

$$H(x, y) = \tilde{h}(\tilde{u}(x, y), \tilde{v}(x, y)) = \frac{1}{\pi}\arctan(\tilde{v}/\tilde{u}) + \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\arctan(-u^*/v^*) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{\pi}\arctan(u^*/v^*) + \frac{3}{2} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{u}{v+1}\right) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{\dfrac{2x}{x^2 + (y+1)^2}}{\dfrac{-2(y+1)}{x^2 + (y+1)^2} + 1}\right) + \frac{3}{2} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2x}{x^2 + (y+1)^2 - 2(y+1)}\right) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2x}{x^2 + y^2 - 1}\right)$$

Es decir:

$$H(x, y) = \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2x}{x^2 + y^2 - 1}\right)$$

Actividades complementarias

Ejercicio 1 Dados $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2, 0 < x < 2\}$ y $T(z) = \dfrac{4}{z-2}$

a) Sin hallar la imagen $T(A)$ determine si está acotada.

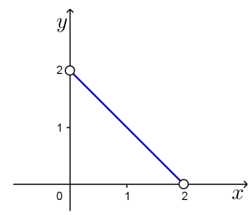


Figura 2.33: ejercicio 1 - conjunto A

En un entorno reducido de $z_0 = 2$, los valores de $|T(z)|$ se hacen arbitrariamente grandes siempre que z sea suficientemente cercano a 2 pero distinto de 2: $\lim\limits_{z\to 2} \dfrac{4}{z-2} = \infty$, luego $T(A)$ es un conjunto no acotado. Como la transformación es una TLF, la imagen de la recta en el plano z será una parte no acotada de una recta en el plano w.

b) Corrobore su respuesta al inciso a) hallando $T(A)$.
Despejando z se obtiene

$$z = \frac{4+2w}{w} = \frac{4u + 2u^2 + 2v^2}{u^2+v^2} + i\frac{-4v}{u^2+v^2}$$

de donde

$$x = \frac{4u + 2u^2 + 2v^2}{u^2+v^2} \quad y = \frac{-4v}{u^2+v^2}$$

Sustituyendo los valores de x e y en la ecuación $x + y = 2$ se obtiene

$$\frac{4u + 2u^2 + 2v^2}{u^2+v^2} + \frac{-4v}{u^2+v^2} = 2 \;\Leftrightarrow\; 4u + 2u^2 + 2v^2 - 4v = 2u^2 + 2v^2 \;\Leftrightarrow\; u = v$$

podríamos sustituir el valor de x en $0 < x < 2$ y operar, pero en este caso es más sencillo evaluar T en algunos puntos convenientes: $T(2i) = -1 - i$, $T(1+i) = -2 - 2i$, $T(2) = \infty$

Luego $T(A) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v = u, -\infty < u < -1\}$

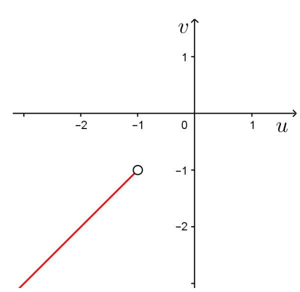


Figura 2.34: ejercicio 1 - conjunto $T(A)$

Ejercicio 2 Grafique la región $R = \{z : |z| \leq 2 \ \wedge \ |z - 2 + 2i| \leq 2\}$

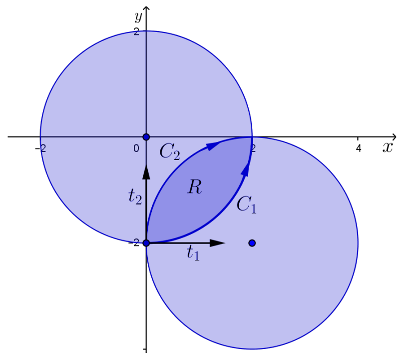


Figura 2.35: ejercicio 2 - conjunto R

a) Inspeccionando la gráfica proponga un punto z_0 de modo que $T : w = \frac{1}{z-z_0}$ envíe R en una región angular. ¿Cuál es el vértice de dicho ángulo?
El borde de la región R está formado por los trozos de circunferencias $C_1 : |z| = 2$ desde $-2i$ a 2 y $C_2 : |z - 2 + 2i| = 2$ desde $-2i$ a 2. Los únicos puntos en común son $-2i$ y 2. La transformación debe mandar un punto de cada curva a ∞ para que sus imágenes sean rectas, por ejemplo para que $T(2) = \infty$ consideramos $T : w = \frac{1}{z-2}$. En este caso, como $-2i$ es el otro punto en común, el vértice será $T(-2i) = -\frac{1}{4} + i\frac{1}{4}$

b) La imagen $T(R)$ por la transformación propuesta en a) es un ángulo cuya magnitud puede determinarse sin hacer las cuentas, argumentando en base a conformidad. ¿Cuál es dicha magnitud?
La función $T(z) = \frac{1}{z-2}$ es analítica en $-2i$ y $T'(-2i) \neq 0$ entonces es conforme en $-2i$. El ángulo entre t_1 y t_2, tangentes a C_1 y C_2 respectivamente en el punto $-2i$, es $\pi/2$, entonces la imagen $T(R)$ por la transformación propuesta en a) es una región angular de ángulo $\pi/2$

c) Confirme hallando analíticamente $T(R)$ siendo T la del inciso a).
Despejando z se obtiene $z = \frac{1+2w}{w}$ entonces

$$|z| \leq 2 \ \Leftrightarrow \ \left|\frac{1+2w}{w}\right| \leq 2 \ \Leftrightarrow \ u \leq -\frac{1}{4}$$

$$|z - 2 + 2i| \leq 2 \ \Leftrightarrow \ \left|\frac{1+2w}{w} - 2 + 2i\right| \leq 2 \ \Leftrightarrow \ v \geq \frac{1}{4}$$

Resulta $T(R) = \left\{u + iv : u \leq -\frac{1}{4} \ \wedge \ v \geq \frac{1}{4}\right\}$

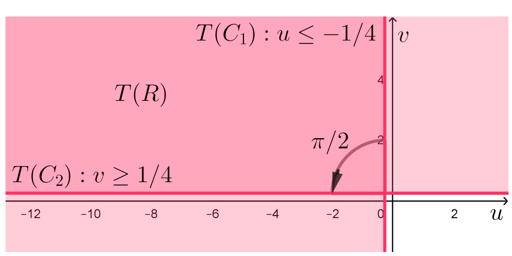
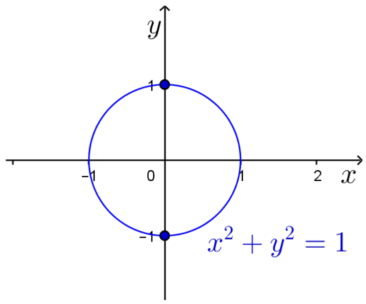
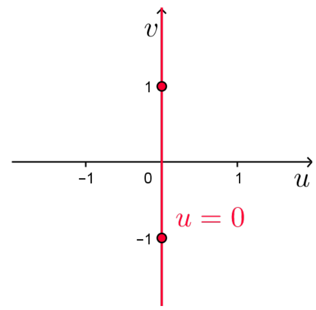


Figura 2.36: ejercicio 2 - conjunto $T(R)$

Ejercicio 3 Grafique $A = \{z : |z| = 1\}$ y $B = \{w : \mathrm{Re}(w) = 0\}$





a) ¿Cuántos puntos fijos puede tener una TLF que envíe A en B?
En el conjunto A hay solamente dos puntos sobre el eje imaginario, $-i$ e i, entonces a lo sumo pueden ser esos dos los puntos fijos. Es decir que una TLF que envíe A en B puede tener dos, uno o ningún punto fijo.

b) Halle una TLF que envíe A en B y deje dos puntos fijos.
Se puede usar la razón doble enviando $-i$ e i en sí mismos y un tercer punto al punto del ∞ para que la imagen de la circunferencia sea una recta.

Ejercicio 4 Hallar la imagen de A por la transformación dada.
a) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 1\right\}$, $T(z) = z^2$
Recordemos que $|z| = r \;\Leftrightarrow\; \left|z^2\right| = \rho = r^2$ entonces

$$x^2 + y^2 \leq 4 \;\Leftrightarrow\; r \leq 2 \;\Leftrightarrow\; \rho = r^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; u^2 + v^2 \leq 16$$

Para transformar la recta de ecuación $x = 1$ consideramos

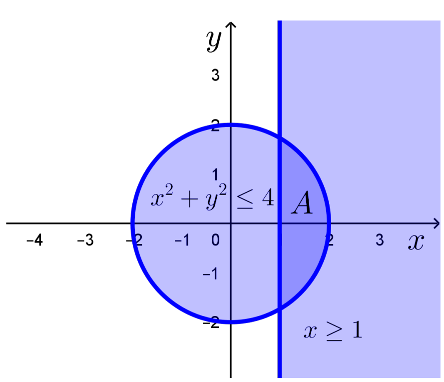
$$w = u + iv = T(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

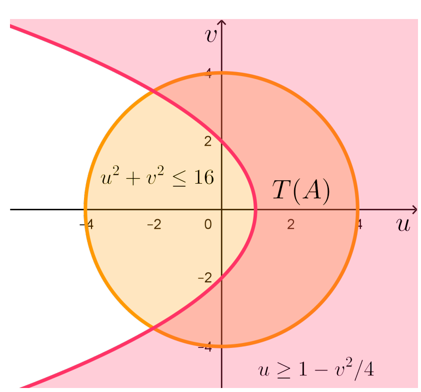
Como $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$ sustituyendo $x = 1$ en u y en v queda $\begin{cases} u = 1 - y^2 & (1) \\ v = 2y & (2) \end{cases}$
De (2) se despeja $y = v/2$, reemplazando en (1) obtenemos la ecuación de la parábola

$$u = 1 - \frac{v^2}{4}$$

Para saber cuál es la imagen de $x > 1$, por ejemplo podemos observar que $z = 0$ no está en A entonces $T(0) = 0$ no puede estar en $T(A)$, lo que indica que la región correpondiente es

$$u > 1 - \frac{v^2}{4}$$

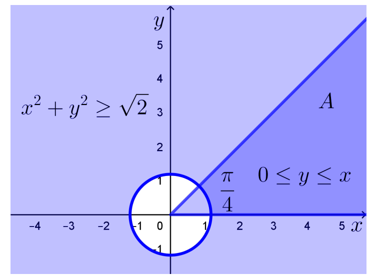




b) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\geq\sqrt{2}, 0\leq y\leq x\}$, $T(z)=\dfrac{16}{z^8}+2-i$

$$x^2+y^2\geq\sqrt{2}=2^{1/2}\ \wedge\ 0\leq y\leq x$$

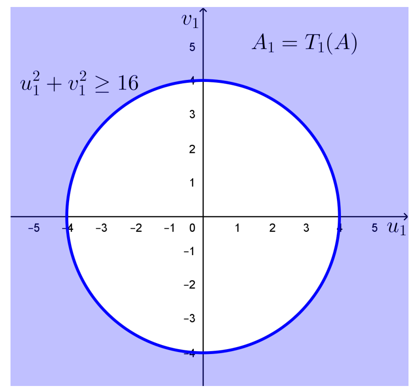
$$r=\left(x^2+y^2\right)^{1/2}\geq\left(2^{1/2}\right)^{1/2}=2^{1/4}\ \wedge\ 0\leq\theta\leq\pi/4$$



$$w_1=T_1(z)=z^8=\left(re^{i\theta}\right)^8$$

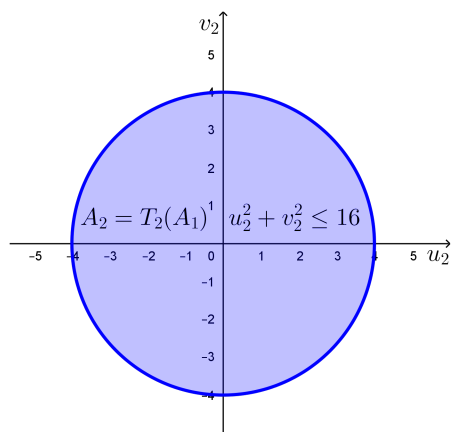
$$\rho=r^8\geq\left(2^{1/4}\right)^8=2^2=4$$

$$0\leq\varphi=8\theta\leq 8\pi/4=2\pi$$



$$w_2=T_2(w_1)=\frac{16}{w_1}$$

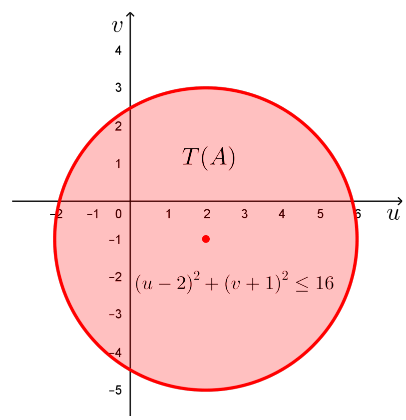
$$|w_1|\geq 4\ \Leftrightarrow\ \left|\frac{16}{w_2}\right|\geq 4\ \Leftrightarrow\ |w_2|\leq 4$$



$$w=T_3(w_2)=w_2+2-i$$

$$|w_2|\leq 4\ \Leftrightarrow\ |w-2+i|\leq 4\ \Leftrightarrow\ (u-2)^2+(v+1)^2\leq 16$$

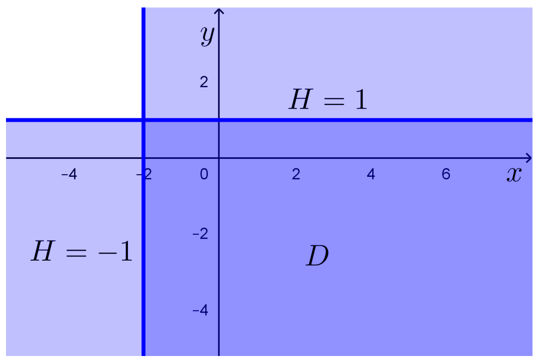
$$w=T(z)=(T_3\circ T_2\circ T_1)(z)=\frac{16}{z^8}+2-i$$



Antes de resolver el ejercicio 5, conviene recordar que se considera al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, dominio de la función tangente donde admite inversa, entonces cuando queremos poner θ en función de sus coordenadas cartesianas:

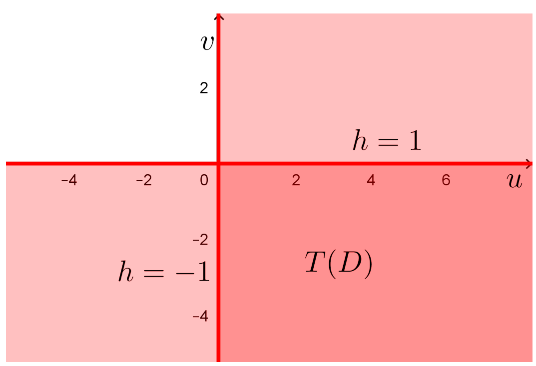
1. si θ es un ángulo del primer o cuarto cuadrante $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$: $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)$
2. si θ es un ángulo del segundo cuadrante $(\pi/2 < \theta < \pi)$: $\theta = \operatorname{arctg}(y/x) + \pi$
3. si θ es un ángulo del tercer cuadrante $(-\pi < \theta < -\pi/2)$: $\theta = \operatorname{arctg}(y/x) - \pi$

Ejercicio 5 a) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -2, y \leq 1\right\}$, $H(-2, y) = -1$, $H(x, 1) = 1$



Consideramos la transformación $T : f(z) = z + 2 - i$ para obtener una región angular con vértice en el origen, además con la ventaja que estará en el cuarto cuadrante.

$$u + iv = z + 2 - i = x + 2 + i(y - 1) \;\Leftrightarrow\; u = x + 2, v = y - 1$$



Debemos hallar una función $h(r, \theta)$ armónica en el interior de $T(D)$ sujeta a las condiciones de contorno $h(r, 0) = 1$ y $h(r, -\pi/2) = -1$. En este caso en el plano w es $h(r, \theta) = A\theta + B$, donde A, B son constantes reales a determinar; armónica en el interior de $T(D)$ por ser parte imaginaria de $A\mathrm{Ln}(z) + iB$ analítica en el interior de $T(D)$. Para determinar las constantes:

$$\left\{\begin{array}{rcl} h(r,0) & = & 1 \\ & & \\ h(r,-\pi/2) & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A0 + B & = & 1 \\ & & \\ A(-\pi/2) + B & = & -1 \end{array}\right.$$

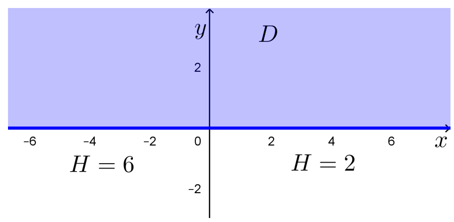
cuya solución es $(A, B) = (4/\pi, 1)$, luego $h(r, \theta) = \frac{4}{\pi}\theta + 1$. Por ser θ ángulo del cuarto cuadrante resulta $h(u, v) = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(\frac{v}{u}) + 1$

Para hallar $H(x,y)$ solamente resta componer

$$H(x,y) = h(u(x,y), v(x,y)) = \frac{4}{\pi}\mathrm{arctg}(v/u) + 1 = \frac{4}{\pi}\mathrm{arctg}(\frac{y-1}{x+2}) + 1, \ x > -2, y < 1$$

Como f es analítica sobre el interior de D y h es armónica en el interior de $T(D)$ entonces H es armónica en el interior de D (teorema 2.10.1).

b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, $H(x,0) = 2$ sobre la porción de ∂D con $x > 0$, $H(x,0) = 6$ sobre la porción de ∂D con $x < 0$



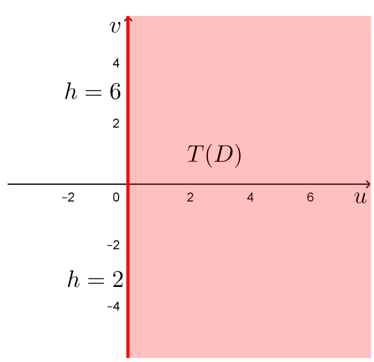
En este caso podemos directamente considerar $H(r,\theta) = A\theta + B$ donde A, B son constantes reales a determinar, armónica en el interior de D (por ser parte imaginaria de $A\mathrm{Ln}(z) + iB$ analítica en el interior de D) sujeta a las condiciones de contorno $H(r,0) = 2$ y $H(r,\pi) = 6$. Para determinar las constantes:

$$\left\{\begin{array}{rcl} H(r,0) & = & 2 \\ \\ h(r,\pi) & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A0 + B & = & 2 \\ \\ A\pi + B & = & 6 \end{array}\right.$$

cuya solución es $(A,B) = (4/\pi, 2)$, luego $H(r,\theta) = 4/\pi\theta + 2$. En este caso debemos tener cuidado cuando escribimos θ en función de x e y, según al cuadrante que pertenece:

$$H(x,y) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{4}{\pi}\mathrm{arctg}(\frac{y}{x}) + 2 & x > 0, \ y > 0 \\ \\ \frac{4}{\pi}\frac{\pi}{2} + 2 = 4 & x = 0, \ y > 0 \\ \\ \frac{4}{\pi}\left(\mathrm{arctg}(\frac{y}{x}) + \pi\right) + 2 = \frac{4}{\pi}\mathrm{arctg}(\frac{y}{x}) + 6 & x < 0, \ y > 0 \end{array}\right.$$

Otra forma de resolver el problema es llevar la región mediante una transformación sencilla al primer y cuarto cuadrante. Por ejemplo, podemos rotar un ángulo $-\pi/2$.



Como $\text{Arg}(-i) = -\pi/2$ consideramos $T : f(z) = -iz$ que es analítica en $\mathbb{C}$.

$$u + iv = -i(x + iy) = y - ix \iff u = y, v = -x$$

Debemos hallar una función $h(r,\theta)$ armónica en el interior de $T(D)$ sujeta a las condiciones de contorno $h(r,\pi/2) = 6$ y $h(r,-\pi/2) = 2$. En este caso en el plano w es $h(r,\theta) = A\theta + B$, donde A, B son constantes reales a determinar; armónica en el interior de $T(D)$ por ser parte imaginaria de $A\text{Ln}(z) + iB$ analítica en el interior de $T(D)$. Para determinar las constantes:

$$\left\{\begin{array}{rcl} h(r,\pi/2) & = & 6 \\ \\ h(r,-\pi/2) & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} A\pi/2 + B & = & 6 \\ \\ A(-\pi/2) + B & = & 2 \end{array}\right.$$

cuya solución es $(A, B) = (4/\pi, 4)$, luego $h(r,\theta) = \dfrac{4}{\pi}\theta + 4$. Por ser θ ángulo del primer o cuarto cuadrante resulta $h(u,v) = \dfrac{4}{\pi}\text{arctg}\left(\dfrac{v}{u}\right) + 4$.

Para hallar $H(x,y)$ solamente resta componer

$$H(x,y) = h(u(x,y), v(x,y)) = \frac{4}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{v}{u}\right) + 4 = \frac{4}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{-x}{y}\right) + 4,\ x \in \mathbb{R},\ y > 0$$

y verifica $H(x,0) = 2$ sobre la porción de ∂D con $x > 0$, $H(x,0) = 6$ sobre la porción de ∂D con $x < 0$

CAPÍTULO 3

Integración de funciones complejas

Introducción

En este capítulo presentaremos la integración de funciones a valores complejos a lo largo de curvas del plano. Estas integrales permiten enmarcar en un mismo proceso dos nociones básicas ya estudiadas en cursos de variable real: la integral definida de una función de una variable en un intervalo y la integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva en el plano. Con su particular elegancia y concisión así como por sus múltiples aplicaciones, la teoría que desarrollaremos permite extender al campo complejo resultados muy generales como el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow, formular la independencia del camino y presentar el teorema de Cauchy, versión compleja del teorema de Green para funciones analíticas. Enunciaremos el teorema de la fórmula integral de Cauchy y sus derivadas, y también algunas de sus consecuencias más relevantes: el teorema de Liouville, el principio del módulo máximo y resultados sobre valores extremos de funciones armónicas. Los conceptos de este capítulo servirán de sustento para el teorema de los residuos que se expondrá en el capítulo 5.

3.1. Integración de funciones complejas de variable real

Dada una función $g : I \to \mathbb{C}$, $g(t) = u(t) + i\,v(t)$, donde I es un intervalo real, las nociones de límite, continuidad y derivada respecto de la variable real t se definen en la forma habitual y resulta sencillo probar que pueden analizarse componente a componente, es decir a partir de las respectivas nociones para cada una de las funciones reales $u(t)$, $v(t)$. Así por ejemplo, la derivada es el límite del cociente incremental:

$$g'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}$$

cuando este límite existe. Tomando las partes real e imaginaria de este cociente se muestra que g es derivable si y solo si $u(t)$ y $v(t)$ lo son, y cuando esto ocurre se tiene $g'(t) = u'(t) + i\,v'(t)$.

Ejemplo 3.1.1.

Si $g(t) = (\cos t + i\ \mathrm{sen}\, t)^4$ entonces

$$g'(t) = \left(e^{4it}\right)' = (\cos(4t) + i\ \mathrm{sen}(4t))' = (\cos(4t))' + i\ (\mathrm{sen}(4t))' = -4\ \mathrm{sen}(4t) + 4i\ \cos(4t) \quad \square$$

Los teoremas sobre límites, continuidad y derivabilidad permanecen en su mayoría válidos (una excepción son los teoremas del valor medio para derivadas o integrales) y el lector no encontrará dificultad para proveer sus demostraciones por analogía con las del caso real. Cabe mencionar en particular la siguiente versión de la regla de la cadena que involucra la derivación en el sentido de variables real y compleja y que ya hemos empleado cuando estudiamos conformidad:

Si $h(t)$ es derivable en $t = t_0$ y $f(z)$ es derivable en $z_0 = h(t_0)$ entonces la composición $f \circ h$ es derivable en t_0 y se verifica:

$$(f \circ h)'(t_0) = f'(z_0)h'(t_0)$$

Ejemplo 3.1.2.

a) La derivada de la función del ejemplo 3.1.1 anterior puede calcularse aplicando la regla de la cadena pues $g(t) = f(h(t))$ siendo $h(t) = 4it$ y $f(z) = e^z$. Se tiene:

$$g'(t) = \left(e^{4it}\right)' = f'(4it)h'(t) = e^z\Big|_{z=4it} 4i = 4ie^{4it} =$$

$$= 4i\,(\cos(4t) + i\,\mathrm{sen}(4t)) = -4\,\mathrm{sen}(4t) + 4i\cos(4t)$$

b) Para derivar $g(t) = (1-it)e^{it}$ aplicamos la regla de Leibniz de derivación de un producto:

$$g'(t) = \left((1-it)e^{it}\right)' = (1-it)'e^{it} + (1-it)\left(e^{it}\right)' = -ie^{it} + (1-it)ie^{it} = te^{it}$$

c) Si $g(t) = \mathrm{Ln}(it)$ entonces $g'(t) = \dfrac{1}{t}$ en cualquier intervalo que excluya $t = 0$. En efecto, $g(t) = f(h(t))$ donde $f(z) = \mathrm{Ln}\, z$, $h(t) = it$. Basta entonces observar que la imagen por $h(t)$ de cualquier intervalo que excluya $t = 0$ está incluida en el dominio de derivabilidad de $f(z)$, es decir no contiene puntos del semieje real negativo, por lo cual la regla de la cadena es aplicable:

$$g'(t) = f'(it)h'(t) = \frac{1}{z}\Big|_{it} i = \frac{1}{it}i = \frac{1}{t}$$

$\square$

Dadas funciones $G(t)$ y $g(t)$ a valores complejos continuas en un intervalo I se dice que $G(t)$ es una **primitiva de** $g(t)$ **en** I si $G'(t) = g(t)$ para todo $t \in I$. Si $G(t) = U(t) + i\,V(t)$ y $g(t) = u(t) + i\,v(t)$, es inmediato que $G(t)$ es una primitiva de $g(t)$ en I si y solo si $U(t)$ es primitiva de $u(t)$ en I y $V(t)$ es primitiva de $v(t)$ en I.

Para una función $g : I \to \mathbb{C}$ continua en el intervalo I, se llama **integral indefinida de** $g(t)$ **en** I al conjunto de todas sus primitivas en ese intervalo. Si $g(t) = u(t) + iv(t)$ y $U(t)$ y $V(t)$ son primitivas en I de sus partes real e imaginaria respectivamente, entonces:

$$\int u(t)\,dt = U(t) + C_1 \qquad\qquad \int v(t)\,dt = V(t) + C_2$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración reales. Así, llamando $G(t) = U(t) + i\,V(t)$ y continuando con la notación clásica podemos escribir:

$$\int g(t)\,dt = \int u(t)\,dt + i \int v(t)\,dt = (U(t) + C_1) + i\,(V(t) + C_2) =$$

$$= (U(t) + i\,V(t)) + (C_1 + i\,C_2) = G(t) + C$$

donde $C = C_1 + i\,C_2 \in \mathbb{C}$ es una constante general de integración.

Ejemplo 3.1.3.

Calculemos: a) $\displaystyle\int e^{it}\,dt$ b) $\displaystyle\int te^{it}\,dt$

a) En este caso:

$$\int e^{it}\,dt = \frac{e^{it}}{i} + C \text{ pues por regla de la cadena } \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{it}}{i}\right) = \frac{i\,e^{it}}{i} = e^{it}$$

b) En este caso podemos aplicar la fórmula de integración por partes (pues es consecuencia de la regla de derivación de un producto):

$$\int \underbrace{t}_{u}\underbrace{e^{it}\,dt}_{dv} = uv - \int v\,du = t\left(\frac{e^{it}}{i}\right) - \int \frac{e^{it}}{i}\,dt = -ite^{it} + e^{it} + C = (1 - it)e^{it} + C$$

□

Introduciremos la noción de integral de un función compleja de variable real en un intervalo, como generalización de la integral definida en variable real. Dado que queremos que permanezca válida la propiedad de linealidad de todo proceso de integración, resulta natural la definición siguiente.

Definición 3.1.4. *Dada una función acotada $g : [a, b] \to \mathbb{C}$, $g(t) = u(t) + i\,v(t)$, se dice que g es integrable en $[a, b]$ si las funciones reales $u(t)$ y $v(t)$ lo son. En tal caso la* ***integral de g en el intervalo*** *$[a, b]$ se define por:*

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i \int_a^b v(t)\,dt$$

Dicho de otro modo, la integración se realiza componente a componente:

$$\operatorname{Re}\left(\int_a^b g(t)\,dt\right) = \int_a^b \operatorname{Re}(g(t))\,dt \qquad\qquad \operatorname{Im}\left(\int_a^b g(t)\,dt\right) = \int_a^b \operatorname{Im}(g(t))\,dt$$

Si queremos invertir el orden de los límites de integración manteniendo la definición anterior de integración componente a componente, necesariamente admitiremos para $a \leq b$:

$$\int_b^a g(t)\,dt = -\int_a^b g(t)\,dt$$

Es claro que para que g sea integrable en $[a, b]$ es suficiente que sus partes real e imaginaria sean continuas (es decir g continua) o seccionalmente continuas en dicho intervalo, no siendo estas condiciones necesarias.

Ejemplo 3.1.5.

Calculemos las siguientes integrales:

a)

$$\int_1^3 \left(\frac{1}{t} + it\right)^2 dt = \int_1^3 \left(\frac{1}{t^2} + 2i - t^2\right) dt = \int_1^3 \left[\left(\frac{1}{t^2} - t^2\right) + 2i\right] dt =$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{1}{t^2} - t^2\right) dt + i \int_1^3 2\, dt = \left(-\frac{1}{t} - \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_1^3 + i\, 2t\Big|_1^3 =$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - 9\right) - \left(-1 - \frac{1}{3}\right) + i(6 - 2) = -8 + 4i$$

b)

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{t-i}\, dt = \int_{-1}^1 \frac{t+i}{(t-i)(t+i)}\, dt = \int_{-1}^1 \frac{t+i}{t^2+1}\, dt = \int_{-1}^1 \frac{t}{t^2+1}\, dt + i \int_{-1}^1 \frac{1}{t^2+1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(t^2+1)\Big|_{-1}^1 + i \operatorname{arctg} t\Big|_{-1}^1 = \frac{i\pi}{2}$$

c)

$$\int_1^2 \operatorname{Ln}(it)\, dt = \int_1^2 (\ln|it| + i\ \operatorname{Arg}(it))\, dt = \int_1^2 \left(\ln t + i\,\frac{\pi}{2}\right) dt =$$

$$= (t \ln t - t)\Big|_1^2 + \frac{i\pi}{2} t\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1 + i\frac{\pi}{2}$$

Actividad 3.1.6.

Calcular aplicando la definición 3.1.4:

a) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t - i\ \operatorname{sen} t)^3\, dt$

b) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2i}{t} - t^2\right)^2 dt$

c) $\displaystyle\int_0^1 (t + it)^5\, dt$

d) $\displaystyle\int_0^\pi t e^{int}\, dt$ con $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$

De las propiedades de la integral definida para funciones reales se deducen las siguientes.

Propiedades

1) **Linealidad:** Si $g(t)$ y $h(t)$ son integrables en $[a, b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ son constantes, entonces:

$$\int_a^b [\alpha g(t) + \beta h(t)]\, dt = \alpha \int_a^b g(t)\, dt + \beta \int_a^b h(t)\, dt$$

2) **Aditividad del intervalo de integración:** Si $g(t)$ es integrable en un intervalo que incluye a, b, c entonces:

$$\int_a^b g(t)\, dt = \int_a^c g(t)\, dt + \int_c^b g(t)\, dt$$

3) **Acotamiento:** Si $g(t)$ es integrable en $[a,b]$ entonces

$$\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |g(t)|\,dt$$

4) **Conjugación:** Si $g(t)$ es integrable en $[a,b]$ entonces:

$$\int_a^b \overline{g(t)}\,dt = \overline{\int_a^b g(t)\,dt}$$

Ejemplo 3.1.7.

Utilizando el resultado del ejemplo 3.1.5b y la propiedad de conjugación, hallemos $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{t+i}\,dt$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{t+i}\,dt = \int_{-1}^{1} \overline{\left(\frac{1}{t-i}\right)}\,dt = \overline{\int_{-1}^{1} \frac{1}{t-i}\,dt} = \overline{\left(\frac{i\pi}{2}\right)} = -\frac{\pi i}{2}$$

Actividad 3.1.8.

Comprobar directamente las propiedades de acotamiento y conjugación para $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{it}\,dt$.

Como es de esperar, el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow se extienden naturalmente a funciones complejas continuas en un intervalo.

Teorema 3.1.9. *Sea $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ continua en $[a,b]$.*

(i)) La función $I(t) = \displaystyle\int_a^t g(\tau)\,d\tau$ es una primitiva de $g(t)$ en $[a,b]$. En particular, toda función $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ continua en $[a,b]$ admite primitiva en dicho intervalo.

(ii) Si $G(t)$ es una primitiva de $g(t)$ en $[a,b]$, es decir que G es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y se tiene $G'(t) = g(t)$ para todo $t \in (a,b)$ entonces:

$$\int_a^b g(t)\,dt = G(t)\Big|_a^b = G(b) - G(a) \qquad \textbf{\textit{Regla de Barrow en intervalos}}$$

Demostración
Sea $g(t) = u(t) + iv(t)$ continua en $[a,b]$, de modo que $u(t)$ y $v(t)$ lo son.

(i) El teorema fundamental del cálculo para funciones reales asegura que $I_1(t) = \int_a^t u(\tau)\,d\tau$ e $I_2(t) = \int_a^t v(\tau)\,d\tau$ son primitivas de $u(t)$ y $v(t)$ en $[a,b]$, respectivamente.
Luego, la función $I(t) = I_1(t) + i\,I_2(t)$ es continua en $[a,b]$ y para todo $t \in (a,b)$ se verifica:

$$I'(t) = [I_1(t) + i\,I_2(t)]' = I_1'(t) + i\,I_2'(t) = u(t) + iv(t) = g(t)$$

(ii) En efecto, si $G(t) = U(t) + i\,V(t)$ entonces como observamos al comienzo de esta sección $U(t)$ es una primitiva de $u(t)$ en $[a,b]$ y $V(t)$ es una primitiva de $v(t)$ en $[a,b]$. Aplicando a las componentes de g la regla de Barrow para funciones reales resulta:

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt = U(t)\Big|_a^b + i\,V(t)\Big|_a^b =$$

$$= (U(b) - U(a)) + i\,(V(b) - V(a)) = (U(b) + i\,V(b)) - (U(a) + i\,V(a)) =$$

$$= G(b) - G(a) = G(t)\Big|_a^b$$

Ejemplo 3.1.10.

Calculemos las siguientes integrales sin hallar las partes real e imaginaria de los integrandos:

a)

$$\int_0^\pi (\cos t - i\,\operatorname{sen} t)^3\,dt = \int_0^\pi e^{-i3t}\,dt = \frac{e^{-i3t}}{(-3i)}\Big|_0^\pi = \frac{e^{-i3\pi}}{(-3i)} - \frac{1}{(-3i)} = \frac{1}{3i} + \frac{1}{3i} = -\frac{2i}{3}$$

b)

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{t+i}dt = \mathrm{Ln}(t+i)\Big|_{-1}^1 = \mathrm{Ln}(1+i) - \mathrm{Ln}(-1+i) = \left(\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right) - \left(\ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2}$$

c)

$$\int_0^1 (1+it)^3\,dt = \frac{1}{4i}(1+it)^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4i}(1+i)^4 - \frac{1}{4i} = \frac{5i}{4}$$

d) Para calcular $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi te^{it}\,dt$, aplicamos integración por partes con $u = t$, $dv = e^{it}\,dt$:

$$\int_{-\pi}^\pi te^{it}\,dt = t\frac{e^{it}}{i}\Big|_{-\pi}^\pi - \int_{-\pi}^\pi \frac{e^{it}}{i}dt = -ite^{it}\Big|_{-\pi}^\pi + e^{it}\Big|_{-\pi}^\pi = 2\pi i$$

Si bien no las trataremos en este capítulo, se definen en forma análoga las integrales impropias de funciones a valores complejos definidas en intervalos. Su convergencia equivale a la de las integrales impropias de sus partes real e imaginaria.

Ejemplo 3.1.11.

Mostremos la convergencia de $\displaystyle\int_0^\infty e^{-(1+i)t}dt$:

$$\int_0^\infty e^{-(1+i)t}dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-(1+i)t}dt = \lim_{T\to\infty}\frac{e^{-(1+i)t}}{-(1+i)}\Big|_0^T = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{e^{-(1+i)T}}{-(1+i)} - \frac{1}{-(1+i)}\right]$$

Como

$$0 \le |e^{-(1+i)T}| = |e^{-T}e^{-iT}| = |e^{-T}||e^{-iT}| = e^{-T}$$

y además la exponencial real $e^{-T} \to 0$ cuando $T \to \infty$, resulta $\displaystyle\lim_{T\to\infty} e^{-(1+i)T} = 0$.

Entonces

$$\int_0^\infty e^{-(1+i)t}dt = \frac{1}{(1+i)} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

3.2. Primitivas en dominios del plano complejo

Dadas funciones $F(z), f(z)$ definidas en un conjunto abierto y conexo D del plano complejo, diremos que **$F(z)$ es una primitiva de $f(z)$ en D** si se verifica $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in D$, es decir si $f(z)$ es la derivada de la función analítica $F(z)$ en D (aquí la derivada es en el sentido de la variable compleja z, estudiada en el capítulo 1). En variable real una misma función puede admitir primitivas distintas en diferentes intervalos, por ejemplo $f(x) = x^{-1}$ admite la primitiva $F_1(x) = \ln x$ en $(0, \infty)$ y la primitiva $F_2(x) = \ln(-x)$ en $(-\infty, 0)$. Lo mismo ocurre en variable compleja. Por lo tanto, toda primitiva debe estar acompañada de un dominio de validez.

Ejemplo 3.2.1.

a) Una primitiva de $f(z) = z^2$ en $D = \mathbb{C}$ es $F(z) = \dfrac{z^3}{3}$ pues

$$F'(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{z^3}{3}\right) = \frac{3z^2}{3} = z^2 = f(z) \text{ para todo } z \in \mathbb{C}$$

b) Una primitiva de $f(z) = \cos z - \dfrac{1}{z^2}$ en $D = \mathbb{C} - \{0\}$ es $F(z) = \operatorname{sen} z + \dfrac{1}{z}$ pues

$$F'(z) = \frac{d}{dz}\left(\operatorname{sen} z + \frac{1}{z}\right) = \cos z - \frac{1}{z^2} = f(z) \text{ para todo } z \neq 0$$

c) $F_1(z) = \mathrm{Ln}(z)$ es primitiva de $f(z) = \dfrac{1}{z}$ en $D = \mathbb{C} - \{z : \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$.
En efecto:

$$F_1'(z) = \frac{d}{dz}(\mathrm{Ln}(z)) = \frac{1}{z} = f(z) \text{ para todo } z \in D$$

$F_2(z) = \mathrm{Ln}(-z)$ es primitiva de $f(z) = \dfrac{1}{z}$ en $D = \mathbb{C} - \{z : \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$ dado que si $z \in D$ entonces $-z$ cae dentro del dominio de analiticidad del logaritmo principal, con lo cual podemos aplicar la regla de la cadena:

$$F_2'(z) = \frac{d}{dz}(\mathrm{Ln}(-z)) = \frac{1}{(-z)}(-1) = f(z) \text{ para todo } z \in D$$

Análogamente al caso real, dos primitivas de una misma función en un mismo conjunto abierto conexo D del plano complejo difieren en una constante compleja.

El símbolo $\int f(z)\,dz$ designa el conjunto de todas las primitivas de $f(z)$ en determinado conjunto abierto conexo D del plano. Luego, si $F(z)$ es una primitiva cualquiera de $f(z)$ en D, entonces se tiene $\int f(z)\,dz = F(z) + C$ para $z \in D$, donde $C \in \mathbb{C}$ es una constante general de integración. Es decir:

$$\int f(z)\,dz = F(z) + C \text{ para } z \in D \quad \Leftrightarrow \quad F'(z) = f(z) \text{ para } z \in D$$

Por ejemplo, refiriéndonos al ejemplo 3.2.1c:

$$\int \frac{1}{z}\,dz = \mathrm{Ln}\, z + C \text{ para todo } z \in D = \mathbb{C} - \{z : \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$$

así como también es válido:

$$\int \frac{1}{z}\,dz = \mathrm{Ln}\,(-z) + C \;\; \text{para todo}\, z \in D = \mathbb{C} - \{z : \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$$

Actividad 3.2.2.

Estableciendo un dominio de validez, hallar:

a) $\displaystyle\int \left(z - \frac{1}{z^3} - \operatorname{sen} z\right) dz$ b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{Ln} z}{z}\,dz$ c) $\displaystyle\int \frac{e^{1/z}}{z^2}\,dz$ □

Advertimos aquí una diferencia importante respecto de las funciones reales de una variable real. Como mencionamos anteriormente, toda función continua $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ admite primitiva en $[a, b]$. En contraste, dada una función $f : D \to \mathbb{C}$ continua en un conjunto D abierto y conexo del plano complejo, no necesariamente admite primitiva en D, incluso siendo f analítica allí. Un ejemplo de esto es $f(z) = z^{-1}$ que más adelante probaremos no admite primitiva en $D = \mathbb{C} - \{0\}$. En este capítulo se mostrará que para funciones de variable compleja la existencia de primitiva está estrechamente vinculada a la noción de independencia del camino.

3.3. Integración a lo largo de curvas

En la sección 3.1 consideramos integrales de funciones complejas de variable real en intervalos. Definiremos ahora las integrales de funciones complejas de variable compleja a lo largo de curvas del plano, es decir como integrales de línea.

Definición 3.3.1. *Sea $C : z = Z(t),\ t \in [a, b]$, una curva suave (orientada por valores crecientes del parámetro). Si $f(z)$ es una función a valores complejos continua sobre C, se define la integral de f a lo largo de C mediante:*

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(Z(t)).\overbrace{Z'(t)\,dt}^{dz(t)}$$

Si C es suave a trozos, unión de la secuencia de curvas suaves $C_1, C_2, \cdots, C_N$, donde el extremo final de C_k coincide con el inicial de C_{k+1} (para $1 \leq k \leq N-1$), se define:

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{C_k} f(z)\,dz$$

Cuando la curva C es cerrada se acostumbra indicar la integral como $\displaystyle\oint_C f(z)\,dz$

Observaciones

1. La condición de continuidad de $f(z)$ sobre C garantiza que la integral definida del miembro de la derecha en la definición de integral a lo largo de una curva suave existe pues es del tipo visto en la sección 3.1 con integrando $g(t) = f(Z(t)).Z'(t)$ continuo en $[a, b]$.

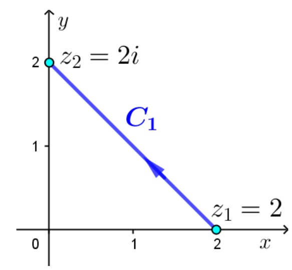
2. Si bien la definición hace referencia a una parametrización de C, mediante un cambio de variables en la integral definida se puede probar que el valor de la integral a lo largo de C no depende de la representación particular elegida siempre que ella respete la orientación especificada. Es decir, reparametrizando C mediante un cambio de parámetros h de clase $\mathcal{C}^1$ con $h' > 0$, el valor de la integral no se modifica.

3. Dos arcos que conecten el mismo extremo inicial z_1 y final z_2 no necesariamente arrojarán el mismo valor para la integral.

Ejemplo 3.3.2.

Calculemos la integral $\displaystyle\int_C \overline{z}\,dz$ a lo largo de las curvas siguientes. El integrando $f(z) = \overline{z}$ es continuo en todo el plano complejo, en particular sobre esas curvas, lo que garantiza la existencia de las integrales.

a) C_1 el segmento dirigido desde $z_1 = 2$ hasta $z_2 = 2i$.



Parametrizamos $C_1 : z = 2 + t(2i - 2), t \in [0, 1]$
$Z'(t) = 2i - 2$

Evaluamos el integrando sobre la curva parametrizada:

$f(Z(t)) = \overline{Z(t)} = \overline{2 + t(2i - 2)} = \overline{(2 - 2t) + i2t} =$
$= (2 - 2t) - i2t$

Entonces:

$$\int_{C_1} \overline{z}\,dz = \int_0^1 f(Z(t))Z'(t)\,dt = \int_0^1 (2 - 2t - i2t)(2i - 2)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (8t - (4 - 4i))\,dt = \big(4t^2 - (4 - 4i)t\big)\Big|_0^1 = 4i$$

b) $C_2 : z = (2 - t) + it, t \in [0, 2]$
$Z'(t) = -1 + i$.
Evaluamos el integrando sobre la curva parametrizada

$$f(Z(t)) = \overline{Z(t)} = \overline{2 - t + it} = (2 - t) - it$$

De este modo:

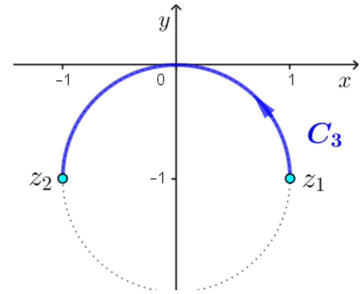
$$\int_{C_2} \overline{z}\,dz = \int_0^2 f(Z(t))Z'(t)\,dt = \int_0^2 ((2 - t) - it)(-1 + i)\,dt =$$

$$= \int_0^2 (2t - (2 - 2i))\,dt = \big(t^2 - (2 - 2i)t\big)\Big|_0^2 = 4i$$

La curva C_2 es la misma que C_1 del inciso anterior, solo que parametrizada de modo diferente pero conservando la orientación. Esto ilustra la segunda observación hecha justo antes de este ejemplo (la integral de $f(z)$ no depende de la parametrización particular siempre que se respete la orientación).

c) C_3 el arco de la circunferencia de ecuación $x^2 + (y+1)^2 = 1$ con $y \geq -1$ recorrido en sentido antihorario.

Una posible parametrización es
$C_3 : z = -i + e^{it},\ t \in [0, \pi]$



Entonces:
$Z'(t) = ie^{it}$
$f(Z(t)) = \overline{Z(t)} = \overline{-i + e^{it}} = i + e^{-it}$

Luego:

$$\int_{C_3} \overline{z}\, dz = \int_0^{\pi} f(Z(t))Z'(t)\, dt = \int_0^{\pi} (i + e^{-it})(ie^{it})\, dt = \int_0^{\pi} (-e^{it} + i)\, dt =$$

$$= (ie^{it} + it)\Big|_0^{\pi} = (ie^{i\pi} + i\pi) - i = (\pi - 2)i$$

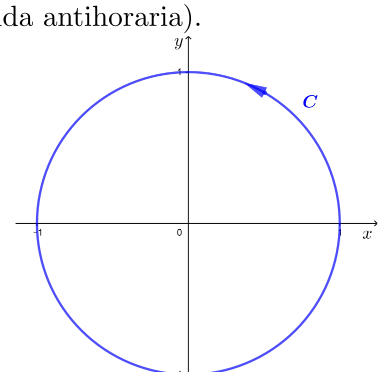
Ejemplo 3.3.3.

Evaluemos las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z}\, dz$ a lo largo de la circunferencia $C : |z| = 1$ con orientación antihoraria.

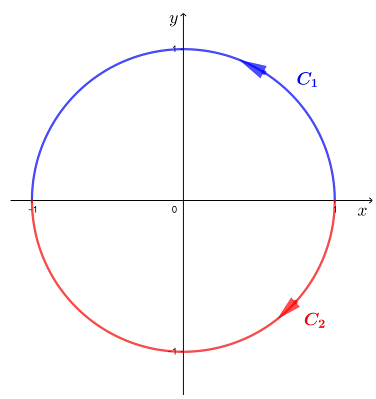
La curva C es suave y el integrando $f(z) = \dfrac{1}{z}$ es continuo sobre C. Por lo tanto $f(z)$ es integrable a lo largo de C.

Parametrizamos $C : z = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ (orientación inducida antihoraria).



Entonces $dz = Z'(t)\, dt = ie^{it}\, dt$.
Evaluando la función $f(z)$ sobre la curva:
$f(Z(t)) = \dfrac{1}{Z(t)} = \dfrac{1}{e^{it}}$
Luego:
$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\, ie^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = it\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i$$

b) i) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z}\, dz$ a lo largo de $C_1 : |z| = 1$ desde $z_1 = 1$ hasta $z_2 = -1$ antihoraria.



Parametrizamos $C_1 : z = e^{it}, t \in [0, \pi]$
Entonces $dz = Z'(t)\, dt = ie^{it}\, dt$.
$f(Z(t)) = \dfrac{1}{Z(t)} = \dfrac{1}{e^{it}}$
Luego:

$$\int_{C_1} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{e^{it}} i\, e^{it}\, dt = \int_0^{\pi} i\, dt = it\Big|_0^{\pi} = i\pi$$

ii) $\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{z}\, dz$ a lo largo de la circunferencia $C_2 : |z| = 1$ desde $z_1 = 1$ hasta $z_2 = -1$ horaria.

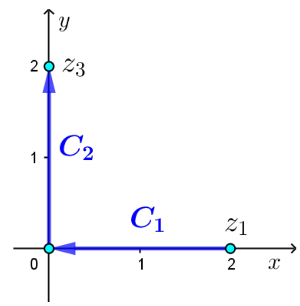
Parametrizamos $C_2 : z = e^{-it}, t \in [0, \pi]$. Entonces: $dz = Z'(t)\,dt = -ie^{-it}\,dt$,

$$\int_{C_2} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{e^{-it}}(-i)e^{-it}\,dt = (-i)t\Big|_0^{\pi} = -i\pi$$

c) Calculemos $\int_C \overline{z}\,dz$ si C es la poligonal dirigida de vértices $z_1 = 2$, $z_2 = 0$ y $z_3 = 2i$. Como $C = C_1 \cup C_2$ es suave a trozos, parametrizamos cada tramo por separado:

$$C_1 : z = -t, t \in [-2, 0]$$

$$C_2 : z = it, t \in [0, 2]$$



$$\int_{C_1} \overline{z}\,dz = \int_{-2}^{0} (-t)(-1)\,dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_{-2}^{0} = -2$$

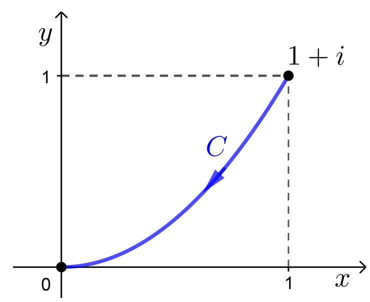
$$\int_{C_2} \overline{z}\,dz = \int_0^2 (-it)i\,dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^2 = 2$$

Por lo tanto:

$$\int_C \overline{z}\,dz = \int_{C_1} \overline{z}\,dz + \int_{C_2} \overline{z}\,dz = -2 + 2 = 0$$

d) $\int_C z\,\mathrm{Re}(z)\,dz$ a lo largo del arco de la parábola $C : y = x^2$ desde $z_1 = 1+i$ hasta $z_2 = 0$.

$$C : z = -t + it^2, t \in [-1, 0],\ dz = (-1 + 2it)\,dt$$



$$\int_C z\,\mathrm{Re}(z)\,dz = \int_{-1}^{0} (-t + it^2)(-t)(-1 + 2it)\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{0} (-t^2 + 3it^3 + 2t^4)\,dt =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{4}it^4 + \frac{2}{5}t^5\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{1}{15} - \frac{3}{4}i$$

Propiedad 3.3.4.

1) **Linealidad:** Si α, β con constantes complejas y $f(z), g(z)$ son integrables a lo largo de C, entonces:

$$\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z))\ dz = \alpha \left(\int_C f(z)\,dz\right) + \beta \left(\int_C g(z)\,dz\right)$$

2) **Acotamiento:** Si f es integrable a lo largo de la curva C de longitud L y $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in C$, entonces

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq ML$$

3) **Cambio de signo:** $\int_C f(z)\,dz = -\int_{-C} f(z)\,dz$

Ejemplo 3.3.5.

a) Regresemos al ejemplo 3.3.3b) para ilustrar propiedades. Podemos comenzar parametrizando $-C_2 : z = e^{it}, t \in [\pi, 2\pi]$. Entonces:

$$\int_{C_2} \frac{1}{z}\, dz = -\int_{-C_2} \frac{1}{z}\, dz = -\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\, dt = -\int_{\pi}^{2\pi} i\, dt = -it\Big|_{\pi}^{2\pi} = -i\pi$$

Ahora podemos resolver de otra forma el ejemplo 3.3.3a) : $\oint_C \frac{1}{z}\, dz$ a lo largo de la circunferencia $C : |z| = 1$ con orientación antihoraria.

$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz = \int_{C_1 \cup (-C_2)} \frac{1}{z}\, dz = \int_{C_1} \frac{1}{z}\, dz + \int_{-C_2} \frac{1}{z}\, dz =$$

$$= \int_{C_1} \frac{1}{z}\, dz - \int_{C_2} \frac{1}{z}\, dz = i\pi - (-i\pi) = 2\pi i$$

b) Mostremos que $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{3iz}}{z^2+1}\, dz = 0$ siendo $C_R : |z| = R, \mathrm{Im}(z) \geq 0$, con $R > 1$. En efecto, si $z = x + i\, y \in C_R$ se tiene:

$$\left|\frac{e^{3iz}}{z^2+1}\right| = \frac{|e^{3iz}|}{|z^2+1|} = \frac{|e^{3ix-3y}|}{|z^2+1|} = \frac{e^{-3y}}{|z^2+1|} \leq \frac{e^{-3y}}{||z|^2-1|} = \frac{e^{-3y}}{R^2-1} \leq \frac{1}{R^2-1} = M$$

puesto que sobre C_R es $y \geq 0$ de manera que $e^{-3y} \leq 1$, y teniendo en cuenta además que:

$$|z^2+1| \geq ||z|^2-1| \quad \text{así que } \frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{||z|^2-1|}$$

Entonces en virtud de la propiedad 3.3.4.2 resulta:

$$0 \leq \left|\int_{C_R} \frac{e^{3iz}}{z^2+1}\, dz\right| \leq ML = \frac{1}{R^2-1}\pi R = \frac{\pi R}{R^2-1}$$

El límite que se pide se obtiene observando que el miembro de la derecha tiende a cero cuando R tiende a infinito.

Actividad 3.3.6.

Calcular:

a) $\int_C \mathrm{Re}(z)\, dz$ a lo largo de las siguientes curvas:

(i) $C : z = 1 + it, 0 \leq t \leq 1$.

(ii) $C : |z-3| = 2$ con orientación antihoraria.

b) $\int_C \mathrm{Im}(z^2)\, dz$ a lo largo del segmento orientado desde $z_1 = 1 + i$ hasta $z_2 = 0$.

c) $\int_C \frac{1}{i\,\overline{z}-1}\, dz$ siendo $C : |z-i| = 1$ con orientación horaria desde $z_1 = 1+i$ hasta $z_2 = 0$.

Si bien la definición de integral a lo largo de curvas permite plantearlas mediante integrales definidas en el intervalo paramétrico, estas últimas no siempre resultan sencillas de resolver.

Ejemplo 3.3.7.

Dada $C : |z-1| = 3$ con orientación antihoraria planteemos el cálculo de $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z}$ mediante parametrización.
$C : z = 1 + 3e^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Entonces: $Z'(t) = 3ie^{it}$
Luego:

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{Z'(t)}{Z(t)}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{3ie^{it}}{1+3e^{it}}\,dt$$

A primera vista parece tentador resolver mediante la regla de Barrow tomando como primitiva la función $G(t) = \mathrm{Ln}(1+3e^{it})$, pero realmente no lo es. Lo sería si la imagen del intervalo paramétrico $[0, 2\pi]$ por la función $Z(t) = 1 + 3e^{it}$ (es decir la curva C) estuviera contenida dentro del dominio de analiticidad de $\mathrm{Ln}\, z$, pero en este caso C interseca al semieje real negativo pues $Z(\pi) = 1 + 3e^{i\pi} = -2$.

Una forma de calcular la integral es usar el resultado siguiente, que muestra que para hallar una integral de línea compleja es posible plantear un par de integrales de línea reales.

Propiedad 3.3.8. ***Relación entre integrales de línea reales y complejas.***
Sea $f(z)$ una función continua sobre el arco suave o suave a trozos C y sean $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z))$ y $v(x,y) = \mathrm{Im}(f(z))$. Se verifica:

$$\int_C f(z)\,dz = \left(\int_C u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy\right) + i\left(\int_C v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy\right)$$

Actividad 3.3.9.

Aplicando la propiedad 3.3.8 calcular $\int_C z\,dz$ si C es el segmento desde $z_1 = 0$ hasta $z_2 = 1+i$. A partir de la definición 3.3.1 corroborar el resultado.

La propiedad 3.3.8 sugiere la posibilidad de formular en variable compleja resultados análogos a los de independencia del camino y el teorema de Green de la teoría de integrales de línea reales. Este será el objetivo de las dos secciones que siguen.

3.4. Independencia del camino

En ejemplo 3.3.3b se consideraron dos curvas C_1 y C_2 incluidas en el mismo conjunto $D = \mathbb{C} - \{0\}$ abierto conexo, ambas con extremo inicial $z_1 = 1 \in D$ y ambas con extremo final $z_2 = -1 \in D$. La integral $\int_C z^{-1}\,dz$ arrojó resultados diferentes cuando se calculó a lo largo de C_1 y C_2. Es un ejemplo de integral cuyo valor, para curvas incluidas en D desde z_1 hasta z_2, depende de la trayectoria que se elija para calcularla. Mostraremos ahora otra situación.

Ejemplo 3.4.1.

Sean $z_1 = 0$ y $z_2 = 1+i$. Calculemos $\int_C z\,dz$ a lo largo de las siguientes curvas:

a) C_1 segmento de la recta $y = x$ desde z_1 hasta z_2.
   Parametrizando $C_1 : z = t + it, t \in [0,1]$:

$$\int_{C_1} z\,dz = \int_0^1 (t+it)(1+i)\,dt = \int_0^1 2it\,dt = it^2\Big|_0^1 = i$$

b) C_2 arco de la parábola $y = x^2$ desde z_1 hasta z_2.
Parametrizando $C_2 : z = t + it^2, t \in [0, 1]$:

$$\int_{C_2} z\,dz = \int_0^1 (t + it^2)(1 + 2it)\,dt = \int_0^1 (t - 2t^3) + i3t^2\,dt = \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^4 + it^3\right)\Big|_0^1 = i$$

c) C_3 poligonal de vértices z_1, $z_3 = 1$ y z_2 en ese orden.
$C_3 = C_{3,1} \cup C_{3,2}$ con $C_{3,1} : z = t, t \in [0, 1]$ y $C_{3,2} : z = 1 + it, t \in [0, 1]$:

$$\int_{C_{3,1}} z\,dz = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_{C_{3,2}} z\,dz = \int_0^1 (1 + it)i\,dt = \int_0^1 (i - t)\,dt = \left(it - \frac{1}{2}t^2\right)\Big|_0^1 = i - \frac{1}{2}$$

Luego

$$\int_{C_3} z\,dz = \int_{C_{3,1}} z\,dz + \int_{C_{3,2}} z\,dz = \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} = i$$

d) C_4 arco de la circunferencia $|z - i| = 1$ en el primer cuadrante desde z_1 hasta z_2.
Parametrizando $C_4 : z = i + e^{it}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$:

$$\int_{C_3} z\,dz = \int_{-\pi/2}^0 (i + e^{it})ie^{it}\,dt = \int_{-\pi/2}^0 (-e^{it} + ie^{2it})\,dt = \left(ie^{it} + \frac{1}{2}e^{2it}\right)\Big|_{-\pi/2}^0 =$$

$$= \left(i + \frac{1}{2}\right) - \left(ie^{-i\pi/2} + \frac{1}{2}e^{-i\pi}\right) = i + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = i$$

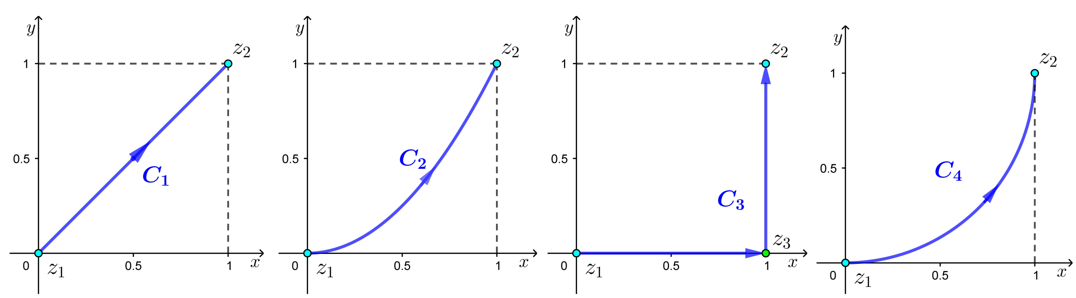
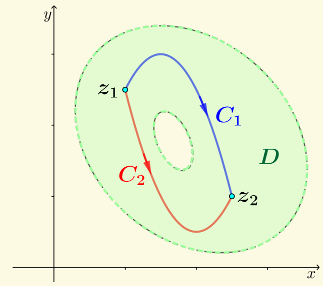


Figura 3.1: curvas del ejemplo 3.4.1

Este ejemplo sugiere que la integral $\int_C z\,dz$ quizás no dependa de la curva que conecta el punto inicial z_1 con el punto final z_2 y motiva la siguiente definición.

Definición 3.4.2. *Dada $f(z)$ continua en un conjunto abierto y conexo D, se dice que* ***la integral*** $\int_C f(z)\,dz$ ***es independiente del camino en D*** *si para todo par de curvas C_1, C_2 incluidas en D, ambas con extremo inicial z_1 y ambas con extremo final z_2, se cumple:*

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$



Cuando la integral tiene esta propiedad anotamos $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$.

Si bien la independencia del camino es una característica muy deseable, raras veces la definición permite determinar si una integral goza de dicha propiedad en un dominio D (lo que supondría evaluar la integral a lo largo todas las trayectorias en D entre dos puntos dados). El resultado siguiente es consecuencia inmediata de la propiedad 3.3.8 y muestra que la independencia del camino en variable compleja puede analizarse en base a la propiedad homóloga para integrales de línea reales.

Propiedad 3.4.3. *Sea $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ continua en un dominio D. Se verifica: $\int_C f(z)\,dz$ es independiente del camino en D si y solo si las integrales de línea $\int_C u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy$ y $\int_C v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy$ son independientes del camino en D.*

El siguiente teorema permite decidir en muchos casos en forma sencilla y sin recurrir a la variable real si una integral compleja es independiente de la trayectoria en un conjunto dado.

Teorema 3.4.4. ***Independencia del camino***
Sea $f(z)$ función continua en un conjunto D abierto y conexo del plano complejo. Las tres afirmaciones siguientes son equivalentes (es decir todas son verdaderas o todas son falsas):

1. $\int_C f(z)\,dz$ *es independiente del camino en D.*
2. $\oint_C f(z)\,dz = 0$ *para toda curva cerrada C incluida en D.*
3. $f(z)$ *admite primitiva en D.*

Además, si $F(z)$ es una primitiva de $f(z)$ en D entonces vale:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1) \qquad \textbf{\textit{Regla de Barrow}}$$

Cualquiera de las tres afirmaciones implica la siguiente:

4. $f(z)$ *es analítica en D.*

Cuando D es simplemente conexo las cuatro afirmaciones son equivalentes.

Demostración

(*1* $\Leftrightarrow$ *2*) La equivalencia entre las dos primeras afirmaciones se demuestra de manera completamente análoga al caso real para campos vectoriales en el plano. También puede probarse teniendo en cuenta la propiedad 3.4.3 y el teorema de independencia del camino para campos vectoriales en el plano.
(*3* $\Rightarrow$ *1*) Supongamos que $F(z)$ es una primitiva de $f(z)$ en D, de modo que $F'(z) = f(z), \forall z \in D$.
Si C es una curva suave incluida en D con extremo inicial z_1 y extremo final z_2, entonces existe una parametrización suave $C : z = Z(t), t \in [a, b]$, con $Z(a) = z_1$ y $Z(b) = z_2$. Definiendo $g(t) = F(Z(t))$ y aplicando la regla de la cadena, teniendo en cuenta que $Z(t) \in D, \forall t \in [a, b]$, se tiene $g'(t) = F'(Z(t))Z'(t) = f(Z(t))Z'(t)$ para toda $t \in [a, b]$. Luego:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(Z(t))Z'(t)\,dt = \int_a^b g'(t)\,dt = g(t)\Big|_a^b = g(b) - g(a) =$$
$$= F(Z(b)) - F(Z(a)) = F(z_2) - F(z_1)$$

Si $C = C_1 \cup \cdots \cup C_N$ es suave a trozos y está incluida en D, donde cada C_j es suave y el extremo final z_j^* de C_j coincide con el inicial de C_{j+1}, y llamando $z_0^* = z_1$ y $z_N^* = z_2$, entonces de acuerdo con lo anterior es $\int_{C_j} f(z)\,dz = F(z_j^*) - F(z_{j-1}^*)$. Por lo tanto

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} \int_{C_j} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} \left[F(z_j^*) - F(z_{j-1}^*)\right] = F(z_N^*) - F(z_0^*) = F(z_2) - F(z_1)$$

Esto muestra que la integral depende solo de los extremos z_1 y z_2, de modo que la tercera afirmación implica la primera.
(*1* $\Rightarrow$ *3*) Supongamos que $f = u + i\,v$ es continua en D y que la integral $\int_C f(z)\,dz$ es independiente del camino en D. Luego, por la propiedad 3.4.3 las integrales de línea $\int_C u\,dx - v\,dy$ y $\int_C v\,dx + u\,dy$ son independientes del camino en D. Por el teorema de independencia del camino para campos vectoriales reales, se deduce que $\vec{G} = \langle u, -v\rangle$ y $\vec{H} = \langle v, u\rangle$ son conservativos en D. Existen pues potenciales U, V tales que $\vec{\nabla}U = \vec{G}$ y $\vec{\nabla}V = \vec{H}$ en D. Definamos $F(z) = U + i\,V$. Las derivadas parciales de sus componentes son $U_x = u$, $U_y = -v$, $V_x = v$ y $V_y = u$, continuas en D pues f lo es. Ellas satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann: $U_x = u = V_y$, $U_y = -v = -V_x$ en D. Por lo tanto F es analítica en D y su derivada es $F'(z) = U_x(x, y) + i\,V_x(x, y) = u(x, y) + i\,v(x, y) = f(z)$. Es decir, $F(z)$ es una primitiva de $f(z)$ en D.
(*3* $\Rightarrow$ *4*) Supongamos que $f(z)$ admite una primitiva $F(z)$ en D. Entonces $F(z)$ es analítica en D (pues existe su derivada en cada punto del conjunto abierto D). Más adelante justificaremos que la derivada de una función analítica es también analítica, de lo que se desprende que $f(z)$ es analítica en D puesto que ella es la derivada de $F(z)$.
(*4* $\Rightarrow$ *2*) Bajo las hipótesis que D es abierto simplemente conexo y la curva es simple, el resultado es una consecuencia del teorema de Cauchy-Goursat (que enunciaremos en la sección siguiente). La demostración general se basa en el concepto de homotopía que excede el alcance de este curso [10]. $\square$

La implicación (*2* $\Rightarrow$ *4*) se conoce como el **teorema de Morera**.

Ejemplo 3.4.5.

La integral

$$\int_C \left(iz - e^{\pi z} + 4z\,\mathrm{sen}(\pi z^2)\right) dz$$

es independiente del camino en $D = \mathbb{C}$. En efecto, $f(z) = iz - e^{\pi z} + 4z\,\mathrm{sen}(\pi z^2)$ es analítica en D y admite allí como primitiva a la función

$$F(z) = \frac{i}{2}z^2 - \frac{1}{\pi}e^{\pi z} - \frac{2}{\pi}\cos(\pi z^2)$$

como se comprueba aplicando reglas de derivación. Así por ejemplo:

$$\int_0^{2i} \left(iz - e^{\pi z} + 4z\,\mathrm{sen}(\pi z^2)\right)\, dz = \left(\frac{i}{2}z^2 - \frac{1}{\pi}e^{\pi z} - \frac{2}{\pi}\cos(\pi z^2)\right)\Big|_0^{2i} =$$

$$= \left(-2i - \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\right) - \left(-\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\right) = -2i$$

resultado que se obtiene sin hacer referencia a curvas en particular ni a parametrizaciones.

Ejemplo 3.4.6.

Mostremos que la integral de $f(z) = 6z^2 - \dfrac{i}{z^2}$ es independiente del camino en $D = \mathbb{C} - \{0\}$ y calculemos: a) $\displaystyle\int_1^i \left(6z^2 - \frac{i}{z^2}\right) dz$ b) $\displaystyle\oint_{|z-1|=2} \left(6z^2 - \frac{i}{z^2}\right) dz$

Si bien D es un abierto no simplemente conexo, el integrando $f(z)$ admite allí la primitiva $F(z) = 2z^3 + iz^{-1}$. La integral es pues independiente del camino en D.

a) Para evaluar la primera integral podemos aplicar la regla de Barrow:

$$\int_1^i \left(6z^2 - \frac{i}{z^2}\right) dz = \left(2z^3 + \frac{i}{z}\right)\Big|_1^i = (2i^3 + 1) - (2 + i) = -1 - 3i$$

b) Por el teorema de independencia del camino, como la circunferencia $C : |z - 1| = 2$ es una curva cerrada incluida en el dominio D en el cual hemos hallado una primitiva de $f(z)$, resulta:

$$\oint_{|z-1|=2} \left(6z^2 - \frac{i}{z^2}\right) dz = 0$$

Ejemplo 3.4.7.

Analicemos la independencia del camino de la integral de $f(z) = \dfrac{1}{z}$ en distintos dominios.

En el abierto no simplemente conexo $D = \mathbb{C} - \{0\}$, f es analítica y su integral depende del camino. Efectivamente, en el ejemplo 3.3.3a mostramos que $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$. Es decir que la segunda afirmación en el teorema 3.4.4 es falsa entonces la primera también.

En el abierto simplemente conexo $D^* = \mathbb{C} - \{z : \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$, f es analítica y su integral es independiente del camino. Efectivamente, la cuarta afirmación en el teorema 3.4.4 es verdadera entonces la primera también.

De hecho $f(z)$ admite en D^* la primitiva $F(z) = \text{Ln}(z)$, así que por ejemplo para cualquier trayectoria C desde $z_1 = -1 - i$ hasta $z_2 = -1 + i$ que no pase ni por el origen ni por el semieje real negativo, se puede aplicar la regla de Barrow:

$$\int_C \frac{dz}{z} = \text{Ln}(z)\Big|_{-1-i}^{-1+i} = \text{Ln}(-1+i) - \text{Ln}(-1-i) = i\frac{3\pi}{2} \text{ si } C \subset D^*$$

Por otra parte, si el camino de integración C va desde$z_1 = -1-i$ hasta $z_2 = -1+i$ y no pasa ni por el origen ni por el semieje real positivo, podemos valernos de la primitiva $G(z) = \text{Ln}(-z)$ en $D^{**} = \mathbb{C} - \{z : \text{Im}(z) = 0, \text{Re}(z) \geq 0\}$. Resulta:

$$\int_C \frac{dz}{z} = \text{Ln}(-z)\Big|_{-1-i}^{-1+i} = \text{Ln}(1-i) - \text{Ln}(1+i) = -i\frac{\pi}{2} \text{ si } C \subset D^{**}$$

Actividad 3.4.8.

1) Sean $z_1 = 1$ y $z_2 = i$. Calcular $I_k = \int_{C_k} \text{Im}(z)\, dz$ e $I_k^* = \int_{C_k} z\, dz$ para $k = 1, 2, 3$, siendo:

   a) C_1 el segmento dirigido desde z_1 hasta z_2.

   b) $C_2 : |z| = 1$ recorrida en sentido antihorario desde z_1 hasta z_2.

   c) C_3 la poligonal de vértices z_1, 0, z_2 en ese orden.

   ¿Esperaba Ud. un mismo valor para las tres integrales I_k $(k = 1, 2, 3)$? ¿Y para las integrales I_k^*? Argumente sus respuestas.

2) Mostrar que las siguientes integrales son independientes del camino en un dominio apropiado y calcularlas.

   a) $\displaystyle\int_0^{i\pi} \left[3e^{-z} + 2\,\text{senh}(z)\right]\, dz$ b) $\displaystyle\int_{1+i}^{1+3i} \frac{1}{(z-2i)^2} dz$ c) $\displaystyle\int_{-i\pi/2}^{i\pi/2} \frac{e^z}{(1-e^z)^2}\, dz$

   d) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{-1/z}}{z^2}\, dz$ si C es cerrada y no pasa por el origen.

3.5. Teorema de Cauchy

En la introducción mencionamos que el teorema de Cauchy en su versión original se vincula directamente con el teorema de Green. Es un teorema que en condiciones muy generales permite calcular integrales de funciones analíticas a lo largo de curvas cerradas. Sus consecuencias son fundamentales. Algunas de ellas se verán en este capítulo en tanto que otras quedarán diferidas al capítulo 5.

Teorema 3.5.1. ***Teorema de Cauchy***
Sea C una curva del plano complejo, cerrada, simple, suave o suave a trozos, orientada en sentido antihorario y sea $f(z)$ una función analítica sobre C y en su interior, cuya derivada $f'(z)$ es continua sobre C y en su interior. Se verifica:

$$\oint_C f(z)\, dz = 0$$

Demostración

Supongamos que C y $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ cumplen las hipótesis del teorema de Cauchy. Por la relación entre integrales de línea complejas e integrales de línea reales se tiene:

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C \vec{G}.d\vec{r} + i\,\oint_C \vec{H}.d\vec{r}$$

siendo $\vec{G}$ y $\vec{H}$ los campos vectoriales $\vec{G} = \langle u, -v\rangle$, $\vec{H} = \langle v, u\rangle$ Bastará probar que las dos integrales de línea reales del miembro de la derecha son nulas. Veamos que el teorema de Green es aplicable a cada una de ellas. En efecto:

Sea R la región interior a C. Por hipótesis existe un conjunto abierto D que incluye a C y a R en el cual f es analítica y f' es continua. Como $f'(z) = u_x(x,y) + i\,v_x(x,y)$ resultan $u_x(x,y)$,$v_x(x,y)$ continuas en D. Y dado que f es analítica allí, se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann de modo que $v_y(x,y)$,$u_y(x,y)$ también son continuas en D. Por lo tanto las derivadas parciales de las componentes de $\vec{G}$ y $\vec{H}$ son continuas en D.

La curva C es cerrada, simple y suave a trozos y tiene orientación antihoraria.

Luego, aplicando el teorema de Green se tienen las siguientes igualdades:

$$\oint_C \vec{G}.d\vec{r} = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-v(x,y)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(u(x,y)\right)\right] dA = \iint_R \left[-v_x(x,y) - u_y(x,y)\right] dA$$

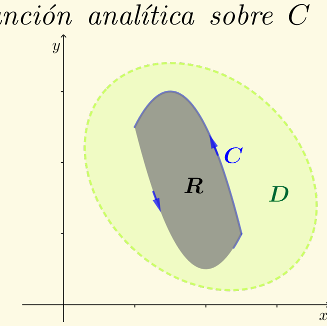
$$\oint_C \vec{H}.d\vec{r} = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u(x,y)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(v(x,y)\right)\right] dA = \iint_R \left[u_x(x,y) - v_y(x,y)\right] dA$$

Empleando las ecuaciones CR vemos que los integrandos de las integrales dobles anteriores son idénticamente nulos en D y en particular en R. Luego, las integrales dobles valen cero. Se deduce que las circulaciones de $\vec{G}$ y $\vec{H}$ también son nulas, como queríamos probar. $\square$

El matemático E.Goursat probó que la hipótesis de continuidad de la derivada resulta innecesaria en el teorema anterior, dando lugar a la siguiente versión más fuerte cuya demostración omitimos.

Teorema 3.5.2. ***Teorema de Cauchy-Goursat***
Si C es una curva del plano complejo, cerrada, simple, suave o suave a trozos, orientada en sentido antihorario y $f(z)$ es una función analítica sobre C y en su interior, entonces:

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$



Ejemplo 3.5.3.

Calcular las siguientes integrales con orientación antihoraria:

a) $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z}\,dz \qquad C : |z - 1 - i| = 1.$

C es una circunferencia entonces es cerrada, simple y suave. El integrando $f(z) = 1/z$ es analítico en el abierto $D = \mathbb{C} - \{0\}$ por ser función racional con denominador no nulo allí. Como el punto $z = 0$ es exterior a C, resulta $f(z)$ analítica sobre C y en su interior, ver figura 3.2. Luego, el teorema de Cauchy-Goursat es aplicable. Podemos conluir que:

$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz = 0$$

b) $\displaystyle\oint_C \frac{\operatorname{sen} z}{z^2+4}\, dz \qquad C : x^2 + 4y^2 = 4$

C es una elipse luego es cerrada, simple y suave. Por ser cociente de analíticas con denominador no nulo el integrando $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2+4}$ es analítico en $D = \mathbb{C} - \{-2i, 2i\}$, abierto que incluye a C y a la región limitada por ella, dado que los puntos $z = \pm 2i$ son exteriores a C, ver figura 3.3. Aplicando el teorema de Cauchy-Goursat se concluye:

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen} z}{z^2+4}\, dz = 0$$

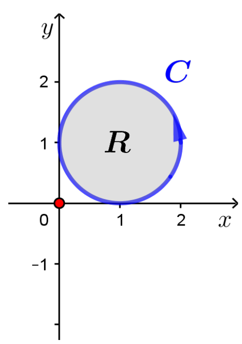


Figura 3.2: ej. 3.5.3a)

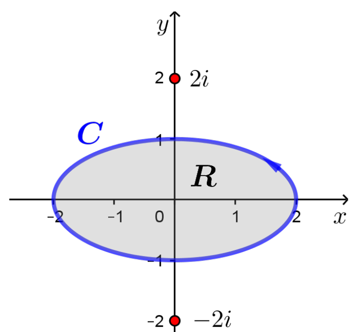


Figura 3.3: ej. 3.5.3b)

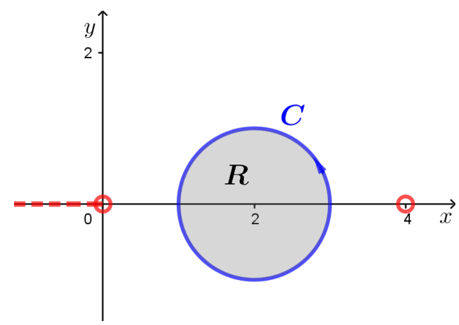


Figura 3.4: ej. 3.5.3c)

c) $\displaystyle\oint_{|z-2|=1} \frac{z}{\operatorname{Ln}(z/4)}\, dz$

$C : |z-2| = 1$ es una circunferencia así que es cerrada, simple y suave. Por ser cociente de analíticas con denominador no nulo el integrando $f(z) = \dfrac{z}{\operatorname{Ln}(z/4)}$ es analítico en $D = \mathbb{C} - (\{z : \operatorname{Im}(z) = 0 \ \wedge \ \operatorname{Re}(z) \le 0\} \cup \{4\})$. En efecto, si $z = x + iy$:

$$\operatorname{Ln}(z/4) \text{ no es analítica } \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z/4) = 0 \ \wedge \ \operatorname{Re}(z/4) \le 0 \ \Leftrightarrow \ y = 0 \ \wedge \ x \le 0$$

Además este denominador se anula únicamente en $z = 4$.
Puesto que el abierto D incluye a C y a la región interior, dado que $z = 4$, el origen y el semieje real negativo son exteriores a C, ver figura 3.4, por aplicación del teorema de Cauchy-Goursat podemos concluir que:

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{z}{\operatorname{Ln}(z/4)}\, dz = 0$$

d) $\displaystyle\oint_C \frac{z^3 \operatorname{Ln} z}{e^{2iz}-1}\, dz \qquad C$ frontera del cuadrado de vértices $1 \pm i$, $3 \pm i$

C es curva cerrada, simple y suave por tramos, por ser la frontera de un cuadrado. Examinemos la analiticidad del integrando $f(z)$. Su numerador $N(z) = z^3 \operatorname{Ln} z$ es analítico en el complemento del origen y del semieje real negativo, pues allí es producto de analíticas (polinómica y $\operatorname{Ln} z$). Su denominador $D(z) = e^{2iz} - 1$ es analítico en todo el plano complejo. Luego $f(z)$ es analítica excepto en el origen, el semieje real negativo y los puntos donde se anule $D(z)$:

$$e^{2iz} - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{2iz} = 1 \;\Leftrightarrow\; 2iz \in \ln 1 \;\Leftrightarrow\; 2iz = i2k\pi, k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto $f(z)$ es analítica en $D = \mathbb{C} - (\{z : \operatorname{Im}(z) = 0 \;\wedge\; \operatorname{Re}(z) \leq 0\} \cup \{k\pi : k \in \mathbb{N}\})$. Tanto C como la región limitada por ella están incluidas en D, ver figura 3.5. Del teorema de Cauchy-Goursat resulta:

$$\oint_C \frac{z^3 \operatorname{Ln} z}{e^{2iz} - 1}\, dz = 0$$

e) $\displaystyle\oint_C \frac{1}{4i \operatorname{Ln} z - \pi}\, dz$ $\qquad$ C frontera del triángulo de vértices 1, $1+i$, i

Por ser frontera de un triángulo la curva C es curva cerrada, simple y suave por tramos. El integrando $f(z)$ es un cociente cuyo numerador es una constante (analítica en $\mathbb{C}$) y cuyo denominador $D(z) = 4i \operatorname{Ln} z - \pi$ es analítico excepto en el origen y sobre el semieje real negativo. Luego, $f(z)$ es analítica excepto en dichos puntos y aquellos donde se anule $D(z)$. Hallemos estos últimos:

$$4i \operatorname{Ln} z - \pi = 0 \;\Leftrightarrow\; 4i \operatorname{Ln} z = \pi \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Ln} z = -\frac{i\pi}{4} \;\Leftrightarrow\; z = e^{-i\pi/4} \;\Leftrightarrow\; z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Puesto que el origen, los puntos del semieje real negativo y el punto $z = e^{-i\pi/4}$ son todos exteriores a C, ver figura 3.6, entonces $f(z)$ es analítica sobre C y en su interior. Así, por el teorema de Cauchy-Goursat:

$$\oint_C \frac{1}{4i \operatorname{Ln} z - \pi}\, dz = 0$$

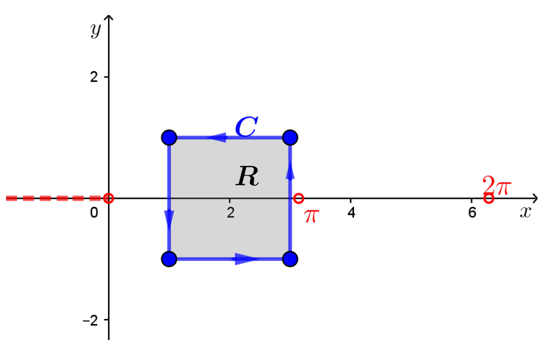


Figura 3.5: ejemplo 3.5.3d)

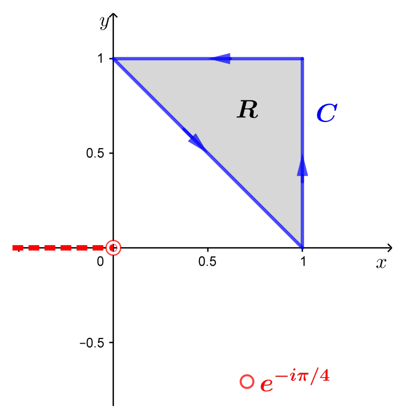


Figura 3.6: ejemplo 3.5.3e)

Actividad 3.5.4.

Hallar el valor de las siguientes integrales justificando sus afirmaciones.

a) $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^2-2z+2}\,dz$ si $C: |x|+|y|=1$ b) $\displaystyle\oint_{|z-i|=1} \frac{z}{e^{z/2}+i}\,dz$

c) $\displaystyle\oint_C \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z-5}\right)}{e^z+e^{2z}}\,dz$ si $C: \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$

Una consecuencia del teorema de Cauchy-Goursat es la que oportunamente mencionamos en el teorema 3.4.4, *4* $\Rightarrow$ *2*, que ahora estamos en condiciones de probar para curvas simples. En efecto: Sea $f(z)$ analítica en un conjunto D abierto simplemente conexo y C una curva cerrada, suave o suave a trozos incluida en D. Si C es simple, como está incluida en D y este es simplemente conexo, la región interior a C también está incluida en D y puede aplicarse el teorema de Cauchy-Goursat. Se desprende que $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

Otra consecuencia importante del teorema de Cauchy-Goursat es la siguiente versión para funciones analíticas de la generalización del teorema de Green a regiones cuyo contorno consta de varias curvas cerradas.

Corolario 3.5.5. *Sean $C, C_1, \cdots C_N$ curvas cerradas, simples y suaves o suaves a trozos, todas con la misma orientación (todas antihorarias o todas horarias), $C_1, \cdots, C_N$ interiores a C y cuyos interiores no tienen puntos en común. Sea R la región limitada por $C, C_1, \cdots C_N$. Si $f(z)$ es analítica sobre $C, C_1, \cdots, C_N$ y en R entonces se verifica:*

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{C_N} f(z)\,dz$$

El caso particular $N = 1$, ver figura 3.7, establece bajo las hipótesis correspondientes la igualdad de las integrales a lo largo de dos curvas cerradas, una interior a la otra, siempre que en la región entre ellas el integrando sea analítico. En la figura 3.9 ilustramos el caso cuando $N = 2$.

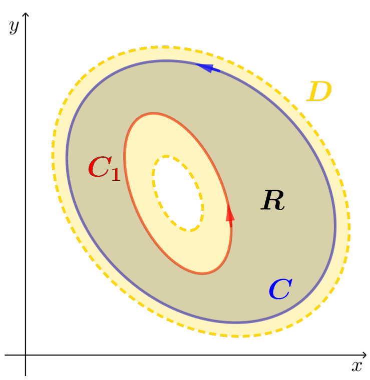


Figura 3.7: caso N=1

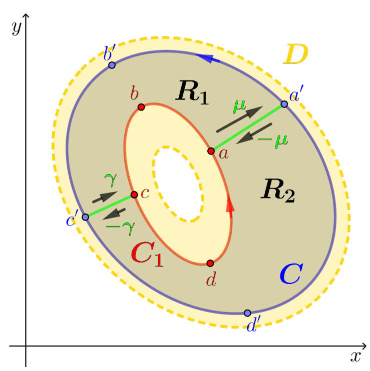


Figura 3.8: dem N=1

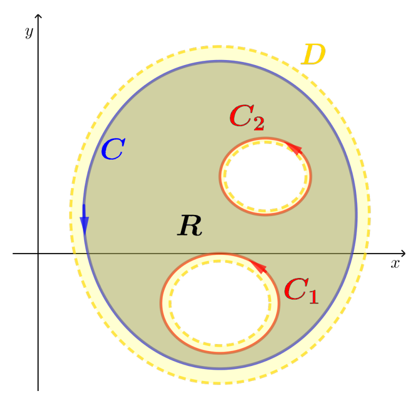


Figura 3.9: caso N=2

Demostración del caso $N = 1$. Sean f, C, C_1, R en las condiciones del enunciado y D un conjunto abierto que incluya a C, C_1 y R, en el cual f sea analítica. Consideremos dos curvas auxiliares μ, γ, suaves o suaves a trozos, incluidas en R, que conecten la curva C con C_1 como se muestra en la figura 3.8. La región R queda dividida en dos subregiones R_1 y R_2, en cada una de las cuales el teorema de Cauchy-Goursat es aplicable por separado, resultando las siguientes igualdades:

$$\int_{C_{a'b'c'}} f(z)\,dz + \int_{\gamma} f(z)\,dz + \int_{-C_{1,cba}} f(z)\,dz + \int_{\mu} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{C_{c'd'a'}} f(z)\,dz + \int_{-\mu} f(z)\,dz + \int_{-C_{1,adc}} f(z)\,dz + \int_{-\gamma} f(z)\,dz = 0$$

Sumando las dos igualdades miembro a miembro, teniendo en cuenta la propiedad de cambio de signo de la integral, resulta:

$$\int_{C_{a'b'c'}} f(z)\,dz + \int_{C_{c'd'a'}} f(z)\,dz + \int_{-C_{1,adc}} f(z)\,dz + \int_{-C_{1,cba}} f(z)\,dz = 0$$

Es decir

$$\oint_{C} f(z)\,dz + \oint_{-C_1} f(z)\,dz = \oint_{C} f(z)\,dz - \oint_{C_1} f(z)\,dz = 0$$

En conclusión

$$\oint_{C} f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz$$

□

Ejemplo 3.5.6.

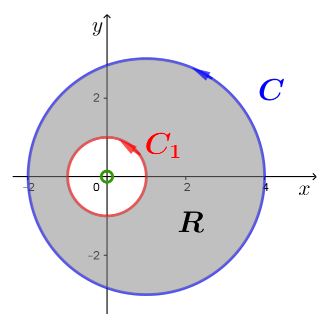
Retomemos la integral $\displaystyle\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{z}\,dz$ del ejemplo 3.3.7.

Como se vio anteriormente no es sencillo hallar su valor parametrizando $C : |z-1| = 3$. Sí lo es para la curva $C_1 : |z| = 1$ con orientación antihoraria de acuerdo con el ejemplo 3.3.3a, donde obtuvimos el valor $2\pi i$.

El integrando es analítico $D = \mathbb{C} - \{0\}$. Las curvas C y C_1 son cerradas, simples, suaves y ambas tienen la misma orientación antihoraria y C_1 es interior a C.

El teorema de Cauchy-Goursat no es aplicable individualmente a cada curva porque el origen es un punto interior a las dos. Sin embargo podemos aplicar el corolario 3.5.5, relacionando ambas integrales, por ser el origen exterior a la región R comprendida entre ellas:

$$\oint_{C} \frac{1}{z}\,dz = \oint_{C_1} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$



Actividad 3.5.7.

Sea C una curva cerrada, simple, suave o suave por tramos, con orientación antihoraria y sea $z_0 \in \mathbb{C}$ interior a C. Justificar que $I = \displaystyle\oint_{C} \frac{1}{z - z_0}\,dz = 2\pi i$ □

A continuación enunciamos un teorema, cuya demostración omitimos, que relaja aún más las hipótesis del teorema de Cauchy-Goursat permitiendo una cantidad finita de puntos interiores a la curva en los que al integrando no se le exige analiticidad pero sí continuidad. Lo utilizaremos para demostrar el teorema de la sección siguiente.

Teorema 3.5.8. *Si C es una curva cerrada, simple, suave a trozos, con orientación antihoraria y $f(z)$ es analítica sobre C y en su interior, excepto posiblemente en un número finito de puntos interiores a C en cada uno de los cuales f es continua, entonces:*

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

Ejemplo 3.5.9.

Calculemos $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}-1}{z}\,dz$

El integrando $f(z)$ es analítico en $D = \mathbb{C} - \{0\}$. No se puede aplicar el teorema de Cauchy-Goursat pues $z = 0$ es interior a C.
Empleando la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{2z}-1}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{(e^{2z}-1)'}{z'} = \lim_{z\to 0} \frac{2e^{2z}}{1} = 2$$

Como dicho límite existe, permite definir la función:

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 2 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$$

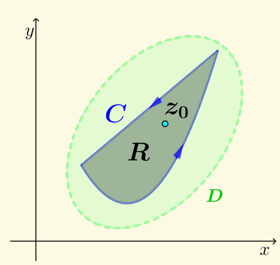
a la que puede alicarse el teorema 3.5.8 por ser analítica sobre C y en su interior, excepto posiblemente en $z = 0$ interior a C donde es continua. Luego $\displaystyle\oint_C g(z)\,dz = 0$. Pero puesto que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in C$, se deduce que $\displaystyle\oint_C f(z)\,dz = \oint_C g(z)\,dz = 0$.

3.6. Fórmula integral de Cauchy

Como hemos visto, para poder aplicar el teorema de Cauchy-Goursat es necesario que el integrando sea analítico sobre la curva y su interior. El resultado que presentaremos permite la existencia de un único punto de no analiticidad, z_0 interior a C, atribuible exclusivamente a un denominador polinómico de la forma $z - z_0$.

Teorema 3.6.1. ***Fórmula integral de Cauchy***
Sea C una curva cerrada, simple, suave o suave a trozos, con orientación antihoraria. Si $f(z)$ es una función analítica sobre C y en su interior, z_0 un punto interior a C, entonces se verifica:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)$$



Demostración Sea D un conjunto abierto que contenga a C y a su interior, en el cual f sea analítica. Definamos una función auxiliar $g(z)$ del modo siguiente:

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si} \quad z \in D, z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si} \quad z = z_0 \end{cases}$$

Observemos que g es analítica en $D - \{z_0\}$. En efecto, allí es un cociente entre dos funciones analíticas, el numerador $f(z) - f(z_0)$ analítico por hipótesis, y el denominador $z - z_0$ analítico y no nulo en $D - \{z_0\}$.
Veamos que g es continua en z_0. En efecto, como f es analítica en z_0 existe la derivada $f'(z_0)$, por lo cual:

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = g(z_0)$$

Por lo tanto g es analítica sobre C y en su interior, excepto posiblemente en el único punto z_0 donde resulta continua. Luego, aplicando el teorema 3.5.8 se deduce que:

$$\oint_C g(z)\, dz = 0$$

Así:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \oint_C \frac{f(z) - f(z_0) + f(z_0)}{z - z_0}\, dz = \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz + \oint_C \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz =$$

$$= \oint_C g(z)\, dz + f(z_0) \oint_C \frac{1}{z - z_0}\, dz = f(z_0) \oint_C \frac{1}{z - z_0}\, dz$$

De acuerdo con la actividad 3.5.7:

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0}\, dz = 2\pi i$$

De donde:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0)$$

□

Ejemplo 3.6.2.

Calculemos las siguientes integrales suponiendo orientación antihoraria. Veremos que todos estos ejemplos se ajustan a la forma del teorema 3.6.1.

a) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z^2 e^{i\pi z}}{z - 1}\, dz$

Expresemos el integrando como $\dfrac{z^2 e^{i\pi z}}{z - 1} = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$ donde $z_0 = 1$ y $f(z) = z^2 e^{i\pi z}$ analítica en $D = \mathbb{C}$ por ser producto entre una polinómica y una composición de analíticas. Luego, $f(z)$ es analítica sobre C y en su interior. Como C es una curva cerrada, simple y suave, con orientación antihoraria, de la que $z_0 = 1$ es punto interior, se deduce por la fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2 e^{i\pi z}}{z - 1}\, dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i e^{i\pi} = -2\pi i$$

b) $\displaystyle\oint_C \frac{z+2}{z(z^2+4)}\,dz$ si C es la frontera del cuadrado de vértices $\pm 1 \pm i$

El integrando es función racional por lo que resulta analítico en todo el plano excepto donde se anula su denominador: $z = 0$ (interior a C), $z = \pm 2i$ (exteriores a C).
Además $\dfrac{z+2}{z(z^2+4)} = \dfrac{f(z)}{z-z_0}$ donde $z_0 = 0$, $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2+4}$ analítica en $D = \mathbb{C} - \{-2i, 2i\}$, en particular sobre C y su interior. La curva C es cerrada (por ser frontera de un cuadrado), simple y suave a trozos, con orientación antihoraria. Aplicando la fórmula integral de Cauchy se obtiene:

$$\oint_C \frac{z+2}{z(z^2+4)}\,dz = \oint_C \frac{\frac{z+2}{z^2+4}}{z}\,dz = 2\pi i\, f(0) = \pi i$$

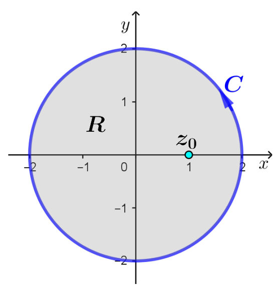


Figura 3.10: ejemplo 3.6.2a)

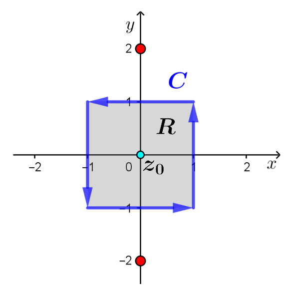


Figura 3.11: ejemplo 3.6.2b)

c) $\displaystyle\oint_{|z-2|=1} \frac{\mathrm{Ln}(z)}{(z-2)\mathrm{Ln}(z/4)}\,dz$

El integrando se escribe en la forma $\dfrac{\mathrm{Ln}(z)}{(z-2)\mathrm{Ln}(z/4)} = \dfrac{f(z)}{z-z_0}$ donde $z_0 = 2$ y $f(z) = \dfrac{\mathrm{Ln}(z)}{\mathrm{Ln}(z/4)}$ analítica en $D = \mathbb{C} - (\{z : \mathrm{Im}(z) = 0 \ \wedge \ \mathrm{Re}(z) \leq 0\} \cup \{4\})$ por ser cociente de analíticas con denominador no nulo. El camino de integración C es una circunferencia de modo que es cerrada, simple y suave y de acuerdo al enunciado su orientación es antihoraria. El semieje real negativo, el origen y el punto $z = 4$ son exteriores a C, en tanto $z_0 = 2$ es interior. Por la fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{\mathrm{Ln}(z)}{(z-2)\mathrm{Ln}(z/4)}\,dz = \oint_{|z-2|=1} \frac{\frac{\mathrm{Ln}(z)}{\mathrm{Ln}(z/4)}}{(z-2)}\,dz = 2\pi i \frac{\mathrm{Ln}(z)}{\mathrm{Ln}(z/4)}\Big|_{z=2} =$$

$$= 2\pi i \frac{\mathrm{Ln}(2)}{\mathrm{Ln}(1/2)} = -2\pi i$$

d) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{\pi z}}{z^4-1}\,dz$ si $C : \dfrac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1$

Los puntos de no analiticidad del integrando son las raíces de $z^4 - 1 = 0$. Pueden obtenerse calculando las raíces cuartas de la unidad o, como en este caso, mediante la factorización $z^4 - 1 = (z^2-1)(z^2+1) = (z+1)(z-1)(z+i)(z-i)$. Así, los puntos de no analiticidad del integrando son $z = \pm 1$ y $z = \pm i$. Solo $z_0 = i$ es interior a C. La elipse es una curva cerrada, simple y suave y tiene orientación antihoraria de acuerdo al enunciado. Por la fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_C \frac{e^{\pi z}}{z^4-1}\,dz = \oint_C \frac{\dfrac{e^{\pi z}}{(z+i)(z^2-1)}}{z-i}\,dz = 2\pi i \frac{e^{\pi z}}{(z+i)(z^2-1)}\Big|_{z=i} = 2\pi i \frac{e^{i\pi}}{(-4i)} = \frac{\pi}{2}$$

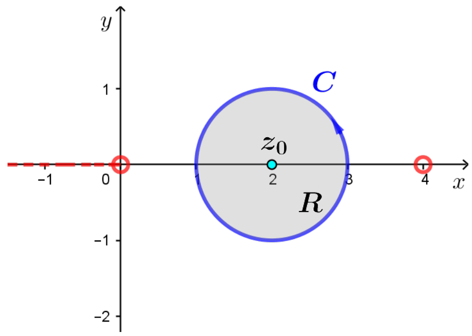


Figura 3.12: ejemplo 3.6.2c)

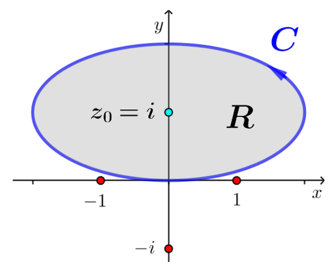


Figura 3.13: ejemplo 3.6.2d)

Ejemplo 3.6.3.

La fórmula integral no es aplicable al cálculo de $\displaystyle\oint_{|z-2|=1} \frac{1}{\mathrm{Ln}(z/2)}\,dz$

En efecto, si bien el integrando es analítico sobre $C : |z-2| = 1$ y en su interior excepto en el único punto $z = 2$ interior a C, la no analiticidad se debe a la anulación de la función no polinómica $\mathrm{Ln}(z/2)$. Para resolver esta integral necesitaremos las herramientas más generales del capítulo 5 (teoría de residuos).

Actividad 3.6.4.

Calcular las siguientes integrales con orientación antihoraria.

a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{tg}(z)}{z}\,dz$ b) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^{\mathrm{sen}(z)}}{z^3-4z}\,dz$ c) $\displaystyle\oint_{|z-i|=2} \frac{1}{z(1+e^z)^2}\,dz$

d) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{\pi/z}}{iz+2}\,dz$ si C es la frontera del triángulo de vértices: i, $\pm 2+3i$.

e) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1}{ze^{if(z)}}\,dz$ sabiendo que $f(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$ y que $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z}\,dz = i\pi^2$

En ocasiones queremos calcular integrales a lo largo de curvas cerradas C dentro de las cuales el integrando deja de ser analítico en más de una raíz de un denominador polinómico. Cuando las raíces interiores a C son todas distintas, aún podemos valernos de la fórmula integral, teniendo en cuenta previamente el corolario 3.5.5.

Ejemplo 3.6.5.

Calcular $\displaystyle\oint_C \frac{\cos(\pi z/4)}{z^3-16z}\,dz$ con $C : |z-2| = 4$ antihoraria.

Las raíces del denominador polinómico $z^3 - 16z = z(z+4)(z-4)$ son los puntos de no analiticidad del integrando. Solamente $z = 0, z = 4$ son interiores a C. Dado que el teorema 3.6.1 requiere para su aplicación un único punto de no analiticidad interior a C, vamos a "aislar" $z = 0$ y $z = 4$ con curvas auxiliares interiores a C. Sean $C_1 : |z| = 1$ y $C_2 : |z-4| = 1$, ambas con orientación antihoraria. Las tres curvas C, C_1 y C_2 son cerradas, simples y suaves y el integrando es analítico en la región comprendida entre ellas. Aplicando el corolario 3.5.5 para $N = 2$:

$$\oint_C \frac{\cos(\pi z/4)}{z^3 - 16z}\,dz = \oint_{C_1} \frac{\cos(\pi z/4)}{z^3 - 16z}\,dz + \oint_{C_2} \frac{\cos(\pi z/4)}{z^3 - 16z}\,dz$$

Cada una de las integrales en el miembro de la derecha de esta igualdad puede calcularse aplicando la fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_{C_1} \frac{\cos(\pi z/4)}{z^3 - 16z}\,dz = \oint_{|z|=1} \frac{\dfrac{\cos(\pi z/4)}{z^2-16}}{z}\,dz = 2\pi i \left.\frac{\cos(\pi z/4)}{z^2-16}\right|_{z=0} = -\frac{i\pi}{8}$$

$$\oint_{C_2} \frac{\cos(\pi z/4)}{z^3 - 16z}\,dz = \oint_{|z-4|=1} \frac{\dfrac{\cos(\pi z/4)}{z(z+4)}}{z-4}\,dz = 2\pi i \left.\frac{\cos(\pi z/4)}{z(z+4)}\right|_{z=4} = -\frac{i\pi}{16}$$

Luego:

$$\oint_C \frac{\cos(\pi z/4)}{z^3 - 16z}\,dz = -\frac{i\pi}{8} - \frac{i\pi}{16} = -\frac{3i\pi}{16}$$

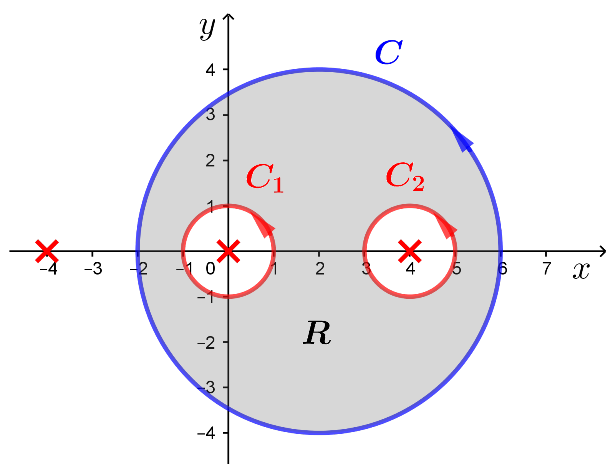


Figura 3.14: ejemplo 3.6.5

Actividad 3.6.6.

Calcular $\oint_C \dfrac{dz}{z(z^2+4z+8)}$ a lo largo de las siguientes curvas con orientación antihoraria:

a) $C_1 : |z| = 1$ b) $C_2 : |z+2-2i| = 1$ c) $C_3 : |z+2+2i| = 1$ d) $C_4 : |z| = 5$ □

3.7. Fórmula integral de Cauchy para derivadas

Sea C una curva cerrada, simple y suave por tramos, con orientación antihoraria. Sea $f(z)$ analítica sobre C y en su interior. De acuerdo con la fórmula integral de Cauchy, si z_0 es cualquier punto interior a C:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)$$

Dado que la variable de integración z es "muda", podemos reemplazarla por cualquier otra letra, digamos w. Luego de realizar este cambio, podemos a su vez designar z_0 con la letra z. Resulta así:

$$\oint_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw = 2\pi i f(z) \quad \text{para todo } z \text{ interior a } C$$

De este modo la igualdad representada por la fórmula integral pasa a ser una identidad válida en el interior de C. Como f es analítica allí, el miembro de la derecha es derivable respecto de z y por ende también lo es el miembro de la izquierda. Derivando ambos miembros respecto de z se tiene:

$$\frac{d}{dz}\oint_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw = 2\pi i f'(z)$$

En el miembro izquierdo puede probarse que las operaciones de derivación e integración son intercambiables en orden de modo que puede derivarse bajo el símbolo integral, resultando:

$$\frac{d}{dz}\oint_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \oint_C \frac{d}{dz}\left(\frac{f(w)}{w-z}\right)dw = 2\pi i f'(z)$$

Así:

$$\oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw = 2\pi i f'(z)$$

Omitiendo justificaciones teóricas, si se repite formalmente el procedimiento:

$$\oint_C \frac{2f(w)}{(w-z)^3}\,dw = 2\pi i f''(z) \quad \text{o equivalentemente} \quad \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^3}\,dw = 2\pi i \frac{f''(z)}{2!}$$

Derivando una vez más:

$$\oint_C \frac{3\cdot 2f(w)}{(w-z)^4}\,dw = 2\pi i f^{(3)}(z) \quad \text{es decir} \quad \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^4}\,dw = 2\pi i \frac{f^{(3)}(z)}{3!}$$

El proceso puede continuarse indefinidamente. Se deduce el siguiente resultado, cuya demostración rigurosa puede consultarse en [4] p.138.

Teorema 3.7.1. ***Fórmula integral de las derivadas***
Sea C una curva cerrada, simple, suave o suave a trozos, orientada en sentido antihorario y sea z_0 un punto interior a C. Si $f(z)$ es una función analítica sobre C y en su interior, entonces para cualquier entero $n \geq 1$ existe la derivada $f^{(n)}(z_0)$ y se verifica:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Observaciones

1. En el integrando la potencia del denominador es de orden $n+1$ en tanto que en el miembro de la derecha el orden de derivación y el orden del factorial es n.

2. Si en la fórmula de las derivadas se reemplaza n por 0 se obtiene precisamente la fórmula integral de Cauchy.

3. La fórmula integral de las derivadas resulta útil para calcular integrales a lo largo de curvas cerradas cuando el integrando deja de ser analítico en un único punto z_0 interior a C, siendo el responsable de la no analiticidad un factor lineal $(z-z_0)$ del denominador, que se encuentra repetido al menos dos veces.

Ejemplo 3.7.2.

Calculemos las siguiente integrales con orientación positiva.
Todas las curvas son cerradas, simples, suaves o suaves por tramos y tienen orientación antihoraria.

a) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\operatorname{sen} z}{(z-\pi)^4}\, dz$

El integrando se puede escribir como

$$\frac{\operatorname{sen} z}{(z-\pi)^4} = \frac{f(z)}{(z-\pi)^4} \quad \text{donde } f(z) = \operatorname{sen} z$$

Como $f(z)$ es analítica sobre C y en su interior y $z_0 = \pi$ es interior a C, podemos apicar la fórmula integral de las derivadas con $n+1=4$, de modo que $n=3$. Resulta:

$$\oint_{|z|=4} \frac{\operatorname{sen} z}{(z-\pi)^4}\, dz = \oint_{|z|=4} \frac{f(z)}{(z-\pi)^4}\, dz = 2\pi i \frac{f^{(3)}(\pi)}{3!} = \frac{2\pi i}{3!}\,(-\cos z)\Big|_{z=\pi} = \frac{\pi}{3} i$$

b) $\displaystyle\oint_{|z+i|=2} \frac{e^{\pi/(z-2i)}}{z^2}\, dz$

La expresión del integrando sugiere definir $f(z) = e^{\pi/(z-2i)}$, función analítica sobre C y en su interior por ser composición de analíticas (la función exponencial con una función racional. Observar que $z = 2i$, punto de no analiticidad, es exterior de C). De la fórmula integral de las derivadas, teniendo en cuenta que $z = 0$ es interior a C, se deduce:

$$\oint_{|z+i|=2} \frac{e^{\pi/(z-2i)}}{z^2}\, dz = \oint_{|z+i|=2} \frac{e^{\pi/(z-2i)}}{(z-0)^2}\, dz = \oint_{|z+i|=2} \frac{f(z)}{(z-0)^2}\, dz = 2\pi i \frac{f'(0)}{1!} =$$

$$= 2\pi i\, \frac{-\pi e^{\pi/(z-2i)}}{(z-2i)^2}\Bigg|_{z=0} = -\frac{\pi^2}{2}$$

c) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1/2} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{Ln}(z))}{(z-1)^3}\, dz$

Si $f(z) = \operatorname{sen}(\operatorname{Ln}(z))$ el integrando se expresa como

$$\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{Ln}(z))}{(z-1)^3} = \frac{f(z)}{(z-1)^3}$$

La función $f(z)$ es analítica en $D = \mathbb{C} - \{z : \operatorname{Im}(z) = 0, \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ por ser composición de analíticas. Como C y la región interior a ella están incluidas en D excepto por el único punto $z_0 = 1$, en base a la fórmula de las derivadas con $n+1 = 3$ podemos afirmar que:

$$\oint_{|z-1|=1/2} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{Ln}(z))}{(z-1)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!}\,(\operatorname{sen}(\operatorname{Ln} z))''\Big|_{z=1} = \pi i \left(\frac{\cos(\operatorname{Ln} z)}{z}\right)'\Bigg|_{z=1} =$$

$$= \pi i \frac{-\operatorname{sen}(\operatorname{Ln} z) - \cos(\operatorname{Ln} z)}{z^2}\Bigg|_{z=1} = -\pi i$$

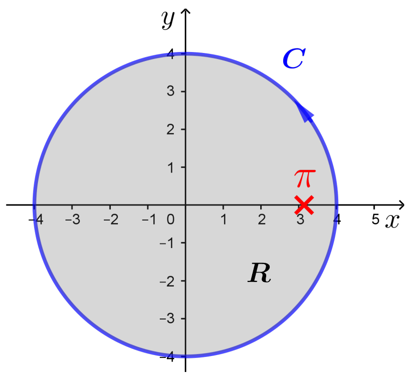


Figura 3.15: ej. 3.7.2a)

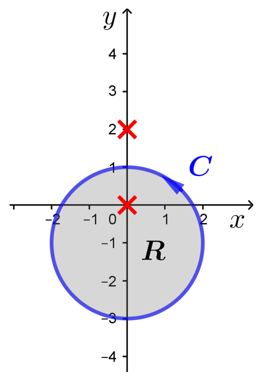


Figura 3.16: ej. 3.7.2b)

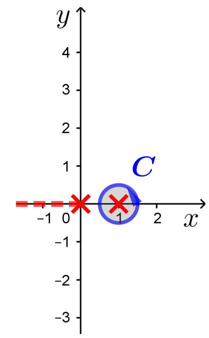
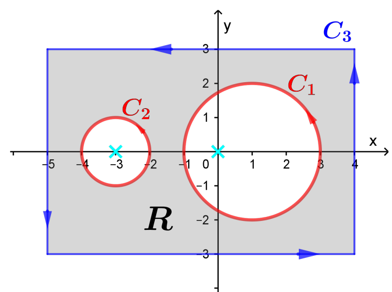


Figura 3.17: ej. 3.7.2c)

d) $\displaystyle\oint_{C_k} \frac{(z-3)^2}{z^3+3z^2}\,dz$ para $k = 1, 2, 3$ siendo:

$C_1 : |z-1| = 2$
$C_2 : |z+3| = 1$
C_3 frontera del rectángulo de vértices $-5 \pm 3i$, $4 \pm 3i$



Para la primera integral aplicamos la fórmula de las derivadas:

$$\oint_{C_1} \frac{(z-3)^2}{z^3+3z^2}\,dz = \oint_{C_1} \frac{\dfrac{(z-3)^2}{z+3}}{(z-0)^2}\,dz = 2\pi i \left(\frac{(z-3)^2}{z+3}\right)'\Big|_{z=0} =$$

$$= 2\pi i \frac{2(z^2-9)-(z-3)^2}{(z+3)^2}\Big|_{z=0} = -6\pi i$$

donde se tuvo en cuenta que $f(z) = \dfrac{(z-3)^2}{z+3}$ es analítica sobre C_1 y en su interior y $z = 0$ es punto interior a C_1.
En cuanto a la segunda integral podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_{C_2} \frac{(z-3)^2}{z^3+3z^2}\,dz = \oint_{C_2} \frac{\dfrac{(z-3)^2}{z^2}}{z-(-3)}\,dz = 2\pi i \frac{(z-3)^2}{z^2}\Big|_{z=-3} = 8\pi i$$

donde se tuvo en cuenta que $f(z) = \dfrac{(z-3)^2}{z^2}$ es analítica sobre C_2 y en su interior y $z = -3$ es punto interior a C_2.
Aplicando ahora el corolario 3.5.5 podemos asegurar que:

$$\oint_{C_3} \frac{(z-3)^2}{z^3+3z^2}\,dz = \oint_{C_1} \frac{(z-3)^2}{z^3+3z^2}\,dz + \oint_{C_2} \frac{(z-3)^2}{z^3+3z^2}\,dz = -6\pi i + 8\pi i = 2\pi i$$

Actividad 3.7.3.

Resolver las siguientes integrales. Todas las curvas se suponen positivamente orientadas.

a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^3 \cos z}\, dz$ b) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{z}{(z^2-2z+2)^2}\, dz$

c) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 \mathrm{Ln}(z+2i)}\, dz$ d) $\displaystyle\oint_{C} \frac{\cosh(\pi z)}{(z-i)^2(iz+1)}\, dz$ siendo $C : |x| + |y| = 2$ □

Corolario 3.7.4. ***Derivadas de funciones analíticas***
Si una función $f(z)$ es analítica en el punto z_0 entonces sus derivadas de cualquier orden son también funciones analíticas en z_0.

Demostración Supongamos que $f(z)$ es analítica en z_0, de manera que lo es en algún entorno de dicho punto. Consideremos una circunferencia C centrada en z_0 con orientación antihoraria y de radio suficientemente pequeño para que resulte incluida en el entorno de analiticidad de f. El teorema 3.7.1 asegura que las derivadas de cualquier orden de f existen en todo punto interior a C, en particular f''. Como $f'' = (f')'$ lo anterior dice que f' es derivable en todo punto interior a C. Y como el interior de C es un entorno de z_0, resulta f' derivable en todo un entorno de z_0. Así, f' es analítica en z_0.
Para probar que f'' es analítica en z_0 simplemente se utiliza lo que acabamos de probar comenzando con $g = f'$ en lugar de f y concluyendo entonces que g' es analítica en z_0, es decir que f'' lo es. Y así siguiendo (inducción completa). □

3.8. Valores extremos de funciones armónicas

Una consecuencia de la fórmula integral de Cauchy es el resultado siguiente [4].

Teorema 3.8.1. ***Principio del módulo máximo***
Si $f(z)$ es una función analítica y no constante en un conjunto abierto y conexo D entonces su módulo $|f(z)|$ no puede alcanzar un máximo absoluto en D.

A continuación demostraremos una consecuencia relevante.

Corolario 3.8.2. *Sea R una región cerrada y acotada del plano complejo, cuyo interior es un conjunto conexo. Si $f(z)$ es una función continua en R y analítica y no contante en su interior, entonces se verifica:*

(i) $\max\{|f(z)| : z \in R\}$ *se alcanza sobre la frontera de R y no en su interior.*

(ii) si además $f(z) \neq 0$ en todo punto interior a R entonces $\min\{|f(z)| : z \in R\}$ *se alcanza sobre la frontera de R y no en su interior.*

Demostración
Supongamos que f satisface las hipótesis de este corolario. Siendo f continua en R, también lo es $|f|$. Esta es una función de dos variables a valores reales que alcanza un máximo y un mínimo absolutos en R (puesto que R es un conjunto cerrado y acotado).
Ahora bien, el máximo absoluto no puede alcanzarse en el interior de R porque de acuerdo con el principio del módulo máximo ello implicaría que f es constante en el interior de R, contradiciendo la hipótesis. Luego, dicho máximo se alcanza necesariamente sobre la frontera

de R.
Si además se supone que f no se anula en el interior de R, entonces $g = 1/f$ resulta analítica y no constante allí. Entonces por el principio del módulo máximo $|g|$ no alcanza un máximo en el interior de R. Y dado que $|g|$ es máximo si y solo si $|f|$ es mínimo, se deduce que $|f|$ no alcanza mínimo absoluto en el interior de R. Tal mínimo ha de alcanzarse pues en la frontera de R. □

Ejemplo 3.8.3.

Dada $f(z) = ze^{-z}$ hallemos los extremos absolutos de $|f(z)|$ en $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Podemos aplicar el corolario anterior y deducir que el máximo absoluto de $|f|$ en R se alcanzará sobre la curva borde $C : |z| = 1$ y no en el interior. El mínimo absoluto ocurrirá al menos en el punto interior $z = 0$ pues allí la función se anula. Y de hecho el origen es el único punto de R donde $|f|$ alcanza su valor mínimo $|f(0)| = 0$.
Para evitar la raíz cuadrada en la expresión del módulo, resulta conveniente maximizar su cuadrado. Esto es lícito pues la función cuadrática es estrictamente monótona en los reales no negativos, conservando así el orden. Para encontrar ese máximo sobre el borde parametrizamos $C : z = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Se tiene:

$$h(t) = |f(z(t))|^2 = |e^{it}e^{-e^{it}}|^2 = |e^{-e^{it}}|^2 = |e^{-(\cos t + i \operatorname{sen} t)}|^2 = |e^{-\cos t}e^{-i \operatorname{sen} t}|^2 = e^{-2\cos t}$$

Derivamos y planteamos puntos críticos en $(0, 2\pi)$:

$$h'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-2\cos t}2 \operatorname{sen} t = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen} t = 0 \;\Leftrightarrow\; t = \pi$$

Comparamos los valores de h en el punto crítico, con los valores en los extremos del intervalo:

$$h(\pi) = e^{-2\cos\pi} = e^2 \qquad h(0) = h(2\pi) = e^{-2}$$

Entonces:

$$\text{máx}\{|f(z)| : |z| \leq 1\} = \text{máx}\{|f(z)| : |z| = 1\} = \text{máx}\left\{e, e^{-1}\right\} = e = |f(-1)|$$

Actividad 3.8.4.

Si $f(z) = z^2 - 3z + 2$ determinar los extremos absolutos de $|f(z)|$ en las siguientes regiones:

$$R_1 = \{z : |z - 1| \leq 2\} \qquad R_2 = \{z : |z| \leq 1\}$$

Sugerencia: $|f(z)| = |(z - 1)(z - 2)| = |z - 1||z - 2|$ □

Teorema 3.8.5. ***Valores extremos de funciones armónicas***
Sea R una región cerrada y acotada del plano complejo, cuyo interior es un conjunto conexo. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es una función continua en R y analítica y no constante en su interior, entonces las funciones armónicas $u(x, y)$ y $v(x, y)$ alcanzan sus valores extremos absolutos sobre la frontera de R y no en el interior de R.

Demostración Supongamos que se verifican todas las hipótesis del enunciado. La función $g(z) = e^{f(z)}$ es continua en R por ser composición de continuas, y es analítica en el interior de R por ser composición de analíticas. Además, no es constante en el interior de R pues si lo fuera, su módulo $e^{u(x,y)}$ igualmente lo sería y por ende también $u(x, y)$. De las condiciones de Cauchy-Riemann se deduciría que f es constante en el interior de R, lo que contradice

una de las hipótesis. Por lo tanto el corolario 3.8.2 es aplicable a la función $g(z)$, la que por otra parte es diferente de cero (la exponencial compleja nunca se anula). Se deduce que su módulo $e^{u(x,y)}$ alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos sobre la frontera de R. Pero siendo la exponencial real una función estrictamente creciente, se deduce que $u(x, y)$ alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos sobre la frontera de R y no en su interior.
Aplicando este resultado a la función $-if(z)$ se deduce que $v(x, y)$ alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos sobre la frontera de R y no en su interior. □

Actividad 3.8.6.

Corroborar la conclusión del teorema anterior para $v(x, y) = 2xy = \mathrm{Im}(z^2)$ en la región $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. □

Teorema 3.8.7. ***Teorema de Liouville***
Si $f(z)$ es una función analítica y acotada en todo el plano complejo entonces es constante.

Demostración Supongamos que f es analítica y acotada en $\mathbb{C}$. En particular, existe una constante $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
Vamos a probar que $f'(z)$ se anula idénticamente en $\mathbb{C}$. Sea $z^* \in \mathbb{C}$. Si $C : |z - z^*| = R$ con orientación antihoraria, entonces f es analítica sobre C y en su interior (pues lo es en todo el plano). Luego, por la fórmula integral de las derivadas:

$$f'(z^*) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z^*)^2} dz$$

Para $z \in C$:

$$\left| \frac{f(z)}{(z - z^*)^2} \right| = \frac{|f(z)|}{|z - z^*|^2} \leq \frac{M}{R^2}$$

Entonces por la propiedad de acotamiento:

$$|f'(z^*)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z^*)^2} dz \right| \leq \frac{M}{2\pi R^2} \operatorname{long}(C) = \frac{M}{2\pi R^2} 2\pi R = \frac{M}{R}$$

Esto muestra que:

$$|f'(z^*)| \leq \frac{M}{R} \ \text{ para todo } R > 0$$

Por lo tanto $|f'(z^*)| = 0$ y entonces $f'(z^*) = 0$. Dado que z^* representa un punto arbitrario del plano complejo, queda probado que f' es idénticamente nula en $\mathbb{C}$, con lo cual f es una contante. □

Observación Una situación diferente se da en el caso de las funciones analíticas reales, por ejemplo, $f(x) = \operatorname{sen} x$ es analítica en toda la recta real y está acotada, sin embargo no es constante.

Una consecuencia del teorema de Liouville es el siguiente resultado que habíamos mencionado en el capítulo 1.

Teorema 3.8.8. ***Teorema Fundamental del Álgebra***
Todo polinomio $p(z)$ no constante a coeficientes complejos admite al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

Demostración
Sea $p(z)$ polinomio no constante a coeficientes complejos. Supongamos que no admitiera ninguna raíz en $\mathbb{C}$, de modo que $p(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces la función $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ sería analítica en todo el plano complejo y no constante. Por otra parte, está acotada pues es continua y tiende a cero cuando z tiende a infinito. Esto contradice el teorema de Liouville por lo que la suposición que $p(z)$ no se anula en $\mathbb{C}$ es falsa. $\square$

Actividades complementarias

1) Resolver
   a) $\displaystyle\oint_C z\,\mathrm{Im}(z)\,dz$ siendo C la frontera antihoraria del triángulo de vértices 3, $3i$, 0.
   b) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{Ln}(\overline{z})}{z}\,dz$ siendo $C : |z| = 1$ en sentido antihorario desde $z_1 = -i$ hasta $z_2 = 1$.

2) Calcular
   a) $\displaystyle\int_i^1 \frac{z+i}{z^3}\,dz$ b) $\displaystyle\int_3^{3i} \left(z - \frac{3i}{z}\right)^2 dz$
   c) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z\,\mathrm{Ln}^2(z)}\,dz$ si $C : |z| = 2$ antihoraria desde $z_1 = -2i$ hasta $z_2 = 2i$.

3) Si $f(z)$ es analítica en $D = \mathbb{C} - \{1, -2, 3i\}$ y se sabe que:

$$\oint_{|z-1|=1} f(z)\,dz = 2 \qquad \oint_{|z+2|=1} f(z)\,dz = -2 \qquad \oint_{|z-3i|=1} f(z)\,dz = 0$$

   Averiguar el valor de $\displaystyle\oint_C f(z)\,dz$ en los siguientes casos, sabiendo que C es una curva cerrada, simple, suave por tramos, con orientación antihoraria. Justificar la respuesta.

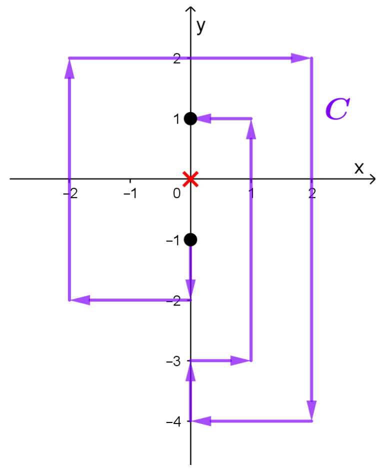
   (i) C encierra a $z = 1$ pero no encierra ni a $z = -2$ ni a $z = 3i$
   (ii) C encierra a $z = 1$ y a $z = -2$ pero no encierra a $z = 3i$
   (iii) C encierra a los tres puntos $z = 1$, $z = -2$ y $z = 3i$

4) ¿Puede aplicarse la fórmula integral de Cauchy para calcular $I = \displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1}{\mathrm{sen}\, z} dz$?

5) Calcular las siguientes integrales orientando positivamente y enunciando el teorema o la propiedad que utilice.

   a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \left(\overline{z}^2 + \frac{z}{\cosh z}\right) dz$ b) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{e^{-2i\pi z}}{z-3} dz$ c) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{Ln}(3-z)}{\mathrm{Ln}(3+z)}\,dz$
   d) $\displaystyle\oint_{C_k} \frac{e^{-z}}{2z^2 - z^3} dz$, $C_1 : |z-2| = 1$, $C_2 : |z| = 4$ e) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{z^4}{z^2+4} dz$
   f) $\displaystyle\int_C \left((z+1)^4 - \mathrm{Re}\, z\right) dz$, C segmento desde $z_1 = 0$ hasta $z_2 = i$

6) Calcule $\displaystyle\int_C z^{-1}\,dz$ siendo C la poligonal de la figura.



3.9. Actividades resueltas

Actividad 3.1.6

a)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t - i\ \mathrm{sen}\, t)^3\, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(e^{-it}\right)^3 dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-3it} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\cos(3t) - i\ \mathrm{sen}(3t)]\, dt =$$

$$= \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(3t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + i\,\frac{1}{3}\cos(3t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$

b)

$$\int_1^2 \left(\frac{2i}{t} - t^2\right)^2 dt = \int_1^2 \left(-\frac{4}{t^2} - 4it + t^4\right) dt = \left(\frac{4}{t} - 2it^2 + \frac{t^5}{5}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \left(2 - 8i + \frac{32}{5}\right) - \left(4 - 2i + \frac{1}{5}\right) = \frac{21}{5} - 6i$$

c)

$$\int_0^1 (t + it)^5\, dt = \int_0^1 [(1+i)t]^5\, dt = \int_0^1 (1+i)^5 t^5 dt = (1+i)^5 \frac{t^6}{6}\Big|_0^1 = -\frac{2}{3} - \frac{2i}{3}$$

d)

$$\int_0^\pi te^{int}\, dt = \int_0^\pi [t\cos(nt) + it\,\mathrm{sen}(nt)]\ dt$$

$$\int_0^\pi t\cos(nt)\, dt = \frac{t\,\mathrm{sen}(nt)}{n}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\mathrm{sen}(nt)}{n}\, dt = \frac{t\,\mathrm{sen}(nt)}{n}\Big|_0^\pi + \frac{\cos(nt)}{n^2}\Big|_0^\pi = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

$$\int_0^\pi t\,\mathrm{sen}(nt)\, dt = -\frac{t\cos(nt)}{n}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{n}\, dt = -\frac{t\cos(nt)}{n}\Big|_0^\pi + \frac{\mathrm{sen}(nt)}{n^2}\Big|_0^\pi = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}$$

Entonces:

$$\int_0^\pi te^{int}\, dt = \int_0^\pi [t\cos(nt) + it\,\mathrm{sen}(nt)]\ dt = \int_0^\pi t\cos(nt)\, dt + i\int_0^\pi t\,\mathrm{sen}(nt)\, dt =$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{n^2} + i\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} = \begin{cases} -\dfrac{2}{n^2} + \dfrac{i\pi}{n} & \text{si} \quad n \text{ es impar} \\ -\dfrac{i\pi}{n} & \text{si} \quad n \text{ es par} \end{cases}$$

Actividad 3.1.8

$$\int_0^\pi e^{it}dt = \int_0^\pi (\cos t + i\,\operatorname{sen} t)\,dt = \operatorname{sen} t\Big|_0^\pi - i\,\cos t\Big|_0^\pi = 2i$$

Entonces:

$$\left|\int_0^\pi e^{it}dt\right| = |2i| = 2$$

Por otra parte:

$$\int_0^\pi \left|e^{it}\right| dt = \int_0^\pi 1\,dt = \pi$$

Vemos que se cumple la desigualdad de la propiedad de acotamiento:

$$\left|\int_0^\pi e^{it}dt\right| = |2i| = 2 \leq \pi = \int_0^\pi \left|e^{it}\right| dt$$

$$\int_0^\pi \overline{e^{it}}dt = \int_0^\pi e^{-it}dt = \int_0^\pi (\cos t - i\,\operatorname{sen} t)\;dt = \operatorname{sen} t\Big|_0^\pi + i\,\cos t\Big|_0^\pi = -2i$$

En forma similar:

$$\int_0^\pi e^{it}dt = \int_0^\pi (\cos t + i\,\operatorname{sen} t)\;dt = \operatorname{sen} t\Big|_0^\pi - i\,\cos t\Big|_0^\pi = 2i$$

Se verifica entonces:

$$\int_0^\pi \overline{e^{it}}dt = -2i = \overline{2i} = \overline{\int_0^\pi e^{it}dt}$$

Actividad 3.2.2

a)

$$\int \left(z - \frac{1}{z^3} - \operatorname{sen} z\right) dz = \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2z^2} + \cos z + C\ ,\ z \in D = \mathbb{C} - \{0\}$$

pues $F(z) = \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{1}{2z^2} + \cos z$ es analítica en D y para todo $z \in D$ vale:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2z^2} + \cos z\right) = z - \frac{1}{z^3} - \operatorname{sen} z$$

b)

$$\int \frac{\operatorname{Ln} z}{z}\,dz = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}^2(z) + C\ ,\ z \in D = \mathbb{C} - \{z : \operatorname{Im}(z) = 0\ \wedge\ \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$$

pues $F(z) = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}^2(z)$ es analítica en D y para todo $z \in D$ vale:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2}\operatorname{Ln}^2(z)\right) = \frac{\operatorname{Ln} z}{z}$$

c)

$$\int \frac{e^{1/z}}{z^2}\,dz = -e^{1/z} + C\ ,\ z \in D = \mathbb{C} - \{0\}$$

pues $F(z) = -e^{1/z}$ es analítica en D y para todo $z \in D$ vale:

$$\frac{d}{dz}\left(-e^{1/z}\right) = \frac{e^{1/z}}{z^2}$$

Actividad 3.3.6

a) (i) $C : z = 1 + it, 0 \le t \le 1$

$$\int_C \mathrm{Re}(z)\,dz = \int_0^1 \mathrm{Re}(1+it)\,i\,dt = \int_0^1 i\,dt = it\Big|_0^1 = i$$

(ii) $C : |z-3| = 2$ con orientación antihoraria.
Parametrización $C : z = 3 + 2e^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Entonces:

$$\int_C \mathrm{Re}(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(3+2e^{it})\,i2e^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(3 + 2e^{it} + \overline{3+2e^{it}}\right)\,i2e^{it}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(3 + 2e^{it} + 3 + 2e^{-it}\right)\,i2e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} \left(6 + 2e^{it} + 2e^{-it}\right)e^{it}\,dt =$$

$$= i\int_0^{2\pi} \left(6e^{it} + 2e^{2it} + 2\right)dt = i\left(-i6e^{it} - ie^{2it} + 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = i\pi 4$$

b) Evaluemos $\displaystyle\int_C \mathrm{Im}(z^2)\,dz$ a lo largo del segmento orientado desde $z_1 = 1+i$ hasta $z_2 = 0$. Dicha integral existe pues el integrando es continuo en todo el plano, por ser composición de funciones continuas. Parametrizando trivialmente

$$-C : z = t + it, t \in [0,1]$$

se tiene $z'(t) = 1 + i$.

$$\int_C \mathrm{Im}(z^2)\,dz = -\int_{-C} \mathrm{Im}(z^2)\,dz = -\int_0^1 \mathrm{Im}\left((t+it)^2\right)(1+i)\,dt = -\int_0^1 \mathrm{Im}\left(i2t^2\right)(1+i)\,dt =$$

$$= -(1+i)\int_0^1 2t^2\,dt = -(1+i)\frac{2}{3}t^3\Big|_0^1 = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i$$

c) $C : z = i + e^{-it}, t \in [0, \pi/2]$

$$\int_C \frac{1}{i\,\overline{z} - 1}dz = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{i\,\overline{i + e^{-it}} - 1}(-ie^{-it})dt = \int_0^{\pi/2} \frac{-ie^{-it}}{i\,(-i+e^{it}) - 1}dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{-ie^{-it}}{1 + ie^{it} - 1}dt = \int_0^{\pi/2} \frac{-ie^{-it}}{ie^{it}}dt = -\int_0^{\pi/2} e^{-2it}dt = -\frac{i}{2}e^{-2it}\Big|_0^{\pi/2} = i$$

Actividad 3.4.8

1) a) $C_1 : z = 1 + t(i-1), t \in [0,1]$

$$I_1 = \int_{C_1} \mathrm{Im}(z)\,dz = \int_0^1 t(i-1)\,dt = (i-1)\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$I_1^* = \int_{C_1} z\,dz = \int_0^1 [1 + t(i-1)]\,(i-1)\,dt = \int_0^1 [(i-1) - 2it]\,dt = \left[(i-1)t - it^2\right]\Big|_0^1 = -1$$

b) $C_2 : z = e^{it}, t \in [0, \pi/2]$

$$I_2 = \int_{C_2} \operatorname{Im}(z)\, dz = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(t)\, ie^{it}\, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2i} \left(e^{it} - e^{-it}\right) ie^{it}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(e^{2it} - 1\right)\, dt =$$

$$= \left(-\frac{i}{4}e^{2it} - \frac{t}{2}\right) \Big|_0^{\pi/2} = \left(\frac{i}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{i}{4} = -\frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}$$

$$I_2^* = \int_{C_2} z\, dz = \int_0^{\pi/2} e^{it} ie^{it} dt = \int_0^{\pi/2} ie^{2it} dt = \frac{1}{2}e^{2it}\Big|_0^{\pi/2} = -1$$

c) $C_3 = C_{31} \cup C_{32}$
$C_{31} : z = -t, t \in [-1, 0]$ $C_{32} : z = it, t \in [0, 1]$

$$I_{31} = \int_{C_{31}} \operatorname{Im}(z)\, dz = \int_{-1}^{0} 0\, dt = 0$$

$$I_{31}^* = \int_{C_{31}} z\, dz = \int_{-1}^{0} (-t)(-1)\, dt = \int_{-1}^{0} t\, dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}$$

$$I_{32} = \int_{C_{32}} \operatorname{Im}(z)\, dz = \int_0^1 ti\, dt = \frac{it^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{i}{2}$$

$$I_{32}^* = \int_{C_{32}} z\, dz = \int_0^1 (it)(i)\, dt = \int_0^1 (-t)\, dt = -\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$I_3 = \int_{C_3} \operatorname{Im}(z)\, dz = I_{31} + I_{32} = \frac{i}{2}$$

$$I_3^* = \int_{C_3} z\, dz = I_{31}^* + I_{32}^* = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

Vemos que $I_1^* = I_2^* = I_3^* = -1$. De hecho la integral $\displaystyle\int_C z\, dz$ es independiente del camino en $D = \mathbb{C}$ pues el integrando $f(z) = z$ admite allí la primitiva $F(z) = \dfrac{z^2}{2}$. Entonces para cualquier curva con extremo inicial $z_1 = 1$ y extremo final $z_2 = i$:

$$\int_1^i z\, dz = F(i) - F(1) = \frac{z^2}{2}\Big|_1^i = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

En cambio, $\int_C \operatorname{Im}(z)\, dz$ no es independiente del camino en ningún conjunto del plano complejo pues de serlo, por el teorema de independencia del camino su integrando resultaría analítico en D. Pero como sabemos, $f(z) = \operatorname{Im}(z)$ no es analítica en ningún D puesto que no verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann. De manera que no debe sorprendernos que I_1, I_2 e I_3 no hayan arrojado el mismo valor.

2) a) $\displaystyle\int_0^{i\pi} \left[3e^{-z} + 2\, \operatorname{senh}(z)\right]\, dz$

El integrando es analítico en $D = \mathbb{C}$ y admite allí la primitiva $F(z) = -3e^{-z} + 2\, \cosh(z)$. Luego, la integral es independiente del camino en D y aplicando la regla de Barrow resulta:

$$\int_0^{i\pi} \left[3e^{-z} + 2\, \operatorname{senh}(z)\right]\, dz = \left(-3e^{-z} + 2\, \cosh(z)\right)\Big|_0^{i\pi} =$$

$$= \left(-3e^{-i\pi} + 2\cosh(i\pi)\right) - (-3+2) = 2$$

b) $\displaystyle\int_{1+i}^{1+3i} \frac{1}{(z-2i)^2} dz$

El integrando es analítico en $D = \mathbb{C} - \{2i\}$ y admite allí la primitiva $F(z) = -\dfrac{1}{z-2i}$. Luego, la integral es independiente del camino en D y aplicando la regla de Barrow resulta:

$$\int_{1+i}^{1+3i} \frac{1}{(z-2i)^2} dz = -\frac{1}{z-2i}\Big|_{1+i}^{1+3i} = -\frac{1}{(1+3i)-2i} + \frac{1}{(1+i)-2i} =$$

$$= -\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} = -\frac{1-i}{2} + \frac{1+i}{2} = i$$

c) $\displaystyle\int_{-i\pi/2}^{i\pi/2} \frac{e^z}{(1-e^z)^2}\, dz$

$$1 - e^z = 0 \;\Leftrightarrow\; e^z = 1 \;\Leftrightarrow\; z \in \ln(1) \;\Leftrightarrow\; z = i2k\pi,\, k \in \mathbb{Z}$$

El integrando es analítico en $D = \mathbb{C} - \{i2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ y admite allí la primitiva $F(z) = \dfrac{1}{1-e^z}$. Luego, la integral es independiente del camino en D y aplicando la regla de Barrow resulta:

$$\int_{-i\pi/2}^{i\pi/2} \frac{e^z}{(1-e^z)^2}\, dz = \frac{1}{1-e^z}\Big|_{-i\pi/2}^{i\pi/2} = \frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i} = \frac{1+i}{2} - \frac{1-i}{2} = i$$

d) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{-1/z}}{z^2}\, dz$

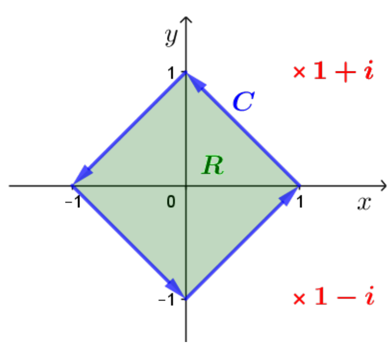
El integrando es analítico en $D = \mathbb{C} - \{0\}$ y admite allí la primitiva $F(z) = e^{-1/z}$. Luego, la integral es independiente del camino en D y como C es curva cerrada y está incluida en D, la integral vale cero.

$$\oint_C \frac{e^{-1/z}}{z^2}\, dz = 0$$

Actividad 3.5.4

a) $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^2-2z+2} dz$

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\times 2}}{2} \;\Leftrightarrow\; z = \frac{2 \pm 2i}{2} \;\Leftrightarrow\; z = 1 \pm i$$



El integrando $f(z) = \dfrac{1}{z^2-2z+2}$ es analítico en $D = \mathbb{C} - \{1+i, 1-i\}$ por ser función racional con denominador no nulo.

La curva C (frontera de un cuadrado) es cerrada, simple, suave a trozos y tiene orientación

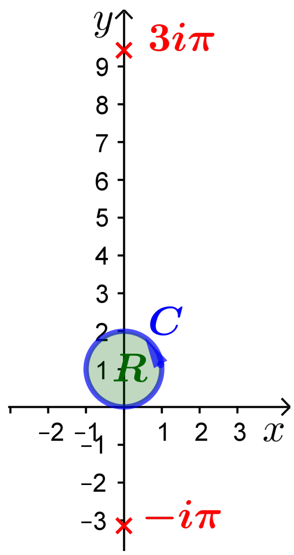
antihoraria (por convención).
La región limitada por C es el cuadrado $R = \{x + iy : |x| + |y| \leq 1\}$.
Puesto que $1 \pm i$ son exteriores a C, tanto C como R están incluidas en D.
De acuerdo con el teorema de Cauchy-Goursat:

$$\oint_C \frac{1}{z^2 - 2z + 2} dz = 0$$

b) $\displaystyle\oint_C \frac{z}{e^{z/2} + i} dz$

$$e^{z/2} + i = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{z/2} = -i \;\Leftrightarrow\; \frac{z}{2} \in \ln(-i) \;\Leftrightarrow\; \frac{z}{2} = \ln|-i| + i \arg(-i) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{z}{2} = i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; z = (4k - 1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$$



El integrando $f(z) = \dfrac{z}{e^{z/2} + i}$ es analítico en $D = \mathbb{C} - \{(4k - 1)\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$ por ser cociente de analíticas con denominador no nulo.
La curva C (circunferencia) es cerrada, simple, suave y tiene orientación antihoraria (por convención).
La región limitada por C es el círculo $R = \{z : |z - i| \leq 1\}$.
Puesto que $(4k - 1)\pi i$ son exteriores a C para todo $k \in \mathbb{Z}$, tanto C como R están incluidas en D.
Por el teorema de Cauchy-Goursat:

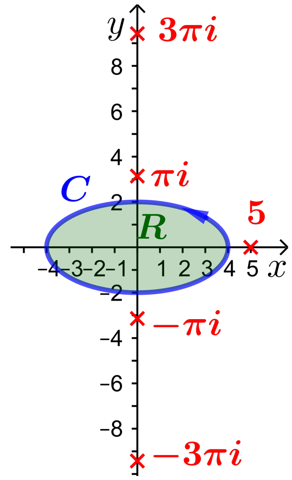
$$\oint_C \frac{z}{e^{z/2} + i} dz = 0$$

c) $\displaystyle\oint_C \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z - 5}\right)}{e^z + e^{2z}} dz$

$$e^z + e^{2z} = 0 \;\Leftrightarrow\; e^z(1 + e^z) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 + e^z = 0 \;\Leftrightarrow\; e^z = -1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; z \in \ln(-1) \;\Leftrightarrow\; z = \ln|-1| + i \arg(-1) \;\Leftrightarrow\; z = i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\; z = (2k + 1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$$



El integrando $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z-5}\right)}{e^z + e^{2z}}$ es analítico en $D = \mathbb{C} - (\{(2k+1)\pi i : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5\})$ por ser cociente de analíticas con denominador no nulo.
La curva C (elipse) es cerrada, simple, suave y tiene orientación antihoraria (por convención).
La región limitada por C es $R = \{x + iy : x^2 + 4y^2 \leq 16\}$.
Puesto que $z = 5$ y $z = (2k+1)\pi i$ son exteriores a C para todo $k \in \mathbb{Z}$, tanto C como R están incluidas en D.
Aplicando el teorema de Cauchy-Goursat:

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z-5}\right)}{e^z + e^{2z}} dz = 0$$

Actividad 3.5.7

$I = \displaystyle\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz$ donde C es una curva cerrada, simple y suave o suave por tramos y z_0 un punto interior a C.

Sea $d = \min\limits_{z \in C} |z - z_0|$. Como $z_0 \notin C$ resulta $d > 0$.
Consideremos la curva auxiliar $C^* : |z - z_0| = R$ con $0 < R < d$, orientada en sentido antihorario.
Parametrizando: $C^* : z = z_0 + Re^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Entonces $Z'(t) = iRe^{it}$. Por lo tanto

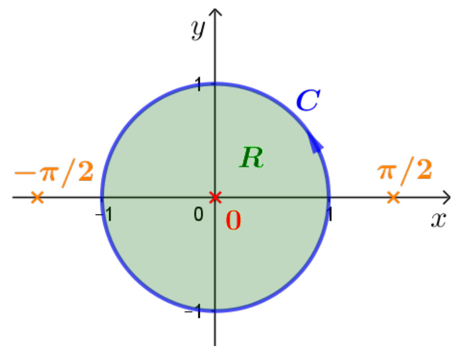
$$\oint_{C^*} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(z_0 + Re^{it}) - z_0} iRe^{it} dt = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

El integrando $f(z) = (z - z_0)^{-1}$ es analítico en $D = \mathbb{C} - \{z_0\}$. Tomando R suficientemente pequeño podemos aplicar el corolario del teorema de Cauchy-Goursat con $N = 1$ para el par de curvas C y C^* pues ellas y la región limitada por ellas están incluidas en D. Luego, como ambas tienen la misma orientación:

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = \oint_{C^*} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$$

Actividad 3.6.4

a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg}(z)}{z} dz$



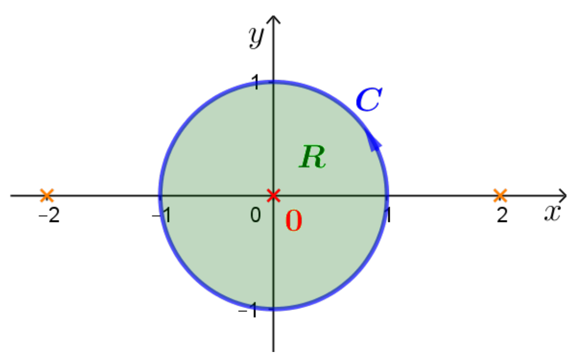
La curva $C : |z| = 1$ (circunferencia) es cerrada, simple y suave y de acuerdo con el enunciado tiene orientación antihoraria.
El integrando puede escribirse

$$\frac{\operatorname{tg}(z)}{z} = \frac{f(z)}{z - z_0} \quad \text{donde } \; f(z) = \operatorname{tg}(z), z_0 = 0$$

La función f es analítica en $D = \mathbb{C} - \{(2k+1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$
La región limitada por C es $R = \{z : |z| \leq 1\}$. Tanto C como R están incluidas en D.
El punto $z_0 = 0$ es interior a C.
Aplicando la fórmula integral de Cauchy resulta:

$$\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg}(z)}{z} dz = \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z - 0} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \operatorname{tg}(0) = 0$$

b) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^{\operatorname{sen}(z)}}{z^3 - 4z} dz$



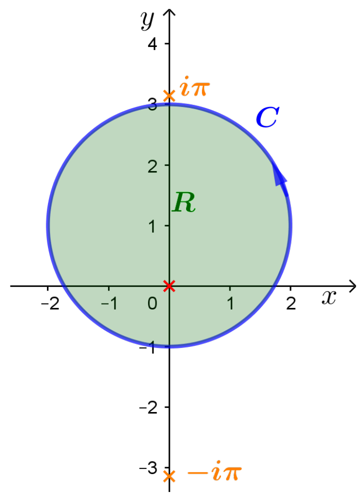
La curva $C : |z| = 1$ (circunferencia) es cerrada, simple y suave y de acuerdo con el enunciado tiene orientación antihoraria.
El integrando puede escribirse

$$\frac{e^{\operatorname{sen}(z)}}{z^3 - 4z} = \frac{e^{\operatorname{sen}(z)}}{z(z^2 - 4)} = \frac{\frac{e^{\operatorname{sen}(z)}}{z^2 - 4}}{z} = \frac{f(z)}{z - z_0} \quad \text{donde } \; f(z) = \frac{e^{\operatorname{sen}(z)}}{z^2 - 4}, z_0 = 0$$

La función f es analítica en $D = \mathbb{C} - \{-2, 2\}$
La región limitada por C es $R = \{z : |z| \leq 1\}$. Tanto C como R están incluidas en D.
El punto $z_0 = 0$ es interior a C.
Aplicando la fórmula integral de Cauchy resulta:

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{\operatorname{sen}(z)}}{z^3 - 4z} dz = \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z - 0} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \left.\frac{e^{\operatorname{sen}(z)}}{z^2 - 4}\right|_{z=0} = -\frac{i\pi}{2}$$

c) $\displaystyle\oint_{|z-i|=2} \frac{1}{z\left(1+e^{z}\right)^{2}}dz$



La curva $C : |z-i| = 1$ (circunferencia) es cerrada, simple y suave y de acuerdo con el enunciado tiene orientación antihoraria.
El integrando puede escribirse

$$\frac{1}{z\left(1+e^{z}\right)^{2}} = \frac{\left(1+e^{z}\right)^{-2}}{z} = \frac{f(z)}{z-z_0} \quad \text{donde } f(z) = \left(1+e^{z}\right)^{-2}, z_0 = 0$$

Además:

$$1+e^{z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{z} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \ln(-1) \quad \Leftrightarrow \quad z = (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

La función f es analítica en $D = \mathbb{C} - \{(2k+1)\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$
La región limitada por C es $R = \{z : |z-i| \leq 1\}$. Tanto C como R están incluidas en D.
El punto $z_0 = 0$ es interior a C.
Aplicando la fórmula integral de Cauchy resulta:

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{1}{z\left(1+e^{z}\right)^{2}}dz = \oint_{|z-i|=2} \frac{f(z)}{z-0}dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \left(1+e^{z}\right)^{-2}\Big|_{z=0} = \frac{i\pi}{2}$$

e) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1}{ze^{if(z)}}dz$

La curva $C : |z| = 1$ (circunferencia) es cerrada, simple y suave y su orientación es antihoraria de acuerdo al enunciado.
El integrando puede escribirse

$$\frac{1}{ze^{if(z)}} = \frac{e^{-if(z)}}{z} = \frac{g(z)}{z-z_0} \quad \text{donde } g(z) = e^{-if(z)}, z_0 = 0$$

La función g es analítica en $D = \mathbb{C}$ (composición de analíticas).
La región limitada por C es $R = \{z : |z| \leq 1\}$. Tanto C como R están incluidas en D.
El punto $z_0 = 0$ es interior a C.
Aplicando la fórmula integral de Cauchy resulta:

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{ze^{if(z)}}dz = \oint_{|z|=1} \frac{g(z)}{z-0}dz = 2\pi i g(0) = 2\pi i e^{-if(z)}\Big|_{z=0} = 2\pi i e^{-if(0)} \qquad (\ddagger)$$

Consideremos ahora la otra integral del enunciado:

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = i\pi^2$$

Podemos también aplicar la fórmula integral de Cauchy:

$$i\pi^2 = \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-0} dz = 2\pi i f(0)$$

Se deduce que

$$f(0) = \frac{i\pi^2}{2\pi i} = \frac{\pi}{2}$$

Reemplazando en (‡) se obtiene:

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z e^{if(z)}} dz = 2\pi i e^{-if(0)} = 2\pi i e^{-i\pi/2} = 2\pi$$

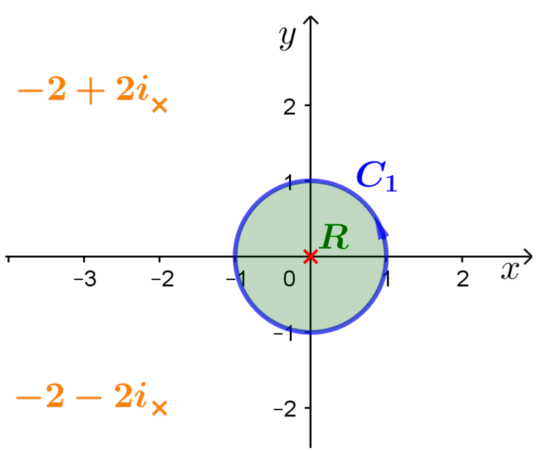
Actividad 3.6.6

$$\oint_{C_k} \frac{1}{z(z^2+4z+8)} dz$$

La curva C_k (circunferencias) es cerrada, simple y suave y de acuerdo con el enunciado tiene orientación antihoraria.

$$z^2+4z+8=0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4\times 8}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-4 \pm 4i}{2} \quad \Leftrightarrow \quad z = -2 \pm 2i$$

a)



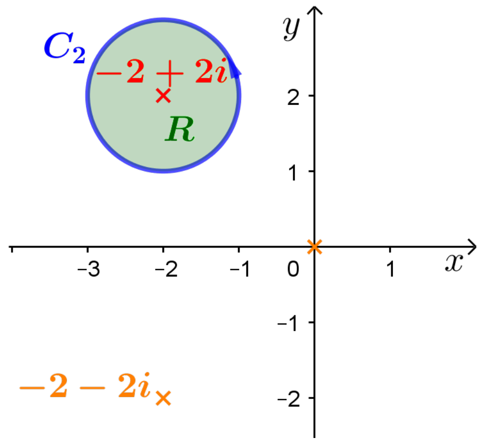
El integrando puede escribirse

$$\frac{1}{z(z^2+4z+8)} = \frac{f(z)}{z-z_0} \quad \text{donde } f(z) = \frac{1}{z^2+4z+8}, z_0 = 0$$

La función f es analítica en $D = \mathbb{C} - \{-2+2i, -2-2i\}$
La región limitada por C es $R = \{z : |z| \leq 1\}$. Tanto C como R están incluidas en D.
El punto $z_0 = 0$ es interior a C.
Aplicando la fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z(z^2+4z+8)} dz = \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-0} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \frac{1}{z^2+4z+8}\Big|_{z=0} = \frac{i\pi}{4}$$

b)



El integrando puede escribirse

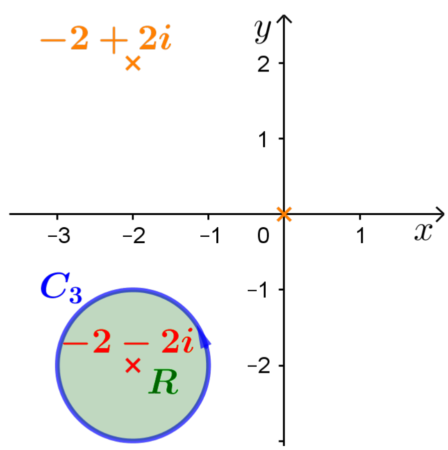
$$\frac{1}{z(z^2+4z+8)} = \frac{f(z)}{z-z_0} \quad \text{donde } \ f(z) = \frac{1}{z(z+2+2i)}, z_0 = -2+2i$$

La función f es analítica en $D = \mathbb{C} - \{0, -2-2i\}$
La región limitada por C es $R = \{z : |z+2-2i| \leq 1\}$. Tanto C como R están incluidas en D.
El punto $z_0 = -2+2i$ es interior a C.
Aplicando la fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_{|z+2-2i|=1} \frac{1}{z(z^2+4z+8)} dz = \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-(-2+2i)} dz =$$

$$= 2\pi i f(-2+2i) = 2\pi i \frac{1}{z(z+2+2i)}\bigg|_{z=-2+2i} = \pi \frac{1}{-4+4i} = -\frac{\pi}{8} - i\frac{\pi}{8}$$

c)



El integrando puede escribirse

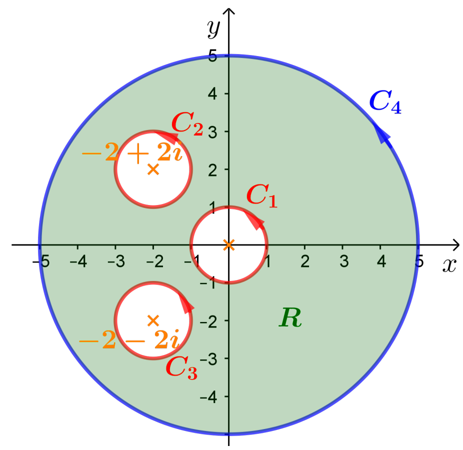
$$\frac{1}{z(z^2+4z+8)} = \frac{f(z)}{z-z_0} \quad \text{donde } \ f(z) = \frac{1}{z(z+2-2i)}, z_0 = -2-2i$$

La función f es analítica en $D = \mathbb{C} - \{0, -2+2i\}$
La región limitada por C es $R = \{z : |z+2+2i| \leq 1\}$. Tanto C como R están incluidas en D.

El punto $z_0 = -2 - 2i$ es interior a C.
Aplicando la fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_{|z+2+2i|=1} \frac{1}{z(z^2+4z+8)}dz = \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-(-2-2i)}dz =$$
$$= 2\pi i f(-2-2i) = 2\pi i \frac{1}{z(z+2-2i)}\Big|_{z=-2-2i} = \frac{\pi}{8} - i\frac{\pi}{8}$$

d) En este caso podemos aplicar el corolario del teorema de Cauchy-Goursat con $N = 3$.



En efecto, las curvas C_k con $k = 1, 2, 3$ son interiores a C_4. Las cuatro tienen la misma orientación.
El integrando

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+4z+8)}$$

es analítico en $D = \mathbb{C} - \{0, -2+2i, -2-2i\}$.
Las cuatro curvas están incluidas en D, así como también la región R entre ellas.
Por lo tanto:

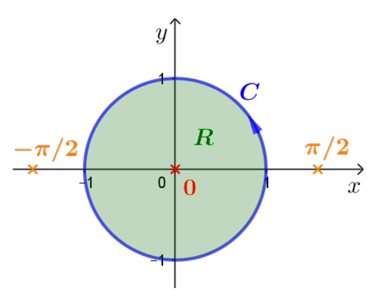
$$\oint_{C_4} \frac{1}{z(z^2+4z+8)}dz = \sum_{k=1}^{3} \oint_{C_k} \frac{1}{z(z^2+4z+8)}dz = \frac{i\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{8} - i\frac{\pi}{8}\right) + \left(\frac{\pi}{8} - i\frac{\pi}{8}\right) = 0$$

Actividad 3.7.3

a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^3\cos(z)}dz$

La curva $C : |z| = 1$ (circunferencia) es cerrada, simple y suave y de acuerdo con el enunciado tiene orientación antihoraria.

$$\cos(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = (2k+1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}$$



El integrando puede escribirse

$$\frac{1}{z^3\cos(z)} = \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} \quad \text{donde } \ f(z) = \frac{1}{\cos(z)}, z_0 = 0$$

La función f es analítica en $D = \mathbb{C} - \{(2k+1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$
La región limitada por C es $R = \{z : |z| \leq 1\}$. Tanto C como R están incluidas en D.
El punto $z_0 = 0$ es interior a C.
Aplicando la fórmula integral de Cauchy de las derivadas con $n = 2$:

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^3\cos(z)}dz = \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{(z-0)^3}dz = 2\pi i\frac{f^{(2)}(0)}{2!} = \pi i\left(\frac{1}{\cos(z)}\right)''\Big|_{z=0} =$$

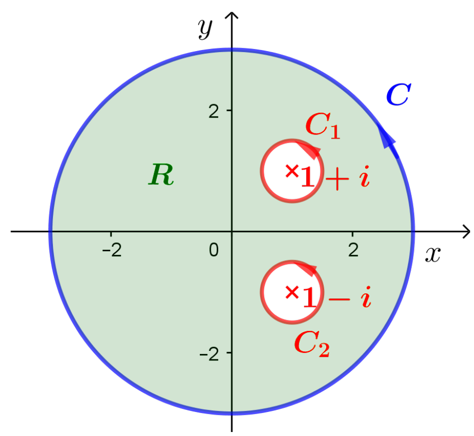
$$= \pi i\left(\frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos^2(z)}\right)'\Big|_{z=0} = \pi i\frac{\cos(z)\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z)2\cos(z)}{\cos^4(z)}\Big|_{z=0} =$$

$$= \pi i\frac{\cos^2 z + 2\operatorname{sen}^2 z}{\cos^3 z}\Big|_{z=0} = \pi i$$

b) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{z}{(z^2-2z+2)^2}dz$

La curva $C : |z| = 3$ (circunferencia) es cerrada, simple y suave y de acuerdo con el enunciado tiene orientación antihoraria.

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \ \Leftrightarrow \ z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\times 2}}{2} \ \Leftrightarrow \ z = 1 \pm i$$



El integrando $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-2z+2)^2}$ es analítico sobre C y en su interior excepto en los puntos $z = 1 \pm i$. Por ese motivo consideramos dos curvas auxiliares $C_1 : |z-1-i| = 1/4$ y $C_2 : |z-1+i| = 1/4$ con orientación antihoraria. Son curvas cerradas, simples y suaves (circunferencias) y son interiores a C. Además f es analítica sobre las tres curvas y en la región R limitada por ellas. Por el corolario del teorema de Cauchy-Goursat para $N = 2$ se deduce que:

$$\oint_C \frac{z}{(z^2-2z+2)^2}dz = \oint_{C_1} \frac{z}{(z^2-2z+2)^2}dz + \oint_{C_2} \frac{z}{(z^2-2z+2)^2}dz$$

Calculemos las integrales del miembro de la derecha.

$$\oint_{C_1} \frac{z}{(z^2-2z+2)^2}dz = \oint_{C_1} \frac{z}{(z-1-i)^2(z-1+i)^2}dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{z}{(z-1+i)^2}}{(z-1-i)^2}dz$$

donde $f_1(z) = \dfrac{z}{(z-1+i)^2}$ es analítica sobre C_1 y en su interior y $z = 1+i$ es interior a C_1. Luego, por la fórmula de Cauchy de las derivadas, con $n = 1$ resulta:

$$\oint_{C_1} \frac{\dfrac{z}{(z-1+i)^2}}{(z-1-i)^2} dz = \oint_{C_1} \frac{f_1(z)}{(z-(1+i))^2} dz = 2\pi i \frac{f_1'(1+i)}{1!} = 2\pi i \left(\frac{z}{(z-1+i)^2} \right)' \Big|_{z=1+i} =$$

$$= 2\pi i \frac{(z-1+i)^2 - z2(z-1+i)}{(z-1+i)^4} \Big|_{z=1+i} = 2\pi i \frac{-z-1+i}{(z-1+i)^3} \Big|_{z=1+i} = \frac{\pi}{2}$$

Análogamente:

$$\oint_{C_2} \frac{z}{(z^2-2z+2)^2} dz = \oint_{C_2} \frac{z}{(z-1-i)^2(z-1+i)^2} dz = \oint_{C_2} \frac{\dfrac{z}{(z-1-i)^2}}{(z-1+i)^2} dz$$

donde $f_2(z) = \dfrac{z}{(z-1-i)^2}$ es analítica sobre C_2 y en su interior y $z = 1-i$ es interior a C_2. Luego, por la fórmula de Cauchy de las derivadas, con $n = 1$ resulta:

$$\oint_{C_2} \frac{\dfrac{z}{(z-1-i)^2}}{(z-1+i)^2} dz = \oint_{C_2} \frac{f_2(z)}{(z-(1-i))^2} dz = 2\pi i \frac{f_2'(1-i)}{1!} = 2\pi i \left(\frac{z}{(z-1-i)^2} \right)' \Big|_{z=1-i} =$$

$$= 2\pi i \frac{(z-1-i)^2 - z2(z-1-i)}{(z-1-i)^4} \Big|_{z=1-i} = 2\pi i \frac{-z-1-i}{(z-1-i)^3} \Big|_{z=1-i} = -\frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto:

$$\oint_C \frac{z}{(z^2-2z+2)^2} dz = \oint_{C_1} \frac{z}{(z^2-2z+2)^2} dz + \oint_{C_2} \frac{z}{(z^2-2z+2)^2} dz = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

c) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 \operatorname{Ln}(z+2i)} dz$

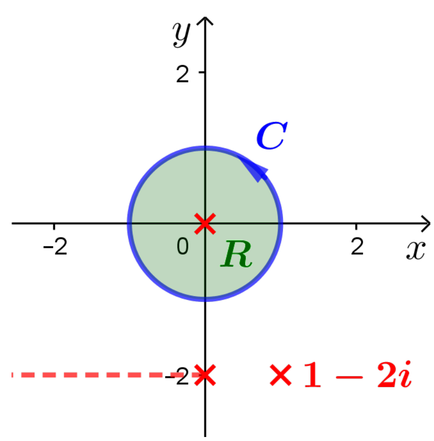
La curva $C : |z| = 1$ (circunferencia) es cerrada, simple y suave y de acuerdo con el enunciado tiene orientación antihoraria.

$$\operatorname{Ln}(z+2i) \text{ no es analítica } \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z+2i) = 0 \ \wedge\ \operatorname{Re}(z+2i) \leq 0 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ y+2 = 0 \ \wedge\ x \leq 0 \ \Leftrightarrow\ y = -2 \ \wedge\ x \leq 0$$

Además:

$$\operatorname{Ln}(z+2i) = 0 \ \Leftrightarrow\ z+2i = 1 \ \Leftrightarrow\ z = 1-2i$$

Por lo tanto, el integrando es analítico en $D = \mathbb{C} - (\{x+iy : y = -2 \ \wedge\ x \leq 0\} \cup \{0, 1-2i\})$



Escribamos el integrando como

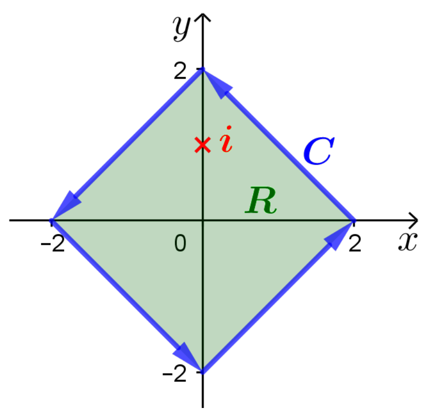
$$\frac{1}{z^2\,\mathrm{Ln}(z+2i)} = \frac{f(z)}{(z-0)^2} \text{ donde } f(z) = \frac{1}{\mathrm{Ln}(z+2i)}, z_0 = 0$$

Entonces f es analítica sobre C y en su interior y z_0 es interior a C. Por la fórmula de Cauchy de las derivadas para $n = 1$ resulta:

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2\,\mathrm{Ln}(z+2i)}dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-0)^2}dz = 2\pi i\frac{f'(0)}{1!} = -\frac{\pi}{(\ln(2)+i(\pi/2)^2)}$$

d) $\displaystyle\oint_{|x|+|y|=2} \frac{\cosh(\pi z)}{(z-i)^2(iz+1)}dz$

La curva $C : |z| = 1$ (circunferencia) es cerrada, simple y suave a trozos y de acuerdo con el enunciado tiene orientación antihoraria.



Escribimos el integrando como

$$\frac{\cosh(\pi z)}{i(z-i)^3} = \frac{-i\cosh(\pi z)}{(z-i)^3} = \frac{f(z)}{(z-i)^3} \text{ donde } f(z) = -i\cosh(\pi z), z_0 = i$$

La función $f(z)$ es analítica sobre C y en su interior y $z_0 = i$ es punto interior a C. Aplicando el la fórmula integral de Cauchy de las derivadas con $n = 2$ se obtiene:

$$\oint_{|x|+|y|=2} \frac{\cosh(\pi z)}{(z-i)^2(iz+1)}dz = \oint_C \frac{-i\cosh(\pi z)}{(z-i)^3}dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-i)^3}dz = 2\pi i\frac{f''(i)}{2!} =$$

$$= \pi i(-i\pi\,\mathrm{senh}(\pi z))'\Big|_{z=i} = \pi i(-i\pi^2\cosh(\pi z))\Big|_{z=i} = \pi^3\cosh(\pi i) = -\pi^3$$

Actividad 3.8.4

$f(z) = z^2-3z+2 = (z-1)(z-2)$ es analítica en $\mathbb{C}$. En particular lo es en los conjuntos cerrados y acotados $R_1 = \{z : |z-1| \leq 2\}$ y $R_2 = \{z : |z| \leq 1\}$. Anotemos $\partial R_1 = \{z : |z-1| = 2\}$ y $\partial R_2 = \{z : |z| = 1\}$. Como se cumplen las hipótesis del corolario 3.8.2 en ambas regiones entonces para $k = 1, 2$:

$$\max_{z\in R_k} |f(z)| = \max_{z\in\partial R_k} |f(z)|$$

El mínimo absoluto de $|f(z)|$ solo se puede alcanzar en el interior de R_k cuando es cero, es decir en los puntos $z = 1$ o $z = 2$.
Para evitar expresiones que contengan raíces cuadradas usaremos el hecho que los $z \in R_k$ que optimizan $|f(z)|$ son los mismos que los que optimizan $|f(z)|^2$.

Extremos absolutos en R_1:
Parametrizamos $\partial R_1 : z = 1 + 2e^{it}, t \in [0, 2\pi]$.
Evaluamos

$$g(t) = |f(Z(t))|^2 = |Z(t) - 1|^2 |Z(t) - 2|^2 = |2e^{it}|^2 |2e^{it} - 1|^2 = 4|2e^{it} - 1|^2 =$$
$$= 4|(-1 + 2 \cos t) + i2 \operatorname{sen} t|^2 = 4(-1 + 2 \cos t)^2 + 16 \operatorname{sen}^2 t =$$
$$= 4(1 - 4 \cos t + 4 \cos^2 t) + 16 \operatorname{sen}^2 t = 20 - 16 \cos t$$

Puntos críticos en $(0, 2\pi)$: $g'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen} t = 0 \;\Leftrightarrow\; t = \pi$
Entonces:

$$\max_{z \in R_1} |f(z)|^2 = \max_{z \in \partial R_1} |f(z)|^2 = \max_{t \in [0, 2\pi]} g(t) = \max\{g(0), g(\pi), g(2\pi)\} =$$
$$= \max\{4, 36\} = 36 = g(\pi) = |f(Z(\pi))|^2 = |f(-1)|^2$$

Por lo tanto:

$$\max_{z \in R_1} |f(z)| = |f(-1)| = 6$$

resultado que por otra parte podía conocerse de inmediato teniendo en cuenta que sobre ∂R_1 el módulo $|f(z)| = 2|z - 2|$ mide el doble de la distancia entre $z \in \partial R_1$ y $z_0 = 2$. Es claro que $z = -1$ es el punto de ∂R_1 más alejado de $z_0 = 2$.
Por otra parte:

$$\min_{z \in R_1} |f(z)| = |f(1)| = |f(2)| = 0$$

Extremos absolutos en R_2:
Parametrizamos $\partial R_2 : z = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$.
Evaluamos

$$g(t) = |f(Z(t))|^2 = |Z(t) - 1|^2 |Z(t) - 2|^2 = |e^{it} - 1|^2 |e^{it} - 2|^2 =$$
$$= |(-1 + \cos t) + i \operatorname{sen} t|^2 |(-2 + \cos t) + i \operatorname{sen} t|^2 =$$
$$= \left((-1 + \cos t)^2 + \operatorname{sen}^2 t\right) \left((-2 + \cos t)^2 + \operatorname{sen}^2 t\right) =$$
$$= \left(1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t\right) \left(4 - 4 \cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t\right) =$$
$$= 2(1 - \cos t)(5 - 4 \cos t)$$

Puntos críticos en $(0, 2\pi)$:

$$g'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 \operatorname{sen} t\,(5 - 4 \cos t) + 2(1 - \cos t)4 \operatorname{sen} t = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 2 \operatorname{sen} t\,(9 - 8 \cos t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = \pi$$

Entonces:

$$\max_{z \in R_2} |f(z)|^2 = \max_{z \in \partial R_2} |f(z)|^2 = \max_{t \in [0, 2\pi]} g(t) = \max\{g(0), g(\pi), g(2\pi)\} =$$
$$= \max\{0, 36\} = 36 = g(\pi) = |f(Z(\pi))|^2 = |f(-1)|^2$$

Por lo tanto: $\max\limits_{z\in R_2}|f(z)| = |f(-1)| = 6$. Además: $\min\limits_{z\in R_2}|f(z)| = |f(1)| = 0$

Actividad 3.8.6

Si se buscan los puntos críticos de $v(x,y)$ en el interior de R:

$$\begin{cases} v_x(x,y) = 0 \\ v_y(x,y) = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} 2y = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \equiv (x,y) = (0,0)$$

A continuación analizamos en el borde de R: $\begin{cases} x = \cos\, t \\ y = \text{sen}\, t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$.
Evaluamos

$$g(t) = v(x(t), y(t)) = 2\,\cos\, t\ \text{sen}\, t = \text{sen}\,(2t)$$

Puntos críticos en $(0, 2\pi)$:

$$g'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos\,(2t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t_k = \frac{(2k-1)\pi}{4}\ (k = 1,2,3,4)$$

Luego:

$$M = \max_{(x,y)\in R} v(x,y) = \max\left\{g(0), g\left(\frac{\pi}{4}\right), g\left(\frac{3\pi}{4}\right), g\left(\frac{5\pi}{4}\right), g\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right\} =$$

$$= \max\{0, 1, -1\} = 1 = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = v\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = v\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$m = \min_{(x,y)\in R} v(x,y) = \min\left\{g(0), g\left(\frac{\pi}{4}\right), g\left(\frac{3\pi}{4}\right), g\left(\frac{5\pi}{4}\right), g\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right\} =$$

$$= \min\{0, 1, -1\} = -1 = g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = g\left(\frac{7\pi}{4}\right) = v\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = v\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

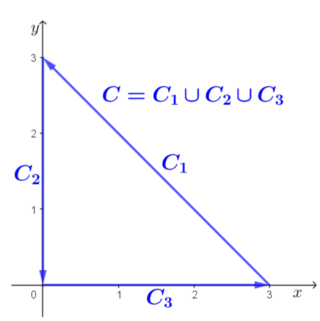
Efectivamente, los extremos absolutos se alcanzan en el borde de R.

Actividades complementarias

Ejercicio 1

a)

$$\oint_C z\,\text{Im}(z)\,dz,\ \ C \text{ frontera del triángulo de vértices } 3, 3i, 0$$



$f(z) = z\,\mathrm{Im}(z)$ es continua en $\mathbb{C}$, en particular sobre C, y $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ es suave a trozos. Por lo tanto la integral existe.

$C_1 : z = 3 + t(3i - 3) = (3 - 3t) + i3t, t \in [0, 1]$
$Z'(t) = 3i - 3$
$f(Z(t)) = Z(t)\,\mathrm{Im}(Z(t)) = ((3 - 3t) + i3t)3t$

$$I_1 = \int_{C_1} z\,\mathrm{Im}(z)\,dz = \int_0^1 f(Z(t))Z'(t)\,dt = \int_0^1 (-27t + (27t - 54t^2)i)\,dt =$$

$$= \left(-\frac{27t^2}{2} + \frac{27it^2}{2} - 18it^3\right)\Big|_0^1 = -\frac{27}{2} - \frac{9i}{2}$$

$C_2 : z = 3i - 3it, t \in [0, 1]$
$Z'(t) = -3i$
$f(Z(t)) = Z(t)\,\mathrm{Im}(Z(t)) = (3i - 3it)(3 - 3t) = 9i(1 - t)^2$

$$I_2 = \int_{C_2} z\,\mathrm{Im}(z)\,dz = \int_0^1 f(Z(t))Z'(t)\,dt = \int_0^1 9i(1 - t)^2(-3i)\,dt = (-9)\,(1 - t)^3\Big|_0^1 = 9$$

$C_3 : z = t, t \in [0, 3]$
$Z'(t) = 1$
$f(Z(t)) = Z(t)\,\overbrace{\mathrm{Im}(Z(t))}^{0} = 0$

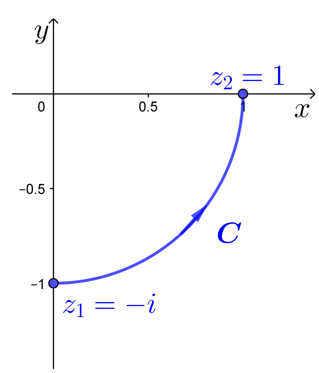
$$I_3 = \int_{C_3} z\,\mathrm{Im}(z)\,dz = \int_0^3 f(Z(t))Z'(t)\,dt = \int_0^3 0\,dt = 0$$

Entonces:

$$\oint_C z\,\mathrm{Im}(z)\,dz = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{27}{2} - \frac{9i}{2} + 9 + 0 = -\frac{9}{2} - \frac{9i}{2}$$

b)

$$\int_C \frac{\mathrm{Ln}(\overline{z})}{z}\,dz, \;\; C : |z| = 1 \;\text{ desde } z_1 = -i \text{ hasta } z_2 = 1 \text{ (antihoraria)}$$



$f(z) = \dfrac{\mathrm{Ln}(\overline{z})}{z}$ es continua en $\mathbb{C} - \{z : \mathrm{Im}(z) = 0 \;\wedge\; \mathrm{Re}(z) \le 0\}$, en particular sobre C, y C es suave. Por lo tanto la integral existe.

$C : z = e^{it}, t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$
$Z'(t) = ie^{it}$

$$f(Z(t)) = \frac{\mathrm{Ln}(\overline{Z(t)})}{Z(t)} = \frac{\mathrm{Ln}(\overline{e^{it}})}{e^{it}} = \frac{\mathrm{Ln}(e^{-it})}{e^{it}} = -\frac{it}{e^{it}} \text{ pues } -t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset (-\pi, \pi]$$

$$\int_C \frac{\mathrm{Ln}(\overline{z})}{z}\, dz = \int_{-\pi/2}^{0} f(Z(t))Z'(t)\, dt = \int_{-\pi/2}^{0} \left(-\frac{it}{e^{it}}\right) ie^{it}\, dt = \int_{-\pi/2}^{0} t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{-\pi/2}^{0} = -\frac{\pi^2}{8}$$

Ejercicio 2

a)

$$\int_i^1 \frac{z+i}{z^3}\, dz$$

La integral es independiente del camino en $D = \mathbb{C} - \{0\}$. En efecto

$$f(z) = \frac{z+i}{z^3} = \frac{1}{z^2} + \frac{i}{z^3} \text{ admite como primitiva a } F(z) = -\frac{1}{z} - \frac{i}{2z^2}$$

Por lo tanto la integral se puede calcular aplicando la regla de Barrow:

$$\int_i^1 \frac{z+i}{z^3}\, dz = \left(-\frac{1}{z} - \frac{i}{2z^2}\right)\Big|_i^1 = \left(-1 - \frac{i}{2}\right) - \left(i + \frac{i}{2}\right) = -1 - 2i$$

b)

$$\int_3^{3i} \left(z - \frac{3i}{z}\right)^2 dz = \int_3^{3i} \left(z^2 - 6i - \frac{9}{z^2}\right) dz$$

La integral es independiente del camino en $D = \mathbb{C} - \{0\}$ pues el integrando admite la primitiva

$$F(z) = \frac{z^3}{3} - 6iz + \frac{9}{z}$$

Por lo tanto la integral se puede calcular aplicando la regla de Barrow:

$$\int_3^{3i} \left(z - \frac{3i}{z}\right)^2 dz = \int_3^{3i} \left(z^2 - 6i - \frac{9}{z^2}\right) dz = \left(\frac{z^3}{3} - 6iz + \frac{9}{z}\right)\Big|_3^{3i} =$$

$$= (-9i + 18 - 3i) - (9 - 18i + 3) = 6 + 6i$$

c)

$$\int_C \frac{dz}{z\,\mathrm{Ln}^2(z)}, \quad C : |z| = 2 \text{ (antihoraria) desde } z_1 = -2i \text{ hasta } z_2 = 2i$$

El integrando es analítico en $D = \mathbb{C} - (\{z : \mathrm{Im}(z) = 0 \;\wedge\; \mathrm{Re}(z) \le 0\} \cup \{1\})$ y admite allí la primitiva

$$F(z) = -\frac{1}{\mathrm{Ln}(z)}$$

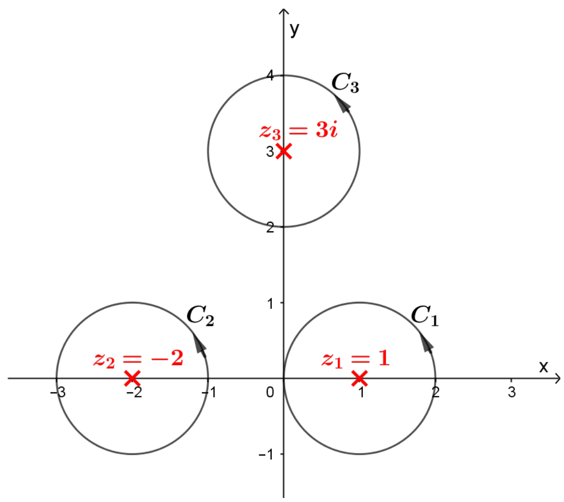
Como $C \subset D$, podemos aplicar la regla de Barrow:

$$\int_C \frac{dz}{z\,\mathrm{Ln}^2(z)} = -\frac{1}{\mathrm{Ln}(z)}\Big|_{-2i}^{2i} = -\frac{1}{\mathrm{Ln}(2i)} + \frac{1}{\mathrm{Ln}(-2i)} = -\frac{1}{\ln 2 + \frac{i\pi}{2}} + \frac{1}{\ln 2 - \frac{i\pi}{2}} = \frac{4i\pi}{\ln^2 4 + \pi^2}$$

Ejercicio 3

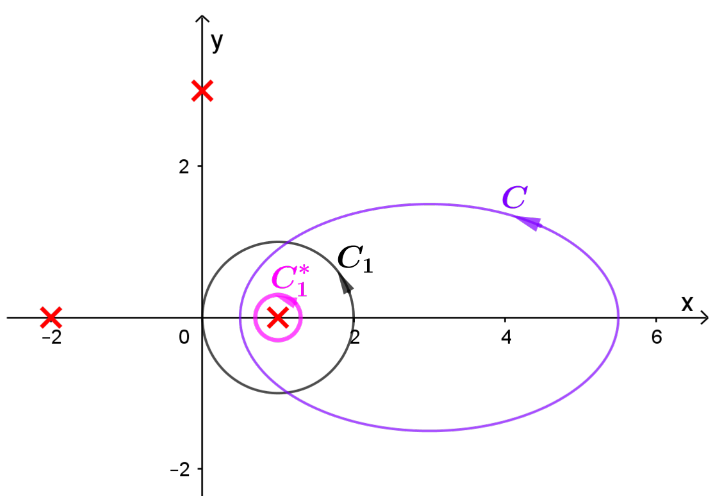
Sean $C_1 : |z-1| = 1$, $C_2 : |z+2| = 1$, $C_3 : |z-3i| = 1$, todas con orientación antihoraria. Se sabe que $f(z)$ es una función analítica en $D = \mathbb{C} - \{1, -2, 3i\}$ y se dan los valores de las integrales siguientes:

$$I_1 = \oint_{C_1} f(z)\,dz = 2\,,\;\; I_2 = \oint_{C_2} f(z)\,dz = -2\,,\;\; I_1 = \oint_{C_3} f(z)\,dz = 0$$



En lo que sigue C es una curva cerrada, simple y suave o suave a trozos, con orientación antihoraria, incluida en D, con la condición adicional que se da en cada inciso:

i) $z_1 = 1$ es interior a C y $z_2 = -2, z_3 = 3i$ son exteriores a C. Consideremos una curva auxiliar (antihoraria) $C_1^* : |z-1| = R$ con $0 < R < 1$ adecuadamente pequeño para que C_1^* sea interior a C y a C_1.



Como f es analítica sobre C_1^* y C y en la región entre ellas, aplicando el corolario del teorema de Cauchy-Goursat resulta:

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1^*} f(z)\,dz \qquad (1)$$

Análogamente para las curvas C_1 y C_1^* puesto que f es analítica sobre ellas y en la región entre ellas. Entonces:

$$\oint_{C_1^*} f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz \qquad (2)$$

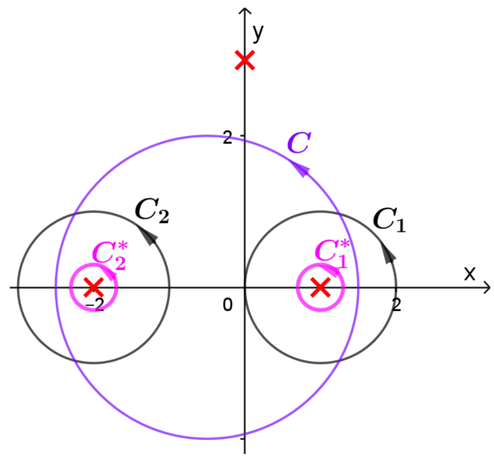
De (1) y (2) se deduce que

$$\oint_{C} f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz$$

de modo que

$$\oint_{C} f(z)\,dz = 2$$

ii) $z_1 = 1$, $z_2 = -2$ son interiores a C y $z_3 = 3i$ es exterior a C. Consideremos dos curvas auxiliares (antihorarias) $C_1^* : |z-1| = R$, $C_2^* : |z+2| = R$, con $0 < R < 1$ adecuadamente pequeño para que C_1^* sea interior a C_1 y C, y C_2^* sea interior a C_2 y C.



Como f es analítica sobre C_1^*, C_2^* y C y en la región entre ellas, aplicando el corolario del teorema de Cauchy-Goursat resulta:

$$\oint_{C} f(z)\,dz = \oint_{C_1^*} f(z)\,dz + \oint_{C_2^*} f(z)\,dz \qquad (3)$$

Análogamente como f es analítica sobre C_1 y C_1^* y en la región entre ellas, entonces por el mismo corolario:

$$\oint_{C_1^*} f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz \qquad (4)$$

Y también, dado que f es analítica sobre C_2 y C_2^* y en la región entre ellas, entonces por el mismo corolario:

$$\oint_{C_2^*} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz \qquad (5)$$

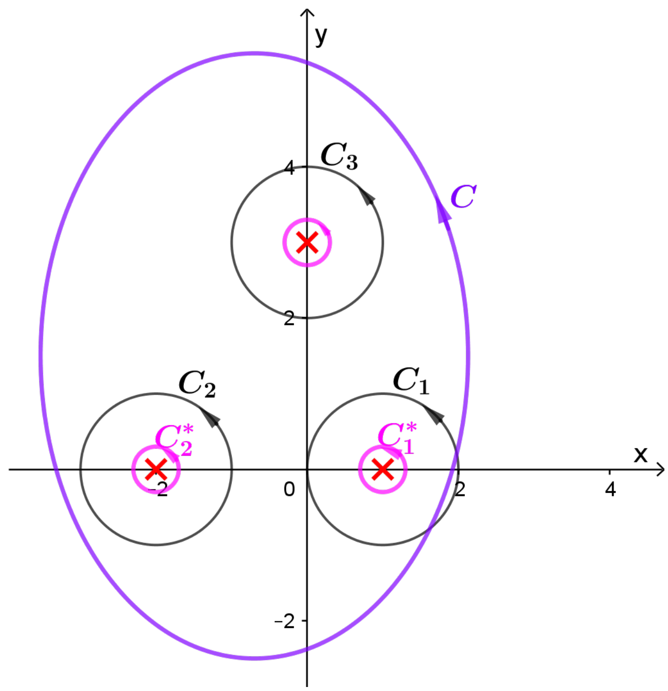
De (3), (4) y (5) se deduce que

$$\oint_{C} f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z) + \oint_{C_2} f(z)\,dz = 2 - 2 = 0$$

de modo que

$$\oint_{C} f(z)\,dz = 0$$

iii) $z_1 = 1$, $z_2 = -2$ y $z_3 = 3i$ son interiores a C. Consideremos tres curvas auxiliares (antihorarias) $C_1^* : |z-1| = R$, $C_2^* : |z+2| = R$ y $C_3^* : |z-3i| = R$, con $0 < R < 1$ adecuadamente pequeño para que C_k^* sea interior a C_k y C $(k = 1, 2, 3)$.



Como la función f es analítica sobre C_k y C_k^* y en la región entre ellas, por el corolario del teorema de Cauchy-Goursat vale para $k = 1, 2, 3$:

$$\oint_{C_k^*} f(z)\, dz = \oint_{C_k} f(z)\, dz \qquad (6)$$

Y el mismo corolario se aplica para las curvas C, C_1^*, C_2^* y C_3^*, así que:

$$\oint_{C} f(z)\, dz = \oint_{C_1^*} f(z)\, dz + \oint_{C_2^*} f(z)\, dz + \oint_{C_3^*} f(z)\, dz \qquad (7)$$

Entonces, de (6) y (7):

$$\oint_{C} f(z)\, dz = \oint_{C_1} f(z)\, dz + \oint_{C_2} f(z)\, dz + \oint_{C_3} f(z)\, dz$$

Luego:

$$\oint_{C} f(z)\, dz = 2 - 2 + 0 = 0$$

Ejercicio 4

La fórmula integral de Cauchy no es aplicable en este caso porque si bien la curva $C : |z| = 1$ es cerrada, simple, suave y tiene orientación antihoraria y encierra en su interior al punto de no analiticidad $z_0 = 0$ del integrando, la causa de la no analiticidad en z_0 se atribuye al denominador no polinómico $D(z) = \operatorname{sen} z$.

Ejercicio 5

a)

$$\oint_{|z|=1} \left(\overline{z}^2 + \frac{z}{\cosh z} \right) dz$$

Por la propiedad de linealidad:

$$\oint_{|z|=1}\left(\overline{z}^2+\frac{z}{\cosh z}\right)dz=\oint_{|z|=1}\overline{z}^2dz+\oint_{|z|=1}\frac{z}{\cosh z}dz$$

La primera integral en el miembro de la derecha se resuelve parametrizando:
$C: z=e^{it}, t\in[0,2\pi]$
$dz=ie^{it}dt$

$$\oint_{|z|=1}\overline{z}^2dz=\int_0^{2\pi}\left(\overline{e^{it}}\right)^2 ie^{it}\,dt=\int_0^{2\pi}\left(e^{-it}\right)^2 ie^{it}\,dt=\int_0^{2\pi}e^{-2it}ie^{it}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}ie^{-it}\,dt=-e^{-it}\Big|_0^{2\pi}=0$$

La segunda integral se resuelve aplicando el teorema de Cauchy-Goursat: la curva $C:|z|=1$ es cerrada, simple, suave y tiene orientación antihoraria. El integrando es analítico sobre C y en su interior. En efecto:

$$\cosh z=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{e^z+e^{-z}}{2}=0 \;\Leftrightarrow\; e^z+e^{-z}=0 \;\Leftrightarrow\; e^z\left(e^z+e^{-z}\right)=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; e^{2z}+1=0 \;\Leftrightarrow\; e^{2z}=-1 \;\Leftrightarrow\; 2z\in\ln(-1) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2z=i(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; z=i(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$$

Como todos estos puntos tienen módulo mayor que 1 ellos son exteriores a C. Luego, por el teorema mencionado resulta:

$$\oint_{|z|=1}\frac{z}{\cosh z}dz=0$$

Por lo tanto:

$$\oint_{|z|=1}\left(\overline{z}^2+\frac{z}{\cosh z}\right)dz=\oint_{|z|=1}\overline{z}^2dz+\oint_{|z|=1}\frac{z}{\cosh z}dz=0+0=0$$

b)

$$\oint_{|z|=4}\frac{e^{-2i\pi z}}{z-3}\,dz$$

La curva $C:|z|=4$ es cerrada, simple y suave y tiene orientación antihoraria.
El integrando es analítico en todo el plano complejo excepto en el punto $z_0=3$. Podemos escribir dicho integrando en la forma:

$$\frac{e^{-2i\pi z}}{z-3}=\frac{f(z)}{z-3}\;\text{ con } f(z)=e^{-2i\pi z}$$

La función f es analítica sobre C y en su interior. El punto z_0 es interior a C. Entonces, por la fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_{|z|=4}\frac{e^{-2i\pi z}}{z-3}\,dz=\oint_{|z|=4}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=2\pi i f(z_0)=2\pi i f(3)=2\pi ie^{-2i\pi z}\Big|_{z=3}=2\pi ie^{-6i\pi}=2\pi i$$

c)

$$\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{Ln}(3-z)}{\mathrm{Ln}(3+z)}\,dz$$

Sean $N(z) = \text{Ln}(3-z)$ y $D(z) = \text{Ln}(3+z)$. Averigüemos dónde son analíticas escribiendo $z = x + iy$. Entonces:

$$3 - z = 3 - (x+iy) = (3-x) + i(-y) \qquad 3 + z = 3 + (x+iy) = (3+x) + iy$$

Por lo tanto:

$$N(z) \text{ es analítica } \Leftrightarrow -y = 0 \wedge 3 - x \leq 0 \Leftrightarrow y = 0 \wedge x \geq 3$$

$$D(z) \text{ es analítica } \Leftrightarrow y = 0 \wedge 3 + x \leq 0 \Leftrightarrow y = 0 \wedge x \leq -3$$

Además:

$$D(z) = 0 \Leftrightarrow 3 + z = 1 \Leftrightarrow z = -2$$

Así, el integrando resulta analítico en $D = \mathbb{C} - (\{z : \text{Im}(z) = 0 \wedge |\text{Re}(z)| \geq 3\} \cup \{-2\})$ La curva $C : |z| = 1$ es cerrada, simple, suave y tiene orientación antihoraria. El integrando es analítico sobre C y en su interior (pues estos están incluidos en D). Entonces por el teorema de Cauchy-Goursat:

$$\oint_{|z|=1} \frac{\text{Ln}(3-z)}{\text{Ln}(3+z)}\, dz = 0$$

d)

$$\oint_{C_k} \frac{e^{-z}}{2z^2 - z^3}\, dz = \oint_{C_k} \frac{e^{-z}}{z^2(2-z)}\, dz \qquad C_1 : |z-2| = 1,\, C_2 : |z| = 4$$

Ambas curvas son cerradas, simples y suaves y poseen orientación antihoraria. El integrando es analítico en $D = \mathbb{C} - \{0, 2\}$.
Para calcular la integral a lo largo de C_1 notamos que el integrando es analítico sobre C_1 y en su interior excepto en $z = 2$. Lo escribimos en la forma:

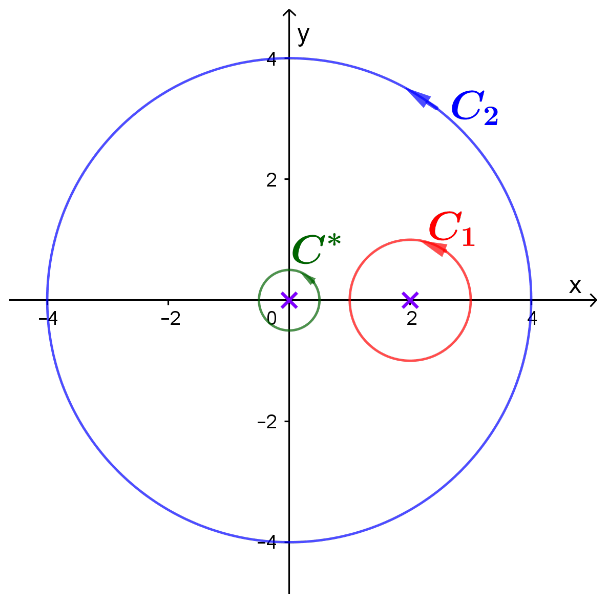
$$\frac{e^{-z}}{2z^2 - z^3} = \frac{f_1(z)}{z-2} \text{ con } f_1(z) = \frac{-e^{-z}}{z^2}$$

De este modo podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_{C_1} \frac{e^{-z}}{2z^2 - z^3}\, dz = \oint_{|z-2|=1} \frac{\frac{-e^{-z}}{z^2}}{z-2}\, dz = \oint_{|z-2|=1} \frac{f_1(z)}{z-2}\, dz = 2\pi i f_1(2) =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{-e^{-z}}{z^2} \right) \Big|_{z=2} = 2\pi i \left(\frac{-e^{-2}}{4} \right) = -\frac{i\pi}{2e^2}$$

Para calcular la integral a lo largo de C_2 notamos que el integrando es analítico sobre C_2 y en su interior excepto dos puntos interiores: $z = 2$, $z = 0$. Recurrimos al corolario del teorema de Cauchy-Goursat. Para ello consideramos la curva auxiliar $C^* : |z| = \frac{1}{2}$ con orientación antihoraria.



Como C_1, C_2 y C^* son cerradas, simples, suaves, todas con la misma orientación y además C_1 y C^* son interiores a C_2, y dado que el integrando es analítico sobre las tres curvas y en la región entre ellas, se tiene:

$$\oint_{C_2} \frac{e^{-z}}{2z^2 - z^3}\, dz = \oint_{C_1} \frac{e^{-z}}{2z^2 - z^3}\, dz + \oint_{C^*} \frac{e^{-z}}{2z^2 - z^3}\, dz$$

Para calcular la segunda integral del miembro derecho conviene escribir el integrando como:

$$\frac{e^{-z}}{2z^2 - z^3} = \frac{f_2(z)}{z^2} \text{ con } f_2(z) = \frac{e^{-z}}{2 - z}$$

Como $z = 0$ es interior a C^* y f_2 es analítica sobre C^* y en su interior (pues $z = 2$ es exterior a C^*), podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy de las derivadas con $n = 1$:

$$\oint_{C^*} \frac{e^{-z}}{2z^2 - z^3}\, dz = \oint_{C^*} \frac{\dfrac{e^{-z}}{2-z}}{z^2}\, dz = \oint_{C^*} \frac{f_2(z)}{(z-0)^2}\, dz = 2\pi i \frac{f_2'(0)}{1!} = 2\pi i \left(\frac{e^{-z}}{2-z} \right)' \Big|_{z=0} =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{-e^{-z}(2-z) - e^{-z}(-1)}{(2-z)^2} \right) \Big|_{z=0} = -\frac{i\pi}{2}$$

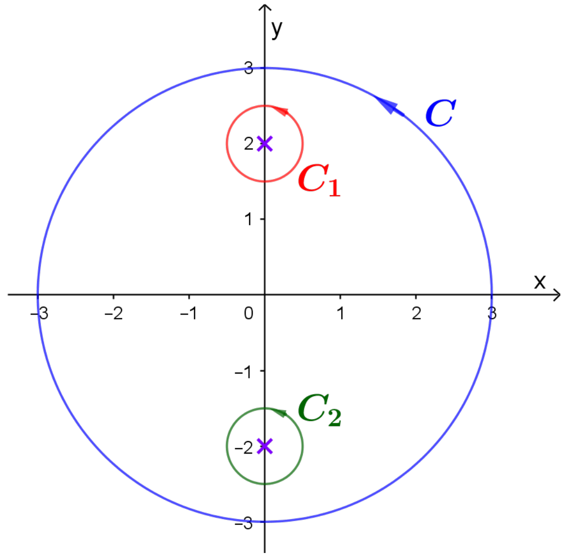
Luego:

$$\oint_{C_2} \frac{e^{-z}}{2z^2 - z^3}\, dz = \oint_{C_1} \frac{e^{-z}}{2z^2 - z^3}\, dz + \oint_{C^*} \frac{e^{-z}}{2z^2 - z^3}\, dz = -\frac{i\pi}{2e^2} - \frac{i\pi}{2} = -\frac{i\pi(1+e^2)}{2e^2}$$

e)

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^4}{z^2 + 4}\, dz$$

El integrando es analítico sobre $C : |z| = 3$ y en su interior, excepto en los puntos interiores $z = \pm 2i$. Consideramos dos curvas auxiliares $C_1 : |z - 2i| = \frac{1}{2}$, $C_2 : |z + 2i| = \frac{1}{2}$, ambas con orientación antihoraria. Las tres curvas son cerradas, simples y suaves y poseen la misma orientación. El integrando es analítico sobre ellas y en la región entre ellas.



Aplicando el corolario del teorema de Cauchy-Goursat resulta:

$$\oint_C \frac{z^4}{z^2+4}\,dz = \oint_{C_1} \frac{z^4}{z^2+4}\,dz + \oint_{C_2} \frac{z^4}{z^2+4}\,dz$$

Calculemos las integrales del miembro de la derecha.

$$\oint_{C_1} \frac{z^4}{z^2+4}\,dz = \oint_{C_1} \frac{z^4}{(z+2i)(z-2i)}\,dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{z^4}{z+2i}}{z-2i}\,dz$$

Podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy con $f(z) = \dfrac{z^4}{z+2i}$ analítica sobre C_1 y en su interior (pues $z=-2i$ es exterior a C_1) y $z_0 = 2i$ es interior a C_1. Resulta:

$$\oint_{C_1} \frac{z^4}{z^2+4}\,dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{z^4}{z+2i}}{z-2i}\,dz = 2\pi i\left(\frac{z^4}{z+2i}\right)\Big|_{z=2i} = 2\pi i\frac{(2i)^4}{4i} = 8\pi$$

$$\oint_{C_2} \frac{z^4}{z^2+4}\,dz = \oint_{C_2} \frac{z^4}{(z-2i)(z+2i)}\,dz = \oint_{C_2} \frac{\frac{z^4}{z-2i}}{z+2i}\,dz$$

Podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy con $f(z) = \dfrac{z^4}{z-2i}$ analítica sobre C_- y en su interior (pues $z=2i$ es exterior a C_2) y $z_0 = -2i$ es interior a C_2. Resulta:

$$\oint_{C_2} \frac{z^4}{z^2+4}\,dz = \oint_{C_2} \frac{\frac{z^4}{z-2i}}{z+2i}\,dz = 2\pi i\left(\frac{z^4}{z-2i}\right)\Big|_{z=-2i} = 2\pi i\frac{(-2i)^4}{(-4i)} = -8\pi$$

Por lo tanto:

$$\oint_C \frac{z^4}{z^2+4}\,dz = \oint_{C_1} \frac{z^4}{z^2+4}\,dz + \oint_{C_2} \frac{z^4}{z^2+4}\,dz = 8\pi - 8\pi = 0$$

f)

$$\int_C \big((z+1)^4 - \mathrm{Re}(z)\big)\,dz, \quad C \text{ segmento desde } z_1 = 0 \text{ hasta } z_2 = i$$

Por linealidad resulta:

$$\int_C \left((z+1)^4 - \mathrm{Re}(z)\right) dz = \int_C (z+1)^4 dz - \int_C \mathrm{Re}(z)\, dz$$

La primera integral en el miembro de la derecha es independiente del camino en $D = \mathbb{C}$ pues el integrando admite allí la primitiva $F(z) = \dfrac{1}{5}(z+1)^5$. Como C está incluida en D, podemos aplicar la regla de Barrow:

$$\int_C (z+1)^4 dz = \frac{1}{5}(z+1)^5\Big|_0^i = \frac{1}{5}(i+1)^5 - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(-4-4i) - \frac{1}{5} = -1 - \frac{4i}{5}$$

La segunda integral se calcula parametrizando $C : z = it, t \in [0,1]$ de modo que $dz = i\,dt$. Entonces:

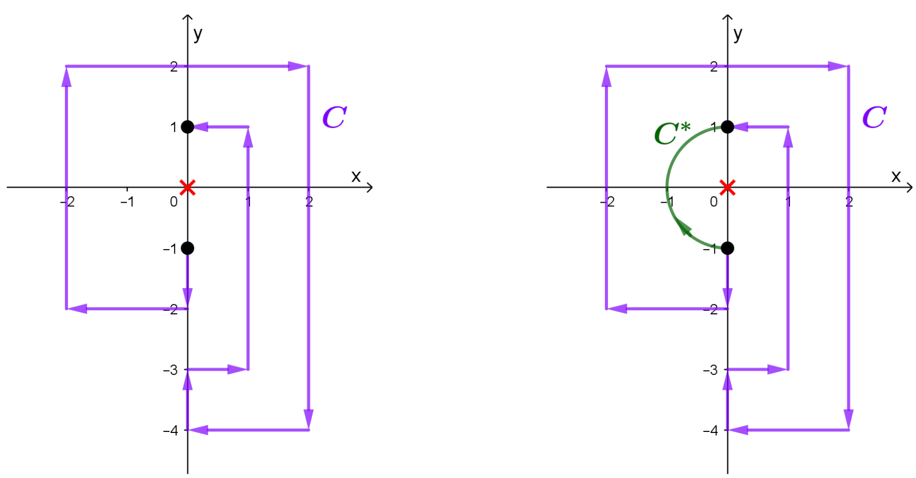
$$\int_C \mathrm{Re}(z)\, dz = \int_0^1 \mathrm{Re}(it)\, i\, dt = \int_0^1 0\, dt = 0$$

Luego:

$$\int_C \left((z+1)^4 - \mathrm{Re}(z)\right) dz = \int_C (z+1)^4 dz - \int_C \mathrm{Re}(z)\, dz = -1 - \frac{4i}{5} - 0 = -1 - \frac{4i}{5}$$

Ejercicio 6

Consideremos la curva auxiliar $C^* : |z| = 1, \mathrm{Re}(z) \leq 0$, orientada con extremo inicial $z_1 = -i$ y extremo final $z_2 = i$. si C es la poligonal de la figura:



Entonces $\tilde{C} = C \cup (-C^*)$ es curva cerrada, simple, suave a trozos, con orientación antihoraria. Además, $f(z) = z^{-1}$ es analítica sobre $\tilde{C}$ y en su interior. Por el teorema de Cauchy-Goursat:

$$\oint_{\tilde{C}} \frac{dz}{z} = 0$$

Es decir:

$$\int_C \frac{dz}{z} - \int_{C^*} \frac{dz}{z} = 0$$

Por lo tanto:

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_{C^*} \frac{dz}{z}$$

La integral de la derecha fácilmente se calcula parametrizando:
$C^* : z = e^{-it}, t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$
$dz = -ie^{-it}\, dt$

$$\int_{C^*} \frac{dz}{z} = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{-ie^{-it}}{e^{-it}}\, dt = -it\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = -i\pi$$

Luego:

$$\int_C \frac{dz}{z} = -i\pi$$

CAPÍTULO 4

Series de potencias

El objetivo de este capítulo es el estudio en el campo complejo de las series de Taylor y series de potencias enteras, las que constituyen una herramienta fundamental en el análisis de variable compleja y en sus aplicaciones a la Física y a la Ingeniería.
Un resultado muy importante que enunciaremos, establece para una función de variable compleja la equivalencia entre la representación local en un punto mediante una serie de potencias y la analiticidad en ese punto. Además, mostraremos que dicha representación es la serie de Taylor de la función.
Definiremos las series de potencias con exponentes enteros positivos y negativos, denominadas series de Laurent, que desempeñarán un papel decisivo en el capítulo 5.

4.1. Sucesión de números complejos

Comenzamos con una breve introducción a las sucesiones de números complejos y su relación con las sucesiones reales.

Definición 4.1.1. *Una* ***sucesión infinita de números complejos*** *es una función que a cada número natural n le asigna un número complejo z_n*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ & n & \mapsto & z_n \end{array}$$

De este modo se obtiene una lista ordenada de números complejos:

$$z_1, z_2, z_3, ..., z_n, ...$$

donde z_1 es el primer término de la sucesión, z_2 es el segundo término , etc. El término z_n es el término n-ésimo o general y la sucesión $z_1, z_2, z_3, ..., z_n, ...$ se anota $\{z_n\}_{n\geq 1}$ o simplemente $\{z_n\}$.

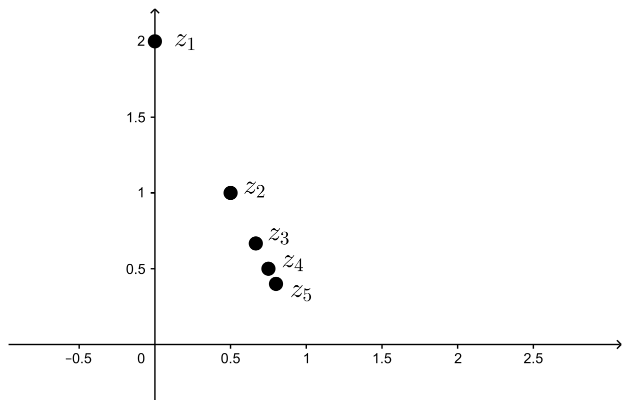
Ejemplo 4.1.2.

Sea la sucesión $\left\{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)+i\dfrac{2}{n}\right\}_{n\geq 1}$

$z_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)+i\dfrac{2}{n},\ \ n = 1, 2, 3, ...$

Los primeros términos de la sucesión:

$$z_1 = 0 + 2i,$$
$$z_2 = \frac{1}{2} + i,$$
$$z_3 = \frac{2}{3} + i\frac{2}{3},$$
$$z_4 = \frac{3}{4} + i\frac{1}{2},$$
$$z_5 = \frac{4}{5} + i\frac{2}{5}, \ ...$$



Nos interesa analizar cómo se comportan los términos de la sucesión cuando n crece sin límite: si se acercan o no a un valor definido. Es decir nos interesa saber si existe el $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Definición 4.1.3. *Si los términos de una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ se acercan a un número L tanto como queramos para n suficientemente grande, diremos que el*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = L$$

*En este caso se dice que **la sucesión es convergente** y que **converge a** L .*
*Si el límite no existe, se dice que la sucesión es **divergente**.*

Teorema 4.1.4. *Sea una sucesión de números complejos $\{z_n\}$, donde $z_n = x_n + iy_n$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = L_1 + iL_2 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = L_1 \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = L_2$$

Es decir que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ converge a un número $L = L_1 + iL_2$ si y solo si la sucesión de las partes reales $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ converge a L_1 y la sucesión de las partes imaginarias $y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ...$ converge a L_2.

Propiedad 4.1.5. *Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos.*

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |L|$. No se cumple la recíproca en general.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$

Ejemplo 4.1.6.

a) Sea $z_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + i\dfrac{2}{n}$. Analizar si es convergente.

Sean $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right), \quad y_n = \dfrac{2}{n}$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0$

Entonces por el teorema 4.1.4 la sucesión es convergente y converge al valor

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) + i\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 1 + i0 = 1$$

b) Sea $z_n = \dfrac{i^n}{n^2}$. Analizar si es convergente.

Por la forma de los términos de la sucesión y las variaciones de las potencias de i, resulta más práctico en este ejemplo escribir los términos de la sucesión en forma polar y utilizar la propiedad 4.1.5b de las sucesiones de números complejos.

En nuestro ejemplo $|z_n| = \left|\dfrac{i^n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$.

Vemos que $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$

Podemos verificar la propiedad para este ejemplo escribiendo los términos de la sucesión en forma polar:

$\arg(z_n) = \arg\left(\dfrac{i^n}{n^2}\right) = \arg(i^n) = n\arg(i) = n\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ \ k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ..$

$$z_n = \frac{i^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}\left[\cos\left(n\frac{\pi}{2} + 2nk\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{2} + 2nk\pi\right)\right]$$

Entonces, calculando

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cos\left(n\frac{\pi}{2} + 2nk\pi\right) + i\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{2} + 2nk\pi\right) = 0 + i0$$

c) Consideraremos un caso que muestra que en la propiedad 4.1.5a la recíproca no es cierta en general.

Sea $z_n = i^n = e^{in\frac{\pi}{2}} = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

$|z_n| = |i^n| = \left|e^{in\frac{\pi}{2}}\right| = \sqrt{\left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 + \left(\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)^2} = 1$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

Sin embargo el $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$ no existe. Cuando n crece $\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$ y $\mathrm{sen}\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$ oscilan entre los valores $-1, 0$ y 1.

Actividad 4.1.7.

Analice si las siguientes sucesiones son convergentes o divergentes

a) $z_n = \dfrac{n^2+4}{3n^2+5n+2} + i\dfrac{\mathrm{sen}(n)}{n}$

b) $z_n = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^n$

c) $z_n = \dfrac{n}{n-i} + i\dfrac{2n}{n+i}$

4.2. Series de números complejos

Sea una sucesión de números complejos $\{z_n\}$.

Consideremos la expresión $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1+z_2+z_3+...+z_n+...$ que indica la suma de los infinitos términos de la sucesión $\{z_n\}$ y que se denomina **serie infinita asociada a la sucesión** o simplemente **serie**. ¿Cómo se interpreta la suma de infinitos términos?

Consideremos las sumas:

$S_1 = z_1$

$S_2 = z_1 + z_2$

$S_3 = z_1 + z_2 + z_3$

....

$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n$

....

De este modo se obtiene una sucesión $\{S_n\}$, denominada **sucesión de sumas parciales** o **serie**.

Es decir que con la notación $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ significamos la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$, donde S_n se denomina **suma parcial n-ésima** de la serie y z_n se denomina **el término general de la serie**.

Definición 4.2.1. *Decimos que la* ***serie*** $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *es* ***convergente*** *si la sucesión de sumas parciales* $\{S_n\}$ *es convergente, es decir si existe el límite* $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Al valor ***S*** *se lo denomina* ***suma de la serie*** *y se indica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

En síntesis

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k$$

Si la sucesión $\{S_n\}$ *es divergente, es decir si no existe el límite* $\lim_{n\to\infty} S_n$*, se dice que* ***la serie es divergente y no tiene suma****.*

Recordemos algunos de los criterios utilizados para analizar la convergencia o divergencia de una serie de números reales adaptados ahora al caso de las series de números complejos.

Teorema 4.2.2. ***Condición necesaria de convergencia***

Si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *es convergente entonces* $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Teorema 4.2.3. ***Condición suficiente de divergencia***

Si $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$ *entonces* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *es divergente.*

Definición 4.2.4.

Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *es convergente, se dice que* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *es absolutamente convergente.*

El resultado siguiente afirma que toda serie absolutamente convergente es convergente.

Teorema 4.2.5.

Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *es convergente entonces* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *es convergente y vale:* $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$

Proposición 4.2.6. ***Criterio de comparación.***

Sean las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *y* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$:

a) *Si* $|z_n| \leq |w_n|$ *y* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |w_n|$ *es convergente, entonces* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *es convergente.*

b) *Si* $|z_n| \leq |w_n|$ *y* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *es divergente, entonces* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |w_n|$ *es divergente.*

Proposición 4.2.7. ***Criterio del cociente.***

Dada la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$

a) *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L < 1$, *entonces la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge absolutamente.*

b) *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L > 1$ *o* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \infty$, *la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *es divergente.*

c) *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L = 1$ *el criterio no decide.*

Ejemplo 4.2.8.

Analizar la convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}+ie^{\frac{1}{n}}\right)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}+ie^{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}+i\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}} = 0+i \neq 0 \Rightarrow$ la serie diverge (condición suficiente de divergencia)

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^n}$

Consideremos la serie de módulos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left|1+i\sqrt{3}\right|^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$$

Aplicando el criterio del cociente a la serie de módulos se tiene:

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ por el criterio del cociente la serie de módulos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^n}\right|$ converge, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^n}$ converge. □

Definición 4.2.9. ***Serie geométrica***

Una serie geométrica es una serie de la forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}ar^n = a+ar+ar^2+ar^3+...$

donde r se denomina ***la razón*** *de la serie.*

- *Si $|r|<1$ la serie es convergente y su suma es* $\displaystyle S=\frac{a}{1-r}=\sum_{n=0}^{\infty}ar^n$
- *Si $|r|\geq 1$ la serie diverge*

Observación Si $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty}ar^n = ar^k+ar^{k+1}+ar^{k+2}+...$ y $|r|<1$, la serie geométrica converge y su suma es $\displaystyle S=\frac{ar^k}{1-r}=\sum_{n=k}^{\infty}ar^n$.

Ejemplo 4.2.10.

Una serie geométrica de primer término $a=1+i$ y razón $r=\dfrac{i}{4}$ tiene la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)\frac{i^n}{4^n} = (1+i)+(1+i)\frac{i}{4}+(1+i)\frac{i^2}{4^2}+...$$

Como $|r|=\left|\dfrac{i}{4}\right|=\dfrac{1}{4}<1$, la serie es convergente y su suma es

$$S = \frac{1+i}{1-\frac{i}{4}} = \frac{4(1+i)}{4-i} = \frac{4(1+i)(4+i)}{17} = \frac{4\,(4-1+4i+i)}{17} = \frac{4\,(3+5i)}{17} = \frac{12}{17} + i\frac{20}{17} \quad \square$$

Aplicando el teorema 4.1.4 a la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ se puede ver que la convergencia de una serie de números complejos equivale a la convergencia de la serie de las partes reales de z_n y a la convergencia de la serie de las partes imaginarias de z_n.

Teorema 4.2.11. *Sea una serie de números complejos* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$*, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) = S = X + iY \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \quad \wedge \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y$$

Ejemplo 4.2.12.

Analizar la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3(-1)^n}{2^n} + i\frac{2}{3^n}\right)$.

Sea la serie de la parte real del término general de la serie dada:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{2^n}$. Se trata de una serie geométrica de razón $r = -\frac{1}{2}$ y con $a = 3$.

Como $|r| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$ la serie converge y su suma es $X = \dfrac{3}{1-(-\frac{1}{2})} = 2$.

Sea la serie de la parte imaginaria del término general de la serie dada:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n}$. Es una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{3}$ y con $a = 2$.

Como $|r| = \left|\dfrac{1}{3}\right| = \dfrac{1}{3} < 1$ la serie converge y su suma es $Y = \dfrac{2}{1-(\frac{1}{3})} = 3$.

Por el teorema 4.2.11 la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3(-1)^n}{2^n} + i\frac{2}{3^n}\right)$ converge y su suma es

$S = X + iY = 2 + i3$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3(-1)^n}{2^n} + i\frac{2}{3^n}\right) = 2 + i3$$

Actividad 4.2.13.

1. Analice la convergencia de las siguientes series

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2+i)^{2n}}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{24}+5i\right)^n}{n6^n}$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+i3)^2}$

2. Analice la convergencia de las siguientes series y en caso de ser convergentes halle su suma

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5(-7)^n}{2^{2n}}+i\frac{1}{n^2}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7\,(1+i)^{2n}}{(3+i4)^n}$

4.3. Series de potencias

Las series de potencias, como ya se ha señalado en la introducción, son una herramienta muy importante en el análisis de variable compleja ya que las mismas están íntimamente vinculadas a las funciones analíticas. Veremos que la suma de toda serie de potencias convergente es una función analítica y que toda función analítica puede representarse por una serie de potencias.

Definición 4.3.1. ***Serie de potencias.*** *Una serie de potencias de $(z-z_0)$ (o desarrollada en z_0 o centrada en z_0) es una serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots$$

donde $c_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ son los denominados ***coeficientes*** *de la serie (no dependen de z) y $z_0 \in \mathbb{C}$ se denomina* ***centro*** *de la serie.*

Reemplazando z por un determinado número complejo se obtiene una serie numérica la que puede ser o no convergente. El conjunto de los valores de z para los que la serie de potencias es convergente se denomina **región de convergencia**.

Para cada z donde la serie es convergente tendremos un valor de la suma de la serie, por lo cual queda definida en la región de convergencia una función suma $S(z)$.

Una serie de potencias siempre converge en z_0, ya que al reemplazarlo en la serie se obtiene $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0-z_0)^n = c_0$, es decir $S(z_0) = c_0$.

Veamos un ejemplo de un caso particular de una serie de potencias que es de tipo geométrico:

Ejemplo 4.3.2.

Hallar la región de convergencia de la siguiente serie y encontrar su función suma

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-3i)^n}{(2i)^{n+1}}$$

Se trata de una serie de potencias centrada en $z_0 = 3i$
Si desarrollamos algunos términos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-3i)^n}{(2i)^{n+1}} = \frac{1}{2i} - \frac{(z-3i)}{(2i)^2} + \frac{(z-3i)^2}{(2i)^3} + \cdots$$

Reescribiendola en la forma

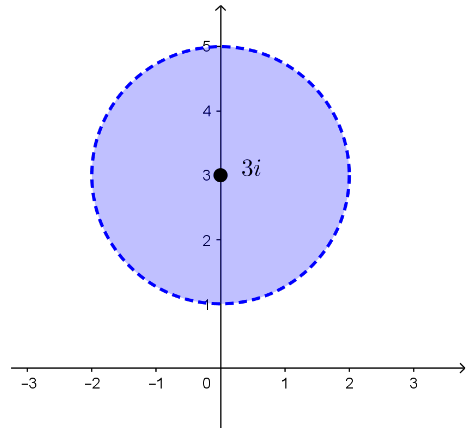
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2i}\Big[-\frac{(z-3i)}{2i}\Big]^n$$

vemos que es una serie geométrica con razón $\quad r = -\dfrac{(z-3i)}{2i} \;$ y $\; a = \dfrac{1}{2i} = -\dfrac{i}{2}$

La serie converge para $|r| = \left| -\dfrac{(z-3i)}{2i} \right| = \left| \dfrac{z-3i}{2i} \right| = \dfrac{|z-3i|}{|2i|} = \dfrac{|z-3i|}{2} < 1 \Rightarrow |z-3i| < 2.$

La región de convergencia es el interior

del disco de radio 2 centrado en $z_0 = 3i$.



Su suma es

$$S(z) = \frac{-\dfrac{i}{2}}{1-\Big[-\dfrac{z-3i}{2i}\Big]} = \frac{-\dfrac{i}{2}}{\dfrac{2i+(z-3i)}{2i}} = \frac{1}{z-i}$$

Luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2i}\Big[-\frac{(z-3i)}{2i}\Big]^n = \frac{1}{z-i} \qquad \text{si} \quad |z-3i| < 2$$

Podemos ver que la función suma es analítica en el disco de convergencia, ya que el punto $z = i$ donde se anula el denominador está sobre el borde de la circunferencia $|z-3i| = 2$, donde la razón de la serie geométrica vale 1 y entonces la serie es divergente.

Por lo tanto se tiene una representación de la función $f(z) = \dfrac{1}{z-i}$ en potencias de $(z-3i)$ válida en $|z-3i| < 2$.

Observación

Si nos paramos en $z_0 = 3i$ el radio del disco de convergencia es la distancia al punto más próximo a $z_0 = 3i$ donde la función deja de ser analítica. En este caso la función deja de ser analítica en $z = i$.

Luego la distancia es $|i-3i| = 2$. que es el valor del radio del disco de convergencia de la serie. Para las series de potencias de variable real, la región de convergencia era un intervalo (que podía ser acotado o no).

Veremos que en el caso de las series de potencias en variable compleja la región de convergencia es, en general, un disco (que puede ser acotado o no) centrado en z_0.

Convergencia de serie de potencias

Teorema 4.3.3. ***Convergencia de una serie de potencias***

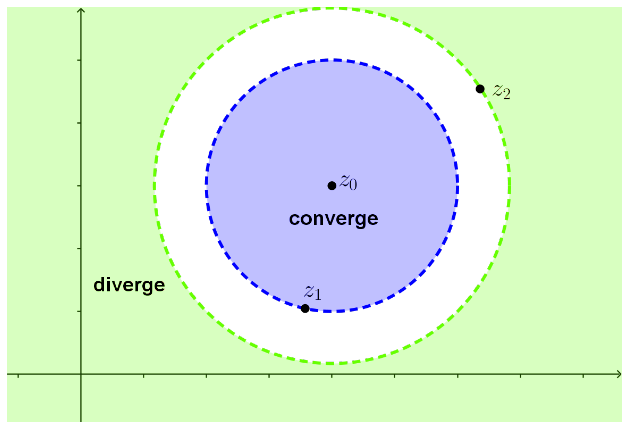
Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$

1. *Si converge en un punto* $z = z_1 \neq z_0$*, entonces converge absolutamente para todo* z *tal que* $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$ *(es decir para todos los puntos que están a una distancia de* z_0 *menor que la distancia a la que está* z_1 *respecto de* z_0*).*

2. *Si diverge en* $z = z_2$*, entonces diverge para todo* z *tal que* $|z-z_0| > |z_2 - z_0|$ *(es decir para todos los puntos que están a una distancia de* z_0 *mayor que la distancia que está* z_2 *respecto a* z_0*).*

El gráfico nos permite visualizar

el significado del teorema



Observación: Como se verá cuando definamos el radio de convergencia de una serie de potencias, no va existir la corona blanca que se ve en el gráfico donde no se conozca el comportamiento de la serie.

Demostración

1. Sea z tal que $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$, como la serie converge en $z = z_1$, el término general de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1-z_0)^n$ tiende a cero.

   Es decir que $\lim_{n\to\infty} c_n(z_1-z_0)^n = 0$.

   Por lo tanto se tiene que $|c_n(z_1-z_0)^n| \leq M$ para n suficientemente grande. Multiplicando y dividiendo el término general por $(z_1-z_0)^n$ y tomando el módulo se tiene:

$$|c_n(z-z_0)^n| = \left| c_n(z-z_0)^n \frac{(z_1-z_0)^n}{(z_1-z_0)^n} \right| = \left| c_n(z_1-z_0)^n \left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0} \right)^n \right| =$$

$$= |c_n(z_1-z_0)^n| \left| \left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0} \right)^n \right| \leq M \left| \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \right|^n$$

   Luego el módulo del término general de la serie de potencias está acotado superiormente por $M\left| \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \right|^n$, al que podemos considerar como el término general de una serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n$ con razón $r = \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|$, siendo el $|r| = \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right| < 1$ (pues $|z-z_0| < |z_1-z_0|$), por lo tanto la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n$ es convergente.

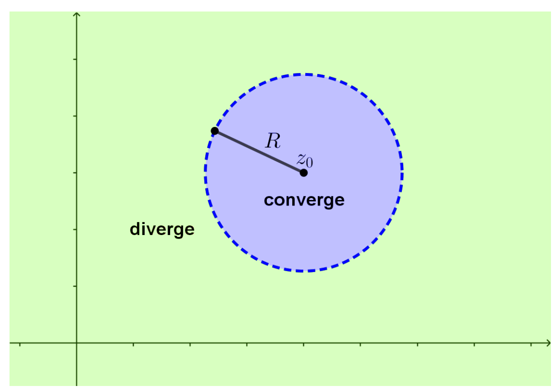
Entonces por el criterio de comparación $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left|c_n(z-z_0)^n\right|$ es convergente , es decir que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ es absolutamente convergente para $|z-z_0| < |z_1-z_0|$.

2. Lo demostraremos por el absurdo.
   Supongamos que existe un z_1 tal que $|z_1-z_0| > |z_2-z_0|$ en el cual la serie es convergente. Entonces, por el inciso 1 de este teorema, la serie debe ser convergente para todo z tal que $|z-z_0| < |z_1-z_0|$, pero z_2 cumple que $|z_2-z_0| < |z_1-z_0|$, luego la serie sería convergente en z_2 contradiciendo la hipótesis. La contradicción provino de suponer que existe un z_1 tal que $|z_1-z_0| > |z_2-z_0|$ en el cual la serie es convergente.
   Por lo tanto, la serie diverge para todo z tal que $|z-z_0| > |z_2-z_0|$. □

Radio de convergencia

Dada una serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, consideremos todos los puntos z en los que la serie es convergente. Sea $R > 0$ el menor número tal que la distancia a z_0 de los puntos donde la serie converge es menor que R. Es decir que R es el radio del menor círculo abierto centrado en z_0 que contiene a todos los puntos donde la serie converge.

Por el teorema de convergencia,
la serie converge absolutamente para
todos los z tales que $|z-z_0| < R$
y diverge si $|z-z_0| > R$



A diferencia del caso de las series de potencias reales en que se estudiaba la convergencia en los extremos del intervalo de convergencia, para los z que verifican $|z-z_0| = R$, en general, no se analiza la convergencia de la serie ya que se trata de infinitos puntos.

Observaciones

Para una serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ pueden ocurrir solamente estas tres posibilidades:

1. La serie solamente converge en z_0. En este caso el radio de convergencia es cero: $R = 0$.

2. La serie converge para todo z. En este caso se dice que el radio de convergencia es infinito y lo indicamos $R = \infty$

3. Existe un número positivo R tal que la serie converge absolutamente para todo z tal que $|z - z_0| < R$ y diverge para los z tales que $|z - z_0| > R$.

Se verá, al definir la serie de Taylor, que R es igual a la distancia de z_0 al punto más cercano donde la función no es analítica.

Para determinar la región de convergencia, y por ende el valor del radio de convergencia, vamos a considerar la serie de los módulos $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z - z_0)^n|$, es decir analizamos la convergencia absoluta de la serie, para lo cual, en general, aplicaremos el criterio del cociente.

Ejemplos 4.3.4.

Hallar la región de convergencia y el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+4i)^{2n+1}}{(n+1)(4+3i)^{2n}}$

Aplicamos el criterio del cociente a la serie de módulos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(z+4i)^{2(n+1)+1}(n+1)(4+3i)^{2n}}{(n+2)(4+3i)^{2(n+1)}(z+4i)^{2n+1}} \right| = \frac{|z+4i|^2}{|4+3i|^2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{|z+4i|^2}{|4+3i|^2} \cdot 1 < 1$$

$$\Longrightarrow |z+4i|^2 < |4+3i|^2 = 5^2 \Longrightarrow |z+4i| < 5 = R$$

Por lo tanto la serie converge en el disco $|z+4i| < 5$ y el radio de convergencia es $R = 5$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-(2+3i))^n}{(2n)!}$

Aplicamos el criterio del cociente a la serie de módulos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(z-(2+3i))^{n+1}(2n)!}{(z-(2+3i))^n(2(n+1))!} \right| = |z-(2+3i)| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \right| =$$

$$= |z-(2+3i)| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = |z-(2+3i)|\, 0 = 0 < 1 \Longrightarrow R = \infty$$

La serie converge absolutamente (y por ende converge) para todo valor de z, siendo el radio de convergencia infinito.

Actividad 4.3.5.

Halle la región de convergencia y el radio de convergencia de las siguientes series de potencias. Cuando sea posible encuentre la expresión de la función a la cual converge.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^{3n+2}}{2^{3n+1}(n+3i)}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+4i)^{2n}}{(9i)^{n+1}}$

Propiedades de las funciones definidas por series de potencias

En todos los puntos del disco de convergencia la serie de potencias tiene suma, por lo cual en cada punto del mismo queda definida una función $f(z)$ que en cada z vale la suma de la serie en dicho punto:

$$f(z) = S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad \forall z : |z - z_0| < R$$

(con $R > 0$ o $R = \infty$. El caso $R = 0$ no es de interés práctico ya que tendríamos una función definida en un solo punto).
En este caso diremos que $f(z)$ está representada por una serie de potencias de $(z - z_0)$ o que está desarrollada en serie de potencias de $(z - z_0)$. La función $f(z)$ que está definida en el disco de convergencia de la serie que la representa tiene propiedades muy importantes.

Analiticidad de la función suma de una serie de potencias

Teorema 4.3.6. *Sea* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad \forall z : |z - z_0| < R, \quad 0 < R \leq \infty$
Entonces, $f(z)$ *es analítica en todos los puntos del disco de convergencia*

Toda función representada por una serie de potencias es analítica en todos los puntos del disco de convergencia. Volviendo al ejemplo 4.3.2:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2i}\Big[-\frac{(z-3i)}{2i}\Big]^n = \frac{1}{z-i} \qquad \text{si } |z - 3i| < 2$$

Observación La función $f(z) = \dfrac{1}{z-i}$ es analítica $\forall z \neq i$. Sin embargo su representación en serie de potencias de $(z - 3i)$ es válida solamente en el disco abierto $|z - 3i| < 2$.

Suma y producto de series de potencias

Teorema 4.3.7. ***Suma y producto de series de potencias***
Sean
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \ \forall z : |z - z_0| < R_1 \quad y \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n, \ \forall z : |z - z_0| < R_2$
Si llamamos $R = Min\{R_1, R_2\}$*, se cumple:*

1. $f(z)+g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} [c_n+d_n](z-z_0)^n \qquad \forall z : |z-z_0| < R$

2. $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n \qquad \forall z : |z - z_0| < R$

   siendo $b_n = \sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k} = c_0 d_n + c_1 d_{n-1} + c_2 d_{n-2} + \cdots + c_n d_0$

Ejemplo 4.3.8.

Sean:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{5-z} \qquad \forall z: \ |z-2| < 3 \ \ \text{(verificar)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{6-z} \qquad \forall z: \ |z-2| < 4 \ \ \text{(verificar)}$$

Entonces

$$\frac{1}{5-z} + \frac{1}{6-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{4^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}}\right](z-2)^n$$

$\forall z: \ |z-2| < 3 = \text{Min}\{3, 4\}$

$$\frac{1}{(5-z)(6-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{3^{n+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{4^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^2}\right](z-2) + \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{4}\right](z-2)^2 + \cdots$$

$\forall z: \ |z-2| < 3 = \text{Min}\{3, 4\}$

Derivación de series de potencias

Teorema 4.3.9. ***Derivación de series de potencias***

Sea $\quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \ \ \forall z: |z-z_0| < R \ \ 0 < R \leq \infty$

Entonces:

1. *$f(z)$ es derivable en todos los puntos del disco de convergencia y su derivada $f'(z)$ se obtiene derivando término a término la serie que la representa*

   $$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n (z-z_0)^{n-1}, \ \ \forall z: |z-z_0| < R, \quad 0 < R \leq \infty$$

2. *Repitiendo esta propiedad para $f''(z)$ se obtiene que*

   $$f''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)(z-z_0)^{n-2}, \ \ \forall z: |z-z_0| < R, \quad 0 < R \leq \infty$$

3. *En general $\forall k \geq 1$:*

   $$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)\cdots(n-(k-1))(z-z_0)^{n-k}, \ \ \forall z: |z-z_0| < R, \quad 0 < R \leq \infty$$

Las series de las derivadas tienen todas el mismo radio de convergencia que el de la serie sin derivar.

Es decir, una función que admite desarrollo en serie de potencias convergente, tiene derivadas de todo orden en su disco de convergencia, las que se obtienen derivando término a término la serie que la representa.

Ejemplo 4.3.10.

Dada $f(z) = \dfrac{1}{z-i} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-3i)^n}{(2i)^{n+1}}$ si $|z-3i| < 2$, obtener las series de potencias de $f'(z)$ y $f''(z)$.

Derivando ambos miembros se obtiene:

$$f'(z) = -\frac{1}{(z-i)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \frac{(z-3i)^{n-1}}{(2i)^{n+1}} \quad \text{si} \ \ |z-3i| < 2$$

La derivada segunda de la función es

$$f''(z) = \frac{2}{(z-i)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) \frac{(z-3i)^{n-2}}{(2i)^{n+1}} \quad \text{si} \ \ |z-3i| < 2$$

Integración de las series de potencias

Sea $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ convergente en el disco, $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-z_0| < R\}$

La función $f(z)$ es analítica en el disco de convergencia $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-z_0| < R\}$.
El conjunto D es un conjunto simplemente conexo del plano complejo. Por el Teorema de Cauchy-Goursat la integral a lo largo de toda curva cerrada incluída en D es igual a cero. Esto es equivalente, por el Teorema de independencia del camino, visto en el capítulo 3, a que la función admite primitiva en D y a que la integral de la función es independiente del camino en D.
Por lo que podemos calcular la integral de una función representada por serie de potencias como una integral indefinida o bien, dados dos puntos cualesquiera del conjunto D, calcular la integral aplicando la regla de Barrow.

Teorema 4.3.11. ***Integración de series de potencias***

Sea $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \ \forall z : |z-z_0| < R, \ 0 < R \leq \infty$

Entonces:

1. $$\int f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int (z-z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1} + C,$$
   $\forall z : |z-z_0| < R, \quad 0 < R \leq \infty$
   Una serie de potencias se puede integrar término a término y la serie resultante tiene el mismo radio de convergencia que la serie original.

2. *Para todo par* $z_1, z_2 \in D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-z_0| < R\}$
   $$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[\frac{(z_2-z_0)^{n+1}}{n+1} - \frac{(z_1-z_0)^{n+1}}{n+1} \right]$$

Ejemplo 4.3.12.

Dada $f(z) = \dfrac{1}{z-i} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-3i)^n}{(2i)^{n+1}}$ si $|z-3i| < 2$, obtener la serie de potencias de la integral de la función.

$$\int \frac{1}{z-i}dz = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-3i)^n}{(2i)^{n+1}}dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} \int (z-3i)^n dz =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} \frac{(z-3i)^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{si} \quad |z-3i| < 2$$

$$\text{Ln}(z-i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-3i)^{n+1}}{(2i)^{n+1}(n+1)} + C \quad \text{si} \quad |z-3i| < 2$$

Para determinar el valor de la constante C consideramos $z = 3i$ obteniendo:
$\text{Ln}(2i) = 0 + C \Longrightarrow C = \text{Ln}(2i) = \ln 2 + i\dfrac{\pi}{2}$

$$\text{Ln}(z-i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-3i)^{n+1}}{(2i)^{n+1}(n+1)} + \left(\ln(2) + i\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{si} \quad |z-3i| < 2$$

Luego,

$$\text{Ln}(z-i) - \left(\ln(2) + i\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-3i)^{n+1}}{(2i)^{n+1}(n+1)} \quad \text{si} \quad |z-3i| < 2$$

También podríamos haber calculado la integral entre $z_1 = 3i$ y un $z_2 = z$, $\forall z : \ |z-3i| < 2$

$$\int_{3i}^{z} \frac{1}{t-i}dt = \int_{3i}^{z} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(t-3i)^n}{(2i)^{n+1}}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} \int_{3i}^{z} (t-3i)^n dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} \left[\frac{(t-3i)^{n+1}}{n+1}\right]_{3i}^{z}$$

$$\Big[\text{Ln}(t-i)\Big]_{3i}^{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} \left[\frac{(t-3i)^{n+1}}{n+1}\right]_{3i}^{z}$$

$$\text{Ln}(z-i) - \text{Ln}(2i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} \frac{(z-3i)^{n+1}}{n+1} \quad \text{si} \quad |z-3i| < 2$$

$$\text{Ln}(z-i) - \left(\ln 2 + i\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} \frac{(z-3i)^{n+1}}{n+1} \quad \text{si} \quad |z-3i| < 2$$

4.4. Serie de Taylor

Vimos que toda serie de potencias representa a una función analítica.
Ahora veremos que toda función analítica se puede representar por una serie de potencias denominada **serie de Taylor** de la función.

Teorema 4.4.1. ***Teorema de Taylor***
Sea $f(z)$ analítica en z_0. Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < R\}$ el mayor disco abierto centrado en z_0 y de radio R donde $f(z)$ es analítica.
Entonces existe una serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ *que converge a $f(z)$ en D*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad , \ \forall z : \ |z - z_0| < R \quad , \ 0 < R < \infty$$

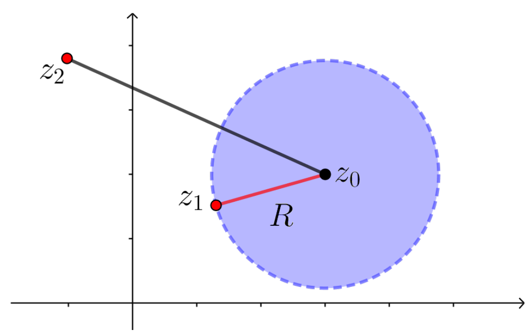
donde $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, 3 \cdots$
Esta serie de potencias se denomina el desarrollo en serie de Taylor de $f(z)$ alrededor de z_0. Para el caso en que $z_0 = 0$, la serie de Taylor se denomina de serie de Maclaurin.

Un aspecto muy importante y útil de este teorema es que permite, sin aplicar el criterio del cociente, determinar el radio de convergencia de la serie de Taylor de una función $f(z)$: debemos pararnos en el punto z_0 donde queremos desarrollar la serie de $f(z)$ y determinar la distancia al punto más cercano donde la función deja de ser analítica.

Ejemplo 4.4.2.

Sea $f(z)$ una función analítica en z_0 y no es analítica solamente en los puntos z_1 y z_2.
$f(z)$ admite un desarrollo en serie de Taylor en z_0.
Si queremos determinar el radio del mayor disco centrado en z_0 donde la función es analítica y está representada por su serie de Taylor $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ comparamos las distancias de z_1 y z_2 al punto z_0. La menor de las distancias es el radio del disco abierto donde la serie de Taylor de $f(z)$ converge a $f(z)$:

$$R = \text{Min}\{|z_1 - z_0|, |z_2 - z_0|\} = |z_1 - z_0|$$



Ejemplos 4.4.3.

a) Hallar la serie de Taylor de $f(z) = e^z$ alrededor de $z_0 = 0$ (serie de Maclaurin).

La función $f(z) = e^z$ es analítica en todo punto del plano complejo por lo tanto el radio de convergencia es infinito: $R = \infty$

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ con } |z| < R = \infty$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

$$f^{(n)}(z) = e^z \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

$$f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

Luego:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \ , \qquad |z| < \infty$$

b) Hallar la serie de Taylor de $f(z) = \operatorname{sen} z$ alrededor de $z_0 = 0$ (serie de Maclaurin)

La función $f(z) = \operatorname{sen} z$ es analítica en todo punto del plano complejo por lo tanto el radio de convergencia es infinito: $R = \infty$

$f(z) = \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ con $|z| < R = \infty$

$c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$

$f^{(0)}(z) = \operatorname{sen} z \Longrightarrow f^{(0)}(0) = 0$
$f^{(1)}(z) = \cos z \Longrightarrow f^{(1)}(0) = 1$
$f^{(2)}(z) = -\operatorname{sen} z \Longrightarrow f^{(2)}(0) = 0$
$f^{(3)}(z) = -\cos z \Longrightarrow f^{(3)}(0) = -1$
$f^{(4)}(z) = \operatorname{sen} z \Longrightarrow f^{(4)}(0) = 0$
$f^{(5)}(z) = \cos z \Longrightarrow f^{(5)}(0) = 1$

Podemos ver que las derivadas de orden par en el origen son nulas:
$f^{(2n)}(0) = 0 \ , \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots \Longrightarrow c_{2n} = 0$

Mientras que las derivadas de orden impar en el origen verifican, como se puede inferir de los casos planteados: $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \ , \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$

Luego:

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ , \qquad |z| < \infty$$

Si derivamos la serie del $\operatorname{sen} z$:

$$(\operatorname{sen} z)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z^{2n+1})' \ , \qquad |z| < R = \infty$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2n+1) z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \ , \qquad |z| < R = \infty$$

Obtuvimos una serie de potencias que converge a la función $\cos(z)$

¿La serie de potencias encontrada derivando la serie del $\operatorname{sen}(z)$ es la serie de Taylor del $\cos(z)$ alrededor de $z_0 = 0$? ¿Puede existir otro desarrollo del $\cos(z)$ alrededor de $z_0 = 0$, o en potencias de z, que converja al $\cos(z)$?

En el siguiente teorema veremos que si $f(z)$ está representada por una serie de potencias de $(z - z_0)$ convergente con $R > 0$, entonces ese desarrollo es la serie de Taylor centrada en z_0.

Teorema 4.4.4. ***Teorema de unicidad de Taylor***

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \;\; \forall z : |z-z_0| < R, \;\; 0 < R \leq \infty$

entonces $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, 3 \cdots$

Demostración

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \;\; \forall z : |z-z_0| < R, \;\; 0 < R \leq \infty$

Se tiene

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + c_3(z-z_0)^3 + c_4(z-z_0)^4 + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots$$

Si evaluamos en $z = z_0$, se obtiene $f(z_0) = c_0$, es decir, se verifica para $n = 0$ que

$c_0 = \dfrac{f^{(0)}(z_0)}{0!} = \dfrac{f(z_0)}{1} = f(z_0)$

Derivando $f(z)$ se tiene

$f'(z) = c_1 + 2c_2(z-z_0) + 3c_3(z-z_0)^2 + 4c_4(z-z_0)^3 + \cdots + nc_n(z-z_0)^{n-1} + \cdots$ para $|z-z_0| < R$.

Evaluando en $z = z_0$, $\;f'(z_0) = c_1$

Entonces para $n = 1$ se verifica que $c_1 = \dfrac{f^{(1)}(z_0)}{1!} = \dfrac{f'(z_0)}{1} = f'(z_0)$

Por ser una serie de potencias podemos volverla a derivar término a término conservando el radio de convergencia:

$f''(z) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(z-z_0) + 4\cdot 3c_4(z-z_0)^2 + \cdots + n(n-1)c_n(z-z_0)^{n-2} + \cdots$

Evaluando en $z = z_0$, $\;f''(z_0) = 2c_2 \Longrightarrow c_2 = \dfrac{f''(z_0)}{2} = \dfrac{f^{(2)}(z_0)}{2!}$

Si volvemos a derivar se obtiene:

$f^{(3)}(z) = 3\cdot 2c_3 + 4\cdot 3\cdot 2c_4(z-z_0) + \cdots + n(n-1)(n-2)c_n(z-z_0)^{n-3} + \cdots$

Evaluando en $z = z_0$, $\;f^{(3)}(z) = 3\cdot 2c_3 \Longrightarrow c_3 = \dfrac{f^{(3)}(z_0)}{3\cdot 2} = \dfrac{f^{(3)}(z_0)}{3!}$

Podemos ver que en general se tiene que

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, 3 \cdots$$

$\square$

Observaciones

1. Por los teoremas 4.3.6 y 4.4.1:
   $f(z)$ es analítica en z_0 si y solo si $f(z)$ se representa mediante una serie de potencias convergente en un entorno de z_0.

2. Por el teorema 4.3.9, las derivadas de todo orden de una función analítica son también funciones analíticas.

3. Por el teorema 4.4.4, una función analítica en z_0 admite un único desarrollo en serie de potencias de $(z-z_0)$ convergente, que es su serie Taylor alrededor de z_0.

4. Cuando se tiene una función $f(z)$ representada por una serie de potencias de $(z-z_0)$, pero no se conoce la expresión de $f(z)$, el teorema 4.4.4 permite calcular sus derivadas de cualquier orden en z_0:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \Longrightarrow f^{(n)}(z_0) = c_n n! \qquad n = 0, 1, 2, 3 \cdots$$

Ejemplos 4.4.5.

a) Sea $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+4i)^{n+2}}{(n+8)3^n}$

Hallar:

I) $f^{(34)}(-4i)$

Las potencias de la serie son de la forma $n+2$, por lo que los correspondientes coeficientes son:

$$c_{n+2} = \frac{1}{(n+8)3^n} \qquad n = 0, 1, 2, 3\cdots$$

y $f^{(34)}(-4i) = c_{34}34!$ donde c_{34} es el coeficiente de la potencia de grado 34.

Para obtener la potencia de grado 34 se debe cumplir que:

$n+2 = 34 \Longrightarrow n = 32 \Longrightarrow c_{34} = \dfrac{1}{(32+8)3^{32}} = \dfrac{1}{40\cdot 3^{32}}$

Luego

$$f^{(34)}(-4i) = c_{34}34! = \frac{34!}{40\cdot 3^{32}}$$

II) $f^{(1)}(-4i)$

$f^{(1)}(-4i) = c_1 1! = c_1$

c_1 es el coeficiente de la potencia de grado 1.

Para obtener la potencia de grado 1 se debe cumplir que $n+2 = 1 \Longrightarrow n = -1$.

Por lo tanto no podemos encontrar un n tal que $n+2 = 1$, ya que n solamente puede tomar los valores $n = 0, 1, 2, 3\cdots \Longrightarrow c_1 = 0$. Luego:

$$f^{(1)}(-4i) = c_1 1! = c_1 = 0$$

b) Sea $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3i)^{2n}}{(2+in)4^n}$

Hallar

I) $f^{(26)}(3i)$

Las potencias de la serie son de la forma $2n$, por lo que los correspondientes coeficientes son:

$$c_{2n} = \frac{1}{(2+in)4^n} \qquad n = 0, 1, 2, 3\cdots$$

y $f^{(26)}(3i) = c_{26}26!$ donde c_{26} es el coeficiente de la potencia de grado 26.

Para obtener la potencia de grado 26 se debe cumplir que:

$2n = 26 \Longrightarrow n = 13 \Longrightarrow c_{26} = \dfrac{1}{(2+13i)4^{13}} = \dfrac{2-13i}{(4+169)\cdot 4^{13}} = \dfrac{2-13i}{173\ \cdot 4^{13}}$

Luego

$$f^{(26)}(3i) = c_{26}26! = \frac{2-13i}{173\ \cdot 4^{13}}26!$$

II) $f^{(15)}(3i)$

c_{15} es el coeficiente de la potencia de grado 15.

Para obtener la potencia de grado 15 se debe cumplir que $2n = 15 \Longrightarrow n = \dfrac{15}{2}$.

Por lo tanto no podemos encontrar un n tal que $2n = 15$, ya que n solamente puede tomar los valores $n = 0, 1, 2, 3\cdots \Longrightarrow c_{15} = 0$. Luego:

$$f^{(15)}(3i) = c_{15}15! = 0$$

En general, como se puede ver fácilmente, todas las derivadas impares en $3i$ son nulas pues los correspondientes coeficientes valen 0.

$$c_{2n+1} = 0 \Longrightarrow f^{(2n+1)}(3i) = 0$$

III) $f(3i)$
Para obtener la potencia de grado 0 se debe cumplir que
$2n = 0 \Longrightarrow n = 0 \Longrightarrow c_0 = \dfrac{1}{(2+0i)4^0} = \dfrac{1}{2}$
Luego

$$f(3i) = f^{(0)}(3i) = c_0 0! = c_0 \cdot 1 = c_0 = \frac{1}{2}$$

El Teorema de unicidad nos proporciona una herramienta fundamental para poder encontrar un desarrollo de Taylor sin hallar los coeficientes calculando las derivadas, las cuales pueden ser muy complicadas para algunas funciones. En su lugar, se utiliza un desarrollo de Taylor conocido y se raliza una sustitución conveniente o derivación o integración.

Ejemplos 4.4.6.

a) Hallar la serie de Taylor de la función $f(z) = e^{-2z^2}$ alrededor de $z_0 = 0$

$f(z) = e^{-2z^2}$ es analítica en todo el plano complejo por ser composición de funciones analíticas, por lo tanto admite el desarrollo en serie de Taylor alrededor de $z_0 = 0$ y su radio de convergencia es infinito.
En lugar de calcular las derivadas de la función, que a medida que aumenta el orden de derivación resultan más complicadas, podemos hacer una sustitución en la serie conocida de la exponencial:

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \quad \text{con} \quad |\mathrm{u}| < \infty = \mathrm{R}$$

Como este desarrollo vale para todo u, si hacemos la sustitución $u = -2z^2$:

$$e^{-2z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2z^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n z^{2n}}{n!} \quad \text{con} \quad |\mathrm{z}| < \infty = \mathrm{R}$$

Por el Teorema de unicidad es la serie de Taylor alrededor de $z_0 = 0$.

b) Hallar la serie de Taylor de la función $f(z) = e^z$ alrededor de $z_0 = \dfrac{\pi}{2} i$

$f(z) = e^z$ es analítica en todo el plano complejo, por lo tanto admite el desarrollo en serie de Taylor alrededor de $z_0 = \dfrac{\pi}{2} i$, o en potencias de $(z - \dfrac{\pi}{2} i)$, y su radio de convergencia es infinito.
En este ejemplo las expresiones de las derivadas de la función son muy sencillas:
$f^{(n)}(z) = e^z, \quad n = 0, 1, 2, 3 \cdots$
Por lo cual podemos construir la serie directamente

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{2} i)}{n!} \left(z - \frac{\pi}{2} i\right)^n, \quad \text{con } |z - \frac{\pi}{2} i| < R = \infty$$

$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2} i\right) = e^{\frac{\pi}{2} i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i = i, \quad n = 0, 1, 2, 3 \cdots$$

Luego

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{n!} \left(z - \frac{\pi}{2} i\right)^n, \qquad \text{con } |z - \frac{\pi}{2} i| < R = \infty$$

También podemos encontrar este desarrollo sin hacer las derivadas utilizando un procedimiento algebraico para no cambiar la función

$$e^{\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)+\frac{\pi}{2}i} = e^{\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)} e^{\frac{\pi}{2}i} = e^{\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)} i$$

Podemos hacer una sustitución en la serie conocida: $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$ con $|u| < \infty = R$

Como este desarrollo vale para todo u, hacemos la sustitución $u = z - \frac{\pi}{2}i$ y se obtiene:

$$e^{\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)+\frac{\pi}{2}i} = e^{\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)} e^{\frac{\pi}{2}i} = e^{\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)} i = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(z - \frac{\pi}{2} i\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{n!} \left(z - \frac{\pi}{2} i\right)^n$$

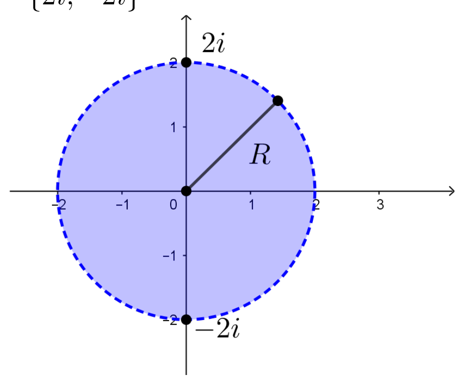
válido para $|z - \frac{\pi}{2}i| < R = \infty$. Por el teorema de unicidad de Taylor este es el desarrollo buscado.

c) Hallar la serie de Taylor de la función $f(z) = \dfrac{1}{4+z^2}$ alrededor de $z_0 = 0$

La función $f(z) = \dfrac{1}{4+z^2}$ es analítica en $z_0 = 0$, por lo tanto admite desarrollo en serie de Taylor alrededor de z_0

$f(z)$ es analítica salvo donde se anula el denominador:
$z^2 + 4 = 0 \Longrightarrow z = \pm 2i$
Por lo tanto el dominio de analiticidad es $D_A = \mathbb{C} - \{2i, -2i\}$

Centrado en $z_0 = 0$, el mayor disco abierto donde la función es analítica tiene radio $R = |2i - 0| = |-2i - 0| = 2$



En lugar de calcular las derivadas podemos, por el teorema de unicidad de Taylor, usar el siguiente procedimiento.

La función se "parece" a la suma de una serie geométrica.

Recordando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \qquad \text{si } |r| < 1$$

escribimos

$$\frac{1}{4+z^2} = \frac{1}{4\left(1+\frac{z^2}{4}\right)}$$

Podemos ver la función como la suma de una serie geométrica con $a = \dfrac{1}{4}$ y $r = -\dfrac{z^2}{4}$.
Reemplazando en la expresión de la serie geométrica se tiene

$$\frac{1}{4+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}\Big(-\frac{z^2}{4}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{4^{n+1}}$$

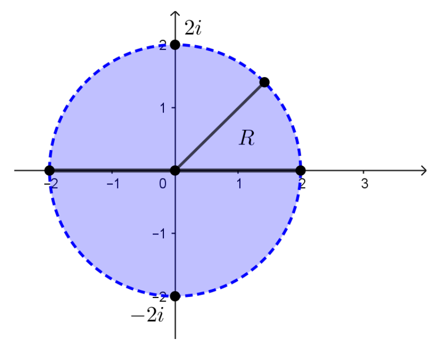
válida si $|r| = \left| -\dfrac{z^2}{4}\right| = \dfrac{|z^2|}{4} < 1 \Longrightarrow |z| < 2 = R$, como ya habíamos determinado.

Por el Teorema de unicidad de Taylor, la serie encontrada, sin calcular las derivadas de la función, es la serie de Taylor de la función $f(z) = \dfrac{1}{4+z^2}$ alrededor de $z_0 = 0$. Observar que en el caso de variable real la función $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$ tiene un desarrollo en serie de Taylor alrededor del origen válido en $|x| < 2$.

$$\frac{1}{4+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^{n+1}}$$

El denominador de la función real es distinto de 0 para todo x, por lo que aparentemente no habría ninguna razón para que el intervalo de convergencia sea $(-2, 2)$. Sin embargo, al pasar a la variable compleja

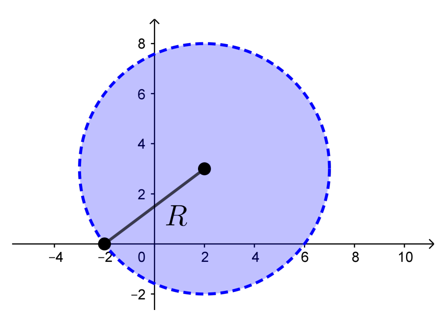
se tiene un disco máximo de convergencia
centrado en el origen, de radio 2
(porque en los puntos $2i$ y $-2i$
la función deja de ser analítica)
que intersecta al eje real en el intervalo $(-2, 2)$



d) Hallar la serie de Taylor de la función $f(z) = \dfrac{1}{(2+z)^2}$ alrededor de $z_0 = 2 + 3i$.

La función $f(z) = \dfrac{1}{(2+z)^2}$ es analítica salvo donde se anula el denominador:
$z + 2 = 0 \Longrightarrow z = -2$
Por lo tanto el dominio de analiticidad es $D_A = \mathbb{C} - \{-2\}$
La función es analítica en $z_0 = 2 + 3i$, entonces admite un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $z_0 = 2 + 3i$.

Centrado en $z_0 = 2 + 3i$, el mayor disco abierto
donde la función es analítica tiene radio
$R = | -2 - (2 + 3i)| = | -4 - 3i| =$
$= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$



En lugar de calcular las derivadas podemos, por el teorema de unicidad de Taylor, seguir el siguiente procedimiento:

$f(z) = \dfrac{1}{(2+z)^2} = \dfrac{d}{dz}\Big(-\dfrac{1}{(2+z)}\Big)$

$-\dfrac{1}{(2+z)}$ se "parece" a la suma de una serie geométrica. La reescribimos de modo que tenga la forma $\dfrac{a}{1-r}$ y en la razón tengamos algo de la forma $(z-(2+3i))$ ya que buscamos un desarrollo en potencias de $(z-(2+3i))$.

$$-\frac{1}{(2+z)} = -\frac{1}{(2+z-2-3i+2+3i)} = -\frac{1}{4+3i+(z-(2+3i))} =$$

$$= -\frac{1}{(4+3i)\left[1+\dfrac{(z-(2+3i))}{4+3i}\right]}$$

Podemos considerar esta última expresión como la suma de una serie geométrica con
$a = -\dfrac{1}{4+3i}$ y $r = -\left(\dfrac{(z-(2+3i))}{4+3i}\right)$

Obtenemos

$$-\frac{1}{(2+z)} = -\frac{1}{(4+3i)\left[1+\dfrac{(z-(2+3i))}{4+3i}\right]} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{(4+3i)}\left(-\frac{z-(2+3i)}{4+3i}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4+3i)^{n+1}}(z-(2+3i))^n$$

válido si

$$|r| = \left|-\left(\frac{(z-(2+3i))}{4+3i}\right)\right| = \frac{|z-(2+3i)|}{|4+3i|} = \frac{|z-(2+3i)|}{5} < 1 \Longrightarrow |z-(2+3i)| < 5 = R$$

comprobando el valor de R previamente determinado.

Ahora $f(z) = \dfrac{1}{(2+z)^2} = \dfrac{d}{dz}\Big(-\dfrac{1}{(2+z)}\Big) = \dfrac{d}{dz}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4+3i)^{n+1}}(z-(2+3i))^n\right)$

Derivando término a término la serie de potencias y recordando que al derivarla conserva el mismo radio de convergencia:

$$f(z) = \frac{1}{(2+z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4+3i)^{n+1}} n(z-(2+3i))^{n-1} \text{ si } |z-(2+3i)| < 5 = R$$

Por el Teorema de unicidad de Taylor, la serie encontrada, sin calcular las derivadas de la función, es la serie de Taylor de la función $f(z) = \dfrac{1}{(2+z)^2}$ alrededor de $z_0 = 2+3i$.

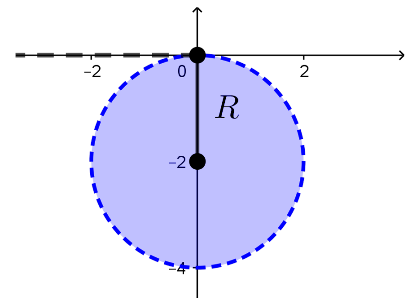
e) Hallar la serie de Taylor de la función $f(z) = \text{Ln}(z)$ alrededor de $z_0 = -2i$.

El dominio de analiticidad de la función $f(z) = \text{Ln}(z)$ es
$D_A = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : \ \text{Re}(z) \leq 0 \wedge \text{Im}(z) = 0\}$

La función es analítica en $z_0 = -2i$, por lo tanto admite un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $z_0 = -2i$.

Centrado en $z_0 = -2i$, el mayor disco abierto donde la función es analítica tiene radio

$R = |0 - (-2i)| = |2i| = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = \sqrt{4} = 2$, puesto que el punto más próximo donde la función deja de ser analítica es el origen.



Si derivamos $f(z) = \text{Ln}(z)$ se obtiene $f'(z) = \dfrac{1}{z}$. La reescribimos de modo que tenga la forma $\dfrac{a}{1-r}$ y en la razón tengamos $(z - (-2i)) = (z + 2i)$ ya que buscamos un desarrollo en potencias de $(z - (-2i)) = (z + 2i)$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z + 2i - 2i)} = \frac{1}{-2i + (z + 2i)} = \frac{1}{(-2i)\left[1 - \left(\dfrac{z + 2i}{2i}\right)\right]}$$

Podemos considerar esta última expresión como la suma de una serie geométrica con

$$a = \frac{1}{(-2i)} = \frac{2i}{(-2i)2i} = \frac{2i}{4} = \frac{i}{2} \quad \text{y} \quad r = \left(\frac{z + 2i}{2i}\right).$$

Obtenemos la serie geométrica

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(-2i)\left[1 - \left(\dfrac{z + 2i}{2i}\right)\right]} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{2}\left(\frac{z + 2i}{2i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1} i^{n-1}} (z + 2i)^n \underbrace{=}_{\frac{1}{i} = -i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{2^{n+1}} (z + 2i)^n$$

Si $|r| = \left|\left(\dfrac{z + 2i}{2i}\right)\right| = \dfrac{|z + 2i|}{|2i|} < 1 \Longrightarrow |z+2i| < 2 = R$, como determinamos previamente.

Ahora para obtener el desarrollo de $f(z) = \text{Ln}(z)$ integramos término a término:

$$\int \frac{1}{z} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{2^{n+1}} \int (z + 2i)^n dz$$

$$\text{Ln}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{2^{n+1}} \frac{(z + 2i)^{n+1}}{(n + 1)} + C \quad \text{si} \quad |z + 2i| < 2 = R$$

(pues al integrar se preserva el radio de convergencia). Para obtener el valor de C evaluamos en $z = -2i$: $\text{Ln}(-2i) = 0 + C \Longrightarrow C = \ln|-2i| + i\,\text{Arg}(-2i) = \ln(2) - i\dfrac{\pi}{2}$

Entonces

$$\text{Ln}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{2^{n+1}} \frac{(z + 2i)^{n+1}}{(n + 1)} + \ln(2) - i\frac{\pi}{2} \quad \text{si} \quad |z + 2i| < 2 = R$$

Por el teorema de unicidad, la serie de potencias encontrada por integración es la serie de Taylor de $f(z) = \text{Ln}(z)$ alrededor de $z_0 = -2i$.

Actividad 4.4.7.

1. Dada $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+7i)^{2n+1}}{2^{4n}(n+4i)}$

   a) Halle el dominio de analiticidad de $f(z)$

   b) Calcule $f^{(25)}(-7i)$ y $f^{(22)}(-7i)$

2. Halle la serie de Taylor de las siguientes funciones en el z_0 dado e indique la región de convergencia:

   a) $f(z) = \dfrac{4i}{z+3} + \dfrac{3}{z+2i}$ $\qquad z_0 = 2i$

   b) $f(z) = z^2 e^{3z}$ $\qquad z_0 = \dfrac{\pi}{2} i$

   c) $f(z) = \cos(2z)$ $\qquad z_0 = \dfrac{\pi}{2}$

   d) $f(z) = \dfrac{2i}{z^3+8}$ $\qquad z_0 = 0$

4.5. Ceros de funciones analíticas

Definición 4.5.1. *Sea $f(z)$ analítica en un dominio $D \subset \mathbb{C}$. Decimos que $z_0 \in D$* ***es un cero de*** *$f(z)$ si $f(z_0) = 0$.*

Ejemplos 4.5.2.

a) $f(z) = z^2 + 9$
La función es analítica en todo el plano complejo.
Planteando $z^2 + 9 = 0 \iff z = \pm 3i$.
$z_1 = 3i$ y $z_2 = -3i$ son los ceros de la función.

b) $f(z) = \text{sen}\,(z)$
La función es analítica en todo el plano complejo.
$\text{sen}\,(z) = 0 \iff z_k = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \cdots$.
$z_k = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \cdots$ son los ceros de la función.

c) $f(z) = e^z$
La función es analítica en todo el plano complejo y no se anula en ningún punto, por lo tanto no tiene ceros.

Definición 4.5.3. *Sea $f(z)$ analítica en un dominio $D \subset \mathbb{C}$.*
Decimos que $z_0 \in D$ es un ***cero de orden*** *$k \geq 1$ de $f(z)$ si*
$f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = f^{(2)}(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad$ *y* $\quad f^{(k)}(z_0) \neq 0$
Decimos que z_0 es ***cero de orden cero*** *si $f(z_0) \neq 0$*

Ejemplos 4.5.4.

a) Vimos que los ceros de la función $f(z) = z^2 + 9$ son $z_1 = 3i$ y $z_2 = -3i$.
Para determinar su orden hacemos la derivada de la función y evaluamos en los ceros
$f^{(1)}(z) = 2z$
$f^{(1)}(3i) = 6i \neq 0 \Longrightarrow z_1 = 3i$ es un cero de orden 1 de $f(z)$.
$f^{(1)}(-3i) = -6i \neq 0 \Longrightarrow z_1 = -3i$ es un cero de orden 1 de $f(z)$.

b) Vimos que los ceros de $f(z) = \operatorname{sen}(z)$ son los puntos $z_k = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \cdots$
Para determinar su orden derivamos la función
$f^{(1)}(z) = \cos(z)$
$f^{(1)}(k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0 \Longrightarrow$
Los $z_k = k\pi$, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \cdots$, son ceros de orden 1 de $f(z)$.

Teorema 4.5.5. Teorema de caracterización de ceros
Sea $f(z)$ analítica en un dominio $D \subset \mathbb{C}$,
$z_0 \in D$ es un cero de orden k de $f(z) \Longleftrightarrow f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, donde $g(z)$ es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$

Demostración
$\Longrightarrow)$
Como $f(z)$ es analítica en z_0 admite un desarrollo de Taylor convergente en un disco abierto $|z - z_0| < R$, para algún $0 < R \leq \infty$. Por ser z_0 un cero de orden k de $f(z)$ se tiene que $f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = f^{(2)}(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ y $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, por lo cual el desarrollo en serie de Taylor en z_0 tiene la forma:

$$f(z) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0)^{k+1} + \cdots =$$

$$= (z - z_0)^k \left[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0) + \cdots \right]$$

Entonces podemos escribir a la función $f(z)$ de la siguiente manera:
$f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, donde $g(z)$ es analítica en z_0 por estar representada por una serie de potencias $g(z) = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \dfrac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0) + \cdots$ convergente en el disco $|z - z_0| < R$ y

$$g(z_0) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0.$$

$\Longleftarrow)$
Tenemos que $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, donde $g(z)$ es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.
Como $g(z)$ es analítica en z_0 admite un desarrollo de Taylor alrededor de z_0 convergente en $|z - z_0| < R$, para algún $0 < R \leq \infty$.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Luego

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z) = (z - z_0)^k \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n+k}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n+k} = g^{(0)}(z_0)(z - z_0)^k + g^{(1)}(z_0)(z - z_0)^{k+1} + \frac{g^{(2)}(z_0)}{2!}(z - z_0)^{k+2} + \cdots$$

$$f(z) = g(z_0)(z - z_0)^k + g^{(1)}(z_0)(z - z_0)^{k+1} + \frac{g^{(2)}(z_0)}{2!}(z - z_0)^{k+2} + \cdots$$

La menor potencia de $(z-z_0)$ que aparece es k, por lo tanto
$f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = f^{(2)}(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(k)}(z_0) = g(z_0)k! \neq 0.$
Es decir que z_0 es un cero de orden k de $f(z)$. □

Ejemplo 4.5.6.

Hallar los ceros de $f(z) = (z^2+9)^2$ y determinar el orden de los mismos.

Los ceros son $z_1 = 3i$ y $z_2 = -3i$.
Sin necesidad de derivar podemos determinar su orden factorizando el polinomio:
$f(z) = (z-3i)^2(z+3i)^2$
Vemos que $z_1 = 3i$ es un cero de orden 2 de $f(z)$ ya que podemos escribir a $f(z)$ como $f(z) = (z-3i)^2 g_1(z)$, donde $g_1(z) = (z+3i)^2$ es analítica en $z_1 = 3i$ y $g_1(3i) = (3i+3i)^2 = -36 \neq 0$, entonces por el Teorema de caracterización de ceros $z_1 = 3i$ es un cero de orden 2 de $f(z)$.
Vemos que también $z_2 = -3i$ es un cero de orden 2 de $f(z)$ ya que podemos escribir a $f(z)$ como $f(z) = (z+3i)^2 g_2(z)$ donde $g_2(z) = (z-3i)^2$ es analítica en $z_2 = -3i$ y $g_2(-3i) = (-3i-3i)^2 = -36 \neq 0$, entonces por el Teorema de caracterización de ceros $z_2 = -3i$ es un cero de orden 2 de $f(z)$.

En algunos casos determinar el orden de z_0 derivando puede ser muy tedioso y en otros puede no ser tan evidente como aplicar el Teorema de caracterización de ceros. En estos casos podemos utilizar desarrollos de Taylor alrededor de z_0.

Ejemplo 4.5.7.

Verificar que $z_0 = 0$ es un cero de $f(z) = z^4 e^{z^2} - z^4 - z^6$ y, mediante un desarrollo en serie adecuado, determinar su orden.

La función es analítica en todo punto (por ser composición, producto, suma y resta de funciones analíticas).
Se verifica que $f(0) = 0$. Por lo tanto $z_0 = 0$ es un cero de $f(z)$.
Calcular las derivadas de la función para determinar el orden del cero puede, en este caso, resultar un poco tedioso.
La función es analítica en $z_0 = 0$, por lo tanto admite el desarrollo de Taylor en $z_0 = 0$ con radio de convergencia infinito.
Los términos con potencias de z ya son desarrollos finitos de Taylor válidos para todo z.
Debemos desarrollar e^{z^2} en potencias de z. La función es analítica para todo z por lo cual admite desarrollo de Taylor en $z_0 = 0$ convergente para todo z.

Conocemos que $e^u = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \quad \text{con} \quad |u| < \infty = R$

Haciendo la sustitución $u = z^2$ se tiene

$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} \quad \text{con} \quad |z| < \infty = R$$

Por el teorema de unicidad de Taylor, es el desarrollo de Taylor de la función e^{z^2} alrededor del origen.
z^4 y z^6 ya está desarrollado en potencias de z.

$$z^4 e^{z^2} = z^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+4}}{n!} \qquad |z| < \infty$$

$$f(z) = z^4 e^{z^2} - z^4 - z^6 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+4}}{n!} - z^4 - z^6 = z^4 + z^6 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{2n+4}}{n!} - z^4 - z^6 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{2n+4}}{n!}$$

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{2n+4}}{n!} = \frac{z^8}{2!} + \frac{z^{10}}{3!} + \frac{z^{12}}{4!} + \cdots = z^8 \left(\frac{1}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \right)$$

Acá ya podemos decir que $z_0 = 0$ es un cero de orden 8 de $f(z)$, observando que 8 es la menor potencia de z que aparece en la serie de la función.
Para aplicar el Teorema de caracterización de ceros podemos escribir

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{2n+4}}{n!} = \frac{z^8}{2!} + \frac{z^{10}}{3!} + \frac{z^{12}}{4!} + \cdots = z^8 \left(\frac{1}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \right) = z^8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n+2)!} = z^8 g(z)$$

$$f(z) = z^8 g(z)$$

Donde $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n+2)!} \qquad |z| < \infty$ es una función analítica para todo z, en particular en $z_0 = 0$, porque es la suma de una serie de potencias de z cuyo radio de convergencia es infinito.
Además $g(0) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \neq 0$
Entonces, por el Teorema de Caracterización de ceros, $z_0 = 0$ es un cero de orden 8 de $f(z)$.

Actividad 4.5.8.

1. Verifique que $z_0 = 2$ es un cero de $f(z) = \frac{24}{2+z} - 6 + \frac{3(z-2)}{2} - \frac{3(z-2)^2}{8}$ y, mediante un desarrollo en serie adecuado, determine su orden.

2. Si z_0 es un cero de orden p de $f(z)$ y un cero de orden q de $g(z)$ justifique, utilizando el Teorema de caracterización de ceros:

   a) z_0 es un cero de orden $p + q$ de $f(z)g(z)$
   b) si $p < q$, z_0 es un cero de orden p de $f(z) \pm g(z)$
   c) si $p = q$, z_0 es un cero de orden mayor o igual que p de $f(z) \pm g(z)$

3. Determine el orden de z_0 como cero de $f(z)$. Si utiliza un desarrollo en serie de potencias indique su dominio de analiticidad.

   a) $f(z) = (z + 2i)(z^2 + 4)^3 \quad , \quad z_0 = -2i$
   b) $f(z) = (1 + \cos z)^3 \operatorname{sen}^4(z) \quad , \quad z_0 = \pi$
   c) $f(z) = (z^2 + z) \operatorname{sen}(z^7) \quad , \quad z_0 = 0$
   d) $f(z) = \operatorname{senh}^5(\pi z) \quad , \quad z_0 = i$
   e) $f(z) = (z-1)^2 \left(\frac{4}{(z+1)^2} - z \right) \quad , \quad z_0 = 1$

4.6. Serie de Laurent

Si $f(z)$ es analítica en z_0 se la puede desarrollar en serie de Taylor en algún entorno de z_0. Si f no es analítica en z_0 pero lo es en un anillo centrado en z_0, se la puede representar mediante una serie de potencias positivas y negativas, denominada serie de Laurent.

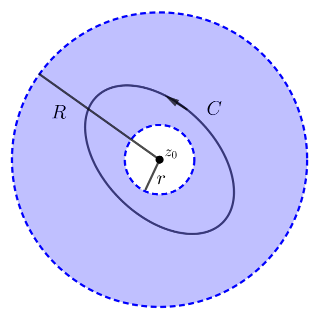
En el próximo capítulo veremos la importancia de obtener la representación de una función $f(z)$ en serie de Laurent en un punto donde no es analítica.

Teorema 4.6.1. Serie de Laurent. *Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio con forma de anillo o corona $r < |z - z_0| < R$ (r puede ser cero y R puede ser infinito) y sea C una curva cerrada, simple, suave o suave a trozos y recorrida en sentido antihorario, contenida en el anillo $r < |z - z_0| < R$ y que rodea a z_0. Entonces, para todo z del anillo $r < |z - z_0| < R$, $f(z)$ puede representarse mediante* ***la serie de Laurent***

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad , \quad si \quad r < |z - z_0| < R$$

donde $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \quad y \quad b_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}}\, dz$

Región de convergencia de una serie de Laurent: $r < |z - z_0| < R$



Los coeficientes a_n y b_n de la serie de Laurent no se suelen hallar calculando las integrales que los definen, sino utilizando otros métodos basados, como en el caso de las series de Taylor, en utilizar desarrollos conocidos y realizar sustituciones adecuadas, o derivación, como veremos en los ejemplos siguientes. Estos procedimientos se basan, como en el caso de las series de Taylor, en que toda serie de potencias (positivas o negativas) de $(z - z_0)$ que representa a una función en un anillo centrado en z_0 es el desarrollo en serie de Laurent en ese anillo.

Teorema 4.6.2. Teorema de unicidad de Laurent
Si una serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$, *converge a una función $f(z)$ en todos los puntos de la corona centrada en z_0, $r < |z - z_0| < R$, entonces es la serie de Laurent de $f(z)$ en potencias de $(z - z_0)$ en $r < |z - z_0| < R$.*

Observaciones

1. Si f es analítica en z_0, es decir que hay un disco centrado en z_0 (cuyo radio es la distancia de z_0 al punto más cercano donde la función deja de ser analítica), se obtendrá una serie de potencias positivas de $(z - z_0)$, es decir la serie de Taylor de la función.

2. Si f no es analítica en z_0 y es analítica en una corona o anillo centrado en z_0: $r < |z - z_0| < R$, se obtendrá una serie de potencias positivas y negativas de $(z - z_0)$, es decir, la serie de Laurent.

La siguiente propiedad muestra un resultado análogo con respecto a la derivación de la serie de Taylor

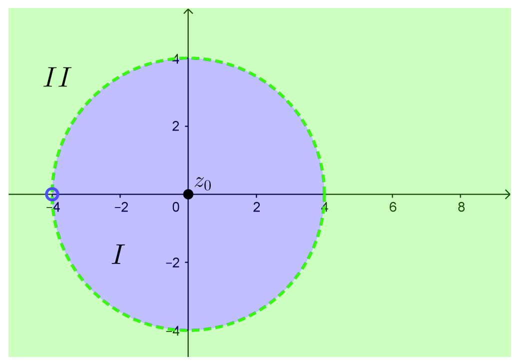
Propiedad 4.6.3. *Las series de Laurent, como en el caso de las series de potencias, pueden derivarse término a término en su corona de convergencia, obteniéndose una nueva serie que converge en la misma corona a la derivada de $f(z)$.*

Ejemplos 4.6.4.

a) Sea $f(z) = \dfrac{3}{z+4}$. Hallar todos los desarrollos en serie alrededor de $z_0 = 0$.
Queremos hallar todos los desarrollos en serie posibles alrededor de $z_0 = 0$, es decir en potencias de $(z - z_0) = z - 0 = z$.
La función $f(z) = \dfrac{3}{z+4}$ es analítica para todo z salvo en $z = -4$.
La función es analítica en $z_0 = 0$ Si nos paramos en $z_0 = 0$, el mayor disco centrado en $z_0 = 0$ hasta tocar el punto donde la función no es analítica tiene radio $|4 - 0| = 4$.
El plano complejo queda dividido en dos regiones:

I: $|z - 0| < 4$

II: $4 < |z - 0| < \infty$



En la región I, el disco $|z| < 4$, la función es analítica, por lo tanto el desarrollo en serie en potencias de z será la serie de Taylor de la función.
En la región II, la corona $4 < |z| < \infty$, la función es analítica por lo tanto se obtendrá un desarrollo en serie en potencias positivas y negativas de z, es decir una serie de Laurent.

En la región I, $|z| < 4$, encontramos la serie de Taylor de la función en $z_0 = 0$ teniendo en cuenta que tiene la forma de la suma de una serie geométrica:

$$f(z) = \frac{3}{z+4} = \frac{3}{4(\frac{z}{4}+1)} = \frac{3}{4(1+\frac{z}{4})}$$

Corresponde a la suma de una serie geométrica con $a = \dfrac{3}{4}$ y $r = -\dfrac{z}{4}$.

$$f(z) = \frac{3}{z+4} = \frac{3}{4(\frac{z}{4}+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{4}\Big(-\frac{z}{4}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^n z^n}{4^{n+1}}$$

si $\quad |r| = \left| -\dfrac{z}{4} \right| = \dfrac{|z|}{4} < 1 \Longrightarrow |z| < 4.$
Por el Teorema de unicidad de Taylor, la serie encontrada es la serie de Taylor de la función en $z_0 = 0$ convergente en $|z| < 4$.

En la región II, la corona $4 < |z| < \infty$, encontramos la serie de Laurent de la función en $z_0 = 0$ teniendo en cuenta que la función tiene la forma de la suma de una serie geométrica y que ahora debe ser convergente en la corona:

$$f(z) = \frac{3}{z+4} = \frac{3}{z(1+\frac{4}{z})}$$

Corresponde a la suma de una serie geométrica con $a = \dfrac{3}{z}$ y $r = -\dfrac{4}{z}$ ($z \neq 0$ en la región II):

$$f(z) = \frac{3}{z+4} = \frac{3}{z(1+\frac{4}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{z}\Big(-\frac{4}{z}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^n 4^n}{z^{n+1}}$$

si $\quad |r| = \left| -\dfrac{4}{z} \right| = \dfrac{4}{|z|} < 1 \Longrightarrow |z| > 4$

Por teorema de unicidad de Laurent, la serie encontrada es la serie de Laurent de la función en $z_0 = 0$ convergente en $4 < |z| < \infty$.

b) Hallar el desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = (z-2i)^3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z-2i}\right)$ alrededor de $z_0 = 2i$ e indicar la región de convergencia.

$f(z)$ es analítica para todo z salvo en $z_0 = 2i$: $\ 0 = r < |z-2i| < R = \infty$, es decir que la función es analítica en la corona centrada en $z_0 = 2i$, por lo tanto admite un desarrollo en serie de Laurent alrededor de $z_0 = 2i$ o en potencias de $(z-2i)$.

Sabemos que $\ \operatorname{sen} u = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}\ $ si $\ |u| < \infty$.

Haciendo la sustitución $u = \dfrac{1}{z-2i}$ se obtiene

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z-2i}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-2i)^{2n+1}}$$

válido para todo $z \neq 2i$, es decir si $0 < |z-2i| < \infty$.

El factor $(z-2i)^3$ ya está desarrollado en potencias de $(z-2i)$ y este desarrollo vale para todo z.

Entonces

$$(z-2i)^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z-2i}\right) = \underbrace{(z-2i)^3}_{|z-2i|<\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-2i)^{2n+1}}}_{0<|z-2i|<\infty} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-2i)^{2n-2}}}_{0<|z-2i|<\infty}$$

$$= (z-2i)^2 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!(z-2i)^2} - \frac{1}{7!(z-2i)^4} + \cdots \quad \text{si} \ \ 0 < |z-2i| < \infty$$

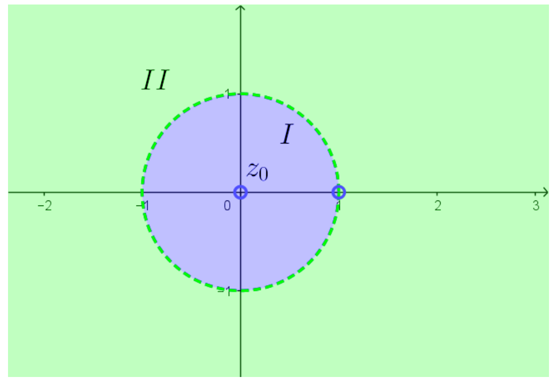
Por unicidad del desarrollo en serie de Laurent, la serie encontrada es la serie de Laurent de $f(z) = (z-2i)^3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z-2i}\right)$ alrededor de $z_0 = 2i$ y converge en $0 < |z-2i| < \infty$.

c) Hallar todos los desarrollos en serie de Laurent de $f(z) = \dfrac{2}{z^2(z-1)}$ indicando las regiones de convergencia:

- Alrededor de $z_0 = 0$
  Queremos hallar series en potencias de $(z - z_0) = (z - 0) = z$.
  La función $f(z) = \dfrac{2}{z^2(z-1)}$ es analítica para todo z salvo en $z = 0$ y $z = 1$.
  Si nos paramos en $z_0 = 0$, la mayor corona centrada en $z_0 = 0$ hasta tocar el otro punto donde la función no es analítica tiene radio $|1 - 0| = 1$.
  El plano complejo queda dividido en dos regiones:

I: $0 < |z - 0| < 1$

II: $1 < |z - 0| < \infty$



En la región I, la corona $0 < |z| < 1$, la función es analítica, por lo tanto tendrá un desarrollo en serie de Laurent alrededor de $z_0 = 0$.
En la región II, la corona $1 < |z| < \infty$, la función es analítica por lo tanto se obtendrá un desarrollo en serie en potencias positivas y/o negativas de z, es decir una serie de Laurent de la función alrededor de $z_0 = 0$.

En la región I, $0 < |z| < 1$, encontramos la serie de Laurent teniendo en cuenta que podemos pensar a la función como el producto de $\dfrac{2}{z^2}$ por $\dfrac{1}{z-1}$.
La función $\dfrac{2}{z^2}$ ya está desarrollada en potencias de z. Es una serie de Laurent que se reduce a un solo término y que converge en $0 < |z| < \infty$
La función $\dfrac{1}{z-1}$ es analítica en $z_0 = 0$, por lo tanto se obtendrá un desarrollo de Taylor de la función en $z_0 = 0$. Vemos que corresponde a la suma de una serie geométrica con $a = -1$ y $r = z$:

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} -z^n \quad \text{si} \quad |r| = |z| < 1$$

Luego

$$f(z) = \frac{2}{z^2(z-1)} = \underbrace{\underbrace{\frac{2}{z^2}}_{0<|z|<\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} -z^n}_{|z|<1}}_{0<|z|<1} = \sum_{n=0}^{\infty} -2z^{n-2} = -\frac{2}{z^2} - \frac{2}{z} - 2 - 2z - 2z^2 - \cdots$$

La intersección de las regiones de convergencia para cada factor da la corona de convergencia $0 < |z| < 1$.
Por el teorema de unicidad de Laurent, la serie encontrada es la serie de Laurent de la función en $z_0 = 0$ convergente en $0 < |z| < 1$.

En la región II, la corona $1 < |z| < \infty$, encontramos la serie de Laurent teniendo en cuenta que podemos pensar a la función como el producto de $\dfrac{2}{z^2}$ por $\dfrac{1}{z-1}$.
$\dfrac{2}{z^2}$ ya está desarrollada en potencias de z. Es una serie de Laurent que se reduce a un solo término y que converge en $0 < |z| < \infty$.
Ahora para que $\dfrac{1}{z-1}$ sea la suma de una serie convergente para $1 < |z| < \infty$ debemos escribirla de la siguiente forma:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}$$

Corresponde a la suma de una serie geométrica con $a = \dfrac{1}{z}$ y $r = \dfrac{1}{z}$:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} \quad \text{si } |r| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} < 1 \Longrightarrow 1 < |z|$$

Luego:

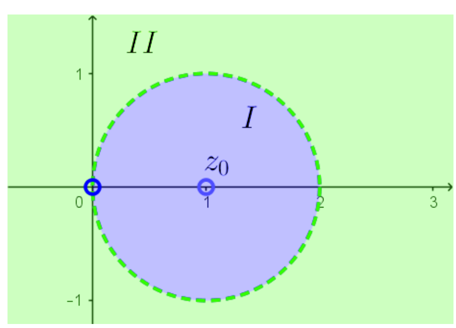
$$f(z) = \frac{2}{z^2(z-1)} = \underbrace{\underbrace{\frac{2}{z^2}}_{0<|z|<\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}}_{1<|z|<\infty}}_{1<|z|<\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{z^{n+3}} = \frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^4} + \cdots$$

La intersección de las regiones de convergencia para cada factor da la corona de convergencia $1 < |z| < \infty$. Por el teorema de unicidad de Laurent, la serie encontrada es la serie de Laurent de la función en $z_0 = 0$ convergente en $1 < |z| < \infty$.

- Alrededor de $z_0 = 1$
Queremos hallar series en potencias de $(z - z_0) = (z - 1)$.
La función $f(z) = \dfrac{2}{z^2(z-1)}$ es analítica para todo z salvo en $z = 0$ y $z = 1$.
Si nos paramos en $z_0 = 1$, la mayor corona centrada en $z_0 = 1$ hasta tocar el punto donde la función no es analítica tiene radio $|0 - 1| = 1$.
El plano complejo queda dividido en dos regiones:

I: $0 < |z-1| < 1$

II: $1 < |z-1| < \infty$



En la región I, la corona $0 < |z-1| < 1$, la función es analítica, por lo tanto tendremos un desarrollo de la función en serie de Laurent alrededor de $z_0 = 1$.
En la región II, la corona $1 < |z-1| < \infty$, la función es analítica por lo tanto se obtendrá otro desarrollo en serie en potencias positivas y/o negativas de $(z-1)$, es decir una serie de Laurent de la función alrededor de $z_0 = 1$.

En la región I, $0 < |z-1| < 1$, encontramos la serie de Laurent de la función en $z_0 = 1$ teniendo en cuenta que la podemos pensar como el producto de $\frac{2}{z^2}$ por $\frac{1}{z-1}$.
$\frac{1}{z-1}$ ya está desarrollada en potencias de $(z-1)$. Es una serie de Laurent que se reduce a un solo término y que converge en $0 < |z-1| < \infty$.
La función $\frac{2}{z^2}$ es analítica en $z_0 = 1$ por lo cual la serie en potencias de $(z-1)$ que obtendremos es su serie de Taylor. Podemos asociarla a la suma de una serie geométrica viendo que es la derivada de $-\frac{2}{z}$ que se "parece" a la suma de una serie geométrica.

Para obtener una razón donde aparezca $(z-1)$, ya que queremos obtener una serie de potencias positivas de $(z-1)$, podemos escribir:

$$-\frac{2}{z} = -\frac{2}{1+(z-1)}$$

Corresponde a la suma de una serie geométrica con $a = -2$ y $r = -(z-1)$. Entonces

$$-\frac{2}{z} = -\frac{2}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)(-1)^n(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^{n+1}(z-1)^n$$

si $|r| = |-(z-1)| = |z-1| < 1$

$$\left(-\frac{2}{z}\right)' = \frac{2}{z^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^{n+1}(z-1)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-1}$$

si $|z-1| < 1$
Luego

$$f(z) = \frac{2}{z^2(z-1)} = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{z-1}}_{0<|z-1|<\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-1}}_{|z-1|<1}}_{0<|z-1|<1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-2} = \frac{2}{z-1} - 4 + 6(z-1) + \cdots$$

La intersección de las regiones de convergencia para cada factor da la corona de convergencia: $0 < |z-1| < 1$.
Por el teorema de unicidad de Laurent, la serie encontrada es la serie de Laurent de la función en $z_0 = 1$ convergente en $0 < |z-1| < 1$.

En la región II, la corona $1 < |z-1| < \infty$, encontramos la serie de Laurent teniendo en cuenta que podemos pensar a la función como el producto de $\frac{1}{z-1}$ por $\frac{2}{z^2}$.
$\frac{1}{z-1}$ ya está desarrollada en potencias de $(z-1)$. Es una serie de Laurent que se reduce a un solo término y que converge en $0 < |z-1| < \infty$.

Ahora para relacionar a $\dfrac{2}{z^2}$ con la suma de una serie geométrica convergente para $1 < |z-1| < \infty$ tenemos en cuenta que es la derivada de $-\dfrac{2}{z}$.

Como queremos que en la razón aparezca $\dfrac{1}{z-1}$ para que la serie de Laurent sea convergente en la corona $1 < |z-1| < \infty$ escribimos

$$-\frac{2}{z} = -\frac{2}{(z-1)+1} = -\frac{2}{(z-1)\left[1+\dfrac{1}{z-1}\right]}$$

Corresponde a la suma de una serie geométrica con $a = -\dfrac{2}{(z-1)}$ y $r = -\dfrac{1}{(z-1)}$.

$$\frac{-2}{z} = \frac{-2}{(z-1)+1} = \frac{-2}{(z-1)\left[1+\dfrac{1}{z-1}\right]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{(z-1)}\Big(\frac{1}{z-1}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{(z-1)^{n+1}}$$

si $|r| = \left| -\dfrac{1}{(z-1)} \right| = \dfrac{1}{|z-1|} < 1 \quad \Longrightarrow 1 < |z-1|$

$$\frac{2}{z^2} = \left(\frac{-2}{z}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{(z-1)^{n+1}}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^{n+1}(z-1)^{-(n+1)}\right)' =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^{n+1}\Big(-(n+1)(z-1)^{-(n+1)-1}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+2}(n+1)}{(z-1)^{n+2}}$$

si $1 < |z-1|$

Luego

$$f(z) = \frac{2}{z^2(z-1)} = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{z-1}}_{0<|z-1|<\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+2}(n+1)}{(z-1)^{n+2}}}_{1<|z-1|<\infty}}_{1<|z-1|<\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+2}(n+1)}{(z-1)^{n+3}} =$$

$$= \frac{2}{(z-1)^3} - \frac{4}{(z-1)^4} + \cdots$$

La intersección de las regiones de convergencia para cada factor da la corona de convergencia: $1 < |z-1| < \infty$.
Por el teorema de unicidad de Laurent, la serie encontrada es la serie de Laurent de la función en $z_0 = 1$ convergente en $1 < |z-1| < \infty$.

d) Hallar el desarrollo de Laurent de alrededor de $f(z) = \dfrac{6z}{(z+2)(z-4)}$ alrededor de $z_0 = 3i$ válido en $z = 6+8i$.

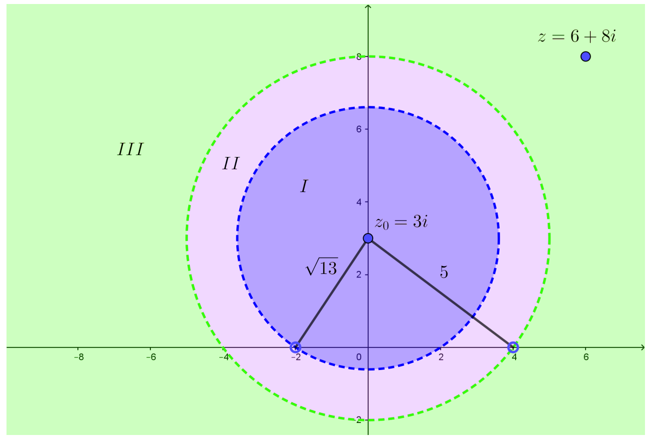
La función $f(z)$ es analítica para todo z salvo en $z = 4$ y $z = -2$. Si nos paramos en $z_0 = 3i$, donde la función es analítica, tendremos dos circunferencias centradas en $z_0 = 3i$ hasta tocar los puntos donde la función no es analítica. La más cercana tiene radio $|-2-3i| = \sqrt{13}$ y la más alejada de $z_0 = 3i$ tiene radio $|4-3i| = 5$.

El plano complejo queda dividido en tres regiones:

I: $|z-3i| < \sqrt{13}$

II: $\sqrt{13} < |z-3i| < 5$.

III: $5 < |z-3i| < \infty$



Como queremos encontrar el desarrollo de Laurent de $f(z) =$ alrededor de $z_0 = 3i$ que sea válido en $z = 6+8i$, nos fijamos en cuál de las 3 regiones se encuentra el punto $z = 6+8i$.

Vemos en el gráfico que se encuentra en la corona no acotada III. Para determinar analíticamente su ubicación hallamos su distancia a $z_0 = 3i$:

$$|6+8i-3i| = \sqrt{6^2+5^2} = \sqrt{61} \Longrightarrow 5 < |6+8i-3i| < \infty$$

entonces verificamos que el punto $z = 6+8i$ se encuentra en la región III.

La función es analítica en la corona no acotada $5 < |z-3i| < \infty$ por lo tanto admite un desarrollo en serie de Laurent. Para encontrar la serie, en este caso, nos conviene descomponer la función en fracciones simples:
Se obtiene que $A = 2$ y $B = 4$ (verificar). Entonces

$$\frac{6z}{(z+2)(z-4)} = \frac{2}{z+2} + \frac{4}{z-4}$$

Cada término se "parece" a la suma de una serie geométrica. Para llevar cada uno a la forma de la suma de una serie geométrica de modo que sea convergente en $5 < |z-3i| < \infty$, es decir que en la razón aparezca $\frac{1}{z-3i}$, procedemos como sigue.

$$\frac{2}{z+2} = \frac{2}{(z-3i)+3i+2} = \frac{2}{(z-3i)\left[1+\frac{2+3i}{z-3i}\right]}$$

corresponde a la suma de una serie geométrica con $a = \frac{2}{(z-3i)}$ y $r = -\frac{2+3i}{(z-3i)}$.

$$\frac{2}{z+2} = \frac{2}{(z-3i)\left[1+\frac{2+3i}{z-3i}\right]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(z-3i)}\left(\frac{2+3i}{z-3i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n(2+3i)^n}{(z-3i)^{n+1}}$$

$$\text{si } |r| = \left| -\left(\frac{2+3i}{z-3i}\right) \right| = \frac{|2+3i|}{|z-3i|} = \frac{\sqrt{13}}{|z-3i|} < 1 \quad \Longrightarrow \sqrt{13} < |z-3i|.$$

$$\frac{4}{z-4} = \frac{4}{(z-3i)+3i-4} = \frac{4}{(z-3i)\left[1+\dfrac{3i-4}{z-3i}\right]}$$

corresponde a la suma de una serie geométrica con $a = \dfrac{4}{(z-3i)}$ y $r = -\dfrac{3i-4}{(z-3i)}$.

$$\frac{4}{z-4} = \frac{4}{(z-3i)\left[1+\dfrac{3i-4}{z-3i}\right]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(z-3i)}\left(\frac{3i-4}{z-3i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n(3i-4)^n}{(z-3i)^{n+1}}$$

$$|r| = \left| -\left(\frac{3i-4}{z-3i}\right) \right| = \frac{|3i-4|}{|z-3i|} = \frac{\sqrt{25}}{|z-3i|} < 1 \quad \Longrightarrow 5 < |z-3i|.$$

$$f(z) = \frac{6z}{(z+2)(z-4)} = \frac{2}{z+2} + \frac{4}{z-4} = \underbrace{\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n(2+3i)^n}{(z-3i)^{n+1}}}_{\sqrt{13}<|z-3i|<\infty} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n(3i-4)^n}{(z-3i)^{n+1}}}_{5<|z-3i|<\infty}}_{5<|z-3i|<\infty}$$

La suma de las series converge en la intersección de las dos coronas no acotadas de convergencia: $5 < |z-3i| < \infty$. Luego

$$f(z) = \frac{6z}{(z+2)(z-4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n(2+3i)^n}{(z-3i)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n(3i-4)^n}{(z-3i)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n\left[(2+3i)^n + 2(3i-4)^n\right]}{(z-3i)^{n+1}} \quad \text{si} \quad 5 < |z-3i| < \infty$$

Actividad 4.6.5.

1. Halle todos los desarrollos de Laurent en $z_0 = 4i$ de $f(z) = \dfrac{z+4}{(z^2+16)(z+4i)}$ e indique las correspondientes regiones de convergencia.

2. Halle la serie de Laurent de $f(z) = z^2 e^{\frac{3}{z+2i}}$ alrededor de $z_0 = -2i$ e indique la región de convergencia.

Actividades complementarias

1. Dada $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2i)^{3n+2}}{2^{3n+1}(n+3i)}$

   a) Halle el dominio de analiticidad de $f(z)$

   b) Calcule $f^{(35)}(-2i)$ y $f^{(27)}(-2i)$

   c) Compruebe que $z_0 = -2i$ es un cero de $f(z)$ y, justificando su respuesta, indique su orden.

d) Compruebe que $z_0 = -2i$ es un cero de $g(z) = (z+2i)^4 f(z)$ y, justificando su respuesta, indique su orden.

e) Compruebe que $z_0 = -2i$ es un cero de $h(z) = f(z)+g(z)$ y, justificando su respuesta, indique su orden.

2. Verifique que $z_0 = 2$ es un cero de $f(z) = \dfrac{24}{2+z} - 6 + \dfrac{3(z-2)}{2} - \dfrac{3(z-2)^2}{8}$ y, mediante un desarrollo en serie adecuado, determine su orden.

3. Verifique que $z_0 = \pi$ es un cero de $f(z) = (z-\pi)^3 \operatorname{sen}(z) - (z-\pi)^4 - \dfrac{(z-\pi)^6}{6}$ y, mediante un desarrollo en serie adecuado, determine su orden.

4. Determine el orden de z_0 como cero de $f(z)$. Si utiliza series de potencias indique sus dominios de analiticidad.

   a) $f(z) = \left(z^3+1\right)^5 + \operatorname{Ln}(-z); \quad z_0 = -1$

   b) $f(z) = (1+\cos z)^3 \operatorname{sen}^4 z; \quad z_0 = \pi$

   c) $f(z) = z^8 - z^6 + 4z^3 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} z^{3n}; \quad z_0 = 0$

5. Dada $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2i)^{n+1}}{2^{n+1}(1+i)^{n+1}(n+1)}$

   a) Halle la región de convergencia.

   b) Halle la expresión de $f(z)$

6. Halle la serie de Taylor de las siguientes funciones en el z_0 dado e indique la región de convergencia:

   a) $f(z) = \dfrac{4i}{(z+4)^3}; \quad z_0 = -3i$

   b) $f(z) = \operatorname{Ln}(z); \quad z_0 = 2i$

   c) $f(z) = \operatorname{Ln}(z+2); \quad z_0 = 1+3i$

   d) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+4}; \quad z_0 = -2$

7. Sea $f(z) = \dfrac{2i}{z} + \dfrac{1}{z^2} - 1$

   a) Halle la serie que representa a $f(z)$ en un entorno de $z_0 = i$

   b) Empleando dicha serie determine el orden de $z_0 = i$ como cero de $f(z)$. Indique los dominios de convergencias de sus desarrollos.

   c) Basándose en la serie obtenida en a) encuentre el valor de $f^{(3)}(i)$.

   d) Empleando caracterización de ceros determine el orden de $z_0 = i$ como cero de $h(z) = \left[\dfrac{f(z)}{z}\right]^3$.

8. Halle la serie de Laurent de $f(z) = z^2 \cos\left(\dfrac{2}{z+4i}\right)$ alrededor de $z_0 = -4i$ e indique la región de convergencia.

9. Halle todos los desarrollos en series de potencias positivas y/o negativas, según corresponda, alrededor de $z_0 = 2$ de $f(z) = \dfrac{2i}{z-4i} + \dfrac{3}{z+2i}$ e indique las correspondientes regiones de convergencia.

10. Halle el desarrollo de Laurent de $f(z) = \dfrac{4z}{z-3} + \dfrac{1}{z^2}$ alrededor de $z_0 = 4i$ válido para $z = 8+6i$.

4.7. Actividades resueltas

Actividad 4.1.7

a) $z_n = \dfrac{n^2+4}{3n^2+5n+2} + i\dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n}$

Calculamos los límites de las partes real e imaginaria:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4}{3n^2+5n+2} = \frac{1}{3} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} = 0$$

Por el teorema 4.1.4 resulta

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{3} + i0 = \frac{1}{3}$$

b) $z_n = \left(1+i\sqrt{3}\right)^n$

Podemos escribir $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ entonces $z_n = \left(1+i\sqrt{3}\right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$

de donde $|z_n| = 2^n$

Como $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$

teniendo en cuenta la propiedad 4.1.5a deducimos que la sucesión z_n diverge ya que si fuera convergente la sucesión de módulos debería ser convergente.

c) $z_n = \dfrac{n}{n-i} + i\,\dfrac{2n}{n+i} =$

Operando con los números complejos resulta

$$z_n = \frac{n}{n-i} + i\frac{2n}{n+i} = \frac{n^2+2n}{n^2+1} + i\,\frac{2n^2+n}{n^2+1}$$

entonces por el teorema 4.1.4:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 1 + i2$$

Actividad 4.2.13

1. a) y **b)** Sugerencia: analice la convergencia absoluta de la serie aplicando el criterio del cociente a la serie de módulos.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+i3)^2}$

Consideramos la serie de módulos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n}{(n^2+i3)^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{|n^2+i3|^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+9}$$

Además $\dfrac{n}{n^4+9} \leq \dfrac{n}{n^4} = \dfrac{1}{n^3}$ para todo $n \geq 1$

Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ es convergente (serie-p, con $p = 3 > 1$), por el criterio de comparación la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n}{(n^2+i3)^2}\right|$ es convergente, por lo tanto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+i3)^2}$ converge absolutamente y, por ende, converge.

2.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5(-7)^n}{2^{2n}} + i\frac{1}{n^2}\right)$

La serie de la parte real del término general es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5(-7)^n}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5(-7)^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}5\left(\frac{-7}{4}\right)^n$$

Es una serie geométrica de razón $r = \dfrac{-7}{4}$ y $a = 5$, como $|r| = \left|\dfrac{-7}{4}\right| = \dfrac{7}{4} > 1$ la serie de la parte real diverge, entonces por el teorema 4.2.11 la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5(-7)^n}{2^{2n}} + i\frac{1}{n^2}\right)$ diverge. Ya no es necesario analizar la convergencia de la serie de la parte imaginaria del término general.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7\,(1+i)^{2n}}{(3+i4)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}7\left(\frac{(1+i)^2}{3+i4}\right)^n$

Es una serie geométrica de razón $r = \dfrac{(1+i)^2}{3+i4}$ y $a = 7$, como $|r| = \left|\dfrac{(1+i)^2}{3+i4}\right| = \dfrac{2}{5} < 1$ la serie converge y su suma es

$$S = \frac{7}{1 - \dfrac{(1+i)^2}{3+i4}} = \frac{119}{13} + i\frac{42}{13}$$

Actividad 4.3.5

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2i)^{3n+2}}{2^{3n+1}(n+3i)}$

Debemos encontrar el radio de convergencia para la serie dada. Para esto, aplicaremos el criterio del cociente a la serie de los módulos. Vemos que el término general de la serie está dado por

$$a_n = \frac{(z+2i)^{3n+2}}{2^{3n+1}(n+3i)}$$

por lo cual

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|(z+2i)^{3(n+1)+2}|\;|2^{3n+1}|\;|(n+3i)|}{|(z+2i)^{3n+2}|\;|2^{3(n+1)+1}|\;|(n+1+3i)|}$$

Si desarrollamos las potencias de nuestros términos, podemos simplificar la expresión a la forma:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|(z+2i)^{3n+2+3}|\ |2^{3n+1}|\ |(n+3i)|}{|(z+2i)^{3n+2}|\ |2^{3n+1+3}|\ |(n+1+3i)|} = \frac{|(z+2i)^3|}{|2^3|}\frac{|n+3i|}{|n+1+3i|}$$

Ahora calculamos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|(z+2i)^3|}{2^3}\frac{|n+3i|}{|n+1+3i|} = \frac{|(z+2i)^3|}{2^3}\lim_{n\to\infty}\frac{|n+3i|}{|n+1+3i|}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|n+3i|}{|n+1+3i|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+9}}{\sqrt{(n+1)^2+9}} = 1$$

aplicamos el criterio del cociente de la siguiente manera:

$$\frac{|(z+2i)^3|}{2^3}\lim_{n\to\infty}\frac{|n+3i|}{|n+1+3i|} = \frac{|(z+2i)^3|}{2^3} < 1 \Leftrightarrow |(z+2i)|^3 < 2^3$$

de donde

$$|z+2i| < 2$$

Por lo tanto, la serie converge en el disco $|z+2i| < 2$ y el radio de convergencia es $R = 2$.
Por último, debido a que (a los fines de este curso) solo contamos con las herramientas necesarias para encontrar las funciones a las cuales convergen las series geométricas y dado que la serie que estamos analizando no es de este tipo, podemos decir que no es posible encontrar la función a la cual converge esta serie.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+4i)^{2n}}{(i9)^{n+1}}$

Nuevamente, debemos encontrar el radio de convergencia de una serie de potencias. Procedemos de la misma manera que antes y resolvemos aplicando el criterio del cociente. En este caso, sabemos que:

$$a_n = (-1)^n\frac{(z+4i)^{2n}}{(i9)^{n+1}}$$

por lo cual

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|(-1)^{n+1}|}{|(-1)^n|}\frac{|(z+4i)^{2(n+1)}|}{|(z+4i)^{2n}|}\frac{|(i9)^{n+1}|}{|(i9)^{(n+1)+1}|}$$

que simplificado resulta:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |(-1)|\frac{|(z+4i)^2|}{|i9|} = \frac{|(z+4i)^2|}{9}$$

que es una expresión que no depende de n. Así, por el criterio del cociente, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|(z+4i)^2|}{9} = \frac{|(z+4i)^2|}{9}$$

y

$$\frac{|(z+4i)|^2}{9} < 1 \Leftrightarrow |(z+4i)^2| < 3^2 \Leftrightarrow |z+4i| < 3$$

Vemos que la serie converge en el disco $|z+4i| < 3$, con $R = 3$.

Ahora, analicemos esta serie en más detalle para ver si es posible hallar la expresión de la función a la cual converge. Para esto, vemos que el término general de la serie puede reescribirse de la siguiente manera:

$$a_n = (-1)^n \frac{(z+4i)^{2n}}{(i9)^{n+1}} = \frac{1}{i9} \frac{(-1)^n (z+4i)^{2n}}{(i9)^n} = \frac{1}{i9} \left[\frac{(-1)(z+4i)^2}{(i9)} \right]^n$$

Esto nos indica que la serie es geométrica, y por lo tanto puede expresarse como una sumatoria del tipo: $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, con r y a dados por:

$$\begin{aligned} r &= \frac{(-1)(z+4i)^2}{(i9)} \\ a &= \frac{1}{i9} \end{aligned}$$

La serie converge para $|r| < 1$ (coincide con lo analizado usando el criterio del cociente), su suma es:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a\, r^n = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{i9}}{1 - \left(\frac{(-1)(z+4i)^2}{(i9)} \right)} = \frac{1}{i9 + (z+4i)^2}$$

Encontramos que la serie converge a la función

$$f(z) = \frac{1}{i9 + (z+4i)^2}$$

Actividad 4.4.7

1. Dada

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4i} \frac{(z+7i)^{2n+1}}{2^{4n}}$$

a) Hallar el dominio de analiticidad de $f(z)$.
Aplicando el criterio del cociente tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|z+7i|^2}{2^4} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+4i}{n+1+4i} \right| = \frac{|z+7i|^2}{2^4} < 1 \iff |z+7i| < 4$$

Es decir que en el interior del disco de radio $R = 4$ centrado en $z_0 = -7i$ la serie converge absolutamente y por tanto $f(z)$ es analítica en dicho dominio.

b) Ahora queremos calcular $f^{(25)}(-7i)$. Puesto que ya tenemos la serie de Taylor de $f(z)$ centrada en $z_0 = -7i$ se tiene:

$$c_{25} = \frac{f^{(25)}(-7i)}{25!} = \frac{1}{2^{48}(12+4i)} \Rightarrow f^{(25)}(-7i) = \frac{25!}{2^{48}(12+4i)}$$

ya que es el coeficiente que multiplica al término $(z+7i)^{25}$.
Por otro lado, observando que no hay términos de potencias pares en el desarrollo de $f(z)$ se concluye que $c_{2n} = 0\ \forall n$. De esta afirmación se deduce que $f^{(22)}(-7i) = 0$.

2. Hallar la serie de Taylor e indicar la región de convergencia.

a) $f(z) = \dfrac{4i}{z+3} + \dfrac{3}{z+2i} \qquad z_0 = 2i$

Haciendo uso del desarrollo en serie de potencias de la serie geométrica para el primer sumando obtenemos:

$$\frac{4i}{z+3} = \frac{4i}{3+2i}\,\frac{1}{1+\dfrac{z-2i}{3+2i}} = \frac{4i}{3+2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2i)^n}{(3+2i)^n}$$

el cual converge en la región $D_0 = \{z \in \mathbb{C}, |z-2i| < |3+2i| = \sqrt{13}\}$.
Analizemos ahora el segundo sumando:

$$\frac{3}{z+2i} = \frac{3}{4i}\,\frac{1}{1+\dfrac{z-2i}{4i}} = \frac{3}{4i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{4}\right)^n\ (z-2i)^n\,,$$

este desarrollo converge en la región $D_1 = \{z \in \mathbb{C}, |z-2i| < 4\}$. Por tanto el desarrollo en serie de potencias de $f(z)$ vendrá dado por la expresión:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-2i)^n\,, \qquad \text{con:}$$

$$c_n = (-1)^n\frac{4i}{(3+2i)^{n+1}} - \frac{3i}{4}\left(\frac{i}{4}\right)^n$$

la cual va a converger en el dominio $D = D_0 \cap D_1 = D_0$.
Haciendo uso del teorema de unicidad, podemos justificar que el desarrollo en serie de potencias obtenido es el desarrollo en serie de Taylor.

b) $f(z) = z^2 e^{3z} \qquad z_0 = \dfrac{\pi}{2}\,i$

Puesto que por un lado:

$$e^{3z} = e^{3z_0}e^{3(z-z_0)} = e^{3z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\,(z-z_0)^n\ , \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

y por otro:

$$z^2 = (z-z_0+z_0)^2 = (z-z_0)^2 + 2z_0(z-z_0) + z_0^2$$

se deduce que:

$$z^2e^{3z} = \left[(z-z_0)^2 + 2z_0(z-z_0) + z_0^2\right] \times e^{3z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\,(z-z_0)^n =$$

$$= z_0^2e^{3z_0} + z_0e^{3z_0}\,(3z_0+2)\,(z-z_0) + e^{3z_0}\left(1+6z_0+\frac{9}{2}z_0^2\right)(z-z_0)^2 + \cdots$$

El cual converge para $\forall z \in \mathbb{C}$.

c) $f(z) = \cos(2z) \qquad z_0 = \dfrac{\pi}{2}$

Usando la identidad del coseno de la suma:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

con $\alpha = 2(z - \frac{\pi}{2})$ y $\beta = \pi$, se puede mostrar que:

$$\cos(2z) = \cos\left(2(z - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})\right) = -\cos\left(2(z - \frac{\pi}{2})\right)$$

y por otro sabemos que:

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\ z^{2n}\ , \forall z \in \mathbb{C}$$

se deduce que:

$$\cos(2z) = -\cos\left(2(z - \frac{\pi}{2})\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!}\ \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}\ , \forall z \in \mathbb{C}$$

d) $f(z) = \dfrac{2i}{z^3 + 8} \qquad z_0 = 0$

En este caso nuevamente vamos a recurrir al desarrollo de la serie geométrica:

$$\frac{2i}{z^3+8} = \frac{2i}{8}\ \frac{1}{1+(z/2)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2i}{8}(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2i(-1)^n}{8^{n+1}}\ z^{3n}$$

el cual converge para $|z| < 2$.

Actividades 4.6.5

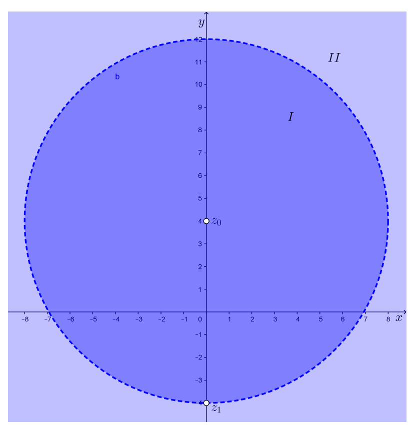
1) $f(z) = \dfrac{z+4}{(z^2+16)\,(z+4i)} = \dfrac{z+4}{(z-4i)\,(z+4i)\,(z+4i)} = \dfrac{z+4}{(z-4i)\,(z+4i)^2}$

Las singularidades de $f(z)$ son $z_0 = 4i$ y $z_1 = -4i$

Ubicados en la singularidad $z_0 = 4i$ obtenemos las siguientes coronas donde $f(z)$ es analítica y admite desarrollo en serie de Laurent:

$I:\ \ 0 < |z - 4i| < 8$

$II:\ \ 8 < |z - 4i| < \infty$



Por una parte el factor $\dfrac{z+4}{(z-4i)}$:

$$\frac{z+4}{(z-4i)} = \frac{z-4i+4i+4}{(z-4i)} = \frac{z-4i}{(z-4i)} + \frac{4i+4}{(z-4i)} = 1 + \frac{4i+4}{(z-4i)}$$

es el desarrollo en potencias de $(z - 4i)$ que converge en $|z - 4i| > 0$ (†).

Por otra parte el factor $\dfrac{1}{(z+4i)^2} = -\left(\dfrac{1}{z+4i}\right)'$, entonces buscaremos el desarrollo de $\dfrac{1}{z+4i}$

Analizaremos primero en $I:\ 0<|z-4i|<8$.

$$\frac{1}{z+4i}=\frac{1}{z-4i+4i+4i}=\frac{1}{z-4i+8i}=\frac{1}{8i\left[\dfrac{z-4i}{8i}+1\right]}$$

resulta la suma de una serie geomética con primer término $a=\dfrac{1}{8i}$ y razón $-\dfrac{z-4i}{8i}$.

Luego

$$\frac{1}{z+4i}=\frac{1}{8i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-4i)^n}{(8i)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-4i)^n}{(8i)^{n+1}}$$

que converge cuando $\left|-\dfrac{z-4i}{8i}\right|<1$, es decir si $|z-4i|<8$.

Entonces

$$\frac{1}{(z+4i)^2}=-\left(\frac{1}{z+4i}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}n\,\frac{(z-4i)^{n-1}}{(8i)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{8i}\right)^{n+1}n\,(z-4i)^{n-1}$$

también convergente en $|z-4i|<8$ (‡).

De (†) y (‡), en la intersección de esas regiones, es decir, en $0<|z-4i|<8$, podemos escribir

$$f(z)=\frac{z+4}{(z-4i)}\frac{1}{(z+4i)^2}=\left[1+\frac{4i+4}{(z-4i)}\right]\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{8i}\right)^{n+1}n\,(z-4i)^{n-1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{8i}\right)^{n+1}n\,(z-4i)^{n-1}+\frac{4i+4}{(z-4i)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{8i}\right)^{n+1}n\,(z-4i)^{n-1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{8i}\right)^{n+1}n\,(z-4i)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(4i+4)\left(\frac{-1}{8i}\right)^{n+1}n\,(z-4i)^{n-2}$$

Cambiamos n por $n+1$ en la segunda sumatoria de manera que en las dos sumas el término general tenga la misma potencia de $z-4i$:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{8i}\right)^{n+1}n\,(z-4i)^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(4i+4)\left(\frac{-1}{8i}\right)^{n+2}(n+1)\,(z-4i)^{n-1}=$$

Separamos el término para $n=0$ para empezar en $n=1$ en las dos sumatorias:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{8i}\right)^{n+1}n\,(z-4i)^{n-1}+$$

$$+(4i+4)\left(\frac{-1}{8i}\right)^{2}(z-4i)^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(4i+4)\left(\frac{-1}{8i}\right)^{n+2}(n+1)\,(z-4i)^{n-1}$$

Finalmente podemos escribir una sola sumatoria y sacar factor común $\left(\dfrac{-1}{8i}\right)^{n+1}(z-4i)^{n-1}$:

$$f(z)=(4i+4)\left(\frac{-1}{8i}\right)^{2}(z-4i)^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[n+(4i+4)\left(\frac{-1}{8i}\right)(n+1)\right]\left(\frac{-1}{8i}\right)^{n+1}(z-4i)^{n-1}$$

También podemos considerar los primeros términos:

$$f(z) = (4i+4)\left(\frac{-1}{8i}\right)^2 \frac{1}{z-4i} + \left[1 - \left(\frac{(4i+4)2}{8i}\right)\right]\left(\frac{-1}{8i}\right)^2 (z-4i)^0 +$$

$$+\left[2 - \left(\frac{(4i+4)3}{8i}\right)\right]\left(\frac{-1}{8i}\right)^3 (z-4i)^1 + \left[3 - \left(\frac{(4i+4)4}{8i}\right)\right]\left(\frac{-1}{8i}\right)^4 (z-4i)^2 + ...$$

Por el teorema de unicidad de Laurent, la serie encontrada es la serie de Laurent de la función $f(z)$ alrededor de $z_0 = 4i$ convergente en $0 < |z-4i| < 8$.

Analizaremos ahora en $II: \;\; 8 < |z-4i| < \infty$.

$$\frac{1}{z+4i} = \frac{1}{z-4i+4i+4i} = \frac{1}{z-4i+8i} = \frac{1}{(z-4i)\left[1+\dfrac{8i}{z-4i}\right]}$$

resulta el producto de $\dfrac{1}{(z-4i)}$ (ya desarrollada alrededor de $4i$ y convergente en $|z-4i| > 0$) con la suma de una serie geomética de razón $-\dfrac{8i}{z-4i}$ (convergente en $\left|-\dfrac{8i}{z-4i}\right| < 1$).

Luego

$$\frac{1}{z+4i} = \frac{1}{(z-4i)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(8i)^n}{(z-4i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(8i)^n}{(z-4i)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (8i)^n (z-4i)^{-n-1}$$

que converge en la intersección de las dos regiones, o sea, en $|z-4i| > 8$.

Entonces

$$\frac{1}{(z+4i)^2} = -\left(\frac{1}{z+4i}\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (8i)^n (-n-1)(z-4i)^{-n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(8i)^n (n+1)}{(z-4i)^{n+2}}$$

también convergente en $|z-4i| > 8$ $\;(\dagger\dagger\dagger)$.

De $(\dagger)$ y $(\dagger\dagger\dagger)$, en la intersección de esas regiones, es decir, en $|z-4i| > 8$, podemos escribir

$$f(z) = \frac{z+4}{(z-4i)}\frac{1}{(z+4i)^2} = \left[1 + \frac{4i+4}{(z-4i)}\right]\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(8i)^n (n+1)}{(z-4i)^{n+2}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(8i)^n (n+1)}{(z-4i)^{n+2}} + \frac{4i+4}{(z-4i)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(8i)^n (n+1)}{(z-4i)^{n+2}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(8i)^n (n+1)}{(z-4i)^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(4i+4)(8i)^n (n+1)}{(z-4i)^{n+3}}$$

Cambiamos n por $n-1$ en la segunda sumatoria de manera que en las dos sumatorias el término general tenga la misma potencia de $z-4i$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(8i)^n (n+1)}{(z-4i)^{n+2}} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{(4i+4)(8i)^{n-1} n}{(z-4i)^{n+2}}$$

Separamos el término para $n = 0$ para empezar en $n = 1$ en las dos sumatorias y acomodamos para sacar factor común:

$$f(z) = \frac{1}{(z-4i)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(8i)^n (n+1)}{(z-4i)^{n+2}} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)(-1)^n \frac{(4i+4)(8i)^n n}{8i(z-4i)^{n+2}}$$

Finalmente podemos escribir una sola sumatoria y sacar factor común $\dfrac{(-8i)^n}{(z-4i)^{n+2}}$:

$$f(z) = \frac{1}{(z-4i)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1) - \frac{(4i+4)n}{8i} \right] \frac{(-8i)^n}{(z-4i)^{n+2}}$$

El lector puede escribir los primeros términos de la serie.

Por el teorema de unicidad de Laurent, la serie encontrada es la serie de Laurent de la función $f(z)$ alrededor de $z_0 = 4i$ convergente en $|z - 4i| > 8$.

2) La función $f(z) = z^2 e^{\frac{3}{z+2i}}$ es analítica en todo z salvo $z_0 = -2i$, por lo tanto admite un desarrollo en serie de Laurent alrededor de $z_0 = -2i$ convergente en $|z + 2i| > 0$.

Por una parte, el factor z^2:

$$z^2 = [(z+2i) - 2i]^2 = (z+2i)^2 - 4i(z+2i) - 4$$

ya está desarrollado en serie de Taylor alrededor de $z_0 = -2i$ y es convergente para todo z (†).

Para analizar el factor $e^{\frac{3}{z+2i}}$ consideramos el desarrollo de e^u que converge para todo u, o sea en $|u| < \infty$:

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$$

sustituimos $u = \dfrac{3}{z+2i}$:

$$e^{\frac{3}{z+2i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{z+2i}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!(z+2i)^n}$$

es válido para todo $z \neq -2i$, es decir si $0 < |z + 2i| < \infty$ (‡)

De (†) y (‡), en la intersección de esas regiones, es decir, en $0 < |z + 2i| < \infty$, podemos escribir

$$f(z) = z^2 e^{\frac{3}{z+2i}} = \left[(z+2i)^2 - 4i(z+2i) - 4 \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!(z+2i)^n} =$$

$$= (z+2i)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!(z+2i)^n} - 4i(z+2i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!(z+2i)^n} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!(z+2i)^n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!(z+2i)^{n-2}} - 4i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!(z+2i)^{n-1}} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!(z+2i)^n}$$

Si se necesitara tener una sola sumatoria, se puede reemplazar, por ejemplo, en la primera sumatoria n por $n+2$ y en la segunda n por $n+1$. Separar los términos correspondientes a $n=-2$ y $n=-1$, y a partir de $n=0$ escribir una sola sumatoria.

Por el teorema de unicidad de Laurent, la serie encontrada es la serie de Laurent de la función $f(z)$ alrededor de $z_0=-2i$ convergente en $0<|z+2i|<\infty$.

Actividades complementarias

Ejercicio 2

Para verificar que $z_0=2$ es un cero de f(z) utilizamos la definición: Sea $f(z)$ analítica en un dominio $D\subset\mathbb{C}$ decimos que $z_0\in D$ es un cero de $f(z)$ si $f(z_0)=0$

$f(z)$ es analítica en $z_0=2$ y si reemplazamos:

$$f(2)=\frac{24}{(2+2)}-6+3\frac{(2-2)}{2}-3\frac{(2-2)^2}{8}=6-6=0$$

Por lo tanto $z_0=2$ es un cero de $f(z)$.
La función $f(z)$ es analítica en todo $\mathbb{C}$, salvo donde se anula el denominador, por ser composición de funciones analíticas (polinómicas y trigonométricas). Su dominio de analiticidad es $D=\mathbb{C}-\{-2\}$ y por lo tanto en dicha región admite desarrollo de Taylor. Además $z_0=2\in D$.
Debemos desarrollar $f(z)$ en potencias de $(z-2)$.
Los términos de $f(z)$ que contienen potencias de $(z-2)$ ya son desarrollos finitos de Taylor cuya región de convergencia es $|z-2|<\infty$.
Debemos desarrollar $\frac{24}{(2+z)}$ en potencias de $(z-2)$:

$$\frac{24}{2+z}=\frac{24}{2+z-2+2}=\frac{24}{4-(-(z-2))}=\frac{6}{1-(\frac{-(z-2)}{4})}$$

$$\frac{24}{(2+z)}=\sum_{n=0}^{\infty}6(-1)^n\frac{(z-2)^n}{4^n}$$

La función converge en $|\frac{z-2}{4}|<1\Rightarrow|z-2|<4$

Es decir, la función f(z) desarrollada en potencias de $(z-2)$:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6(-1)^n}{4^n}(z-2)^n-6+\frac{3}{2}(z-2)-\frac{3}{8}(z-2)^2$$

$$f(z)=\left[\sum_{n=3}^{\infty}\frac{6(-1)^n}{4^n}(z-2)^n+6-\frac{6}{4}(z-2)+\frac{6}{4^2}(z-2)^2\right]-6+\frac{3}{2}(z-2)-\frac{3}{8}(z-2)^2$$

Cancelando los términos iguales:

$$f(z)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{6(-1)^n}{4^n}(z-2)^n \qquad |z-2|<4$$

Si desarrollamos algunos términos de la serie:

$$f(z) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{6(-1)^n}{4^n}(z-2)^n = \frac{6(-1)^3}{4^3}(z-2)^3 + \frac{6(-1)^4}{4^4}(z-2)^4...$$

Podemos decir que $z_0 = 2$ es un cero de orden 3 de $f(z)$, observando que 3 es la menor potencia de $(z-2)$ que aparece en la serie de la función.

Ejercicio 3

Primero verificaremos que $z_0 = \pi$ es un cero de $f(z)$ utilizando la definición.

La función $f(z)$ es analítica en todo el plano $\mathbb{C}$ por ser composición de funciones analíticas (polinómicas y trigonométricas).

Además $z_0 = \pi \in D$

Luego reemplazamos $z_0 = \pi$ en la función:

$$f(\pi) = (\pi-\pi)^3 sen(\pi) - (\pi-\pi)^4 - \frac{(\pi-\pi)^6}{6} = 0$$

Por lo tanto $z_0 = \pi$ es un cero de $f(z)$

Como el dominio de analiticidad es $D = \mathbb{C}$ admite desarrollo de Taylor en todo el plano complejo. Debemos desarrollar $f(z)$ en potencias de $(z-\pi)$.

Los términos de $f(z)$ que contienen potencias de $(z-\pi)$ ya son desarrollos finitos de Taylor. Debemos desarrollar $\operatorname{sen}(z)$ en potencias de $(z-\pi)$:

$$\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(z-\pi+\pi) = \operatorname{sen}(z-\pi)\cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi)\cos(z-\pi) = -\operatorname{sen}(z-\pi)$$

$$\operatorname{sen}(z) = -\operatorname{sen}(z-\pi) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n+1} \qquad |z-\pi| < \infty$$

Es decir, la función $f(z)$ desarrollada en potencias de $(z-\pi)$:

$$f(z) = (z-\pi)^3 \left[-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n+1} \right] - (z-\pi)^4 - \frac{(z-\pi)^6}{6}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n+4} - (z-\pi)^4 - \frac{(z-\pi)^6}{6} \qquad |z-\pi| < \infty$$

Si desarrollamos algunos términos de la serie:

$$f(z) = \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n+4} + (-1)(z-\pi)^4 + \frac{1}{3!}(z-\pi)^6 \right] - (z-\pi)^4 - \frac{(z-\pi)^6}{6}$$

Cancelando los términos iguales:

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n+4} - 2(z-\pi)^4 \qquad |z-\pi| < \infty$$

Podemos decir que $z_0 = \pi$ es un cero de orden 4 de $f(z)$, observando que 4 es la menor potencia de $(z - \pi)$ que aparece en la serie de la función.

Ejercicio 4

a) $f(z) = (z^3 + 1)^5 + \text{Ln}(-z)$; $z_0 = -1$

La función $f(z)$ se anula en $z_0 = -1$ pues $f(-1) = ((-1)^3 + 1)^5 + \text{Ln}(-(-1)) = 0 + 0 = 0$. Además es analítica en $z_0 = -1$ por ser suma de una polinómica (analítica en todo el plano complejo) con $\text{Ln}(-z)$ que es composición de analíticas ($z \mapsto -z$ analítica en todo el plano por ser polinómica y $z \mapsto \text{Ln}z$ analítica excepto sobre el semieje real negativo y el origen. Pero la imagen de $z_0 = -1$ por $z \mapsto -z$ yace sobre el semieje real positivo).

La forma más sencilla de hallar el orden del cero es en este caso evaluando las derivadas de $f(z)$ en $z_0 = -1$. En efecto:

$f(-1) = ((-1)^3 + 1)^5 + \text{Ln}(-(-1)) = 0 + \text{Ln}(1) = 0 + 0 = 0$
$f'(z) = 5(z^3 + 1)^4 3z^2 + \dfrac{1}{z}$ así que $f'(-1) = 5((-1)^3 + 1)^4 3(-1)^2 + \dfrac{1}{(-1)} = -1 \neq 0$
Por lo tanto $z_0 = -1$ es un cero de primer orden de $f(z)$. Para ver otra manera de resolverlo empleando caracterización de ceros, podemos analizar como sigue a continuación.

$g(z) = z^3 + 1$ tiene en $z_0 = -1$ un cero de orden 1 pues:
$g(-1) = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$
$g'(z) = 3z^2$ de manera que $g'(-1) = 3(-1)^2 = 3 \neq 0$

Luego, la función $h(z) = (z^3 + 1)^5$ tiene en $z_0 = -1$ un cero de orden $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$

La función $k(z) = \text{Ln}(-z)$ tiene en $z_0 = -1$ un cero de orden 1 pues:
$k(-1) = \text{Ln}(-(-1)) = \text{Ln}(1) = 0$
$k'(z) = \dfrac{1}{(-z)}(-1) = \dfrac{1}{z}$ así que $k'(-1) = -1 \neq 0$

Como $f(z) = h(z) + k(z)$ donde $h(z)$ y $k(z)$ tienen en z_0 cero de distinto orden, entonces z_0 es cero de $f(z)$ de orden $\text{mín}\{5, 1\} = 1$.

c) $f(z) = z^8 - z^6 + 4z^3 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4(-1)^n}{n^2} z^{3n}$; $z_0 = 0$

La función $f(z)$ se anula en $z_0 = 0$ puesto que $f(0) = 0^8 - 0^6 + 4 \times 0^3 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4(-1)^n}{n^2} 0^{3n} = 0$
Ante todo determinemos el dominio de analiticidad de la serie. Para ello aplicamos el criterio del cociente a la serie de los módulos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{4(-1)^{n+1} z^{3(n+1)}}{(n+1)^2}}{\dfrac{4(-1)^n z^{3n}}{n^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} |z|^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2 \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2} |z|^3 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2} |z|^3 = |z|^3$$

Por lo tanto la serie converge si $|z|^3 < 1$, es decir cuando $|z| < 1$. Entonces:

$$f(z) = \underbrace{z^8 - z^6 + 4z^3}_{\text{si } |z|<\infty} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} z^{3n}}_{\text{si } |z|<1} \quad \text{si } |z| < 1$$

Como esta es una serie de potencias centrada en $z_0 = 0$ y convergente en el disco abierto $|z| < 1$, por unicidad ha de ser la serie de Taylor de $f(z)$ centrada en el origen. Luego, para hallar el orden de $z_0 = 0$ como cero de $f(z)$ basta encontrar la menor potencia de z que está presente en este desarrollo con coeficiente no nulo. Si separamos los términos de orden menor o igual que 8 en esta serie:

$$f(z) = z^8 - z^6 + 4z^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} z^{3n} =$$

$$= z^8 - z^6 + 4z^3 + \frac{4(-1)^1}{1^2} z^3 + \frac{4(-1)^2}{2^2} z^6 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} z^{3n} =$$

$$= z^8 - z^6 + 4z^3 - 4z^3 + z^6 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} z^{3n} =$$

$$= z^8 + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} z^{3n}}_{\text{potencias de orden } \geq 9} \quad \text{si } |z| < 1$$

Esto muestra que la menor potencia que está presente en la serie de Taylor centrada en $z_0 = 0$ es la potencia 8, lo que indica que $z_0 = 0$ es un cero de $f(z)$ de orden 8.

Ejercicio 6

a) $f(z) = \dfrac{4i}{(z+4)^3} \qquad z_0 = -3i$

Utilizaremos el desarrollo de la serie geométrica:

$$\frac{4i}{4+z} = \frac{4i}{4-3i}\ \frac{1}{1 + \frac{z+3i}{4-3i}} = \frac{4i}{4-3i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z+3i}{4-3i}\right)^n ,$$

converge para $|z + 3i| < 5$. Ahora notemos que:

$$\frac{4i}{(z+4)^3} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{4i}{4+z}\right)$$

Puesto que la derivada de una función analítica (como lo es $f(z)$ en su dominio de convergencia) es también una función analítica (con el mismo dominio de convergencia) podemos derivar término a término dos veces y obtener así el resultado deseado.

b) $f(z) = \text{Ln}(z) \qquad z_0 = 2i$

Utilizaremos el desarrollo de la serie geométrica:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2i}\ \frac{1}{1 + \dfrac{z-2i}{2i}} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2i}{2i}\right)^n$$

converge para $|z-2i|<2$. Ahora notemos que:

$$\mathrm{Ln}(z)+k=\int \frac{dz}{z}$$

e integrando miembro a miembro se obtiene para $|z-2i|<2$:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{z-2i}{2i}\right)^{n+1}-k$$

Evaluando ambos miembros en $2i$ resulta $k=-\mathrm{Ln}(2i)$

d) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+4}$ $\qquad z_0=-2$

Se puede escribir (fracciones parciales)

$$\frac{z}{z^2+4}=\frac{1/2}{z-2i}-\frac{1/2}{z+2i}$$

Nuevamente utilizando el desarrollo de la serie geométrica (centrado en $z_0=-2$) para cada sumando se obtiene el desarrollo deseado.

Ejercicio 7

Sea $f(z)=\dfrac{2i}{z}+\dfrac{1}{z^2}-1$

a) Primeramente hallemos la serie de potencias de $(z-i)$ que representa a $g(z)=\dfrac{1}{z}$ en un entorno de $z_0=i$. Razonamos con la serie geométrica:

$$g(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{i+(z-i)}=\frac{-i}{1+\dfrac{(z-i)}{i}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-i)\left[-\frac{(z-i)}{i}\right]^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)i^{n+1}(z-i)^n \text{ si } |z-i|<1$$

En efecto, hemos empleado la serie geométrica de razón $-\dfrac{(z-i)}{i}=i(z-i)$ y primer término $-i$, la que converge si $|i(z-i)|<1$ es decir en el disco abierto $|z-i|<1$.
Para obtener el desarrollo correspondiente para la función $h(z)=\dfrac{1}{z^2}$ podemos derivar término a término el de $g(z)$ y multiplicar por -1. El disco de convergencia permanece siendo el mismo:

$$h(z)=\frac{1}{z^2}=-\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}ni^{n+1}(z-i)^{n-1} \text{ si } |z-i|<1$$

Por lo tanto:

$$f(z)=2ig(z)+h(z)-1=\sum_{n=0}^{\infty}2\,i^n(z-i)^n+\sum_{n=1}^{\infty}ni^{n+1}(z-i)^{n-1}-1 \text{ si } |z-i|<1$$

b) En el desarrollo obtenido en a) las potencias $(z-i)^0$ y $(z-i)^1$ no están presentes en realidad. En efecto: $f(i)=0$

El coeficiente c_0 de la potencia de orden 0 se obtiene sumando los respectivos coeficientes de las dos series en la expresión anterior y restando el término -1, es decir:

$$c_0 = 2\,i^0 + 1\,i^2 - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$$

El coeficiente c_1 de la potencia de orden 1 se obtiene sumando los respectivos coeficientes de las dos series en la expresión anterior, es decir:

$$c_1 = 2\,i^1 + 2\,i^3 = 2i - 2i = 0$$

La potencia de orden 2 sí está presente con coficiente c_2 dado por:

$$c_2 = 2i^2 + 3i^4 = -2 + 3 = 1 \neq 0$$

Esto basta para caracterizar a $z_0 = i$ como cero de orden 2 de $f(z)$.
Como curiosidad veamos que en la expresión de $f(z)$ se pueden juntar las dos series que quedaron sumadas, teniendo en cuenta que las potencias de órdenes 0 y 1 no están presentes:

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} 2\,i^n (z-i)^n + \sum_{n=3}^{\infty} n i^{n+1} (z-i)^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} 2\,i^n (z-i)^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) i^{n+2} (z-i)^n =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} 2\,i^n (z-i)^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) i^n i^2 (z-i)^n = \sum_{n=2}^{\infty} 2\,i^n (z-i)^n - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) i^n (z-i)^n =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} (2-n-1) i^n (z-i)^n = \sum_{n=2}^{\infty} (1-n) i^n (z-i)^n \;\text{ si } |z-i| < 1$$

c) Por la unicidad del desarrollo en serie de potencias, la serie obtenida en el inciso a) es la serie de Taylor de $f(z)$ centrada en el punto $z_0 = i$. Entonces el coeficiente c_3 que en dicha serie acompaña la potencia $(z-i)^3$ es $c_3 = \dfrac{f^{(3)}(i)}{3!}$

Pero examinando la serie hallada en a) vemos que $c_3 = 2\,i^3 + 4i^5 = -2i + 4i = 2i$

Por lo tanto:

$$f^{(3)}(i) = 3!\,c_3 = 3!(2i) = 12\,i$$

d) Dado que $z_0 = i$ es cero de orden 2 de $f(z)$, por el teorema de caracterización de ceros podemos escribir en un entorno de z_0:

$$f(z) = (z-i)^2 f_1(z) \;\text{ donde } f_1(z) \text{ es analítica y no nula en } z_0 = i$$

Luego, en dicho entorno es válida la igualdad:

$$h(z) = \left[\frac{f(z)}{z}\right]^3 = \left[\frac{(z-i)^2 f_1(z)}{z}\right]^3 = (z-i)^6 \left[\frac{f_1(z)}{z}\right]^3$$

La función $h_1(z) = \left[\dfrac{f_1(z)}{z}\right]^3$ es analítica en z_0 (es cociente de analíticas con denominador no nulo, o si se prefiere es composición de analíticas).
Hemos escrito en un entorno de $z_0 = i$:

$$h(z) = (z-i)^6 h_1(z) \;\text{ donde } h_1(z) \text{ es analítica y no nula en } z_0 = i$$

Apelando nuevamente al teorema de caracterización de ceros queda probado que $z_0 = i$ es un cero de orden 6 de $h(z)$.

CAPÍTULO 5

Teorema de los residuos

El objetivo principal de este capítulo es estudiar el Teorema de los residuos, una herramienta eficaz para calcular integrales de una función de variable compleja a lo largo de una curva cerrada cuando la función tiene un número finito de puntos singulares en el interior de la curva. También, para calcular determinadas integrales reales que son muy difíciles de resolver en variable real. En el tema transformada de Laplace, lo aprovecharemos para hallar la transformada inversa mediante la integral de inversión compleja.
Comenzaremos presentando la noción de singularidad de una función de variable compleja. Luego, clasificaremos una singularidad aislada, mediante el desarrollo en serie de Laurent de la función en un entorno reducido de la misma, según tres tipos: singularidad evitable, singularidad esencial o polo.
La ubicación de los polos (y también de los ceros) de una función en el plano complejo, resulta de gran utilidad en materias específicas de Ingeniería para el análisis, el diseño y el estudio de la estabilidad de diferentes tipos de sistemas, como por ejemplo, las redes eléctricas.
Definiremos el concepto de residuo de una función de variable compleja en una singularidad aislada para llegar al Teorema de los residuos, que se usará, finalmente, para la resolución de dos casos de integrales reales.

5.1. Singularidades

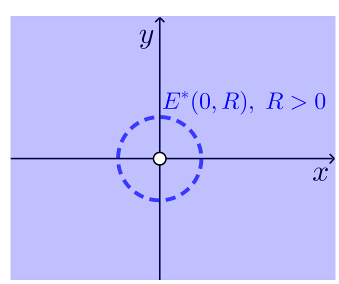
Definición 5.1.1. *Se dice que* $\boldsymbol{z_0}$ *es un* ***punto singular*** *o* ***una singularidad*** *de la función* $f(z)$*, si* $f(z)$ *no es analítica en* z_0 *pero es analítica en algún punto de todo entorno de* z_0*.*

Ejemplo 5.1.2.

a) $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$

Su dominio de analiticidad es $\mathbb{C} - \{0\}$.
El punto $z_0 = 0$ es un punto singular, porque $f(z)$ no es analítica en z_0 pero es analítica en algún punto de todo entorno de $z_0 = 0$.

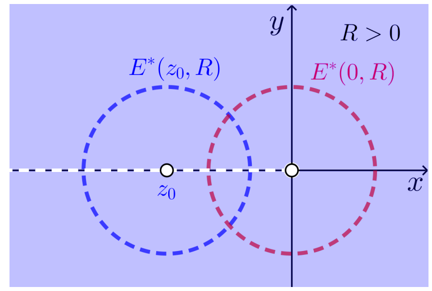
Podemos observar además que es analítica en todos los puntos de cualquier entorno reducido de $z_0 = 0$.



b) $f(z) = \mathrm{Ln}(z)$

Su dominio de analiticidad es $\mathbb{C} - \{x + i0, x \leq 0\}$.
El origen y todos los puntos del eje real negativo son singularidades de $f(z)$ porque $f(z)$ no es analítica en ellos pero para cada $z_0 \in \{x + i0, x \leq 0\}$, todo entorno reducido de z_0 tiene algún punto donde $f(z)$ es analítica.

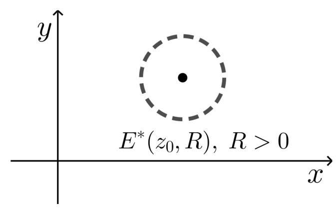
Podemos observar además que cualquier entorno reducido de z_0 contiene puntos donde $f(z)$ no es analítica.



c) $f(z) = \bar{z}$

El dominio de $f(z)$ es $\mathbb{C}$ y el de analiticidad es $\emptyset$.

Para cada $z_0 \in \mathbb{C}$, todo entorno de z_0 no contiene algún punto donde $f(z)$ sea analítica.
Entonces $f(z)$ no tiene puntos singulares.



d) $f(z) = \dfrac{z}{e^z}$

El dominio de analiticidad de $f(z)$ es $\mathbb{C}$ entonces $f(z)$ no tiene puntos singulares.

Las singularidades de una función $f(z)$ pueden clasificarse en aisladas y no aisladas.

Definición 5.1.3. *Se dice que* z_0 *es una* ***singularidad aislada*** *de* $f(z)$ *si* $f(z)$ *no es analítica en* z_0*, pero para todos los puntos de algún entorno reducido de* z_0*,* $f(z)$ *es analítica. Es decir que existe algún número positivo* R *tal que* $f(z)$ *es analítica en todos los puntos del conjunto* $E^*(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$

Definición 5.1.4. *Se dice que* z_0 *es una* ***singularidad no aislada*** *de* $f(z)$ *si* $f(z)$ *no es analítica en* z_0 *y para todo entorno reducido de* z_0 *hay al menos un punto donde* $f(z)$ *no es analítica. Es decir que para todo número positivo* R*,* $f(z)$ *no es analítica en algún punto del conjunto* $E^*(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$

Ejemplo 5.1.5.

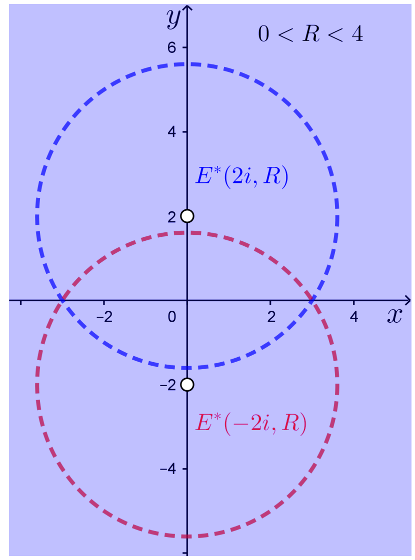
a) La única singularidad de $z_0 = 0$ de $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$ es aislada, ver ejemplo 5.1.2a).

b) El conjunto de puntos singulares de $f(z) = \mathrm{Ln}(z)$ es $\{x + i0, x \leq 0\}$ y todos son no aislados, ver ejemplo 5.1.2b).

c) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{z^2+4}$

Su dominio de analiticidad es $\mathbb{C} - \{2i, -2i\}$.

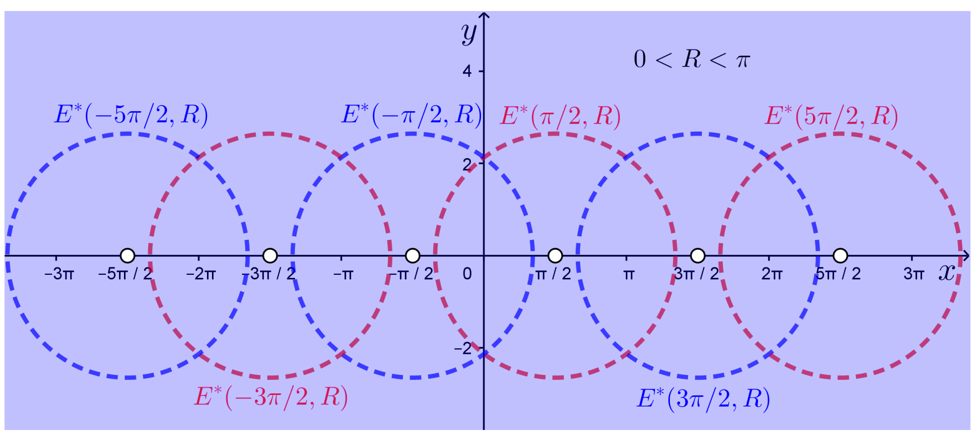
$z_1 = 2i$ y $z_2 = -2i$ son singularidades aisladas, ya que si se considera cualquier entorno reducido de z_1 o de z_2, con radio menor que cuatro, la función es analítica en todos sus puntos.



d) $f(z) = \dfrac{z^4}{\cos(z)}$

Su dominio de analiticidad es $\mathbb{C} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

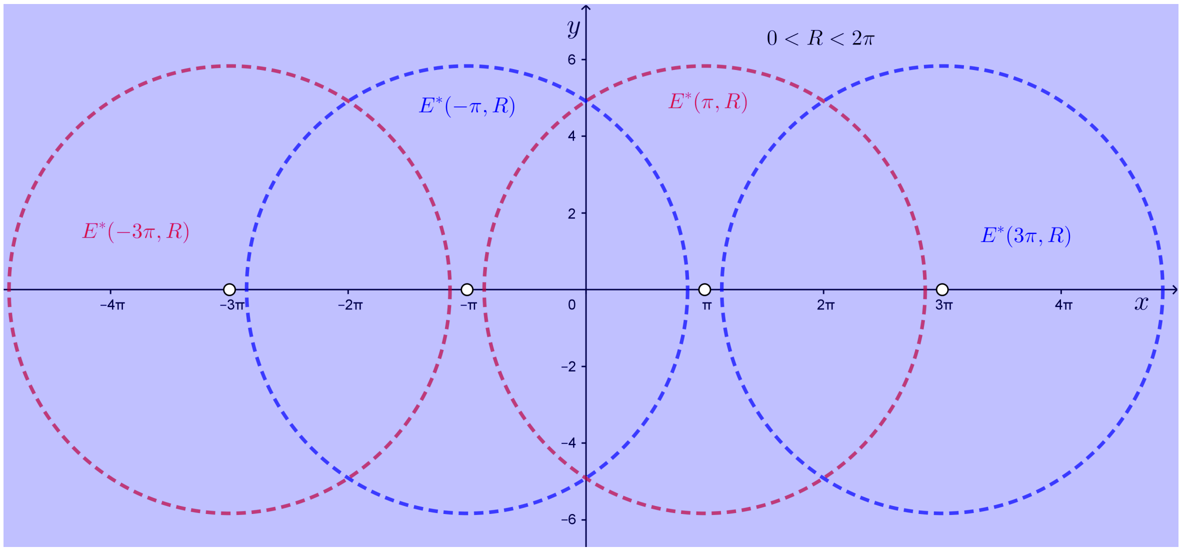
Los $z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, son singularidades aisladas de $f(z)$ ya que la función es analítica para todos los puntos de todo entorno reducido, con radio menor que π, de cualquiera de estos puntos singulares z_k.
Es decir que para $z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$, $f(z)$ es analítica en todos los puntos del conjunto $E^*(z_k, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_k| < R\}$, con $R < \pi$.



e) $f(z) = \dfrac{cosh(z)}{e^{iz}+1}$

Su dominio de analiticidad es $\mathbb{C} - \{(2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Los $z_k = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ son singularidades aisladas de $f(z)$, ya que para todo entorno reducido de cualquiera de ellos, con radio menor que 2π, la función es analítica en todos sus puntos.



Actividad 5.1.6.

Halle los puntos singulares de las siguientes funciones y determine cuáles son aislados.

a) $f(z) = \dfrac{z^4 + 3\,\text{sen}(z)}{(z^5 - 32)\,(\text{Ln}(z) + i\pi)}$ b) $g(z) = \dfrac{\cos^2\left(z^3 + 8\right)}{\text{sen}(3z) + \sqrt{2}}$

c) $h(z) = \text{Ln}\,(z + 3) + \dfrac{z^2}{\text{senh}(z)}$ d) $t(z) = \dfrac{z^4 + 16}{\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{z}\right)}$

5.2. Clasificación de las singularidades aisladas

Sea z_0 una singularidad aislada de $f(z)$. Entonces $f(z)$ es analítica en algún entorno reducido de z_0, $E^*\,(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$, por lo cual, como vimos en el capítulo anterior, $f(z)$ admite un desarrollo en serie de Laurent en el mismo:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}}_{\text{parte principal}}, \qquad 0 < |z - z_0| < R$$

Se denomina **parte principal de la serie de Laurent** a los términos correspondientes a las potencias negativas de $(z - z_0)$.

Analizando el comportamiento de la parte principal de la serie de Laurent en un entorno reducido de la singularidad aislada z_0, podremos clasificarla como singularidad evitable, singularidad esencial o polo.

Definición 5.2.1. *La función $f(z)$ tiene una **singularidad evitable** en z_0, si la parte principal del desarrollo de Laurent de $f(z)$ en z_0, convergente en $0 < |z - z_0| < R$, no tiene términos; es decir, $b_n = 0\ \forall n \geq 1$.*

Ejemplo 5.2.2.

La función $f(z) = \dfrac{1-\cos(z)}{z}$ tiene una singularidad aislada en $z_0 = 0$.

El desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ alrededor de $z_0 = 0$, convergente en $0 < |z| < \infty$:

$$\frac{1-\cos(z)}{z} = \frac{1}{z}\left[1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ...\right)\right] = \frac{z}{2!} - \frac{z^3}{4!} + \frac{z^5}{6!} - ...$$

La serie de Laurent no tiene potencias negativas de z, por lo cual $z_0 = 0$ es una singularidad evitable de $f(z)$.

Si se define una nueva función $g(z)$, asignándole el valor $g(0) = 0 = \lim\limits_{z\to 0} f(z)$, se obtiene en este caso, una función analítica para todo z representada por la serie de potencias positivas (serie de Taylor) convergente para todo z:

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(z)}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

$$g(z) = \frac{z}{2!} - \frac{z^3}{4!} + \frac{z^5}{6!} - ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n)!}\,, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}$$

Observación. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ existe si y solo z_0 es una singularidad evitable de $f(z)$. En este caso, dicho límite debe ser igual al coeficiente a_0 del desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en un entorno reducido de z_0, ya que en el mismo solamente aparecen potencias positivas de $(z-z_0)$.

Por lo tanto si una función $f(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0, se puede considerar una nueva función $g(z)$ que resulta analítica en z_0 definiendo $g(z_0) = \lim\limits_{z\mapsto z_0} f(z) = a_0$:

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0 \\ \lim\limits_{z\mapsto z_0} f(z) = a_0, & z = z_0 \end{cases}$$

Por ello este tipo de singularidad aislada se denomina evitable o, también, removible.

Definición 5.2.3. *La función $f(z)$ tiene un **polo de orden k** en z_0, si la parte principal del desarrollo de Laurent de $f(z)$ en z_0, convergente en $0 < |z-z_0| < R$, tiene finitos términos no nulos; es decir, $b_n = 0$ $\forall n > k$ y $b_k \neq 0$.*
*Si **k=1**, decimos que z_0 es un **polo simple**.*

Observaciones

1. $f(z)$ tiene un polo en $z = z_0$ si y solo si $\lim\limits_{z\mapsto z_0} f(z) = \infty$.

2. Si z_0 es un polo de orden k de $f(z)$ entonces $-k$ es la menor potencia negativa de $(z-z_0)$ que aparece en la parte principal del desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en z_0.

Ejemplo 5.2.4.

La función $f(z) = \dfrac{\cos(z)}{z^5}$ tiene una singularidad aislada en $z_0 = 0$.

El desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ alrededor de $z_0 = 0$, convergente en $0 < |z| < \infty$:

$$\frac{\cos(z)}{z^5} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{4!z} - \frac{z}{6!} + \frac{z^3}{8!} - \ldots, \quad 0 < |z| < \infty$$

La serie de Laurent tiene finitas potencias negativas de z, siendo -5 la menor potencia negativa de z, por lo cual $z_0 = 0$ es polo de orden 5 de $f(z)$.

Definición 5.2.5. *La función $f(z)$ tiene una **singularidad esencial** en z_0, si la parte principal del desarrollo de Laurent de $f(z)$ en z_0, convergente en $0 < |z - z_0| < R$, tiene infinitos términos no nulos; es decir, si $b_n \neq 0$ para infinitos valores de n.*

Ejemplo 5.2.6.

La función $f(z) = e^{\left(\frac{1}{z-2i}\right)}$ tiene una singularidad aislada en $z_0 = 2i$.

El desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ alrededor de $z_0 = 2i$, convergente en $0 < |z - 2i| < \infty$:

$$e^{\left(\frac{1}{z-2i}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-2i)^n}, \quad 0 < |z - 2i| < \infty$$

La serie de Laurent tiene infinitas potencias negativas de $(z - 2i)$, por lo cual $z_0 = 2i$ es una singularidad esencial de $f(z)$.

Analicemos el comportamiento de $f(z)$ en un entorno reducido de $z_0 = 2i$:
Si nos acercamos a $z_0 = 2i$ sobre la recta $y = 2$ con $x > 0$,

$$\lim_{z \to 2i} e^{\left(\frac{1}{z-2i}\right)} = \lim_{x \mapsto 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

Mientras que si nos acercamos a $z_0 = 2i$ sobre la recta $y = 2$ con $x < 0$,

$$\lim_{z \to 2i} e^{\left(\frac{1}{z-2i}\right)} = \lim_{x \mapsto 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

Por lo tanto, el $\lim\limits_{z \to 2i} e^{\left(\frac{1}{z-2i}\right)}$ no existe.

Observación. El comportamiento de $f(z)$ en un entorno reducido de z_0 cuando z_0 es una singularidad esencial, es diferente al comportamiento en un polo o en una singularidad evitable, en este caso $\lim\limits_{z \mapsto z_0} f(z)$ no es un valor finito ni tampoco ∞ (ejemplo 5.2.6).

El Teorema de Picard afirma que en todo entorno reducido de una singularidad esencial, la función $f(z)$ toma todos los valores posibles un número infinito de veces, con la excepción de a lo sumo un único valor [4].

Actividad 5.2.7.

Para las siguientes funciones, mediante un desarrollo en serie adecuado, clasifique la singularidad aislada z_0. Indique la región de convergencia de la serie encontrada.

a) $f(z) = \dfrac{z+10i}{z^2+100} \qquad z_0 = -10i$

b) $f(z) = \dfrac{z+10i}{z^2+100} \qquad z_0 = 10i$

c) $h(z) = 5z^3 e^{\left(\frac{2}{z}\right)} \qquad z_0 = 0$

d) $t(z) = \dfrac{16}{z^2\,(z-4)^3} - \dfrac{1}{(z-4)^3} \qquad z_0 = 4$

Caracterización de polos

El siguiente Teorema nos permitirá determinar si una singularidad aislada z_0 es un polo y cuál es su orden sin tener que hacer el desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en z_0, convergente en un entorno reducido del punto singular.

Teorema 5.2.8. ***Caracterización de polos***
z_0 es un polo de orden k de $f(z)$ si y solo si $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-z_0)^k}$ con $h(z)$ analítica en z_0 y $h(z_0) \neq 0$.

Demostración

$\Rightarrow$)

Sea z_0 un polo de orden k de $f(z)$, por lo tanto existe algún $R > 0$, de modo tal que $f(z)$ tiene un desarrollo en serie de Luarent, convergente en el entorno reducido $0 < |z - z_0| < R$, que tiene la siguiente forma:

$$\frac{b_k}{(z-z_0)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z-z_0^n)^{k-1}} + ... + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \qquad b_k \neq 0$$

Sacando factor común $\dfrac{1}{(z-z_0)^k}$

$$\frac{1}{(z-z_0)^k}\left[b_k + b_{k-1}(z-z_0) + ... + b_1(z-z_0)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+k}\right]$$

Entre corchetes tenemos una serie de potencias positivas de $(z - z_0)$ que converge en $|z - z_0| < R$ a una función suma $h(z)$:

$$h(z) = b_k + b_{k-1}(z-z_0) + ... + b_1(z-z_0)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+k}$$

Entonces $h(z)$ resulta una función analítica en z_0, $h(z_0) = b_k \neq 0$ y $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-z_0)^k}$

$\Leftarrow$)

Sea $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-z_0)^k}$, con $h(z)$ analítica y $h(z_0) \neq 0$. Entonces, $h(z)$ admite un desarrollo de Taylor en z_0 convergente en $|z - z_0| < R_1$, para algún $R_1 > 0$

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n\,, \quad h(z_0) = a_0 \neq 0$$

Luego

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^k} = \frac{a_0}{(z-z_0)^k} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{k-1}} + ... + a_k + a_{k+1}(z-z_0) + ...$$

Se obtiene un desarollo en serie de Laurent de $f(z)$ en z_0, convergente en $0 < |z - z_0| < R_1$.

Como $-k$ es la menor potencia negativa de $(z - z_0)$ que aparece en este desarrollo de Laurent, resulta que z_0 es un polo de orden k de $f(z)$. □

Ejemplo 5.2.9.

La función $f(z) = \dfrac{e^{i\pi z}}{z^3(z+2)}$ tiene dos singularidades aisladas: $z_0 = 0$ y $z_1 = -2$.

Para $z_0 = 0$ podemos escribir a $f(z)$ como $f(z) = \dfrac{1}{z^3} f_0(z)$, donde $f_0(z) = \dfrac{e^{i\pi z}}{(z+2)}$ es analítica en $z_0 = 0$ y $f_0(0) = \dfrac{1}{2} \neq 0$, por lo tanto por el Teorema de caracterización de polos, $z_0 = 0$ es un polo de orden 3 de $f(z)$.

En $z_1 = -2$ podemos escribir a $f(z)$ como $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)} f_1(z)$, donde $f_1(z) = \dfrac{e^{i\pi z}}{z^3}$ es analítica en $z_1 = -2$ y $f_1(-2) = -\dfrac{1}{8} \neq 0$, por lo tanto por el Teorema de caracterización de polos, $z_1 = -2$ es un polo de orden 1 o polo simple de $f(z)$.

Ejemplo 5.2.10.

La función $f(z) = \dfrac{\cos(z)}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^4}$ tiene una única singularidad aislada: $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$

Si escribimos $f(z) = \dfrac{1}{(z - \frac{\pi}{2})^4} f_0(z)$, donde $f_0(z) = \cos(z)$ es analítica en $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$, resulta que $f_0\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, por lo cual, en este caso, **no** se puede aplicar el Teorema de caracterización de polos. Para poder clasificar esta singularidad aislada, sin usar el desarrollo de Laurent, veremos un criterio en la siguiente sección.

Actividad 5.2.11.

a) Sean dos funciones $f_1(z)$ y $f_2(z)$. Si $f_1(z)$ tiene un polo de orden p en z_0 y $f_2(z)$ tiene un polo de orden q en z_0, siendo $q < p$, pruebe que:

   i) $f(z) = f_1(z).f_2(z)$ tiene un polo de orden $p + q$ en z_0.

   ii) $g(z) = f_1(z) + f_2(z)$ tiene un polo de orden p en z_0.

   iii) $h(z) = \dfrac{f_2(z)}{f_1(z)}$ tiene una singularidad evitable en z_0.

   iv) $l(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ tiene un polo de orden $p - q$.

b) Usando el Teorema de caracterización de polos pruebe que las singularidades de las siguientes funciones son polos y determine el orden de los mismos.

   i) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z-\pi) + \cos(z-\pi)}{(z-3\pi)^4}$ ii) $g(z) = \dfrac{z+2}{z^5\left(z^2+25\right)^3(z+5i)}$ □

Criterio de clasificación de singularidades aisladas de funciones que son cociente de funciones analíticas

Teorema 5.2.12. *Sea* $f(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$, *donde* $N(z)$ *y* $D(z)$ *son analíticas en* z_0 *tal que* $N(z)$ *tiene un cero de orden* p *en* z_0 *y* $D(z)$ *tiene un cero de orden* q *en* z_0, *entonces*

i) Si $p < q$, z_0 *es un polo de orden (q-p) de* $f(z)$

ii) Si $p \geq q$, z_0 *es una singularidad evitable de* $f(z)$

Demostración Puesto que $N(z)$ tiene un cero de orden p en z_0 y $D(z)$ tiene un cero de orden q en z_0, por el Teorema de Caracterización de ceros:

$N(z) = (z - z_0)^p n_1(z)$, con $n_1(z)$ analítica en z_0 y $n_1(z_0) \neq 0$.

$D(z) = (z - z_0)^q d_1(z)$, con $d_1(z)$ analítica en z_0 y $d_1(z_0) \neq 0$.

Luego

$$f(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{(z - z_0)^p n_1(z)}{(z - z_0)^q d_1(z)} = (z - z_0)^{p-q} f_1(z) \quad (\dagger)$$

Se verifica que $f_1(z) = \dfrac{n_1(z)}{d_1(z)}$ es analítica en z_0, por ser el cociente de funciones analíticas en z_0 con denominador no nulo en z_0, y $f_1(z_0) \neq 0$.

i) Si $q > p$, entonces $q - p > 0$, por lo que en (†) se puede escribir:

$$f(z) = (z - z_0)^{-(q-p)} f_1(z) = \frac{f_1(z)}{(z - z_0)^{(q-p)}}$$

Por el Teorema de caracterización de polos resulta que z_0 es un polo de orden $q - p$ de $f(z)$.

ii) Si $p \geq q$, entonces $f(z) = (z - z_0)^{p-q} f_1(z)$. Esta expresión es válida para $z \neq z_0$, en $0 < |z - z_0| < R$, para algún $R > 0$.

Como $(z - z_0)^{p-q} f_1(z)$ es analítica en z_0, admite un desarrollo en serie de Taylor en z_0. Por lo tanto el desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en $0 < |z - z_0| < R$ sólo tiene potencias positivas de $(z - z_0)$, es decir que z_0 es una singularidad evitable de $f(z)$.

□

Ejemplo 5.2.13.

Volviendo al ejemplo 5.2.10, vimos que $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$ es una singularidad aislada de $f(z) = \dfrac{\cos(z)}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^4}$.

$f(z)$ es un cociente de funciones analíticas:

$$f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}, \text{ siendo } N(z) = \cos(z) \text{ y } D(z) = \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^4$$

$z_0 = \dfrac{\pi}{2}$ es un cero de orden $p = 1$ de $N(z)$ pues $N'(z) = -\operatorname{sen}(z)$ y $N'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ y es un cero de orden $q = 4$ de $D(z)$ (por Teorema de caracterización de ceros).

Por lo tanto, como $q > p$, $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$ es un polo de orden $(4 - 1) = 3$ de $f(z)$.

Ejemplo 5.2.14.

La función $f(z) = \dfrac{\left(z - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos(z)}$ es un cociente de funciones analíticas:

$$f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}, \text{ siendo } N(z) = \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \text{ y } D(z) = \cos(z)$$

Las singularidades aisladas de $f(z)$ son $z_k = (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$(los ceros del $\cos(z)$)

Se debe analizar por separado los casos para $k = 0$ y para $k \neq 0$.

Para $k = 0$, $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$, es un cero de orden $p = 1$ de $N(z)$ pues $N'(z) = 1$ y un cero de orden $q = 1$ de $D(z)$ pues $D'(z) = -\operatorname{sen}(z)$ y $D'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

Por lo tanto, como $p \geq q$, $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$ es un singularidad evitable de $f(z)$.

Para $k \neq 0$, se tiene que los puntos $z_k = (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$, con $k = \pm 1, \pm 2, ...$, son ceros de orden $p = 0$ de $N(z)$ pues $N(z_k) = (2k + 1)\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = k\pi \neq 0$ y son ceros de orden $q = 1$ de $D(z)$ pues $D'(z) = -\operatorname{sen}(z)$ y $D'(z_k) = -(-1)^k \neq 0$.

Por lo tanto, como $q > p$, los puntos $z_k = (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$, con $k = \pm 1, \pm 2, ...$ son polos de orden $(1 - 0) = 1$ de $f(z)$.

Actividad 5.2.15.

Clasificar las singularidades aisladas de las siguiente funciones que son cocientes de funciones analíticas.

a) $f(z) = \dfrac{z^2 + 2iz}{(z^4 - 16)^2}$

b) $g(z) = \dfrac{z - \dfrac{\pi}{4}i}{e^{2z} - i}$

c) $h(z) = \dfrac{\left(z - \dfrac{\pi}{2}i\right)^2}{\operatorname{senh}(z) - i}$

d) $t(z) = \dfrac{(z + 3i)\, z^2}{(z^2 + 2iz + 3)\,(z - i)^2}$

5.3. Residuos

En el capítulo 3 vimos, por el Teorema de Cuachy-Goursat, que la integral a lo largo de una curva cerrada C, suave o suave a trozos, simple y recorrida en sentido antihorario, de una función $f(z)$ que es analítica sobre la curva y en su interior es igual a cero:

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

El concepto de residuo nos permitirá resolver integrales a lo largo de una curva cerrada de una función analítica sobre la misma y en su interior, salvo en un número finito de puntos singulares.

Comenzaremos con el caso de una función $f(z)$ que es analítica sobre una curva cerrada C y en su interior, salvo en un punto z_0.

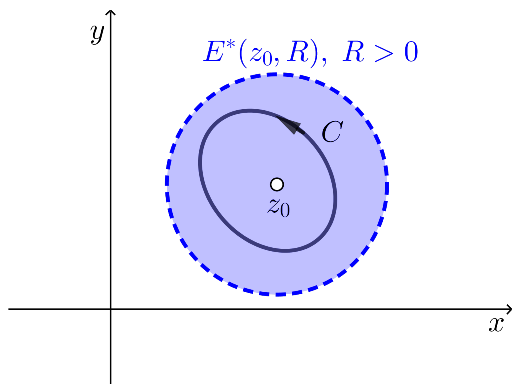
Recordemos que si z_0 es una singularidad aislada de $f(z)$, $f(z)$ es analítica en un entorno reducido de z_0, $0 < |z - z_0| < R$. Por lo tanto $f(z)$ admite un desarrollo de Laurent en dicho entorno reducido:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}}_{\text{parte principal}}, \qquad 0 < |z - z_0| < R$$

donde los coeficientes a_n y b_n de la serie de Laurent tienen la forma (ver capítulo 4):

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}}\, dz$$



siendo C cualquier curva cerrada, suave o suave a trozos, simple y recorrida en sentido antihorario, contenida en la corona o entorno reducido $0 < |z - z_0| < R$ y que rodea a z_0.

De la definición de b_n podemos observar que para $n = 1$:

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-1+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz$$

De donde se puede despejar el valor de la integral:

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i b_1$$

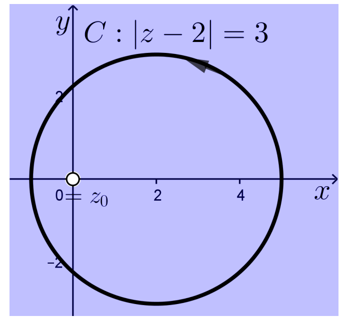
Es decir que determinado el coeficiente b_1 podemos conocer el valor de la integral.

Definición 5.3.1. *Sea z_0 una singularidad aislada de $f(z)$. Se denomina* ***residuo*** *de $f(z)$ en z_0 al coeficiente b_1 de la potencia $(z - z_0)^{-1}$ del desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en un entorno reducido de z_0, $0 < |z - z_0| < R$, y se indica $Res_{z_0} f(z)$.*

Observación. El residuo en una singularidad evitable es igual a cero. Este resultado es evidente ya que si z_0 es una singularidad evitable de $f(z)$, se cumple que todos los coeficientes b_n de la parte principal del desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en z_0, convergente en $0 < |z - z_0| < R$, son iguales a cero. Por lo tanto $Res_{z_0} f(z) = b_1 = 0$.

Ejemplo 5.3.2.

a) Calculemos $\oint_C \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^4} dz$ donde $C : |z-2| = 3$ recorrida en sentido antihorario.



$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^4}$ es analítica para todo $z \neq 0$.

$z_0 = 0$ es una singularidad aislada de $f(z)$ interior a la curva C.

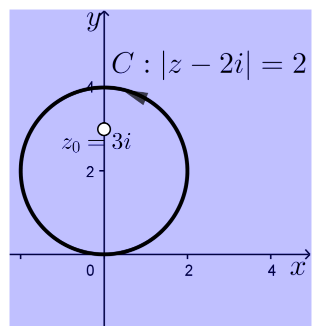
El desarrollo de Laurent de $f(z)$ alrededor de $z_0 = 0$ válido en $0 < |z| < \infty$:

$$\frac{\operatorname{sen}(z)}{z^4} = \frac{1}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{(2n+1)}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{(2n-3)}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} + ...$$

El coeficiente b_1 de la potencia z^{-1} es $-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$ entonces el $Res_0 f(z) = -\frac{1}{6}$ y el valor de la integral es

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^4} dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi}{3} i$$

b) Calculemos $\oint_C z\, e^{\left(\frac{1}{z-3i}\right)} dz$ donde $C : |z-2i| = 2$ recorrida en sentido antihorario.



$f(z) = z\, e^{\left(\frac{1}{z-3i}\right)}$ es analítica para todo $z \neq 3i$.

$z_0 = 3i$ es una singularidad aislada de $f(z)$ interior a la curva C.

El desarrollo de Laurent de $f(z)$ alrededor de $z_0 = 3i$ válido en $0 < |z-3i| < \infty$:

$$z\, e^{\left(\frac{1}{z-3i}\right)} = [(z-3i)+3i] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-3i)^n} =$$

$$= [(z-3i)+3i]\left[1 + \frac{1}{(z-3i)} + \frac{1}{2!(z-3i)^2} + \frac{1}{3!(z-3i)^3} + ...\right] =$$

$$= (z-3i) + 1 + \frac{1}{2!(z-3i)} + \frac{1}{3!(z-3i)^2} + ... + 3i + \frac{3i}{(z-3i)} + \frac{3i}{2!(z-3i)^2} + ... =$$

$$= (1+3i) + (z-3i) + \left(\frac{1}{2!} + 3i\right)\frac{1}{(z-3i)} + \left(\frac{1}{3!} + \frac{3i}{2!}\right)\frac{1}{(z-3i)^2} + ...$$

El coeficiente b_1 de la potencia $(z-3i)^{-1}$ es $\frac{1}{2!} + 3i = \frac{1}{2} + 3i$ luego $Res_{3i} f(z) = \frac{1}{2} + 3i$ y el valor de la integral es

$$\oint_C z\, e^{\left(\frac{1}{z-3i}\right)} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{2} + 3i\right) = -6\pi + \pi i$$

Actividad 5.3.3.

Visite el ejemplo 5.3.2 y clasifique las singularidades aisladas de $f(z)$ a partir de los desarrollos de Laurent encontrados.

Observación. Distintos anillos centrados en z_0 dan lugar a diferentes desarrollos de $f(z)$ en serie de Laurent en potencias de $(z - z_0)$, por ejemplo:

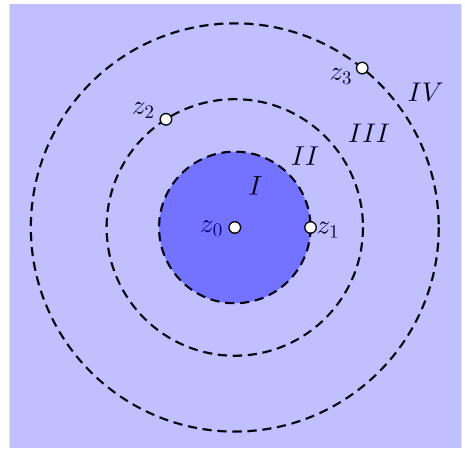
$I: \; 0 < |z - z_0| < R_1$

$II: \; R_1 < |z - z_0| < R_2$

$III: \; R_2 < |z - z_0| < R_3$

$IV: \; R_3 < |z - z_0| < \infty$

siendo z_1, z_2 y z_3 las demás singularidades de $f(z)$.



Para clasificar la singularidad z_0 y hallar $Res_{z_0} f(z)$, debemos encontrar el desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ convergente en la corona o entorno reducido I.

Ejemplo 5.3.4.

Dada $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2^n}{(z-3i)^n}$. Su región de convergencia es la corona no acotada $2 < |z - 3i| < \infty$, es decir $f(z)$ es analítica en esta corona.

A pesar de que la serie tiene infinitas potencias negativas de $(z - 3i)$, no podemos decir que $z_0 = 3i$ sea una singularidad esencial de $f(z)$ ni tampoco que el coeficiente -2 de la potencia $(z - 3i)^{-1}$ sea el residuo de $f(z)$ en $z_0 = 3i$, esto es porque la serie de Laurent converge en $2 < |z - 3i| < \infty$ y no en algún entorno reducido de $z_0 = 3i$ de la forma $0 < |z - 3i| < R$.

En realidad, $z_0 = 3i$ ni siquiera es un punto singular de $f(z)$, ya que de acuerdo a la definicón de punto singular (sección 1), todo entorno de dicho punto debe contener al menos un punto donde $f(z)$ sea analítica pero eso no sucede para los entornos de $z_0 = 3i$ con radio menor que 2.

Ejemplo 5.3.5.

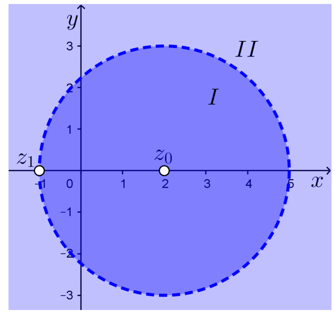
Dada $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2(z+1)}$, mediante un desarrollo en serie adecuado, clasifique la singularidad $z_0 = 2$ y halle el $Res_2 f(z)$. Indique la región de convergencia de la serie encontrada.

$f(z)$ tiene dos singularidades aisladas: $z_0 = 2$ y $z_1 = -1$.

Ubicados en la singularidad que queremos clasificar y hallar el residuo de $f(z)$, obtenemos las siguientes coronas donde $f(z)$ es analítica y admite desarrollo en serie de Laurent:

$I: \;\; 0 < |z-2| < 3$

$II: \;\; 3 < |z-2| < \infty$



Para clasificar el punto $z_0 = 2$ y hallar el residuo de $f(z)$ en el mismo, se debe encontrar el desarrollo de Laurent que sea convergente en la corona o entorno reducido I.

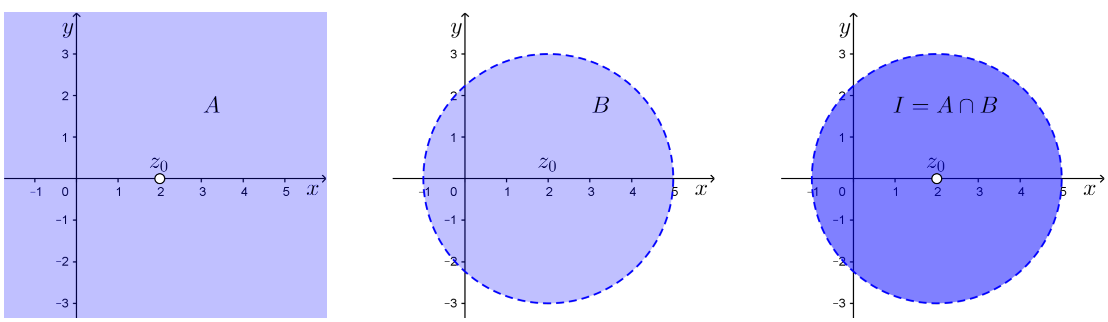
El factor $\dfrac{1}{(z-2)^2}$ ya está desarrollado en potencias de $(z-2)$ y vale en $A: 0 < |z-2| < \infty$.
El factor $\dfrac{1}{(z+1)}$ es analítico en $z_0 = 2$ por lo cual admite un desarrollo en serie de Taylor convergente en $B: |z-2| < 3$. En efecto

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-2+2+1} = \frac{1}{(z-2)+3} = \frac{1}{3\left[\dfrac{(z-2)}{3}+1\right]}$$

es la suma de una serie geométrica con $a = \dfrac{1}{3}$ y razón $r = -\dfrac{(z-2)}{3}$, entonces

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left[-\frac{(z-2)}{3}\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{3^{n+1}}$$

Esta serie converge cuando $|r| = \left|-\dfrac{(z-2)}{3}\right| = \dfrac{|z-2|}{3} < 1$, o equivalentemente, en el entorno $B: |z-2| < 3$.



Por lo tanto el desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en $z_0 = 2$ convergente en la corona $I: 0 < |z-2| < 3$ resulta

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z+1)} = \frac{1}{(z-2)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^{n-2}}{3^{n+1}}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z+1)} = \frac{1}{3(z-2)^2} - \frac{1}{3^2(z-2)} + \frac{1}{3^3} - \frac{(z-2)}{3^4} + \ldots$$

Finalmente podemos afirmar que $z_0 = 2$ es un polo de orden 2 de $f(z)$ pues -2 es la menor potencia negativa de $(z-2)$. El residuo de $f(z)$ en $z_0 = 2$ es el coeficiente b_1 de la potencia $(z-2)^{-1}$, es decir que $Res_2 f(z) = -\frac{1}{9}$.

Actividad 5.3.6.

1) Dada $f(z) = \dfrac{7}{(z-2i)^4} - \dfrac{3}{(z-2i)^2} + \dfrac{4}{(z-2i)} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-2i)^n}{(n+1)\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^n}$

   a) Pruebe que $z_o = 2i$ es una singularidad aislada de $f(z)$ y clasifíquela.

   b) Halle el residuo de $f(z)$ en $z_0 = 2i$.

2) Dada $f(z) = \dfrac{2}{(z-2i)^5} + \dfrac{1}{(z-2i)^3} - \dfrac{3}{(z-2i)} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^{n+3}}{(z-2i)^n}$ ¿Puede afirmar que $z_0 = 2i$ es una singularidad aislada de $f(z)$, clasificarla y hallar el $Res_{2i} f(z)$?

3) Dadas las siguientes funciones $f(z)$, mediante un desarrollo en serie adecuado, clasifique la singularidad aislada z_0 y halle el $Res_{z_0} f(z)$. Indique la región de convergencia de la serie encontrada.

   a) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{z^6} - \dfrac{3}{z^2} + \dfrac{2}{z} \qquad z_0 = 0$

   b) $f(z) = (z+3i)^5 \cos\left(\dfrac{2}{z+3i}\right) \qquad z_0 = -3i$

   c) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{(z-\pi)^4} \qquad z_0 = \pi$

   d) $f(z) = \dfrac{\operatorname{Ln}(z)}{(z-3)^4} \qquad z_0 = 3$

   e) $f(z) = \dfrac{z+5}{(z^2-16)(z-4)} \qquad z_0 = -4$

Para determinar el residuo en un polo de orden k de una función $f(z)$, sin necesidad de encontrar el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en un entorno reducido de z_0, se puede usar el siguiente resultado.

Proposición 5.3.7. ***Cálculo de residuos en polos***

i) Si z_0 es un polo de orden $k > 1$ de $f(z)$, entonces

$$Res_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-z_0)^k f(z) \right] \right\}$$

ii) Si $k = 1$ (polo simple), entonces

$$Res_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left[(z-z_0) f(z) \right]$$

Demostración

i) Si z_0 es un polo de orden $k > 1$ de $f(z)$, por el Teorema de caracterización de polos: $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-z_0)^k}$ (†) con $h(z)$ analítica en z_0 y $h(z_0) \neq 0$

Entonces $h(z)$ admite un desarrollo de Taylor:

$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ en $|z-z_0| < R$, para algún $R > 0$.

Reemplazando en (†):

$$f(z) = \frac{h(z_0)}{(z-z_0)^k} + \frac{h'(z_0)}{(z-z_0)^{k-1}} + ... + \frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!(z-z_0)} + \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{h^{(k+1)}(z_0)(z-z_0)}{(k+1)!} + ...$$

$$\text{para } 0 < |z-z_0| < R$$

Considerando el coeficiente correspondiente a la potencia $(z-z_0)^{-1}$:

$$Res_{z_0} f(z) = \frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

Despejamos $h(z)$ de (†) para expresar el residuo en términos de $f(z)$:

$$Res_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} h(z) \right\} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-z_0)^k f(z) \right] \right\}$$

ii) Si $k = 1$, se tiene que:

$$Res_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} [(z-z_0) f(z)]$$

□

Ejemplo 5.3.8.

Dada $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-2)^3}$ calculemos los residuos en sus singularidades aisladas.

$f(z)$ tiene dos singularidades aisladas $z_0 = -1$ y $z_1 = 2$.

Por el Teorema de caracterización de polos, $z_0 = -1$ es un polo de orden 1 de $f(z)$ ya que podemos escribir

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)} f_0(z) \text{ donde } f_0(z) = \frac{z}{(z-2)^3} \text{ es analítica en } z_0 = -1 \text{ y } f_0(-1) = \tfrac{1}{27} \neq 0.$$

Por lo tanto

$$Res_{-1} f(z) = \lim_{z\to -1} [(z+1) f(z)] = \lim_{z\to -1} \left[(z+1) \frac{z}{(z+1)(z-2)^3} \right] = \lim_{z\to -1} \frac{z}{(z-2)^3} = \frac{1}{27}$$

Por el Teorema de caracterización de polos, $z_1 = 2$ es un polo de orden 3 ya podemos escribir

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^3} f_1(z) \text{ donde } f_1(z) = \frac{z}{(z+1)} \text{ es analítica en } z_1 = 2 \text{ y } f_1(2) = \tfrac{2}{3} \neq 0.$$

Entonces

$$Res_2 f(z) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z\to 2} \left\{ \frac{d^{\,(3-1)}}{dz^{\,(3-1)}} \left[(z-2)^3 f(z) \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{2!} \lim_{z\to 2} \left\{ \frac{d^{\,2}}{dz^{\,2}} \left[(z-2)^3 \frac{z}{(z+1)(z-2)^3} \right] \right\} = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 2} \left\{ \frac{d^{\,2}}{dz^{\,2}} \frac{z}{(z+1)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to 2} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} \frac{z}{(z+1)} \right\} = \frac{1}{2} \lim_{z \to 2} \left\{ \frac{d}{dz} \left[\frac{(z+1)-z}{(z+1)^2} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to 2} \left\{ \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z+1)^2} \right] \right\} = \frac{1}{2} \lim_{z \to 2} -\frac{2}{(z+1)^3} = -\frac{1}{27}$$

Para encontrar el residuo de una función en una singularidad esencial z_0, no se cuenta, lamentablemente, con ninguna fórmula, se debe encontrar el desarrollo de Laurent convergente en la corona $0 < |z - z_0| < R$ (R puede ser infinito), como resolvieron en la actividad 5.3.3.

Actividad 5.3.9.

Para las siguientes funciones calcular el residuo en sus polos usando las fórmulas anteriores.

a) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2\,(z^2+4)}$

b) $g(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{(z-\pi)^3}$ Ayuda: utilice la regla de L' Hôpital.

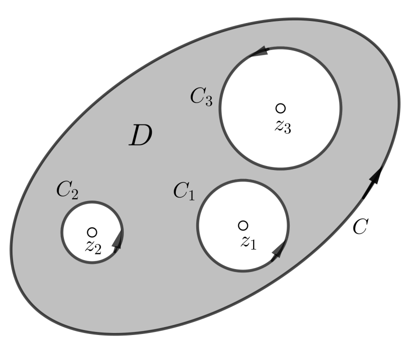
Teorema de los residuos

Teorema 5.3.10. ***Teorema de los residuos***
Sea C una curva cerrada, simple, suave o suave a trozos y recorrida en sentido antihorario Sea $f(z)$ una función analítica sobre C y en su interior, salvo en un número finito de puntos singulares $z_1, z_2, ..., z_n$ interiores a C. Entonces:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res_{z_i} f(z)$$

Demostración Se va a considerar a cada punto singular z_i, $i = 1, ..., n$ como el centro de una circunferencia C_i interior a C, orientada en sentido antihorario, y de radio suficientemente pequeño de modo que dos cualesquiera de ellas sean disjuntas.

La curva C y las circunferencias C_i forman la frontera de una región D donde $f(z)$ es analítica.



Por corolario del Teorema de Cauchy-Goursat:

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\,dz \qquad (\dagger)$$

Por la definición de residuo en una singularidad aislada:

$$\oint_{C_i} f(z)\,dz = 2\pi i Res_{z_i} f(z), \quad i = 1, ..., n$$

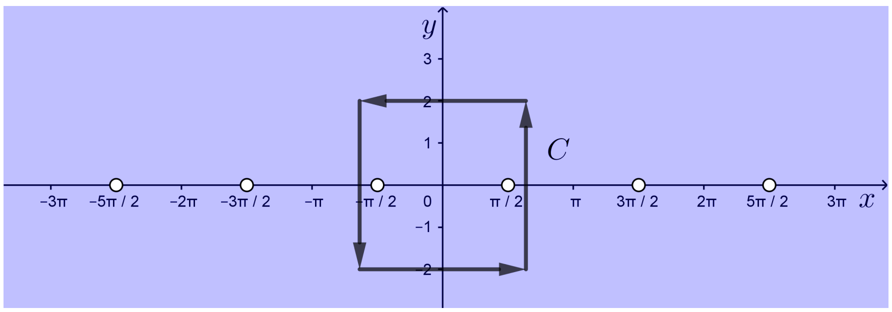
Reemplazando en (†):

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res_{z_i} f(z)$$

□

Ejemplo 5.3.11.

Calculemos $\displaystyle\oint_C \frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(z)}\, dz$, siendo C el cuadrado de lados $x = \pm 2$, $y = \pm 2$, recorrido en sentido antihorario.



$f(z) = \dfrac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(z)}$ es analítica salvo donde $\cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Las únicas singularidades aisladas de $f(z)$ que están dentro de C:

$$z_0 = \frac{\pi}{2} \quad (k = 0),\ z_1 = -\frac{\pi}{2} \quad (k = 1)$$

C es una curva cerrada, simple, suave a trozos y recorrida en sentido antihorario, entonces, por el Teorema de los residuos:

$$\oint_C \frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(z)}\, dz = 2\pi i Res_{\frac{\pi}{2}} f(z) + 2\pi i Res_{-\frac{\pi}{2}} f(z)$$

Como demostramos en el ejemplo 5.2.14, $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$ es una singularidad evitable de $f(z)$, por lo cual $Res_{\frac{\pi}{2}} f(z) = 0$ y $z_1 = -\frac{\pi}{2}$ es un polo de orden 1 de $f(z)$.

Entonces

$$Res_{-\frac{\pi}{2}} f(z) = \lim_{z\to -\frac{\pi}{2}} \left[\left(z+\frac{\pi}{2}\right) f(z)\right] = \lim_{z\to -\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos z}\right]$$

Como al calcular el límite se tiene una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$, se puede aplicar la regla de L'Hôpital

$$Res_{-\frac{\pi}{2}} f(z) = \lim_{z\to -\frac{\pi}{2}} \frac{\left[\left(z+\frac{\pi}{2}\right)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\right]'}{[\cos z]'} = \lim_{z\to -\frac{\pi}{2}} \frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)+\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}{-\operatorname{sen} z} = \frac{-\pi}{-\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -\pi$$

Finalmente

$$\oint_C \frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(z)}\,dz = 2\pi i Res_{\frac{\pi}{2}} f(z) + 2\pi i Res_{-\frac{\pi}{2}} f(z) = 2\pi i 0 + 2\pi i\,(-\pi) = -2(\pi)^2 i$$

Actividad 5.3.12.

a) Sea $C : |z| = 2$, recorrida en sentido antihorario. Calcule

$$\oint_C \frac{z}{e^{i4z}-1}dz$$

b) Sea $C : |z| = 2$, recorrida en sentido antihorario. Calcule

$$\oint_C \left[\frac{\operatorname{sen}\left(z^2+9\right)}{z^2+25} + \frac{2i}{z^5-3z^4}\right] dz$$

c) Sea C la frontera del cuadrado de lados $x = \pm 5$, $y = \pm 5$, recorrida en sentido antihorario. Calcule

$$\oint_C \left[z^3\cos\left(\frac{4}{z}\right) + \frac{2}{z\operatorname{sen}(z)}\right] dz$$

d) Sea $C : |z-2| = 3$, recorrida en sentido antihorario. Calcule

$$\oint_C \left[(z-2)^3\cosh\left(\frac{3}{(z-2)^2}\right) + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{8}\right)}{e^{\frac{i\pi z}{2}}-1}\right] dz$$

5.4. Resolución de integrales reales

Una aplicación muy importante del teorema de los residuos es la resolución de integrales reales. Consideraremos los siguientes casos.

Integrales de funciones racionales de senos y cosenos

Consideraremos integrales reales de la forma $\int_0^{2\pi} F(\operatorname{sen} t, \cos t)\,dt$, donde $F(\operatorname{sen} t, \cos t)$ es, en general, una función racional de sen t, de cos t o de ambas, es decir un cociente de polinomios de sen t o cos t, cuyo denominador no se anula para ningún valor de t entre 0 y 2π.

Mediante el cambio de variables $z = e^{it}$, con $0 \le t \le 2\pi$, la intregral real se transforma en una integral en el plano complejo a lo largo de una circuenferencia C de radio 1, ya que el $|z| = 1$ y al variar t entre 0 y 2π describimos la circunferencia completa en sentido antihorario:

$$z = e^{it} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$dz = ie^{it}dt = izdt \to dt = \frac{dz}{iz}$$

$$\operatorname{sen} t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i}$$

$$\cos\, t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

luego

$$\int_0^{2\pi} F\left(\text{sen }t, \cos\, t\right) dt = \oint_{|z|=1} F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz}$$

Como la curva C es cerrada, simple y suave y se recorre en sentido antihoario y el denominador de $F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)$ no se anula sobre la curva C, F tendrá un número finito de singularidades aisladas interiores a C, por lo tanto se podrá resolver la integral compleja mediante la aplicación del Teorema de los residuos.

Este método también vale si $t_0 \leq t \leq t_0 + 2\pi$, es decir, para cualquier intervalo de longitud 2π, pues mediante el cambio de variables $z = e^{i\,t}$ se obiene una circunferencia de radio 1 recorrida en sentido antihorario.

Ejemplo 5.4.1.

Calcular: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 3\,\text{sen }t}\, dt$

Haciendo el cambio de variables

$$z = e^{i\,t} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$dz = ie^{i\,t}dt = izdt \to dt = \frac{dz}{iz}$$

$$\text{sen }t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}$$

Luego

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 3\,\text{sen }t}\, dt = \oint_{|z|=1} \frac{1}{\left[5 - 3\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}\right)\right]} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{2iz}{\left[10iz - 3\left(z^2 - 1\right)\right]} \frac{dz}{iz} =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{2}{(-3z^2 + 10iz + 3)}\, dz$$

Las raíces de $-3z^2 + 10iz + 3 = 0$ son: $z_1 = \dfrac{i}{3}$ y $z_2 = 3i$.

La raíz $z_2 = 3i$ se descarta porque está ubicada fuera de la circunferencia $C : |z| = 1$.

Sea $f(z) = \dfrac{2}{(-3z^2 + 10iz + 3)} = \dfrac{2}{-3\left(z - \frac{i}{3}\right)(z - 3i)}$.

Por el Teorema de caracterización de polos, $z_1 = \dfrac{i}{3}$ es un polo de orden 1 de $f(z)$ pues la función $f(z)$ se puede escribir como $f(z) = \dfrac{1}{\left(z - \frac{i}{3}\right)}h(z)$, con $h(z) = -\dfrac{2}{3\,(z - 3i)}$ analítica en $z_1 = \frac{i}{3}$ y $h(\frac{i}{3}) = -\frac{i}{4} \neq 0$. Entonces, aplicando el Teorema de los residuos:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 3\,\text{sen}\, t}\, dt = \oint_{|z|=1} \frac{2}{-3\left(z - \frac{i}{3}\right)(z - 3i)}\, dz = 2\pi i Res_{\frac{i}{3}}\, f(z)$$

Calculamos

$$Res_{\frac{i}{3}}\, f(z) = \lim_{z \to \frac{i}{3}} \left(z - \frac{i}{3}\right) \frac{2}{-3\left(z - \frac{i}{3}\right)(z - 3i)} = \lim_{z \to \frac{i}{3}} \frac{2}{-3\,(z - 3i)} = -\frac{i}{4}$$

Entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 3\,\text{sen}\, t}\, dt = 2\pi i \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Observemos que el resultado obtenido es un número real, recordemos que la integral que resolvimos pasando a la variable compleja, es una integral real.

Actividad 5.4.2.

Calcular:

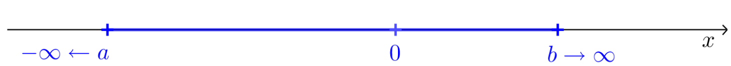
a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{5 + 3\cos t}\, dt$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{sen}^2\, t}{5 - 4\cos t}\, dt$

Integrales impropias de funciones racionales

Una integral impropia de la forma $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, donde $f(x)$ es continua para todo x real, se dice que es convergente si existen los límites $\displaystyle\lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x)dx$ y $\displaystyle\lim_{b \to \infty} \int_0^b f(x)dx$ y, el valor al que converge es

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x)dx + \lim_{b \to \infty} \int_0^b f(x)dx$$



Si la integral impropia es convergente, en lugar de calcular cada límite por separado, se puede calcular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

Este límite se denomina **valor principal de Cauchy** de la integral impropia y se indica

$$vp \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

Si la integral impropia es convergente, su valor coincide con el valor principal. Sin embargo, puede existir el valor principal y la integral impropia ser divergente.

Por ejemplo, si $f(x) = x$, entonces $\lim_{b\to\infty} \int_0^b x dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b = +\infty$, por lo tanto la integral impropia es divergente.

Mientras que su valor principal existe: $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} x dx = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-R}^{R} = \lim_{R\to\infty} 0 = 0.$

Consideraremos el siguiente lema:

Lema 5.4.3. *Sea* $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ *una función racional. Si se verifican*

i) $q(z)$ *no tiene ceros en el eje real*
ii) $p(z)$ *y* $q(z)$ *no tiene factores comunes*
iii) el grado de $q(z)$ *es por lo menos dos unidades mayor que el grado de* $p(z)$

entonces
a) existen $M, R > 0$ *tales que* $|f(z)| = \left|\dfrac{p(z)}{q(z)}\right| \leq \dfrac{M}{|z|^2}$, *si* $|z| \geq R$.
b) la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ *es convergente.*

Bajo las hipótesis de este lema se podrá calcular la integral impropia hallando su valor principal.

Teorema 5.4.4. *Sea* $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ *una funcion racional. Si se verifican*

i) $q(z)$ *no tiene ceros en el eje real*
ii) $p(z)$ *y* $q(z)$ *no tiene factores comunes*
iii) el grado de $q(z)$ *es por lo menos dos unidades mayor que el grado de* $p(z)$

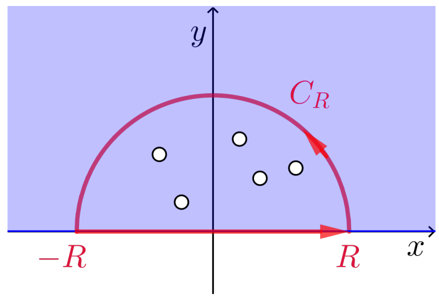
entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\substack{k=1 \\ \mathrm{Im}(z_k)>0}}^{n} Res_{z_k} f(z)$$

Demostración
La función racional $f(z)$ tiene un número finito de puntos singulares, los ceros de $q(z)$, ninguno de ellos sobre el eje real (por i), que resultan ser polos de $f(z)$ porque $p(z)$ y $q(z)$ no tienen ceros en común (por ii).

Sea $C = [-R, R] \cup C_R$, unión del segmento $[-R, R]$ del eje x y la semicircunferencia superior C_R de radio R, como se muestra en la figura.

Elegimos R suficientemente grande de modo que C encierre al número finito de polos z_k, con $k = 1, ..., n$, de $f(z)$ situados en el semiplano superior ($\operatorname{Im}(z_k) > 0$) y además que se satisfaga la desigualdad $a)$ del lema 5.4.3.



Calculamos $\displaystyle\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz$ mediante el Teorema de los residuos ya que se cumplen todas sus hipótesis: C es cerrada, simple, suave a trozos y recorrida en sentido antihorario; $f(z)$ es analítica sobre C y su interior, salvo en un número finito de polos. Luego

$$\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = \int_{-R}^{R} \frac{p(x)}{q(x)}dx + \int_{C_R} \frac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i \sum_{\substack{k=1 \\ \operatorname{Im}(z_k)>0}}^{n} Res_{z_k} f(z)$$

Despejamos

$$\int_{-R}^{R} \frac{p(x)}{q(x)}dx = 2\pi i \sum_{\substack{k=1 \\ \operatorname{Im}(z_k)>0}}^{n} Res_{z_k} f(z) - \int_{C_R} \frac{p(z)}{q(z)}dz$$

Tomamos el límite cuando R tiende a infinito:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{p(x)}{q(x)}dx = 2\pi i \sum_{\substack{k=1 \\ \operatorname{Im}(z_k)>0}}^{n} Res_{z_k} f(z) - \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{p(z)}{q(z)}dz \qquad (\dagger)$$

Probaremos que el $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{p(z)}{q(z)}dz = 0$.

Parametrizando la curva $C_R : z(t) = Re^{it}$ con $0 \leq t \leq \pi$, $dz = iRe^{it}dt$.

Por el lema anterior, si $|z| \geq R$:

$$|f(z)| = \left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| \leq \frac{M}{|z|^2} \leq \frac{M}{R^2}$$

Por lo tanto, por la propiedad de acotamiento:

$$0 \leq \left|\int_{C_R} \frac{p(z)}{q(z)}dz\right| \leq \frac{M}{R^2} \cdot \text{longitud}\,(C_R) = \frac{M}{R^2}\,\pi R = \frac{M\pi}{R}$$

Tomando el límite cuando R tiende a infinito y utilizando el teorema de intercalación (o del sándwich) para límites:

$$0 \leq \lim_{R\to\infty} \left|\int_{C_R} \frac{p(z)}{q(z)}dz\right| \leq \lim_{R\to\infty} \frac{M\pi}{R} = 0$$

Por lo tanto $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{p(z)}{q(z)}dz = 0$.

Volviendo a (†):

$$vp\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\substack{k=1\\ \mathrm{Im}(z_k)>0}}^{n} Res_{z_k} f(z)$$

Bajo las condiciones impuestas a $f(z)$, por el lema 5.4.3 la integral impropia es convergente, por lo cual su valor coincide con el valor principal. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\substack{k=1\\ \mathrm{Im}(z_k)>0}}^{n} Res_{z_k} f(z)$$

□

Ejemplo 5.4.5.

Calcular $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$

Sea $f(z) = \frac{z}{(z^2-2z+2)^2}$. Los ceros del denominador son: $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$

Entonces podemos escribir $f(z) = \frac{z}{(z-(1+i))^2\,(z-(1-i)^2}$

Se cumplen las condiciones del Lema 2 pues $f(z)$ no tiene polos en el eje real, los ceros del numerador son dintintos a los del numerador y el grado del denominador (4) es mayor en tres unidades que el del numerador (1).

El polo que está en el semiplano complejo superior es $z_1 = 1+i$. Por el Teorema de caracterización de polos $z_1 = 1+i$ es un polo de orden 2, ya que podemos escribir a $f(z)$ como $f(z) = \frac{1}{(z-(1+i))^2}h(z)$, donde $h(z) = \frac{z}{(z-(1-i))^2}$ es analítica en $z_1 = 1+i$ y $h(1+i) = -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i \neq 0$.

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x^2-2x+2)^2}\,dx = 2\pi i Res_{1+i}f(z)$$

Calculamos

$$Res_{1+i}f(z) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1+i}\left\{\frac{d}{dz}\left[(z-(1+i))^2\,\frac{z}{(z-(1+i))^2\,(z-(1-i))^2}\right]\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 1+i}\left\{\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z-(1-i))^2}\right]\right\} = \lim_{z\to 1+i}\frac{(z-(1-i))^2-2z\,(z-(1-i))}{(z-(1-i))^4} = -\frac{1}{4}i$$

Finalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x^2-2x+2)^2}\,dx = 2\pi i Res_{1+i}f(z) = 2\pi\left(-\frac{1}{4}i\right) = \frac{\pi}{2}$$

Actividad 5.4.6.

Calcular:

a) $\int_{0}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+4)^2\,(x^2+9)^2}\,dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\,dx$

Actividades complementarias

1) Dada $f(z) = \dfrac{6}{(z+3i)^5} - \dfrac{4}{(z+3i)^3} - \dfrac{7}{(z+3i)} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+3i)^n}{n^2\,(3-2i)^n}$

   a) Pruebe que $z_o = -3i$ es una singularidad aislada de $f(z)$ y clasifíquela.

   b) Hallar el residuo de $f(z)$ en $z_0 = -3i$.

2) Dada $f(z) = \dfrac{7}{(z-2i)^3} - \dfrac{3}{(z-2i)^2} + \dfrac{5}{(z-2i)} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{4^{n+1}}{(z-2i)^n}$

   ¿Puede afirmar que $z_o = 2i$ es una singularidad aislada de $f(z)$, clasificarla y hallar el $Res_{2i} f(z)$?

3) Dadas las siguientes funciones $f(z)$, mediante un desarrollo en serie adecuado, clasifique la singularidad aislada z_0 y halle el $Res_{z_0} f(z)$. Indique la región de convergencia de la serie encontrada.

   a) $f(z) = \dfrac{\text{Ln}(2+z)}{(z-2i)^3}$ $\quad z_0 = 2i$

   b) $f(z) = \dfrac{z+2}{(z^2+25)(z-5i)}$ $\quad z_0 = -5i$

   c) $f(z) = \dfrac{6\pi}{z^2(z+2\pi i)} + \dfrac{e^{3z}}{(z+2\pi i)^4}$ $\quad z_0 = -2\pi i$

   d) $f(z) = (z-2i)^6 \,\text{senh}\left(\dfrac{2}{z-2i}\right)$ $\quad z_0 = 2i$

   e) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^4} - \dfrac{2}{z^5+z^4}$ $\quad z_0 = 0$

   f) $f(z) = \dfrac{2z-4}{z^2(z+2)} + \dfrac{2}{z^3}$ $\quad z_0 = 0$

4) Sea $f(z) = \dfrac{3}{z^2+2z}$

   a) Halle su desarrollo en serie de Laurent alrededor de $z_0 = -2$ de modo que converja en $z_1 = 8i$. Indique la región de convergencia.

   b) El desarrollo encontrado, ¿le permite clasificar la singularidad aislada $z_0 = -2$ y hallar el $Res_{-2} f(z)$?

5) Sea $C : |z| = \frac{5}{2}$, recorrida en sentido antihorario. Calcule

$$\oint_C \left[\frac{z^2+2}{z^3-2z} + \frac{z - \text{senh}\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)} \right] dz$$

6) Sea C la frontera del cuadrado de lados $x = \pm 4$, $y = \pm 4$, recorrida en sentido antihorario. Calcule

$$\oint_C \left[(z+3i)^5 e^{\frac{2}{(z+3i)^2}} + \frac{\text{senh}(z)}{z\left(z - \frac{\pi i}{2}\right)^2} \right] dz$$

7) Sea $C : |z-2| = 2$, recorrida en sentido antihorario. Calcule

$$\oint_C \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{\left(e^{\frac{i\pi z}{2}} - i\right)} dz$$

8) Sea $C : |z-3| = 2$, recorrida en sentido antihorario. Empleando el Teorema de los residuos muestre que:

$$\oint_C \frac{\operatorname{Ln}\left(\frac{z}{4}\right)}{(z-4)\operatorname{Ln}\left(\frac{z}{2}\right)}\, dz = 2\pi i \operatorname{Ln}(2)$$

9) Calcular: a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{5+4\cos t}\, dt$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2-6x+25)^2}\, dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2+1}\, dx$ Ayuda: calcular por residuos $\displaystyle\oint_C \frac{e^{i3z}}{z^2+1}\, dz$, $C = C_R \cup [-R, R]$

donde $C_R : |z| = R, \operatorname{Im}(z) \geq 0$, con $R > 1$, luego usar el ejemplo 3.3.5b.

5.5. Actividades resueltas

Actividad 5.1.6

a) $f(z) = \dfrac{z^4 + 3\,\operatorname{sen}(z)}{(z^5-32)(\operatorname{Ln}(z)+i\pi)}$

Estudiemos el dominio de analiticidad de $f(z)$:

- el numerador es una función analítica en $\mathbb{C}$ porque es suma y producto de analíticas:
  z^4 es polinómica en $\mathbb{C}$
  $3\,\operatorname{sen}(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$

- el denominador es una función analítica en $\mathbb{C} - \{z : \operatorname{Im}(z) = 0 \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ debido a que es producto de funciones analíticas:
  $z^5 - 32$ es polinómica en $\mathbb{C}$
  $\operatorname{Ln}(z) + i\pi$ es analítica en $\mathbb{C} - \{z : \operatorname{Im}(z) = 0 \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ porque $\operatorname{Ln}(z)$ es analítica en $\mathbb{C} - \{z : \operatorname{Im}(z) = 0 \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ y además $i\pi$ es una constante.

Por tanto $f(z)$ es analítica en $\mathbb{C} - \{z : \operatorname{Im}(z) = 0 \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ excepto en los ceros del denominador de $f(z)$. Procedemos a calcular los ceros del denominador:

$$z^5 - 32 = 0 \Leftrightarrow\ z^5 = 32 = 32e^{i.0} \ \Leftrightarrow\ z_k = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{|32|}.e^{i\left(\frac{0+2k\pi}{5}\right)}, k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\Leftrightarrow\ z_k = 2e^{\frac{i2k\pi}{5}}, k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Además

$$\operatorname{Ln}(z) + i\pi = 0 \quad \Leftrightarrow\ \operatorname{Ln}(z) = -i\pi\ \Leftrightarrow \ln|z| + iArg\,(z) = -i\pi$$

$$\Leftrightarrow\ \ln|z| = 0\ \wedge\ Arg\,(z) = -\pi$$

como $Arg\,(z) = -\pi$ es imposible porque $Arg\,(z) \in (-\pi, \pi]$, deducimos que $\operatorname{Ln}(z) + i\pi$ nunca se anula. Entonces el dominio de analiticidad de $f(z)$ es:

$$D_A(f) = \mathbb{C} - \left(\{z : \operatorname{Im}(z) = 0 \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 0\} \cup \left\{2e^{\frac{i2k\pi}{5}} : k = 0, 1, 2, 3, 4\right\}\right)$$

Singularidades:

$z\ /\ \mathrm{Im}(z) = 0 \wedge \mathrm{Re}(z) \leq 0$ no son aisladas pues para cada uno de estos z, todo entorno reducido de z contiene puntos donde f no es analítica.

$z_k = 2e^{\frac{i2k\pi}{5}}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ todas son aisladas pues f es analítica en un entorno reducido de cada una de ellas.

b) $g(z) = \dfrac{\cos^2\left(z^3+8\right)}{\operatorname{sen}(3z)+\sqrt{2}}$

Estudiemos el dominio de analiticidad de $g(z)$:

- el numerador es una función analítica en $\mathbb{C}$ debido a que es composición de analíticas:
  $z^3 + 8$ es polinómica y por tanto analítica en $\mathbb{C}$
  $\cos(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$
- el denominador es una función analítica en $\mathbb{C}$ por ser suma de funciones analíticas:
  $\operatorname{sen}(3z)$ es analítica en $\mathbb{C}$
  $\sqrt{2}$ es una constante y por tanto analítica en $\mathbb{C}$

Por tanto $g(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$ salvo en los ceros del denominador de $g(z)$.
Calculamos los ceros del denominador:

$$\operatorname{sen}(3z) + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{i3z} - e^{-i3z}}{2i} + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{i3z} - e^{-i3z} + 2\sqrt{2}i = 0 \Leftrightarrow e^{i3z}\left(e^{i3z} - e^{-i3z} + 2\sqrt{2}i\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{i3z}\right)^2 + 2\sqrt{2}i\left(e^{i3z}\right) - 1 = 0$$

Esta última es una ecuación cuadrática si consideramos $\omega = e^{i3z}$. Es decir :

$$\omega^2 + 2\sqrt{2}\,i\,\omega - 1 = 0$$

$$\Delta = \left(2\sqrt{2}i\right)^2 - 4{,}1.(-1) = -8 + 4 = -4$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{-2\sqrt{2}\,i\,\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{-2\sqrt{2}\,i\,\pm\,2i}{2} = -\sqrt{2}\,i\,\pm\,i$$

Entonces obtenemos las siguientes raices:

$$\omega_1 = \left(1 - \sqrt{2}\right)i\ ,\ \ \omega_2 = \left(-1 - \sqrt{2}\right)\mathrm{i}$$

Considerando $\omega = e^{i3z}$ con ω_1 y ω_2 obtenemos los z que anulan el denominador de $g(z)$:

$$e^{i3z} = \omega_1 = \left(1-\sqrt{2}\right) i \qquad\qquad e^{i3z} = \omega_2 = \left(-1-\sqrt{2}\right) i$$
$$3iz \in \ln\left(\left(1-\sqrt{2}\right) i\right) \qquad\qquad 3iz \in \ln\left(\left(-1-\sqrt{2}\right) i\right)$$
$$3iz = \ln\left|\left(1-\sqrt{2}\right) i\right| + i\, arg\left(\left(1-\sqrt{2}\right) i\right) \qquad 3iz = \ln\left|\left(-1-\sqrt{2}\right) i\right| + i\, arg\left(\left(-1-\sqrt{2}\right) i\right)$$

$$\text{considerando que } \left(1-\sqrt{2}\right) < 0 \qquad\qquad \text{considerando que } \left(-1-\sqrt{2}\right) < 0$$

$$3iz = \ln\left(\sqrt{2}-1\right) + i\,\left(-\tfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\right)\,,\ k \in \mathbb{Z} \qquad 3iz = \ln\left(\sqrt{2}+1\right) + i\,\left(-\tfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\right)\,,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$z_k = \left(-\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{2k\pi}{3}\right) - \tfrac{1}{3}\ln\left(\sqrt{2}-1\right) i\,,\ k \in \mathbb{Z} \qquad z_k^* = \left(-\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{2k\pi}{3}\right) - \tfrac{1}{3}\ln\left(\sqrt{2}-1\right) i\,,\ k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto:

$$D_A\left(g\right) = \mathbb{C} - \left(\{z_k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{z_k^* : k \in \mathbb{Z}\}\right)$$

Singularidades: $z_k\ , z_k^*\ ,\ k \in \mathbb{Z}$
Todas son aisladas pues g es analítica en un entorno reducido de cada una de ellas..

c) $h(z) = \mathrm{Ln}\left(z+3\right) + \dfrac{z^2}{\mathrm{senh}\left(z\right)}$

Estudiemos el dominio de analiticidad de $h\left(z\right)$:

- el término $\dfrac{z^2}{\mathrm{senh}\left(z\right)}$ es función analítica en $\mathbb{C}$ excepto donde se anula $\mathrm{senh}\left(z\right)$:
  z^2 es polinómica y por tanto analítica en $\mathbb{C}$
  $\mathrm{senh}(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$
- el término $\mathrm{Ln}\left(z+3\right)$ es composición de funciones donde:
  $(z+3)$ es polinómica y por tanto analítica en $\mathbb{C}$
  $\mathrm{Ln}\left(z+3\right)$ es analítica en $\mathbb{C} - \{z : \mathrm{Im}(z) = 0 \wedge \mathrm{Re}(z) \leq -3\}$, veamos por qué:

$$\text{Si } z = x + iy \Leftrightarrow z + 3 = (x+iy) + 3 = (x+3) + iy$$

$$\mathrm{Im}\left(z+3\right) = 0 \wedge \mathrm{Re}(z+3) \leq 0 \Leftrightarrow\ y = 0\ \wedge\ x + 3 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow y = 0\ \wedge\ x \leq -3$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \wedge \mathrm{Re}(z) \leq -3$$

Los ceros de $\mathrm{senh}\left(z\right)$:

$$\mathrm{senh}(z) = 0\ \Leftrightarrow\ \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0\ \Leftrightarrow\ e^z - e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^z\left(e^z - e^{-z}\right) = 0$$
$$\left(e^{2z} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \Leftrightarrow 2z = \ln\left(1\right) \Leftrightarrow 2z \in \ln|1| + i\, arg\left(1\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2z = i\left(0 + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z = ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Luego:

$$D_A\left(h\right) = \mathbb{C} - \left(\{z : \mathrm{Im}(z) = 0 \wedge \mathrm{Re}(z) \leq -3\} \cup \{ik\pi : k \in \mathbb{Z}\}\right)$$

pues allí h es cociente de funciones analíticas con denominador no nulo.

Singularidades:

z tales que $\mathrm{Im}(z) = 0 \wedge \mathrm{Re}(z) \leq -3$ no son aisladas pues en cada entorno reducido de cada z hay puntos donde h es analítica y puntos donde no lo es.

$z_k = ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ todas son aisladas pues h es analítica en un entorno reducido de cada una de ellas.

d) $t(z) = \dfrac{z^4 + 16}{\operatorname{sen}(\pi/z)}$

Estudiemos el dominio de analiticidad de $t(z)$:

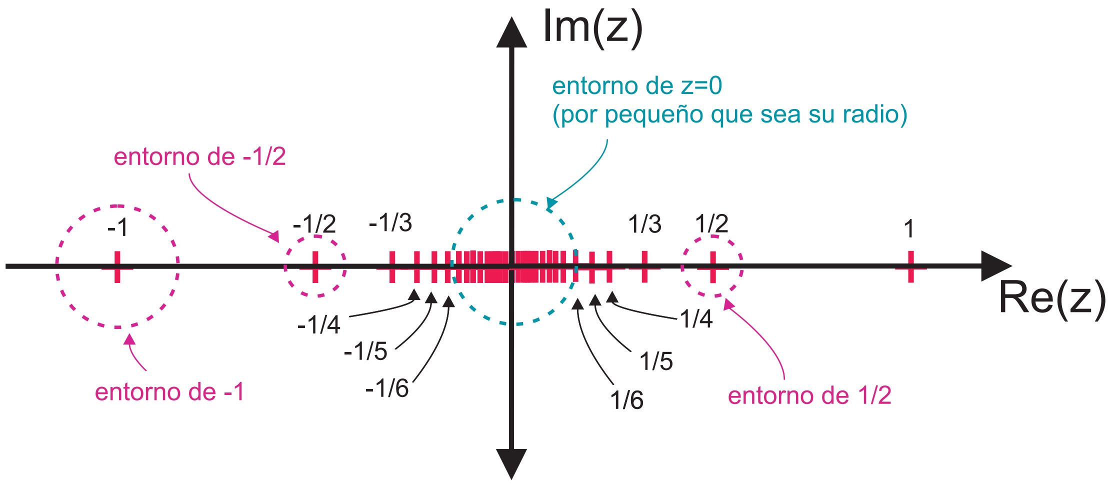
- $z^4 + 16$ es polinómica y por tanto analítica en $\mathbb{C}$
- el término $\operatorname{sen}(\pi/z)$:
  π/z es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$ por ser racional con denominador no nulo para esos valores de z.
  $\operatorname{sen}(\pi/z)$ es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$ por ser composición de funciones analíticas.

Entonces, $t(z)$ será analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$ excepto en los ceros del denominador:

$$\operatorname{sen}(\pi/z) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{z} = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow \ z_k = \frac{1}{k} \ , \ k \in \mathbb{Z} \ , k \neq 0$$

Luego:

$$D_A(t) = \mathbb{C} - \left(\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{k} \ : \ k \in \mathbb{Z} \ , k \neq 0 \right\} \right)$$



Singularidades:

$z_k = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ son aisladas pues t es analítica en un entorno reducido de cada una de ellas.

$z = 0$ no es aislada pues en todo entorno reducido de $z = 0$ hay infinitas singularidades $z_k = \frac{1}{k}$ (basta elegir $|k|$ suficientemente grande)

Actividad 5.2.7

a) $f(z) = \dfrac{z+10\,i}{z^2+100} \quad z_0 = -10\,i$

Como:

$$f(z) = \frac{z+10\,i}{z^2+100} = \frac{(z+10\,i)}{(z+10\,i)\,(z-10\,i)}$$

Entonces

$$D_A\,(t) = \mathbb{C} - \{-10\,i,\, 10\,i\}$$

Singularidades: $z_0 = -10\,i$ y $z_1 = 10\,i$ (son aisladas)
Si operamos algebraicamente obtenemos:

$$f(z) = \frac{z+10\,i}{z^2+100} = \frac{(z+10\,i)}{(z+10\,i)\,(z-10\,i)} = \frac{1}{(z-10\,i)} =$$

$$= \frac{1}{(z+10\,i)-20\,i} = \frac{-\dfrac{1}{20\,i}}{1-\dfrac{z+10\,i}{20\,i}} = \frac{-\dfrac{1}{20\,i}}{1+(z+10\,i)\,\dfrac{i}{20}}$$

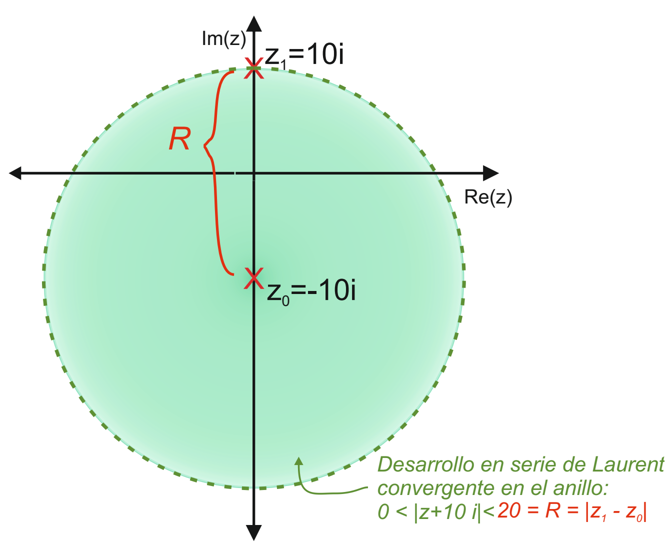
Es la suma de una serie geométrica con $r = -\,(z+10\,i)\,\dfrac{i}{20}$
converge $\Leftrightarrow$ $|r|<1 \Leftrightarrow |z+10\,i|<20$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{20\,i}\left[-\,(z+10\,i)\,\frac{i}{20}\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1}\,(-1)^n}{20^{n+1}}\,(z+10\,i)^n \;\text{ si }\; 0<|z+10\,i|<20$$

El gráfico nos muestra la región de convergencia del desarrollo. Este desarrollo de Laurent nos permite clasificar z_0, dado que la parte principal tiene todos sus términos nulos

$$b_n = 0\,,\forall\, n \geq 1$$

entonces $z_0 = -10\,i$ es una singularidad evitable de $f\,(z)$.



Observación.
Si tomamos el límite de $f\,(z)$:

$$\lim_{z \mapsto z_0} f(z) = \lim_{z \mapsto z_0} \frac{1}{z - 10\,i} = \frac{i}{20} \in \mathbb{C}$$

Entonces, en un entorno reducido de z_0, la función f coincide con g dada por:

$$g(z) = \frac{1}{z - 10\,i} \quad \text{(analítica en } z_0\text{)}$$

b) $f(z) = \dfrac{z + 10\,i}{z^2 + 100} \quad z_0 = 10\,i$

Como:

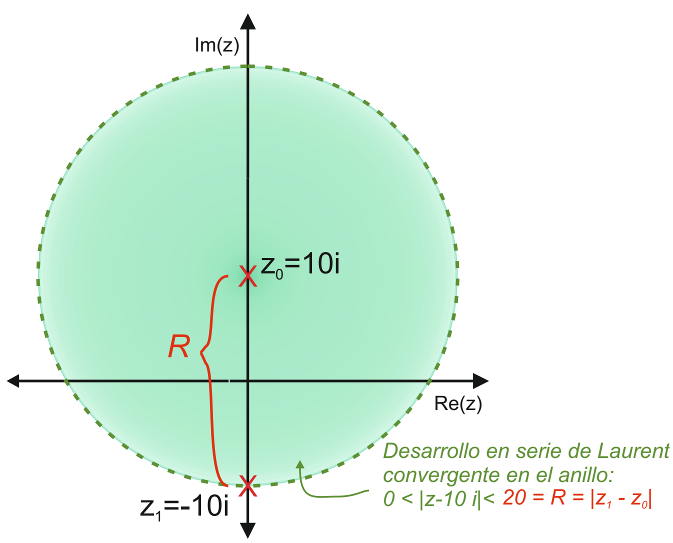
$$f(z) = \frac{z + 10\,i}{z^2 + 100} = \frac{(z + 10\,i)}{(z + 10\,i)\,(z - 10\,i)} = \frac{1}{(z - 10\,i)} \text{ si } \; 0 < |z - 10\,i| < 20$$

El último término es el desarrollo de Laurent que representa a f en el entorno reducido. Vemos que consta de un único término (que es su parte principal):

$$b_1 = 1$$

$$b_n = 0\,, \forall\, n \geq 2$$

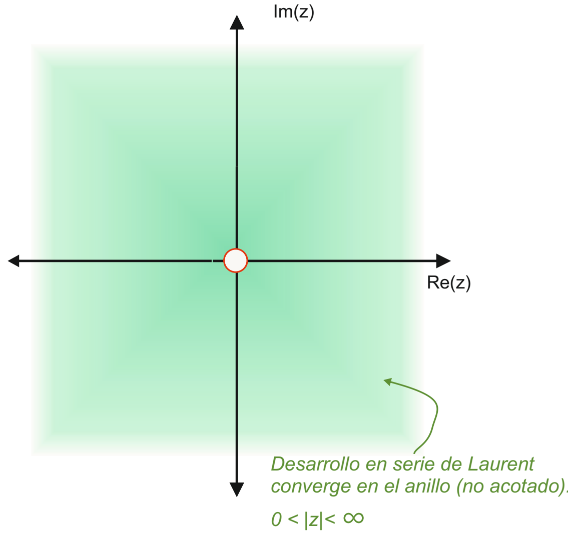
Entonces, $z_0 = 10\,i$ es un polo de $f(z)$ de orden $k = 1$.



c) $h(z) = 5z^3 e^{\frac{2}{z}}\,, \;\; z_0 = 0$

Su dominio de analicidad es:

$$D_A\,(h) = \mathbb{C} - \{0\} \;\; \Rightarrow \;\; R = \infty$$



Queremos expresar $h\,(z)$ como serie de potencias de z.

- $5z^3$ si $|z| < \infty$ ya está expresada en potencias de z
- $e^{\frac{2}{z}}$ usamos:

$$e^{\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\omega^n \text{ si } |\omega| < \infty$$

Reemplazando $\omega = 2/z$:

$$e^{2/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\frac{1}{z^n} \text{ si } 0 < |z| < \infty$$

Entonces:

$$h\,(z) = 5z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{3} \frac{2^n.5}{n!}\overbrace{\frac{1}{z^{n-3}}}^{z^{3-n}} + \underbrace{\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^n.5}{n!}\frac{1}{z^{n-3}}}_{\text{parte principal}} \text{ si } 0 < |z| < \infty$$

Como vemos estudiando la parte principal:

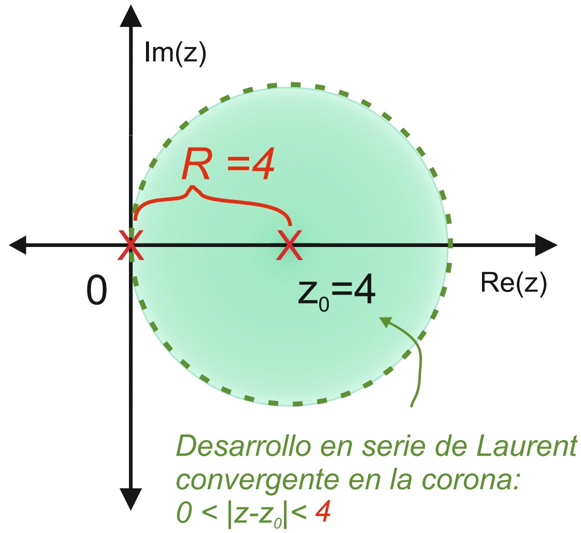
$$\sum_{n=4}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n.5}{n!}}_{\substack{b_{n-3} \neq 0 \\ \forall\, n \geq 4}} \quad \frac{1}{z^{n-3}}$$

posee infinitos términos no nulos, por lo tanto $z_0 = 0$ es singularidad esencial de $h(z)$.

d) $t(z) = \dfrac{16}{z^2\,(z-4)^3} - \dfrac{1}{(z-4)^3} \quad z_0 = 4$

Su dominio de analicidad es:

$$D_A\,(t) = \mathbb{C} - \{0{,}4\}$$



Queremos expresar $t(z)$ como serie de potencias alrededor de $z_0 = 4$:

$$t(z) = \frac{1}{z^2}\underbrace{\frac{16}{(z-4)^3}}_{no\,se\,toca!} - \underbrace{\frac{1}{(z-4)^3}}_{no\,se\,toca!}$$

Faltaría desarrollar la función $\frac{1}{z^2}$ alrededor de $z_0 = 4$. Podemos plantear un desarrollo de Taylor centrado en $z_0 = 4$ convergente en $|z-4| < 4$. ¿Cómo lo obtenemos? Tenemos algunas alternativas:

- Opción 1: Hallando por definición la serie de Taylor, dado que en este caso $f^{(n)}(z)$ es fácil de calcular para n genérico.

- Opción 2: Aplicar el teorema de unicidad.

Usaremos la última opción. Centramos en $z_0 = 4$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-4)+4} = \frac{1/4}{1+\frac{(z-4)}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{-(z-4)}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-4)^n$$

es una serie geométrica con $a = 1/4$ y $r = -\left(\frac{z-4}{4}\right)$. Converge $\Leftrightarrow |r| < 1 \Leftrightarrow |z-4| < 4$.

Derivando término a término :

$$-\frac{1}{z^2} = \left(\frac{1}{z}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{4^{n+1}}(z-4)^{n-1} \quad \text{si} \quad |z-4| < 4$$

Entonces :

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{4^{n+1}}(z-4)^{n-1} \quad \text{si} \quad |z-4| < 4$$

Luego :

$$t(z) = \frac{16}{(z-4)^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{4^{n+1}}(z-4)^{n-1} - \frac{1}{(z-4)^3} \quad \text{si} \quad 0 < |z-4| < 4$$

Reordenando obtenemos :

$$t(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16\, n\, (-1)^{n+1}}{4^{n+1}} (z-4)^{n-4} - \frac{1}{(z-4)^3} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(-1)^{n+1}}{4^{n-1}} (z-4)^{n-4} - \frac{1}{(z-4)^3} \;\text{ si }\; 0 < |z-4| < 4$$

Donde usamos el hecho que $\frac{16}{4^{n+1}} = \frac{4^2}{4^{n+1}} = \frac{1}{4^{n-1}}$.

Para encontrar el coeficiente b_3, considerando que $(n-4) = -3 \Leftrightarrow n = 1$, separamos el primer término de la sumatoria:

$$t(z) = \frac{1}{(z-4)^3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\,(-1)^{n+1}}{4^{n-1}} (z-4)^{n-4} - \frac{1}{(z-4)^3} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\,(-1)^{n+1}}{4^{n-1}} (z-4)^{n-4} \;\text{ si }\; 0 < |z-4| < 4$$

La parte principal de este desarrollo en serie de Laurent es:

$$\sum_{n=2}^{3} \frac{n\,(-1)^{n+1}}{4^{n-1}} (z-4)^{n-4} = -\frac{1}{2}(z-4)^{-2} + \frac{3}{16}(z-4)^{-1}$$

Como

$$b_2 = -\frac{1}{2} \neq 0$$

$$b_n = 0, \forall\, n > 2$$

deducimos que $z_0 = 4$ es un polo de orden $k = 2$ de $t(z)$.

Actividad 5.2.11

a) $f_1(z)$ tiene un polo de orden p en z_0 y $f_2(z)$ tiene un polo de orden q en z_0, siendo $q < p$. Por el teorema de caracterización de polos escribamos a las funciones de la siguiente manera:

$$f_1(z) = \frac{g_1(z)}{(z-z_0)^p} \quad , \quad f_2(z) = \frac{g_2(z)}{(z-z_0)^q}$$

donde $g_i(z)$ es analítica en z_0 y $g_i(z_0) \neq 0$ con $i = 1, 2$.

i)

$$f(z) = f_1(z) f_2(z) = \frac{g_1(z) g_2(z)}{(z-z_0)^{p+q}} ,$$

donde el numerador $g_1(z)g_2(z)$ cumple las condiciones de analiticidad y ser no nula en z_0 (ya que cada $g_i(z)$ las cumple). Por lo tanto $f(z)$ tiene un polo de orden $p+q$ en z_0.

ii) Puesto que $p > q$:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \frac{g_1(z) + (z-z_0)^{p-q} g_2(z)}{(z-z_0)^p} ,$$

donde nuevamente se tiene que el numerador es analítico y no nulo en z_0. Por lo tanto $f(z)$ tiene un polo de orden p en z_0.

iii)

$$f(z) = \frac{f_2(z)}{f_1(z)} = (z-z_0)^{p-q}\frac{g_2(z)}{g_1(z)}\,,$$

puesto que $p > q \Rightarrow p - q > 0$ y que $g_1(z_0) \neq 0$, $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$. Como el límite existe entonces f tiene una singularidad evitable en z_0.

iv)

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{h(z)}{(z-z_0)^{p-q}}\,,$$

donde hemos definido $h(z) = \dfrac{g_1(z)}{g_2(z)}$, la cual es analítica y no nula en z_0. Puesto que $p > q \Rightarrow p - q > 0$, $f(z)$ tiene un polo en z_0 de orden $p - q$.

b)

i) $f(z) = \dfrac{\sin(z-\pi) + \cos(z-\pi)}{(z-3\pi)^4}$

El dominio de analiticidad es $\mathbb{C} - \{3\pi\}$. La única singularidad 3π es aislada.
Podemos escribir $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-3\pi)^4}$ donde $h(z) = \sin(z-\pi) + \cos(z-\pi)$ es analítica y no nula en $z = 3\pi$. Por el teorema de caracterización de polos la función tiene un polo de orden 4 en $z = 3\pi$.

ii) $g(z) = \dfrac{z+2}{z^5(z^2+25)^3(z+5i)}$

$D_A(g) = \mathbb{C} - \{0, -5i, 5i\}$. Cada una de las singularidade son aisladas.

En $z = 0$, podemos escribir $g(z) = \dfrac{h(z)}{z^5}$ con $h(z) = \dfrac{z+2}{(z^2+25)^3(z+5i)}$ la cual es analítica y no nula en $z = 0$. Por el teorema de caracterización de polos la función tiene un polo de orden 5 en $z = 0$.

En $z = 5i$, podemos escribir $g(z) = \dfrac{h(z)}{(z-5i)^3}$ con $h(z) = \dfrac{z+2}{z^5(z+5i)^4}$ la cual es analítica y no nula en $z = 5i$. Por el teorema de caracterización de polos la función tiene un polo de orden 3 en $z = 5i$.

En $z = -5i$, podemos escribir $g(z) = \dfrac{h(z)}{(z+5i)^4}$ con $h(z) = \dfrac{z+2}{z^5(z-5i)^3}$ la cual es analítica y no nula en $z = -5i$. Por el teorema de caracterización de polos la función tiene un polo de orden 4 en $z = -5i$.

Actividad 5.2.15

a) $f(z) = \dfrac{z^2+2iz}{(z^4-16)^2}$

La función $f(z)$ es un cociente de funciones analíticas por ser polinómicas. Por lo tanto $f(z)$ será analítica en todo $\mathbb{C}$ salvo donde se anula el denominador:

$$z^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow z^4 = 16 \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16}\,e^{\frac{i(0+2k\pi)}{4}} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\Leftrightarrow z_0 = 2 \;\; z_1 = 2i \;\; z_2 = -2 \;\; z_3 = -2i$$

Así, tenemos que el dominio de analiticidad de $f(z)$ es $D_A(f) = \mathbb{C} - \{-2, 2, 2i, -2i\}$.

Por lo tanto, tiene singularidades aisladas en $z_0 = 2 \;\; z_1 = 2i \;\; z_2 = -2 \;\; z_3 = -2i$, las cuales podemos clasificar aplicando el teorema de clasificación de singularidades de cociente de funciones analíticas (teorema 5.2.12). Para hallar los órdenes de los ceros requeridos utilizamos su definición o el teorema de caracterización de ceros.

Las funciones $N(z) = z^2 + 2iz$ y $D(z) = (z^4 - 16)^2$ son analíticas en $\mathbb{C}$ por ser polinómicas y $f(z) = N(z)/D(z)$.
Análisis de la singularidad $z_0 = 2$:
$N(z) = z^2 + 2iz$ tiene en $z_0 = 2$ un cero de orden $p = 0$ pues $N(2) = 4 + 4i \neq 0$
$D(z) = (z^4 - 16)^2$ tiene un cero de orden $q = 2$ pues $D(2) = 0$, $D'(z) = 2(z^4 - 16)(4z^3)$ y $D'(2) = 0$, $D''(z) = 24z^2(z^4 - 16) + (8z^3)(4z^3)$ y $D'(2) = 2048 \neq 0$
Como $p = 0 < q = 2$, por el teorema 5.2.12, $z_0 = 2$ es un polo de orden $q-p = 2-0 = 2$ de $f(z)$.

Análisis de la singularidad $z_1 = 2i$:
$N(z) = z^2 + 2iz$ tiene en $z_1 = 2i$ un cero de orden $p = 0$ pues $N(2i) = -8 \neq 0$
$D(z) = (z^4 - 16)^2 = \underbrace{(z^2 - 4)^2(z + 2i)^2}_{h(z)}(z - 2i)^2$ con $h(z)$ analítica en $z_1 = 2i$ y $h(2i) \neq 0$, con lo cual por el teorema de caracterización de ceros $D(z)$ tiene en $z_1 = 2i$ un cero de orden $q = 2$.
Como $p = 0 < q = 2$, por el teorema 5.2.12, $z_1 = 2i$ es un polo de orden $q - p = 2 - 0 = 2$ de $f(z)$.

Análisis de la singularidad $z_2 = -2$
$N(z) = z^2 + 2iz$ tiene en $z_2 = -2$ un cero de orden $p = 0$ pues $N(-2) = 4 - 4i \neq 0$
$D(z) = (z^4 - 16)^2 = \underbrace{(z^2 + 4)^2(z - 2)^2}_{h(z)}(z + 2)^2$ con $h(z)$ analítica en $z_2 = -2$ y $h(-2) \neq 0$, con lo cual por el teorema de caracterización de ceros $D(z)$ tiene en $z_2 = -2$ un cero de orden $q = 2$.
Como $p = 0 < q = 2$, por el teorema 5.2.12, $z_2 = -2$ es un polo de orden $q - p = 2 - 0 = 2$ de $f(z)$.

Análisis de la singularidad $z_3 = -2i$
$N(z) = z^2 + 2iz$ tiene en $z_3 = -2i$ un cero de orden $p = 1$ pues $N(-2i) = -4 + 4 = 0$, $N'(z) = 2z + 2i$ y $N'(-2i) = -4i + 2i \neq 0$
$D(z) = (z^4 - 16)^2 = \underbrace{(z^2 - 4)^2(z - 2i)^2}_{h(z)}(z + 2i)^2$ con $h(z)$ analítica en $z_3 = -2i$ y $h(-2i) \neq 0$, con lo cual por el teorema de caracterización de ceros $D(z)$ tiene en $z_3 = -2i$ un cero de orden $q = 2$.
Como $p = 1 < q = 2$, por el Teorema 5.2.12, $z_3 = -2i$ es un polo de orden $q - p = 2 - 1 = 1$ de $f(z)$.

b) $g(z) = \dfrac{z - i\frac{\pi}{4}}{e^{2z} - i}$

En este caso $N(z) = z - i\frac{\pi}{4}$ es analítica en $\mathbb{C}$ por ser polinómica y $D(z) = e^{2z} - i$ es analítica en $\mathbb{C}$ por ser una resta de funciones analíticas (i es constante y e^{2z} es una composición de funciones analíticas, con lo cual también es analítica).

Entonces, como la función $g(z)$ es un cociente de funciones analíticas, será analítica en todo $\mathbb{C}$ salvo donde se anula el denominador:

$$e^{2z} - i = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = i \Leftrightarrow 2z \in \ln(i) \Leftrightarrow 2z = \ln|i| + i\arg(i)$$

$$\Leftrightarrow 2z = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z = i\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto el dominio de analiticidad de g(z) es $D_A(g) = \mathbb{C} - \left\{i\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Así, las singularidades de $g(z)$ son $z = i\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ las cuales son todas aisladas y podemos clasificar aplicando el teorema de clasificación de singularidades de cociente de funciones analíticas (teorema 5.2.12). Observemos que si $k = 0$ entonces $z_0 = i\frac{\pi}{4}$ y $N(i\frac{\pi}{4}) = 0$. Pero si $k \neq 0$, z_k no se cero de $N(z)$. Entonces analizaremos el caso $k = 0$ aparte.
Como vimos anterioremente, las funciones $N(z) = z - i\frac{\pi}{4}$ y $D(z) = e^{2z} - i$ son analíticas en $\mathbb{C}$ y $g(z) = N(z)/D(z)$.

Análisis de la singularidad $z_0 = i\frac{\pi}{4}$
$N(z) = z - i\frac{\pi}{4} = \underbrace{1}_{h(z)}(z - i\frac{\pi}{4})^1$ con $h(z)$ analítica en $z_0 = i\frac{\pi}{4}$ y $h(i\frac{\pi}{4}) = 1 \neq 0$, con lo cual por el teorema de caracterización de ceros N(z) tiene en $z_0 = i\frac{\pi}{4}$ un cero de orden $p = 1$.
$D(z) = e^{2z} - i$ tiene en $z_0 = i\frac{\pi}{4}$ un cero de orden $q = 1$ pues $D(i\frac{\pi}{4}) = i - i = 0$, $D'(z) = 2e^{2z}$ y $D'(i\frac{\pi}{4}) = 2e^{2i\frac{\pi}{4}} = 2i \neq 0$
Como $p = q = 1$, por el teorema 5.2.12, $z_0 = i\frac{\pi}{4}$ es una singularidad evitable de $g(z)$.

Análisis de la singularidad $z_k = i(\frac{\pi}{4} + k\pi), k \in \mathbb{Z} - \{0\}$
$N(z) = z - i\frac{\pi}{4}$ tiene un cero de orden $p = 0$ en z_k pues $N(z_k) = i(\frac{\pi}{4} + k\pi) - i\frac{\pi}{4} = ik\pi \neq 0$ dado que $k \neq 0$.
$D(z) = e^{2z} - i$ tiene en z_k un cero de orden $q = 1$ pues $D(z_k) = 0$, $D'(z) = 2e^{2z}$ y $D'(z_k) = 2e^{2i(\frac{\pi}{4}+k\pi)} = 2i \neq 0$
Como $p = 0 < q = 1$, por el teorema 5.2.12, z_k es un polo de orden $q - p = 1 - 0 = 1$ de $g(z)$ $\forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$

c) $h(z) = \dfrac{(z - i\frac{\pi}{2})^2}{\operatorname{senh}(z) - i}$

En este caso $N(z) = (z - i\frac{\pi}{2})^2$ es analítica en $\mathbb{C}$ por ser polinómica y $D(z) = \operatorname{senh}(z) - i$ es analítica en $\mathbb{C}$ por ser una resta de funciones analíticas (una constante y una trigonométrica).
Entonces, como la función h(z) es un cociente de funciones analíticas, será analítica en todo $\mathbb{C}$ salvo donde se anula el denominador:

$$\operatorname{senh}(z) - i = 0 \Leftrightarrow \frac{e^z - e^{-z}}{2} - i = 0 \Leftrightarrow e^z - e^{-z} - 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow e^z(e^z - e^{-z} - 2i) = 0 \Leftrightarrow (e^z)^2 - 2i(e^z) - 1 = 0$$

$$w = e^z$$
$$w^2 - 2iw - 1 = 0$$
$$w = \frac{2i \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{-4+4}}{2} = i$$

$$e^z = i \Leftrightarrow z \in \ln(i) \Leftrightarrow z = \underbrace{\ln|i|}_{\ln(1)=0} + i\arg(i) \Leftrightarrow z = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

El dominio de analiticidad de $h(z)$ es $D_A(h) = \mathbb{C} - \left\{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Las singularidades de $h(z)$ son $z = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$, las cuales son todas aisladas y podemos clasificar aplicando el teorema de clasificación de singularidades de cociente de funciones analíticas (teorema 5.2.12). Observemos que si $k = 0$ entonces $z_0 = i\frac{\pi}{2}$ y $N(i\frac{\pi}{2}) = 0$. Pero si $k \neq 0$, z_k no se cero de $N(z)$. Entonces analizaremos el caso $k = 0$ aparte.
Como vimos anterioremente, las funciones $N(z) = (z - i\frac{\pi}{2})^2$ y $D(z) = \operatorname{senh}(z) - i$ son analíticas en $\mathbb{C}$ y $h(z) = N(z)/D(z)$.

Análisis de la singularidad $z_0 = i\frac{\pi}{2}$:
$N(z) = (z - i\frac{\pi}{2})^2 = \underbrace{1}_{h^*(z)}(z - i\frac{\pi}{2})^2$ con $h^*(z)$ analítica en $z_0 = i\frac{\pi}{2}$ y $h^*(i\frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0$, con lo cual por el teorema de caracterización de ceros N(z) tiene en $z_0 = i\frac{\pi}{2}$ un cero de orden $p = 2$.
$D(z) = \operatorname{senh}(z) - i$ tiene en $z_0 = i\frac{\pi}{2}$ un cero de orden $q = 2$ pues $D(i\frac{\pi}{2}) = \operatorname{senh}(i\frac{\pi}{2}) - i = i - i = 0$, $D'(z) = \cosh(z)$ y $D'(i\frac{\pi}{2}) = \cosh(i\frac{\pi}{2}) = 0$, $D''(z) = \operatorname{senh}(z)$ y $D''(i\frac{\pi}{2}) = \operatorname{senh}(i\frac{\pi}{2}) = i \neq 0$
Como $p = q = 2$, por el teorema 5.2.12, $z_0 = i\frac{\pi}{2}$ es una singularidad evitable de $h(z)$.

Análisis de la singularidad $z_k = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z} - \{0\}$
$N(z) = (z - i\frac{\pi}{2})^2$ tiene un cero de orden $p = 0$ en z_k pues $N(z_k) = (i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) - i\frac{\pi}{2})^2 = (i2k\pi)^2 = -4k^2\pi^2 \neq 0$ dado que $k \neq 0$.
$D(z_k) = \operatorname{senh}(i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)) - i = \dfrac{e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} - e^{-i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}}{2} - i = \dfrac{i - (-i)}{2} - i = 0$, $D'(z) = \cosh(z)$ y $D'(z_k) = \cosh(i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)) = \dfrac{e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} + e^{-i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}}{2} = \dfrac{i - i}{2} = 0$, $D''(z) = \operatorname{senh}(z)$ y $D''(z_k) = \operatorname{senh}(i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)) = i \neq 0$. Vemos que $D(z) = \operatorname{senh}(z) - i$ tiene en $z_k = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ un cero de orden $q = 2$
Como $p = 0 < q = 2$, por el teorema 5.2.12, z_k es un polo de orden $q - p = 2 - 0 = 2$ de h(z) $\forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$

d) $t(z) = \dfrac{(z + 3i)z^2}{(z^2 + 2zi + 3)(z - i)^2}$

La función $t(z)$ es un cociente de funciones analíticas por ser polinómicas. Por lo tanto es analítica en todo $\mathbb{C}$ salvo donde se anula el denominador:

$$(z^2 + 2zi + 3)(z - i)^2 = 0$$

Para el caso en que $(z - i)^2 = 0$ tenemos $z = i$.

Por otro lado, tenemos que $(z^2 + 2zi + 3) = 0$ ocurre para:

$$z = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 12}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{-4 - 12}}{2} = \frac{-2i \pm 4i}{2} \Leftrightarrow z_1 = -3i \ \vee \ z_2 = i$$

Así, tenemos que el dominio de analiticidad de $t(z)$ es $D_A(t) = \mathbb{C} - \{-3i, i\}$.

Por lo tanto, $t(z)$ tiene singularidades aisladas en $z_1 = -3i$ y $z_2 = i$, las cuales podemos clasificar mediante el teorema de clasificación de singularidades de cociente de funciones analíticas (teorema 5.2.12).

Las funciones $N(z) = (z + 3i)z^2$ y $D(z) = (z^2 + 2zi + 3)(z - i)^2 = (z + 3i)(z - i)^3$ son analíticas en $\mathbb{C}$ y $t(z) = N(z)/D(z)$.

Análisis de la singularidad $z_1 = -3i$
$N(z) = \underbrace{z^2}_{h(z)}(z + 3i)^1$ con h(z) analítica en $z_1 = -3i$ y $h(-3i) = (-3i)^2 = -9 \neq 0$, y por el teorema de caracterización de ceros, N(z) tiene en $z_1 = -3i$ un cero de orden $p = 1$.
$D(z) = (z^2 + 2zi + 3)(z - i)^2 = (z + 3i)(z - i)^3$ tiene un cero de orden $q = 1$ en $z_1 = -3i$ pues $D(z) = \underbrace{(z - i)^3}_{h(z)}(z + 3i)^1$ con h(z) analítica en $z_1 = -3i$ y $h(-3i) = (-3i - i)^3 \neq 0$
Como $p = q = 1$, por el teorema 5.2.12, $z_1 = -3i$ es una singularidad evitable de $t(z)$.

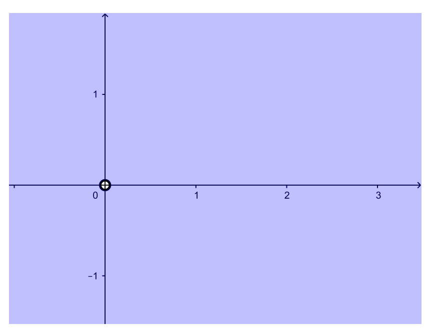
Análisis de la singularidad $z_2 = i$
$N(z) = (z + 3i)z^2$ tiene un cero de orden $p = 0$ en $z_2 = i$ pues $N(i) = (i + 3i)i^2 = -4i$.
$D(z) = (z^2 + 2zi + 3)(z - i)^2 = (z + 3i)(z - i)^3$ tiene un cero de orden $q = 3$ en $z_2 = i$ pues $D(z) = \underbrace{(z + 3i)}_{h(z)}(z - i)^3$ con $h(z)$ analítica en $z_2 = i$ y $h(i) = (i + 3i) = 4i \neq 0$
Como $p = 0 < q = 3$, por el teorema 5.2.12, $z_2 = i$ es un polo de orden $q - p = 3 - 0 = 3$ de $t(z)$.

Actividad 5.3.3

a) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^4}$ está definida en $\mathbb{C} - \{0\}$. Tiene una singularidad aislada en $z_0 = 0$ porque $f(z)$ no es analítica en z_0, pero lo es para todos los puntos de algún entorno reducido de z_0.

El desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$

converge en $0 < |z| < \infty$



La función seno es analítica en todo el plano complejo y tiene desarrollo en serie de Taylor con radio de convergencia $R = \infty$:

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ , \qquad |z| < \infty$$

El desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$, si $0 < |z| < \infty$:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-3}}{(2n+1)!} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z}}_{\text{Parte principal}} + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n-3)!}$$

Por lo tanto, $f(z)$ tiene un polo de orden 3 en $z_0 = 0$ porque en la parte principal de su desarrollo de Laurent, que converge en $0 < |z| < \infty$, $b_3 = 1 \neq 0$ y $b_n = 0 \ \ \forall n > 3$

Para resolver el mismo problema podemos usar el teorema 5.2.12 que nos da el criterio de clasificación de singularidades aisladas de funciones que son cociente de funciones analíticas, en efecto:

$f(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$, donde

$N(z) = \operatorname{sen} z$ tiene un cero de orden 1 en $z_0 = 0$, pues
$N(0) = \operatorname{sen} 0 = 0; \quad N'(0) = \cos 0 = 1 \neq 0;$

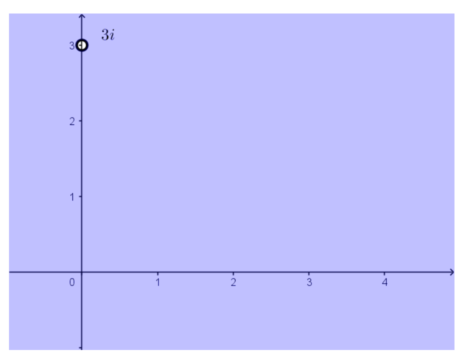
$D(z) = z^4$ tiene un cero de orden 4 en $z_0 = 0$, pues usando el teorema de caracterización de ceros (4.5.5), como $D(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$ y se puede escribir como $D(z) = (z-0)^4 g(z)$, donde $g(z) = 1$ es analítica en 0 y $g(0) = 1 \neq 0$.

Entonces 0 es un polo de orden $4 - 1 = 3$ de $f(z)$.

b) $f(z) = ze^{\left(\frac{1}{z-3i}\right)}$ está definida en $\mathbb{C} - \{3i\}$. Tiene una singularidad aislada en $z_0 = 3i$ porque $f(z)$ no es analítica en $3i$, pero lo es para todos los puntos de algún entorno reducido de $3i$.

El desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$

converge en $0 < |z-3i| < \infty$



El desarrollo en serie de Taylor de e^w: $e^w = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}, \qquad |w| < \infty$

$$e^{\left(\frac{1}{z-3i}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z-3i}\right)^n, \qquad 0 < |z-3i| < \infty$$

$$z = (z-3i) + 3i, \qquad |z-3i| < \infty$$

El desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$, si $0 < |z-3i| < \infty$:

$$f(z) = ze^{\left(\frac{1}{z-3i}\right)} = \left[(z-3i)+3i\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3i)^{-n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3i)^{-n+1}}{n!} + 3i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3i)^{-n}}{n!} =$$

$$= (z-3i) + 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(z-3i)^{-n+1}}{n!} + 3i + 3i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-3i)^{-n}}{n!} =$$

$$= (z-3i) + 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-3i)^{-n}}{(n+1)!} + 3i + 3i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-3i)^{-n}}{n!} =$$

Entonces:

$$f(z) = (z-3i) + 1 + 3i + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(z-3i)^{-n}\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{3i}{n!}\right)}_{\text{Parte principal}} \quad \text{si} \quad 0 < |z-3i| < \infty$$

Por lo tanto, $f(z)$ tiene una singularidad esencial en $z_0 = 3i$ ya que la parte principal de su desarrollo de Laurent, convergente en $0 < |z-3i| < \infty$ tiene infinitos términos no nulos, es decir que $b_n \neq 0$ para infinitos valores de n.

Observación: en este caso no podemos aplicar el teorema 5.2.12 para clasificar la singularidad.

Actividad 5.3.6

1) $f(z) = \dfrac{7}{(z-2i)^4} - \dfrac{3}{(z-2i)^2} + \dfrac{4}{(z-2i)} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{(n+1)\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^n}$ es un desarrollo en serie centrado en $z_0 = 2i$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{(n+1)\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^n}$ es analítica en su disco de convergencia, buscamos el radio usando el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(z-2i)^{n+1}}{(n+2)\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^{n+1}}}{\frac{(z-2i)^n}{(n+1)\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(z-2i)}{(n+2)\left(1+\sqrt{3}\,i\right)}\right| = \frac{|z-2i|}{|1+\sqrt{3}\,i|} = \frac{|z-2i|}{2} < 1$$

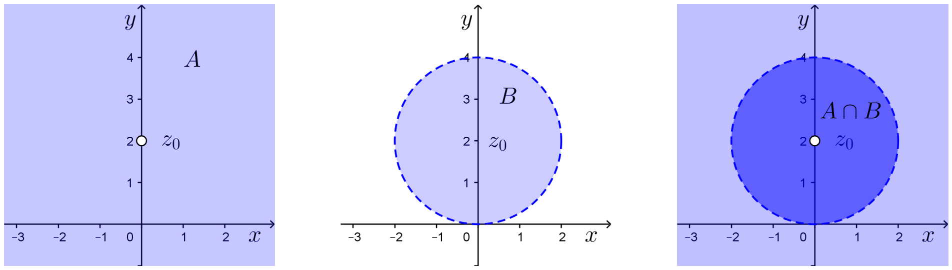
entonces $R = 2$. Luego es analítica en $B = \{z : |z-2i| < 2\}$

La parte principal

$$\frac{7}{(z-2i)^4} - \frac{3}{(z-2i)^2} + \frac{4}{(z-2i)}$$

es analítica en $A = \mathbb{C} - \{2i\} = \{z : |z-2i| > 0\}$.

Entonces f es analítica en $\{z : |z-2i| > 0\} \cap \{z : |z-2i| < 2\} = \{z : 0 < |z-2i| < 2\}$, es decir, existe un entorno reducido de $z_0 = 2i$ donde la función es analítica en todos sus puntos, luego $z_0 = 2i$ es una singularidad aislada de $f(z)$.



Para clasificarla consideramos los coeficientes de la parte principal:

$b_4 = 7 \neq 0$ y $b_n = 0$ para todo $n > 4$, entonces $z_0 = 2i$ es un polo de orden 4.

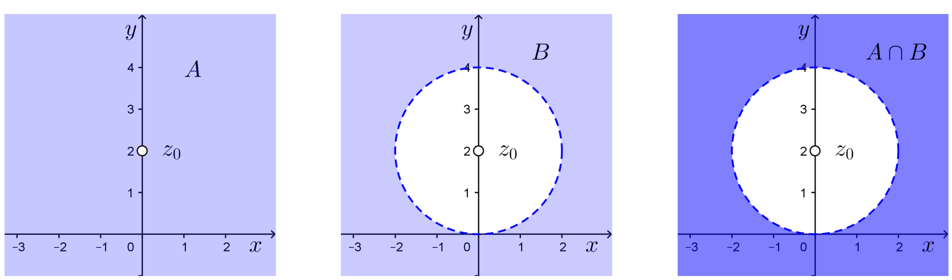
$b_1 = 4$, entonces $Res_{2i} f(z) = b_1 = 4$.

2) $f(z) = \dfrac{2}{(z-2i)^5} + \dfrac{1}{(z-2i)^3} - \dfrac{3}{(z-2i)} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^{n+3}}{(z-2i)^n}$ es un desarrollo en serie centrado en $z_0 = 2i$.

$\dfrac{2}{(z-2i)^5} + \dfrac{1}{(z-2i)^3} - \dfrac{3}{(z-2i)}$ es analítica en $\mathbb{C} - \{2i\} = \{z : |(z-2i)| > 0\} = A$.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^{n+3}}{(z-2i)^n}$ es una serie geométrica con $a = 8$ y razón $r = \dfrac{2}{z-4i}$, converge si y solo si $\left|\dfrac{2}{z-2i}\right| < 1$, luego es analítica en $\{z : |(z-2i)| > 2\} = B$.

Por lo tanto f es analítica en $\{z : |z-2i| > 0\} \cap \{z : |z-2i| > 2\} = \{z : 2 < |z-2i| < \infty\}$. Podemos afirmar que $z_0 = 2i$ ni siquiera es una singularidad de $f(z)$ pues no verifica que todo entorno reducido contiene por lo menos algún punto donde f sea analítica (los entornos con radio menor que 2 no cumplen la condición). Así que carece de sentido clasificar y hablar de residuo en $z_0 = 2i$.



3)

a) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{z^6} - \dfrac{3}{z^2} + \dfrac{2}{z}, \quad z_0 = 0.$

Su dominio de analiticidad está dado por: $D_A f = \mathbb{C} - \{0\}$ y sus singularidades se encuentran en $z_0 = 0$ (de tipo aisladas). Hallamos entonces el desarrollo en serie de

Laurent, centrado en z_0 y convergente en el entorno reducido $0 < |z| < \infty$. Así:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^6} - \frac{3}{z^2} + \frac{2}{z} = \\ &= \frac{1}{z^6}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} - \frac{3}{z^2} + \frac{2}{z} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-5} - \frac{3}{z^2} + \frac{2}{z}, \text{ si } 0< |z| < \infty. \end{aligned}$$

Analizamos la parte principal del desarrollo, y así: $2n - 5 < 0 \Leftrightarrow 2n < 5 \Leftrightarrow n < 5/2 \Leftrightarrow n \leq 2$. Entonces:

$$\frac{1}{z^5} - \frac{1}{6}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{120}\frac{1}{z} - \frac{3}{z^2} + \frac{2}{z} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{6}\frac{1}{z^3} - \frac{3}{z^2} + \underbrace{\frac{241}{120}}_{\text{Residuo}} \frac{1}{z}$$

Finalmente, concluimos que $z_0 = 0$ es un polo de orden $k = 5$ de $f(z)$, ya que:

$$\begin{aligned} &b_5 = 1 \neq 0. \\ &b_n = 0, \ \forall n > 5 \end{aligned}$$

Además $\operatorname{Res}_{z_0=0}\big(f(z)\big) = b_1 = \dfrac{241}{120}$.

b) $f(z) = (z+3i)^5 \cos\left(\dfrac{2}{z+3i}\right), \ z_0 = -3i.$

Tenemos que encontrar el desarrollo en serie alrededor de $z_0 = -3i$. Vemos que el dominio de analiticidad es $D_A f = \mathbb{C} - \{-3i\}$, por lo que la función solo tiene una singularidad aislada en el punto $z = -3i$. Buscamos así, el desarrollo en series de Laurent centrado en $z_0 = -3i$ que converja en el entorno reducido $0 < |z + 3i| < \infty$. Debido a que el factor $(z + 3i)^5$ ya se encuentra centrado en dicho punto, solo nos enfocaremos en el desarrollo del factor $g(z) = \cos\left(\dfrac{2}{z+3i}\right)$. Para ello, recordamos:

$$\cos(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^{2n} \text{ si } |w| < \infty$$

Si reemplazamos $w = \dfrac{2}{z+3i}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{2}{z+3i}\right)^{2n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} (z+3i)^{-2n} \text{ si } 0 < |z+3i| < \infty. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(z) &= (z+3i)^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} (z+3i)^{-2n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} (z+3i)^{5-2n} \text{ si } 0 < |z+3i| < \infty. \end{aligned}$$

Analizamos la parte principal del desarrollo. Buscamos n tal que $5-2n<0 \Leftrightarrow 2n> 5 \Leftrightarrow n>5/2 \Leftrightarrow n\geq 3$. Tenemos infinitos términos no nulos de potencias negativas y, por lo tanto, $z_0=-3i$ es una singularidad de tipo esencial de $f(z)$. Su residuo vale: $\operatorname{Res}_{z_0=-3i}\big(f(z)\big)=b_{1(n=3)}=\dfrac{(-1)^3 4^3}{(2\cdot 3)!}=-\dfrac{64}{6!}=-\dfrac{4}{45}$.

c) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sen}(z)}{(z-\pi)^4}$, $z_0=\pi$.

En este caso, debemos realizar el desarrollo en series de potencias alrededor de π. Vemos que la función $f(z)$ tiene un denominador de la forma $(z-\pi)^4$, por lo que ese factor ya se encuentra centrado. Debemos entonces centrar el numerador $N(z)=\operatorname{sen}(z)$. Sabemos que:

$$\operatorname{sen}(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}w^{2n+1} \quad \text{para } |w|<\infty$$

A continuación, centraremos esta serie en $z_0=\pi$.
Para eso, reescribimos $\operatorname{sen}(z)=\operatorname{sen}((z-\pi)+\pi)=-\operatorname{sen}(z-\pi)$, donde hemos usado que $\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$ y ahora, la serie puede ser expresada como:

$$-\operatorname{sen}(z-\pi)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n+1} \quad \text{para } |z-\pi|<\infty$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-\pi)^4}\operatorname{sen}(z) = \\ &= \underbrace{(z-\pi)^{-4}}_{0<|z-\pi|<\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n+1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n-3} \end{aligned}$$

que es el desarrollo de Laurent centrado en $z_0=\pi$ que converge en el entorno reducido $0<|z-\pi|<\infty$.

Analizamos ahora la parte principal del desarrollo. Así, $2n-3<0 \Leftrightarrow 2n<3 \Leftrightarrow n<1{,}5$ y por lo tanto, los valores enteros de n que satisfacen esta desigualdad son $n=1$ y $n=0$ (recordar que $n\geq 0$). Si desarrollamos:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{1}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n-3} = \\ &= \frac{(-1)^{0+1}}{(2\times 0+1)!}(z-\pi)^{2\times 0-3}+\frac{(-1)^{1+1}}{(2\times 1+1)!}(z-\pi)^{2\times 1-3} = \\ &= -(z-\pi)^{-3}+\frac{1}{6}(z-\pi)^{-1} \end{aligned}$$

podemos ver que la serie tiene un número finito de términos no nulos y, por lo tanto, $z_0=\pi$ es un polo de $f(z)$ de orden $k=3$, pues:

$$\begin{aligned} b_3 &= -1 \neq 0 \\ b_n &= 0, \quad \forall n\geq 4 \end{aligned}$$

Por último, $\operatorname{Res}_{z_0=\pi}\big(f(z)\big)=b_1=\frac{1}{6}$.

d) $f(z) = \dfrac{\text{Ln}(z)}{(z-3)^4}, \;\; z_0 = 3.$

El dominio de analiticidad es $D_A f = \mathbb{C} - \Big(\{z : \text{Im}(z) = 0 \wedge \text{Re}(z) \leq 0\} \cup \{3\} \Big)$. La función presenta una singularidad aislada en $z_0 = 3$ y una singularidad no aislada en $\{z : \text{Im}(z) = 0 \wedge \text{Re}(z) \leq 0\}$. Buscamos el desarrollo de Laurent centrado en $z_0 = 3$ que converge en el entorno reducido $0 < |z-3| < 3$. Para ello, vemos que el denominador ya se encuentra centrado en z_0 y procedemos con el desarrollo del $\text{Ln}(z)$ (comenzamos por desarrollar su derivada):

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{(z-3)+3} = \\ &= \frac{1/3}{1+\frac{z-3}{3}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\Big(-\Big(\frac{z-3}{3}\Big)\Big)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-3)^n \;\; \text{si } |z-3| < 3\end{aligned}$$

Integrando término a término:

$$\underbrace{\int_3^z \frac{1}{z^*} dz^*}_{\text{Ln}(z)-\text{Ln}(3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \frac{1}{n+1} (z-3)^{n+1} \;\; \text{si } |z-3| < 3$$

Por lo tanto,

$$\text{Ln}(z) = \text{Ln}(3) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}(n+1)} (z-3)^{n+1} \;\; \text{si } |z-3| < 3$$

Luego:

$$f(z) = (z-3)^{-4} \Big[\text{Ln}(3) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}(n+1)} (z-3)^{n+1} \Big] \;\; \text{si } 0 < |z-3| < 3$$

que distribuyendo nos queda:

$$f(z) = (z-3)^{-4}\text{Ln}(3) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}(n+1)} (z-3)^{n-3} \;\; \text{si } 0 < |z-3| < 3$$

Finalmente, concluimos que $z_0 = 3$ es un polo de orden $k = 4$ de $f(z)$, ya que:

$$\begin{aligned} b_4 &= \text{Ln}(3) \neq 0. \\ b_n &= 0, \;\; \forall n \geq 5 \end{aligned}$$

Además $\text{Res}_{z_0=3}\big(f(z)\big) = b_1 = \dfrac{(-1)^2}{3^{2+1}(2+1)} = \dfrac{1}{81} \;\; (n=2).$

e) $f(z) = \dfrac{z+5}{(z^2-16)(z-4)}, \;\; z_0 = -4.$

Vemos que el dominio de analiticidad es $D_A f = \mathbb{C} - \{-4, 4\}$. La función $f(z)$ tiene singularidades en los puntos $z_0 = -4$ y $z_1 = 4$ (ambas son singularidades aisladas).

Nos interesa desarrollar la función alrededor del punto z_0, por lo tanto, obtendremos un desarrollo en serie de Laurent centrado en z_0, convergente en el anillo: $0 < |z+4| < R = d(z_0, z_1) = 8$. Para ello, escribimos:

$$f(z) = \frac{z+5}{(z^2-16)(z-4)} = \frac{z+5}{(z+4)(z-4)^2}$$

y observamos que el término $(z+4)^{-1}$ ya se encuentra centrado y es válido en $|z+4| > 0$, por lo que nos enfocamos en el desarrollo de:

$$g(z) = \frac{z+5}{(z-4)^2} \tag{5.1}$$

Consideramos

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-4)} = \frac{1}{z+4-8} = \frac{-1/8}{1-\frac{z+4}{8}} &= \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{8}\right)\left(\frac{z+4}{8}\right)^n &= \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)}{8^{n+1}}(z+4)^n &\end{aligned}$$

es una serie geométrica con $a = -1/8$ y $r = (z+4)/8$, convergente en $|(z+4)/8| < 1 \Leftrightarrow |z+4| < 8$. Derivando término a término:

$$-\frac{1}{(z-4)^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-4}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)n}{8^{n+1}}(z+4)^{n-1} \ \text{ si } |z+4| < 8$$

Entonces:

$$\frac{1}{(z-4)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{8^{n+1}}(z+4)^{n-1} \ \text{ si } |z+4| < 8$$

Además, $z+5 = (z+4)+1$ válido en $|z+4| < \infty$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}f(z) &= [(z+4)+1]\frac{1}{z+4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{8^{n+1}}(z+4)^{n-1} \ \text{ si } 0 < |z+4| < 8, \\ &= \left(1+\frac{1}{z+4}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{8^{n+1}}(z+4)^{n-1} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{8^{n+1}}(z+4)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{8^{n+1}}(z+4)^{n-2}\end{aligned}$$

Finalmente, la parte principal está representada por:

$$\sum_{n=1}^{1}\frac{n}{8^{n+1}}(z+4)^{n-2} = \frac{1}{8^{1+1}}(z+4)^{1-2} = \frac{1}{64}(z+4)^{-1},$$

y por lo tanto, $z_0 = -4$ es un polo de orden $k = 1$ de $f(z)$ y su residuo vale: $\text{Res}_{z_0=-4}\left(f(z)\right) = b_1 = \dfrac{1}{64}$

Actividad 5.3.9

a) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2(z^2+4)}$

Las singularidades de f son $z_1 = 0$, $z_2 = 2i$ y $z_3 = -2i$.
Sean

$$N(z) = e^z, D_1(z) = z, D_2(z) = (z-2i), D_3(z) = z+2i, D(z) = z^2(z^2+4)$$

Todas ellas son analíticas en $\mathbb{C}$. Como $f(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$ es cociente de analíticas, para clasificar sus singularidades aisladas $z_1, z_2 = 2i, z_3 = -2i$ aplicamos el teorema 5.2.12.

- Clasificación de $z_1 = 0$:

  $N(0) = e^0 = 1 \neq 0$. Entonces z_1 es cero de orden $p = 0$ de $N(z)$.
  $D_1(0) = 0$, $D_1'(0) = 1 \neq 0$. Entonces z_1 es cero de orden $q_1 = 1$ de $D_1(z)$.
  $D_2(0) = -2i \neq 0$. Entonces z_1 es cero de orden $q_2 = 0$ de $D_2(z)$.
  $D_3(0) = 2i \neq 0$. Entonces z_1 es cero de orden $q_3 = 0$ de $D_3(z)$.
  Luego, z_1 es cero de orden $q = 2q_1 + q_2 + q_3 = 2 + 0 + 0 = 2$ de $D(z)$.

  Como $0 = p < q = 2$ entonces $z_1 = 0$ es un polo de orden $k = q - p = 2 - 0 = 2$ de $f(z)$.
  Aplicando la fórmula de cálculo de residuos en polos:

$$\text{Res}_{z_1=0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1!}\left[(z-0)^2 f(z)\right]' = \lim_{z\to 0}\left[\frac{z^2 e^z}{z^2(z^2+4)}\right]' = \lim_{z\to 0}\left[\frac{e^z}{z^2+4}\right]' =$$
$$= \lim_{z\to 0}\frac{e^z(z^2+4) - e^z 2z}{(z^2+4)^2} = \frac{1}{4}$$

- Clasificación de $z_2 = 2i$:

  $N(2i) = e^{2i} \neq 0$. Entonces z_2 es cero de orden $p = 0$ de $N(z)$.
  $D_1(2i) = 2i \neq 0$. Entonces z_2 es cero de orden $q_1 = 0$ de $D_1(z)$.
  $D_2(2i) = 0$, $D_2'(2i) = 1 \neq 0$. Entonces z_2 es cero de orden $q_2 = 1$ de $D_2(z)$.
  $D_3(2i) = 4i \neq 0$. Entonces z_2 es cero de orden $q_3 = 0$ de $D_3(z)$.
  Luego, z_2 es cero de orden $q = 2q_1 + q_2 + q_3 = 0 + 1 + 0 = 1$ de $D(z)$.

  Como $0 = p < q = 1$ entonces $z_2 = 2i$ es un polo de orden $k = q - p = 1 - 0 = 1$ de $f(z)$. Aplicando la fórmula de cálculo de residuos en polos:

$$\text{Res}_{z_2=2i} f(z) = \lim_{z\to 2i}(z-2i) f(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{(z-2i)e^z}{z^2(z^2+4)} = \lim_{z\to 2i}\frac{e^z}{z^2(z+2i)} =$$
$$= \frac{e^{2i}}{(2i)^2(4i)} = i\frac{e^{2i}}{16} = -\frac{\text{sen}(2)}{16} + \frac{\cos(2)}{16} i$$

- Clasificación de $z_3 = -2i$:

  $N(-2i) = e^{-2i} \neq 0$. Entonces z_3 es cero de orden $p = 0$ de $N(z)$.
  $D_1(-2i) = -2i \neq 0$. Entonces z_3 es cero de orden $q_1 = 0$ de $D_1(z)$.

$D_2(-2i) = -4i \neq 0$. Entonces z_3 es cero de orden $q_2 = 0$ de $D_2(z)$.
$D_3(-2i) = 0$, $D_3'(-2i) = 1 \neq 0$. Entonces z_3 es cero de orden $q_3 = 1$ de $D_3(z)$.
Luego, z_3 es cero de orden $q = 2q_1 + q_2 + q_3 = 0 + 0 + 1 = 1$ de $D(z)$.

Como $0 = p < q = 1$ entonces $z_3 = -2i$ es un polo de orden $k = q - p = 1 - 0 = 1$ de $f(z)$. Aplicando la fórmula de cálculo de residuos en polos:

$$\text{Res}_{z_3=-2i} f(z) = \lim_{z\to-2i}(z+2i)f(z) = \lim_{z\to-2i}\frac{(z+2i)e^z}{z^2(z^2+4)} = \lim_{z\to-2i}\frac{e^z}{z^2(z-2i)} =$$

$$= \frac{e^{-2i}}{(-2i)^2(-4i)} = -i\frac{e^{-2i}}{16} = -\frac{\text{sen}(2)}{16} - \frac{\cos(2)}{16}\,i$$

b) $f(z) = \dfrac{\text{sen}(z)}{(z-\pi)^3}$
La única singularidad de f es $z_0 = \pi$.
Sean

$$N(z) = \text{sen}(z), D_1(z) = z - \pi, D(z) = (z-\pi)^3$$

Todas ellas son analíticas en $\mathbb{C}$. Como $f(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$ es cociente de analíticas, para clasificar $z_0 = \pi$ aplicamos el teorema 5.2.12.

$N(\pi) = \text{sen}(\pi) = 0$, $N'(\pi) = \cos(\pi) = -1 \neq 0$. Entonces z_0 es cero de orden $p = 1$ de $N(z)$.
$D_1(\pi) = 0$, $D_1'(\pi) = 1 \neq 0$. Entonces z_0 es cero de orden $q_1 = 1$ de $D_1(z)$.
Luego, z_0 es cero de orden $q = 3q_1 = 3$ de $D(z)$.

Como $1 = p < q = 3$ entonces $z_0 = \pi$ es un polo de orden $k = q - p = 3 - 1 = 2$ de $f(z)$. Aplicando la fórmula de cálculo de residuos en polos:

$$\text{Res}_{z_0=\pi} f(z) = \lim_{z\to\pi}\frac{1}{1!}\left[(z-\pi)^2 f(z)\right]' = \lim_{z\to\pi}\left[\frac{(z-\pi)^2\,\text{sen}(z)}{(z-\pi)^3}\right]' = \lim_{z\to\pi}\left(\frac{\text{sen}(z)}{z-\pi}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to\pi}\frac{\cos(z)(z-\pi) - \text{sen}(z)}{(z-\pi)^2}$$

El último límite es una forma indeterminada “cero sobre cero”. La salvamos aplicando la regla de L’Hôpital:

$$\lim_{z\to\pi}\frac{\cos(z)(z-\pi) - \text{sen}(z)}{(z-\pi)^2} = \lim_{z\to\pi}\frac{-\sin(z)(z-\pi) + \cos(z) - \cos(z)}{2(z-\pi)} =$$

$$= \lim_{z\to\pi}\frac{-\sin(z)}{2} = 0$$

Luego:

$$\text{Res}_{z_0=\pi} f(z) = 0$$

Actividad 5.3.12

a) $\displaystyle\oint_C \frac{z}{e^{i4z}-1}\,dz, \quad C : |z| = 2$

La curva C es cerrada, simple, suave y tiene orientación antihoraria.
El integrando $f(z) = \dfrac{z}{e^{i4z}-1}$ es cociente de funciones analíticas en todo el plano. Resulta analítico excepto en los ceros del denominador:

$$e^{i4z}-1=0 \;\Leftrightarrow\; e^{i4z}=1 \;\Leftrightarrow\; i4z\in\ln(1) \;\Leftrightarrow\; i4z=i2k\pi, k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; z=k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$$

Luego, f es analítica sobre C y en su interior, excepto en las singularidades $z_1=-\pi/2$, $z_2=0$, $z_3=\pi/2$. Para clasificarlas aplicamos el teorema 5.2.12 con $N(z)=z$, $D(z)=e^{i4z}-1$.

- Clasificación de $z_1=-\dfrac{\pi}{2}$:
  $N\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}\neq 0$ así que z_1 es cero de orden $p=0$ de $N(z)$.

  $D\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{-i2\pi}-1=1-1=0$, $D'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=4ie^{i4z}\Big|_{z=-\pi/2}=4i\neq 0$. Entonces z_1 es un cero de orden $q=1$ de $D(z)$.
  Como $0=p<q=1$, z_1 es un polo de $f(z)$ de orden $k=q-p=1-0=1$. El residuo correspondiente se calcula con la fórmula dada en 5.3.7:

  $$\mathrm{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}}f(z)=\lim_{z\to-\pi/2}\left(z+\frac{\pi}{2}\right)f(z)=\lim_{z\to-\pi/2}\frac{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)z}{e^{i4z}-1}$$

  Como se trata de una forma indeterminada “cero sobre cero” aplicamos la regla de L’Hôpital:

  $$\lim_{z\to-\pi/2}\frac{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)z}{e^{i4z}-1}=\lim_{z\to-\pi/2}\frac{2z+\frac{\pi}{2}}{4ie^{i4z}}=\frac{-\frac{\pi}{2}}{4i}=i\frac{\pi}{8}$$

  Luego:

  $$\mathrm{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}}f(z)=i\frac{\pi}{8}$$

- Clasificación de $z_2=0$:
  $N(0)=0$, $N'(0)=1\neq 0$ así que z_2 es cero de orden $p=1$ de $N(z)$.

  $D(0)=e^0-1=1-1=0$, $D'(0)=4ie^{i4z}\Big|_{z=0}=4i\neq 0$. Entonces z_2 es un cero de orden $q=1$ de $D(z)$.
  Como $1=p\geq q=1$, z_2 es una singularidad evitable de $f(z)$. Por consiguiente:

  $$\mathrm{Res}_{z=0}f(z)=0$$

- Clasificación de $z_3=\dfrac{\pi}{2}$:
  $N\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}\neq 0$ así que z_3 es cero de orden $p=0$ de $N(z)$.

  $D\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{i2\pi}-1=1-1=0$, $D'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4ie^{i4z}\Big|_{z=\pi/2}=4i\neq 0$. Entonces z_3 es un cero de orden $q=1$ de $D(z)$.
  Como $0=p<q=1$, z_3 es un polo de $f(z)$ de orden $k=q-p=1-0=1$. El residuo correspondiente se calcula con la fórmula dada en 5.3.7:

  $$\mathrm{Res}_{z=\frac{\pi}{2}}f(z)=\lim_{z\to\pi/2}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)f(z)=\lim_{z\to\pi/2}\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)z}{e^{i4z}-1}$$

Como se trata de una forma indeterminada "cero sobre cero" aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{z\to\pi/2} \frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)z}{e^{i4z}-1} = \lim_{z\to\pi/2} \frac{2z-\frac{\pi}{2}}{4ie^{i4z}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{4i} = -i\frac{\pi}{8}$$

Luego:

$$\operatorname{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = -i\frac{\pi}{8}$$

Aplicando el teorema de los residuos:

$$\oint_C \frac{z}{e^{i4z}-1}\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{3}\operatorname{Res}_{z_k} f(z) = 2\pi i\left(i\frac{\pi}{8}+0-i\frac{\pi}{8}\right) = 0$$

b) $\displaystyle\oint_C \left[\frac{\operatorname{sen}\left(z^2+9\right)}{z^2+25} + \frac{2i}{z^5-3z^4}\right] dz$

$C : |z| = 2$ es cerrada, simple, suave y está recorrida en sentido antihorario.

$g(z) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(z^2+9\right)}{z^2+25}$ es analítica sobre C y su interior, entonces por el teorema de Cauchy-Goursat

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen}\left(z^2+9\right)}{z^2+25}\,dz = 0$$

$h(z) = \dfrac{2i}{z^5-3z^4} = \dfrac{2i}{z^4(z-3)}$ es analítica en $\mathbb{C}-\{0,3\}$. La única singularidad dentro de C es $z_0 = 0$. Por el teorema de los residuos:

$$\oint_C \left[\frac{2i}{z^5-3z^4}\right] dz = 2\pi i Res_{z_0=0}h(z)$$

Se puede escribir $h(z) = \dfrac{1}{z^4}\dfrac{2i}{z-3}$ donde $\dfrac{2i}{z-3}$ es analítica y no nula en $z_0 = 0$. Por el criterio de caracterización de polos, $z_0 = 0$ es un polo de orden 4.

Usando la fórmula $Res_{z_0}h(z) = \dfrac{1}{(k-1)!}\displaystyle\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-z_0)^k h(z)\right]\right\}$ para $k = 4$:

$$Res_0 h(z) = \frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}\left\{\frac{d^3}{dz^3}\left[z^4\frac{1}{z^4}\frac{2i}{z-3}\right]\right\} = \frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}\left\{\frac{d^3}{dz^3}\left[\frac{2i}{z-3}\right]\right\} = \frac{1}{6}\lim_{z\to 0}\left(\frac{-12i}{(z-3)^4}\right) = \frac{-2i}{81}$$

Aplicando linealidad:

$$\oint_C \left[\frac{\operatorname{sen}\left(z^2+9\right)}{z^2+25} + \frac{2i}{z^5-3z^4}\right] dz = \oint_C g(z)dz + \oint_C h(z)dz = 0 + 2\pi i\,\frac{-2i}{81} = \frac{4\pi}{81}$$

c) $\displaystyle\oint_C \left[z^3\cos\left(\frac{4}{z}\right) + \frac{2}{z\,\operatorname{sen}(z)}\right] dz,\quad C$ frontera del cuadrado de lados $x = \pm 5, y = \pm 5$

La curva C es cerrada, simple, suave a trozos y tiene orientación antihoraria.
Aplicando linealidad:

$$\oint_C \left[z^3\cos\left(\frac{4}{z}\right) + \frac{2}{z\,\operatorname{sen}(z)}\right] dz = \overbrace{\oint_C z^3\cos\left(\frac{4}{z}\right)\,dz}^{I_1} + \overbrace{\oint_C \frac{2}{z\,\operatorname{sen}(z)}\,dz}^{I_2}$$

Calculemos I_1. La única singularidad del integrando es $z_1 = 0$ interior a C. Hallemos el desarrollo en serie de Laurent centrado en z_1 que converge en el anillo $0 < |z| < \infty$. Para ello utilizamos el desarrollo de Taylor del coseno centrado en el origen:

$$\cos(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{si } |w| < \infty$$

Reemplazando $w = \dfrac{4}{z}$ obtenemos:

$$\cos\left(\frac{4}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{4}{z}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)!} z^{-2n} \quad \text{si } 0 < |z| < \infty$$

Luego:

$$z^3 \cos\left(\frac{4}{z}\right) = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)!} z^{-2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)!} z^{3-2n} \quad \text{si } 0 < |z| < \infty$$

Entonces:

$$\text{Res}_{z_1=0}\, z^3 \cos\left(\frac{4}{z}\right) = b_1 \overbrace{=}^{\substack{3-2n=-1 \\ n=2}} = \left.\frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)!}\right|_{n=2} = \frac{(-1)^2 4^{2\times 2}}{(2\times 2)!} = \frac{4^4}{4!} = \frac{32}{3}$$

Por el teorema de los residuos:

$$I_1 = \oint_C z^3 \cos\left(\frac{4}{z}\right) dz = 2\pi i \text{Res}_{z_1=0} z^3 \cos\left(\frac{4}{z}\right) = 2\pi i \frac{32}{3} = \frac{64}{3}\pi i$$

Para calcular I_2 observamos que los ceros del denominador son $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Todos ellos son polos del integrando porque anulan al denominador pero no al numerador. Los únicos interiores a C son $z_1 = 0$, $z_2 = -\pi$ y $z_3 = \pi$.
Consideremos las funciones analíticas $N(z) = 2$, $D_1(z) = z$, $D_2(z)\,\text{sen}(z)$, $D(z) = z\ \text{sen}(z)$

- Clasificación de $z_1 = 0$:
  $N(0) = 2 \neq 0$ así que z_1 es cero de orden $p = 0$ de $N(z)$.

  $D_1(0) = 0$, $D_1'(0) = 1 \neq 0$ así que z_1 es cero de orden $q_1 = 1$ de $D_1(z)$.

  $D_2(0) = \text{sen}(0) = 0, D_2'(0) = \cos(0) = 1 \neq 0$ de modo que z_1 es cero de orden $q_2 = 1$ de $D_2(z)$.
  Luego, z_1 es cero de orden $q = q_1 + q_2 = 1 + 1 = 2$ de $D(z)$.
  Como $0 = p < q = 2$ entonces z_1 es un polo de orden $k = q - p = 2 - 0 = 2$ del integrando. El residuo se calcula del modo siguiente:

$$\text{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1!}\left(z^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2 2}{z\ \text{sen}(z)}\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{2z}{\text{sen}(z)}\right)' =$$
$$= \lim_{z\to 0} \frac{2\ \text{sen}(z) - 2z\ \cos(z)}{\text{sen}^2(z)}$$

  Como se trata de una forma indeterminada "cero sobre cero" aplicamos la regla de L'Hôpital (dos veces):

$$\lim_{z\to 0} \frac{2\ \text{sen}(z) - 2z\ \cos(z)}{\text{sen}^2(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{2\ \cos(z) - 2\ \cos(z) + 2z\ \text{sen}(z)}{2\ \text{sen}(z)\ \cos(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\cos(z)} = 0$$

Luego:

$$\text{Res}_{z=0} f(z) = 0$$

- Clasificación de $z_2 = -\pi$:
  $N(-\pi) = 2 \neq 0$ así que z_2 es cero de orden $p = 0$ de $N(z)$.

  $D_1(-\pi) = -\pi$ así que z_2 es cero de orden $q_1 = 0$ de $D_1(z)$.

  $D_2(-\pi) = \text{sen}(-\pi) = 0, D_2'(-\pi) = \cos(-\pi) = -1 \neq 0$ de modo que z_2 es cero de orden $q_2 = 1$ de $D_2(z)$.

  Luego, z_2 es cero de orden $q = q_1 + q_2 = 0 + 1 = 1$ de $D(z)$.
  Como $0 = p < q = 1$ entonces z_2 es un polo de orden $k = q - p = 1 - 0 = 1$ del integrando. El residuo se calcula mediante:

$$\text{Res}_{z=-\pi} f(z) = \lim_{z \to -\pi} (z + \pi) f(z) = \lim_{z \to -\pi} \frac{(z + \pi)2}{z \, \text{sen}(z)}$$

  Como se trata de una forma indeterminada "cero sobre cero" aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{z \to -\pi} \frac{(z + \pi)2}{z \, \text{sen}(z)} = \lim_{z \to -\pi} \frac{2}{\text{sen}(z) + z \cos(z)} = \frac{2}{\pi}$$

  Luego:

$$\text{Res}_{z=-\pi} f(z) = \frac{2}{\pi}$$

- Clasificación de $z_3 = \pi$:
  $N(\pi) = 2 \neq 0$ así que z_3 es cero de orden $p = 0$ de $N(z)$.

  $D_1(\pi) = \pi$ así que z_3 es cero de orden $q_1 = 0$ de $D_1(z)$.

  $D_2(\pi) = \text{sen}(\pi) = 0, D_2'(\pi) = \cos(\pi) = -1 \neq 0$ de modo que z_3 es cero de orden $q_2 = 1$ de $D_2(z)$.

  Luego, z_3 es cero de orden $q = q_1 + q_2 = 0 + 1 = 1$ de $D(z)$.
  Como $0 = p < q = 1$ entonces z_3 es un polo de orden $k = q - p = 1 - 0 = 1$ del integrando. El residuo se calcula mediante:

$$\text{Res}_{z=\pi} f(z) = \lim_{z \to \pi} (z - \pi) f(z) = \lim_{z \to -\pi} \frac{(z - \pi)2}{z \, \text{sen}(z)}$$

  Como se trata de una forma indeterminada "cero sobre cero" aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{z \to \pi} \frac{(z - \pi)2}{z \, \text{sen}(z)} = \lim_{z \to \pi} \frac{2}{\text{sen}(z) + z \cos(z)} = -\frac{2}{\pi}$$

  Luego:

$$\text{Res}_{z=\pi} f(z) = -\frac{2}{\pi}$$

Aplicando el teorema de los residuos:

$$I_2 = \oint_C \frac{2}{z\ \mathrm{sen}(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{3} \mathrm{Res}_{z_k} f(z) = 2\pi i \left(0 + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\right) = 0$$

Por lo tanto:

$$\oint_C \left[z^3 \cos\left(\frac{4}{z}\right) + \frac{2}{z\ \mathrm{sen}(z)}\right] dz = I_1 + I_2 = \frac{64}{3}\pi i + 0 = \frac{64}{3}\pi i$$

d) $\displaystyle \oint_C \left[(z-2)^3 \cosh\left(\frac{3}{(z-2)^2}\right) + \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi z}{8}\right)}{e^{i\pi z/2} - 1}\right] dz, \quad C : |z-2| = 3$

Aplicando linealidad:

$$\oint_C \left[(z-2)^3 \cosh\left(\frac{3}{(z-2)^2}\right) + \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi z}{8}\right)}{e^{i\pi z/2} - 1}\right] dz =$$

$$= \underbrace{\oint_C (z-2)^3 \cosh\left(\frac{3}{(z-2)^2}\right)}_{I_1} + \oint_C \underbrace{\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi z}{8}\right)}{e^{i\pi z/2} - 1} dz}_{I_2}$$

La curva $C : |z-2| = 3$ es cerrada, simple, suave y posee orientación antihoraria.

El integrando en I_1 es analítico sobre C y en su interior excepto en la singularidad aislada $z = 2$. La clasificamos a partir del desarrollo en serie de Laurent centrado en $z = 2$ que converge en el anillo $0 < |z-2| < \infty$, basándonos en el desarrollo de Taylor del coseno hiperbólico alrededor del origen (que se obtiene fácilmente por definición de la serie de Taylor):

$$\cosh w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} w^{2n} \ \text{ si } |w| < \infty$$

Reemplazando $w = 3(z-2)^{-2}$ resulta:

$$\cosh\left(\frac{3}{(z-2)^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{3}{(z-2)^2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)!}(z-2)^{-4n} \ \text{ si } 0 < |z-2| < \infty$$

Entonces:

$$(z-2)^3 \cosh\left(\frac{3}{(z-2)^2}\right) = (z-2)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{3}{(z-2)^2}\right)^{2n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)!}(z-2)^{3-4n} \ \text{ si } 0 < |z-2| < \infty$$

Luego:

$$\mathrm{Res}_{z=2}\ (z-2)^3 \cosh\left(\frac{3}{(z-2)^2}\right) = b_1 \overbrace{=}^{\substack{3-4n=-1\\ n=1}} \left.\frac{3^{2n}}{(2n)!}\right|_{n=1} = \frac{3^2}{2!} = \frac{9}{2}$$

Aplicando el teorema de los residuos:

$$I_1 = \oint_C (z-2)^3 \cosh\left(\frac{3}{(z-2)^2}\right) dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}_{z=2}\ (z-2)^3 \cosh\left(\frac{3}{(z-2)^2}\right) = 2\pi i\, \frac{9}{2} = 9\pi i$$

Para resolver I_2 hallamos las singularidades del integrando y descartamos las que son exteriores a C. Para ello comenzamos buscando los ceros del denominador $D(z) = e^{i\pi z/2} - 1$:

$$e^{i\pi z/2} - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{i\pi z/2} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{i\pi z}{2} \in \ln(1) \;\Leftrightarrow\; \frac{i\pi z}{2} = i2k\pi, k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; z = 4k, k \in \mathbb{Z}$$

Esas son las singularidades del integrando. Sólo $z_1 = 0$, $z_2 = 4$ son interiores a C. Las clasificamos.
Sea $N(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{8}\right)$.

- Clasificación de $z_1 = 0$
  $N(0) = \operatorname{sen}(0) = 0, N'(0) = \frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{\pi z}{8}\right)\Big|_{z=0} = \frac{\pi}{8} \neq 0$. Entonces z_1 es un cero de orden $p = 1$ de $N(z)$.
  $D(0) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0, D'(0) = \frac{i\pi}{2}e^{i\pi z/2}\Big|_{z=0} = \frac{i\pi}{2} \neq 0$ de modo que z_1 es un cero de orden $q = 1$ de $D(z)$.
  Como $1 = p \geq q = 1$ entonces z_1 es una singularidad evitable del integrando. Por lo tanto:
  $$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{8}\right)}{e^{i\pi z/2} - 1} = 0$$

- Clasificación de $z_2 = 4$
  $N(4) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1 \neq 0$. Entonces z_2 es un cero de orden $p = 0$ de $N(z)$
  $D(4) = e^{i2\pi} - 1 = 1 - 1 = 0, D'(4) = \frac{i\pi}{2}e^{i2\pi} = \frac{i\pi}{2} \neq 0$ de modo que z_2 es un cero de orden $q = 1$ de $D(z)$
  Como $0 = p \geq q = 1$ entonces z_2 es un polo de orden $k = q - p = 1 - 0 = 1$ del integrando. Utilizando la fórmula de cálculo de residuos en polos:
  $$\operatorname{Res}_{z=4} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{8}\right)}{e^{i\pi z/2} - 1} = \lim_{z \to 4} \frac{(z-4)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{8}\right)}{e^{i\pi z/2} - 1}$$
  Como se trata de una forma indeterminada "cero sobre cero" aplicamos la regla de L'Hôpital:
  $$\lim_{z \to 4} \frac{(z-4)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{8}\right)}{e^{i\pi z/2} - 1} = \lim_{z \to 4} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{8}\right) + (z-4)\cos\left(\frac{\pi z}{8}\right)\frac{\pi}{8}}{\frac{i\pi}{2}e^{i\pi z/2}} = -\frac{2i}{\pi}$$
  Luego:
  $$\operatorname{Res}_{z=4} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{8}\right)}{e^{i\pi z/2} - 1} = -\frac{2i}{\pi}$$
  Por lo tanto, aplicando el teorema de los residuos:
  $$I_2 = \oint_C \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{8}\right)}{e^{i\pi z/2} - 1}dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}_{z_1=0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{8}\right)}{e^{i\pi z/2} - 1} + \operatorname{Res}_{z_2=4}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{8}\right)}{e^{i\pi z/2} - 1}\right] = 2\pi i\left(0 - \frac{2i}{\pi}\right) = 4$$
  Finalmente:
  $$\oint_C \left[(z-2)^3\cosh\left(\frac{3}{(z-2)^2}\right) + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{8}\right)}{e^{i\pi z/2} - 1}\right]dz = I_1 + I_2 = 9\pi i + 4$$

CAPÍTULO 6

Transformadas integrales

Como vimos en el capítulo 2, las transformaciones ayudan a simplificar la resolución de algunos problemas. Asimismo, las transformaciones llamadas integrales:

Sea $N(t,s)$ una función de las variables t y s. Si $f(t)$ es una función (real o compleja) entonces la **transformada integral** $\mathscr{I}$ **de la función** $\boldsymbol{f(t)}$ **respecto al núcleo** $\boldsymbol{N(t,s)}$ es

$$\mathscr{I}\left\{f(t)\right\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)N(t,s)dt$$

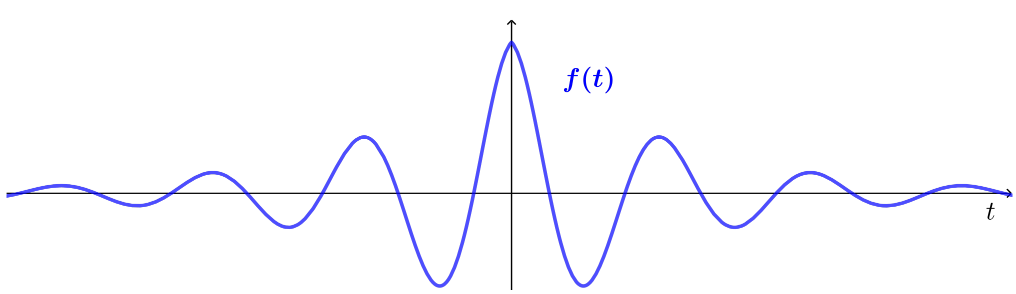
cuando la integral existe.

Diversos núcleos originan diferentes transformadas integrales. Abordaremos los casos con $N(t,s) = e^{-i2\pi ts}$ y $N(t,s) = e^{-ts}$ que corresponden a casos particulares vastamente conocidos, la transformada de Fourier y la transformada de Laplace respectivamente.
Desarrollaremos las nociones básicas y las aplicaremos en la resolución de algunas clases de ecuaciones diferenciales, integrales e integrodiferenciales.

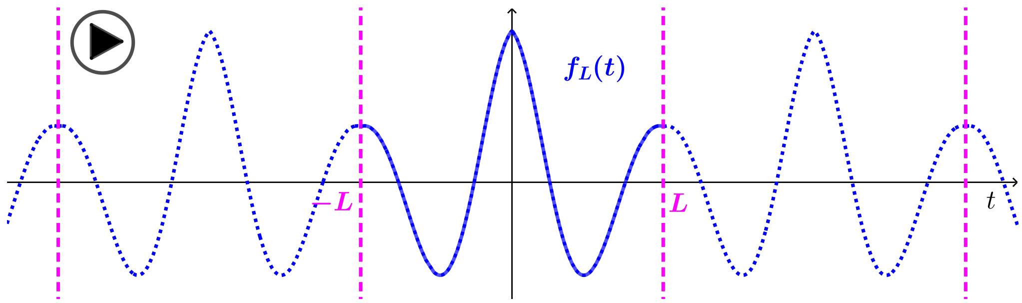
6.1. Desde la serie a la integral de Fourier

Las series de Fourier surgieron por la necesidad de resolver ciertas ecuaciones diferenciales parciales -EDP- sujetas a condiciones de contorno que involucran funciones periódicas. Para los casos de funciones aperiódicas, es posible introducir las integrales de Fourier a partir de las series.

Para ilustrar el proceso, consideremos una función f como se muestra en la figura siguiente.



Sea $f_L(t) = f(t)$ para $t \in (-L, L)$ y periódica de período $2L$. Cliqueando en el siguiente gráfico observamos que cuando L crece $f_L(t)$ tiende a $f(t)$.



Si se verifican las condiciones de Dirichlet, podemos representar $f_L(t)$ mediante la serie de Fourier en su forma compleja:

$$\frac{f_L(t^+) + f_L(t^-)}{2} = vp \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}, \; t \in \mathbb{R}$$

con

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \underbrace{f_L(t)}_{\substack{f(t) \\ \text{pues } t\in(-L,L)}} e^{-\frac{in\pi t}{L}} dt, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

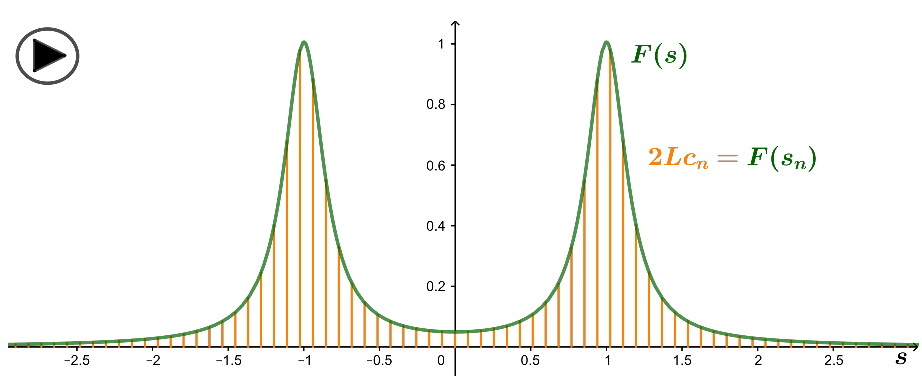
donde $f_L(t^+) = \lim\limits_{x\to t^+} f_L(x)$, $f_L(t^-) = \lim\limits_{x\to t^-} f_L(x)$. Reescribiendo la serie:

$$\frac{f_L(t^+) + f_L(t^-)}{2} = vp \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t) e^{-\frac{in\pi t}{L}} dt \right] e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

Llamamos $s_n = \dfrac{n}{2L}$ $\left(\dfrac{n}{L} = 2s_n\right)$, $F(s_n) = \displaystyle\int_{-L}^{L} f(t) e^{-i2\pi t s_n} dt$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

y $\Delta_{s_n} = s_{n+1} - s_n$. Resulta $\Delta_{s_n} = s_{n+1} - s_n = \dfrac{n+1}{2L} - \dfrac{n}{2L} = \dfrac{1}{2L}$ y reemplazando en la serie: $\dfrac{f_L(t^+) + f_L(t^-)}{2} = vp \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s_n) e^{i2\pi t s_n} \Delta_{s_n}$

Cliqueando en el gráfico siguiente, observamos que los coeficientes de Fourier de f_L se aproximan a una función $F(s)$ conforme $L \to \infty$ y $\Delta_{s_n} \to 0$.



Ignorando cuestiones de rigurosidad, si las integrales convergen, obtenemos

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{i2\pi ts}ds$$

llamada **representación de $f(t)$ mediante la integral de Fourier**, donde

$$F(s) = \mathscr{F}\{f(t)\} = vp\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi ts}dt$$

es la **transformada de Fourier de $f(t)$**. Además,

$$\mathscr{F}^{-1}\{F(s)\} = vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{i2\pi ts}ds$$

es la **transformada inversa de Fourier** de $F(s)$.

Las definiciones anteriores tienen sentido en general para funciones a valores complejos. En la sección siguiente estableceremos condiciones suficientes para que las integrales converjan.

Cabe destacar la importancia de la transformada de Fourier como herramienta potente en el análisis de funciones. En ingeniería es utilizada entre otras cosas para describir, analizar y diseñar señales y sistemas. En muchos casos la transformada revela aspectos de una señal que no siempre es posible apreciar en forma directa.

Llamaremos al dominio de $f(t)$ dominio del tiempo, al de $F(s)$ dominio de la frecuencia y $F(s)$ se conoce como el espectro complejo de frecuencia de $f(t)$. Las funciones reales $|F(s)|$ y $\operatorname{Arg} F(s)$ se denominan espectro de amplitud y de fase de $f(t)$, respectivamente.

6.2. Transformada e integral de Fourier

El siguiente teorema establece las condiciones suficientes para la existencia de la transformada e integral de Fourier.

Teorema 6.2.1. ***Condiciones suficientes (de Dirichlet) para la existencia***
Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ cumple las siguientes condiciones:

- *$f(t)$ y $f'(t)$ son seccionalmente continuas dentro de cualquier intervalo finito*
- *$f(t)$ es absolutamente integrable, es decir $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty$*

entonces, existe y es continua la transformada de Fourier de $f(t)$

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi ts}dt,\ \ s\in\mathbb{R}$$

y es posible la representación de $f(t)$ mediante su integral de Fourier

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{i2\pi ts}ds = \lim_{\mu\to\infty}\int_{-\mu}^{\mu} F(s)e^{i2\pi ts}ds$$

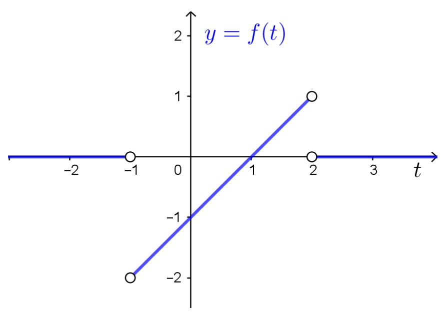
Observaciones

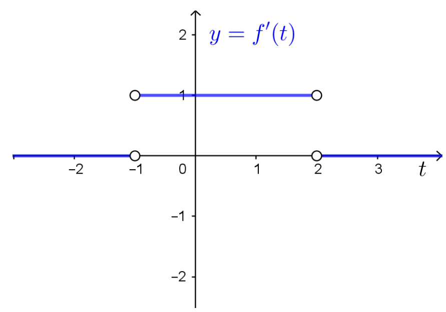
1. Las condiciones de Dirichlet son suficientes pero no necesarias, es decir, hay funciones que no las cumplen pero tienen transformada e integral de Fourier.

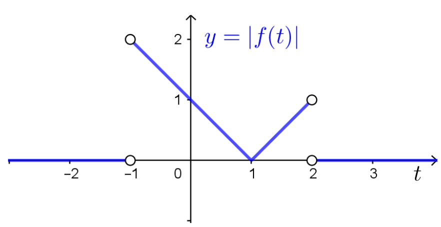
2. Mediante la sustitución $\omega = 2\pi s$ se obtienen formas equivalentes de las definiciones de transformada e integral de Fourier.

Ejemplo 6.2.2.

Sea $f(t) = \begin{cases} t-1, & -1 < t < 2 \\ 0, & t < -1 \quad \vee \quad t > 2 \end{cases}$, entonces $f'(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 2 \\ 0, & t < -1 \quad \vee \quad t > 2 \end{cases}$







$$|f(t)| = \begin{cases} -(t-1), & -1 < t < 1 \\ t-1, & 1 < t < 2 \\ 0, & t < -1 \quad \vee \quad t > 2 \end{cases}$$

La función $f(t)$ verifica las condiciones suficientes del teorema de existencia:

- $f(t)$ y $f'(t)$ son seccionalmente continuas dentro de cualquier intervalo finito de $\mathbb{R}$: ambas funciones tienen a lo sumo dos discontinuidades finitas en cualquier intervalo finito (f seccionalmente continua garantiza que podría considerarse con dominio $\mathbb{R}$).

- $f(t)$ es absolutamente integrable: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt = \int_{-1}^{1} (1-t)dt + \int_{1}^{2} (t-1)dt = \frac{5}{2} < \infty$

Calculamos la transformada de Fourier de $f(t)$:

$$F(s) = \mathscr{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi ts}dt = \int_{-1}^{2} (t-1)e^{-i2\pi ts}dt =$$

$$= e^{-i4\pi s}\left(\frac{i2\pi s + 1}{4\pi^2 s^2}\right) + e^{i2\pi s}\left(\frac{i4\pi s - 1}{4\pi^2 s^2}\right), \quad s \neq 0$$

La fórmula anterior no es válida para $s = 0$. Para hallar $F(0)$ podemos usar la continuidad de F y calcular $F(0) = \lim\limits_{s\to 0} F(s)$ o bien, más sencillo en este caso, usar la definición de la transformada:

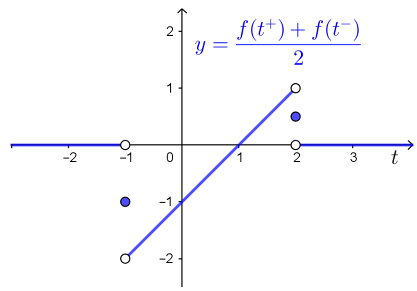
$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi t0}dt = \int_{-1}^{2} (t-1)dt = -\frac{3}{2}$$

La representación de $f(t)$ mediante su integral de Fourier:

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{i2\pi ts}ds$$

$$= vp\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-i4\pi s}\left(\frac{i2\pi s+1}{4\pi^2 s^2}\right)+e^{i2\pi s}\left(\frac{i4\pi s-1}{4\pi^2 s^2}\right)\right]e^{i2\pi ts}ds$$

La integral no depende del comportamiento de la función integrando en un solo punto donde es continua, por eso pudimos usar la expresión de $F(s)$ para $s \neq 0$.
Gráfica de la función a la cual converge la integral de Fourier de $f(t)$:



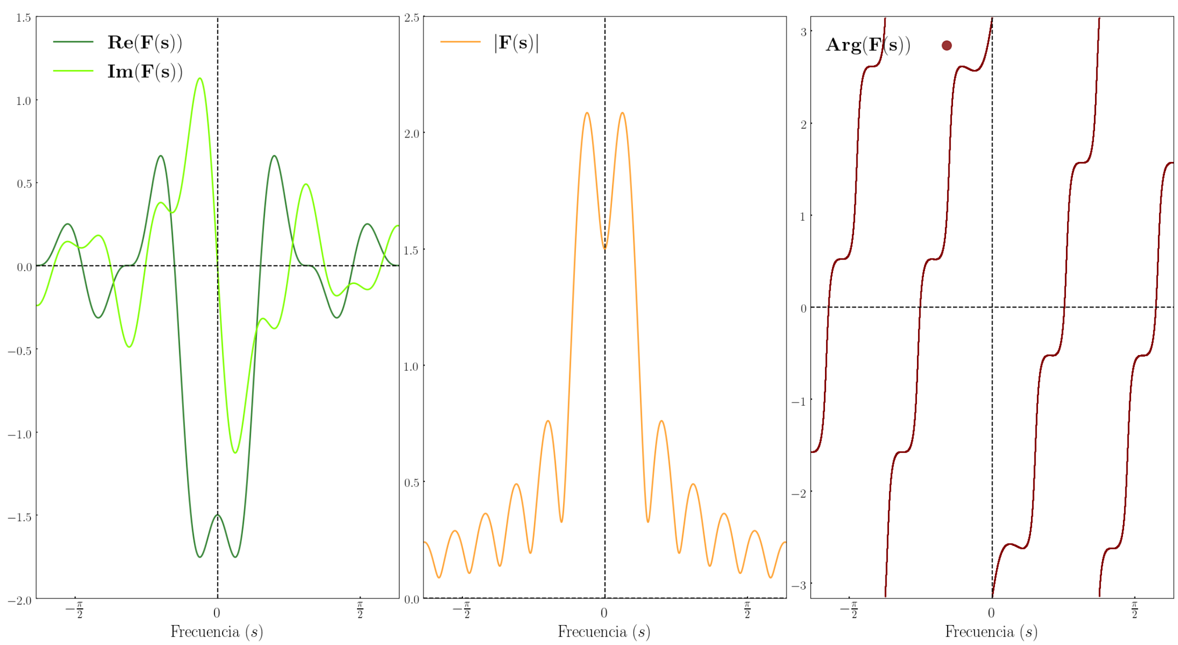
En los puntos donde $f(t)$ es continua, es decir, para todo t real tal que $t \neq -1$ y $t \neq 2$,

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = f(t)$$

y en los puntos de discontinuidad,

$$\frac{f(-1^+)+f(-1^-)}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1 \qquad \frac{f(2^+)+f(2^-)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

Gráficas de las partes real e imaginaria de $F(s)$ y de los espectros de amplitud y fase:



Actividad 6.2.3.

Para cada una de las funciones

$$a)\ f(t) = \begin{cases} 2, & -3 < t < -1 \\ t, & -1 < t < 1 \\ 0, & t < -3 \ \vee \ t > 1 \end{cases} \qquad b)\ f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$$

i) Grafique $f(t)$, $|f(t)|$ y $f'(t)$ donde exista. Verifique que $f(t)$ cumple las condiciones suficientes para la existencia de la transformada e integral de Fourier.

ii) Halle su transformada de Fourier aplicando la definición.

iii) Represente mediante su integral de Fourier y grafique la función a la cual converge la integral.

iv) Grafique las partes real e imaginaria de $F(s)$ y los espectros de amplitud y fase.

Actividad 6.2.4.

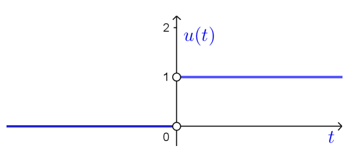
a) Determine una función f de manera que la siguiente integral sea su integral de Fourier:

$$vp \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{i2\pi ts} ds \quad \text{donde} \quad F(s) = \int_{-2}^{1} t^2 e^{-i2\pi ts} dt + \int_{1}^{5} 4e^{-i2\pi ts} dt$$

b) Grafique la función a la que converge dicha integral.

Función escalón unitario (o salto unidad o función de Heaviside)

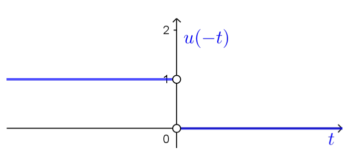
La función escalón unitario:



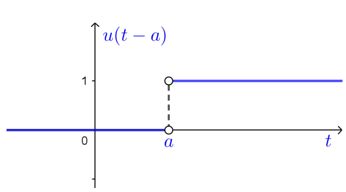
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

También se puede dar el valor 1 en $t = 0$.

Ilustramos algunos casos de composición con otras funciones:

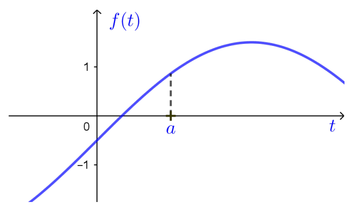


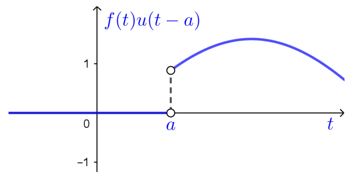
$$u(-t) = \begin{cases} 0, & -t < 0 \\ 1, & -t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ 1, & t < 0 \end{cases}$$



$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & t-a < 0 \\ 1, & t-a > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$$

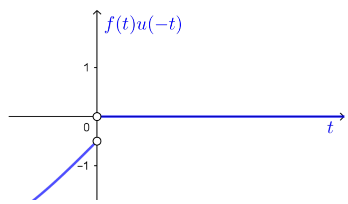
Multiplicar una función f por un escalón unitario puede "conectarla" o "desconectarla":





$f(t)$ "conectada" en $t > a$:

$$f(t)u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ f(t), & t > a \end{cases}$$



$f(t)$ "desconectada" en $t > 0$:

$$f(t)u(-t) = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ f(t), & t < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, la función $f(t) = u(t)e^{-t} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$ es la función e^{-t} "conectada" en $t > 0$ (revise el gráfico correspondiente que realizó en la actividad 6.2.3b).

Actividad 6.2.5.

Sea $f(t) = u(t)e^{-\alpha t}$ donde α es un número real, $\alpha > 0$

a) Demuestre que $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(s) = \dfrac{1}{\alpha + i2\pi s}$, $s \in \mathbb{R}$. Corrobore el resultado que obtuvo en la actividad 6.2.3b ($\alpha = 1$).

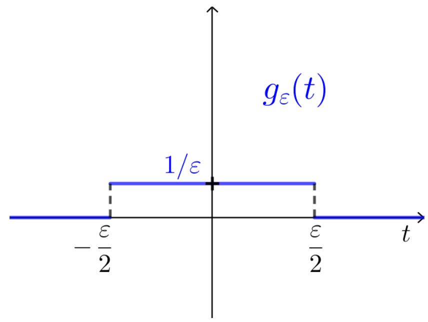
b) Represente $f(t)$ mediante su integral de Fourier.

Impulso unitario

Deseamos describir un evento que esté "conectado" en un entorno de $t = 0$ durante un tiempo corto con una magnitud muy grande. En principio, para $\varepsilon > 0$, definimos la función

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, & |t| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\[2ex] 0, & |t| > \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

que llamamos **impulso unitario finito** debido a que el área bajo su gráfica (y arriba del eje de las absisas) es 1.



Expresando el área con la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t)dt = 1$$

Cuando $\varepsilon \to 0$, $\dfrac{1}{\varepsilon} \to \infty$ y la función $g_\varepsilon(t)$ se aproxima a un “elemento”, notado $\delta(t)$, que se denomina **impulso unitario** o **delta de Dirac**.

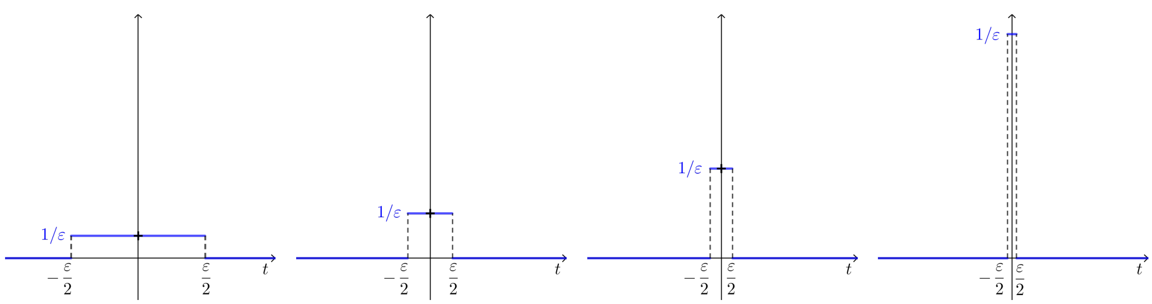


Figura 6.1: $g_\varepsilon(t)$ cuando $\varepsilon \to 0$

De manera intuitiva podríamos caracterizar $\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$. Evidentemente no se corresponde con una función ordinaria a valores reales.

Pretendemos que $\delta(t)$ “conserve” las dos propiedades de cada $g_\varepsilon(t)$, que se anula fuera de $\left[-\dfrac{\varepsilon}{2}, \dfrac{\varepsilon}{2}\right]$ y tiene área 1. Es decir, que cumpla las condiciones:

(i) $\delta(t) = 0$ para todo $t \neq 0$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$

Una función nula salvo en un punto tiene área 0 bajo su gráfica, por lo tanto, también observamos que $\delta(t)$ no es una función ordinaria; es una **función generalizada** o **distribución**. A continuación proporcionaremos, brevemente, nociones básicas acerca de la teoría de distribuciones.

Definición 6.2.6. ***Distribución.*** *Sea P un conjunto de funciones reales llamadas de prueba. Una distribución o función generalizada $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$ es una correspondencia que a cada función $\phi \in P$ le asigna un único número real que notamos $g(t)\{\phi\}$ ($g(t)$ es un funcional, función cuyo argumento es una función); es decir,*

$$\begin{aligned} g(t) : P &\to \mathbb{R} \\ \phi &\to g(t)\{\phi\} \end{aligned}$$

y dicho número verifica:

1) $g(t)\{a\phi_1 + b\phi_2\} = ag(t)\{\phi_1\} + bg(t)\{\phi_2\}$ *(linealidad)*

2) $g(t - t_0)\{\phi(t)\} = g(t)\{\phi(t + t_0)\}$ *(composición de la función ordinaria $t - t_0$ con la distribución g)*

3) $g(at)\{\phi\} = \dfrac{1}{|a|}g(t)\left\{\phi\left(\dfrac{t}{a}\right)\right\}$ *(composición de la función ordinaria at con la distribución g)*

4) Si f es una función tal que $f\phi \in P$ entonces $g(t)f(t)\{\phi\} = g(t)\{f\phi\}$ (producto de la función ordinaria f con la distribución g o producto de escalar con la distribución g si f es constante)

Si g_1 y g_2 son dos distribuciones definidas sobre P:

5) $g_1(t) = g_2(t)$ *cuando* $g_1(t)\{\phi\} = g_2(t)\{\phi\}$ para todo $\phi \in \mathrm{P}$ *(igualdad de distribuciones)*

6) $[g_1(t) + g_2(t)]\{\phi\} = g_1(t)\{\phi\} + g_2(t)\{\phi\}$ *(suma de distribuciones)*

Función ordinaria como distribución
Si P es un conjunto apropiado de funciones de prueba y f es una función tal que para toda $\phi \in P$ la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)dt$ existe, f define una distribución:

$$f(t)\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)dt$$

En efecto, a partir de las propiedades de la integración es inmediato que los requisitos *1-6* se verifican y, que si dos funciones difieren en un conjunto finito de puntos, las llamamos **casi iguales**, definen la misma distribución.
El conjunto P debe ser suficientemente amplio para contener funciones ϕ tales que cuando consideramos las funciones $f_1(t) \neq f_2(t)$ que no son casi iguales, exista alguna $\phi \in P$ tal que $f_1(t)\{\phi\} \neq f_2(t)\{\phi\}$; es decir, que también sean distintas como distribuciones.

Ejemplo 6.2.7.

a) Sea P el conjunto de las funciones continuas que son nulas fuera de algún intervalo acotado. La función escalón unitario $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$ define una distribución:

$$u(t)\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\phi(t)dt = \int_{0}^{\infty} \phi(t)dt \quad \text{para todo} \quad \phi \in \mathrm{P}$$

b) Sea P el conjunto de las funciones continuas. La función $g_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, & |t| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0, & |t| > \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$ define una distribución:

$$g_\varepsilon(t)\,\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t)\phi(t)dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \phi(t)dt \;\; \text{para todo} \;\; \phi \in \mathrm{P}$$

A partir de la definición de distribuciones quedan establecidas algunas operaciones, claramente, compatibles con las de la integración de funciones ordinarias. Por esto, y en principio a modo de notación, para expresar cómo actúa una distribución $g(t)$ aplicada a una función $\phi \in P$, escribimos

$$g(t)\,\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t)dt$$

Ejemplo 6.2.8.

Sea P el conjunto de las funciones continuas, definimos la distribución delta de Dirac:

$$\delta(t)\,\{\phi\} = \phi(0) \;\; \text{para todo} \;\; \phi \in \mathrm{P}$$

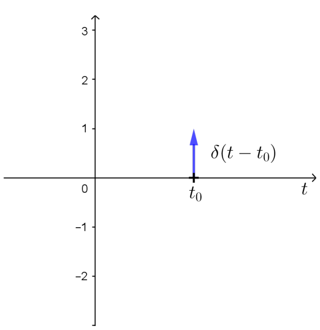
con la imposición de que se verifiquen los requisitos *1-4* de la definición de distribuciones.

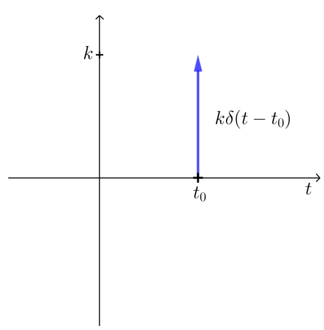
Con la notación de integral: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0)$ para todo $\phi \in \mathrm{P}$

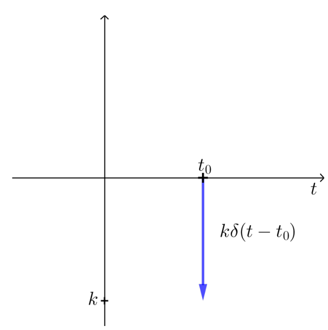
En particular

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$ (la famosa condición (ii)).
  Se obtiene considerando la función constante $\phi(t) = 1$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\phi(t)dt = \phi(t_0)$ (se conoce como propiedad de filtrado o separación, veremos más adelante que vale para cualquier otro intervalo de integración que contenga al número t_0).
  En efecto, $\delta(t-t_0)\,\{\phi(t)\} \underbrace{=}_{\text{requisito } 2)} \delta(t)\,\{\phi(t+t_0)\} = \phi(0+t_0) = \phi(t_0)$

$\delta(t-t_0)$ y $k\delta(t-t_0)$ con $k>0$ o $k<0$ se representan como en la figuras siguientes:







Actividad 6.2.9.

Pruebe que si $f(t)$ es una función ordinaria continua se verifica la igualdad de distribuciones: $\delta(t-t_0)f(t) = \delta(t-t_0)f(t_0)$

Distribución como función ordinaria

Sea $f(t)$ una función ordinaria definida en (a,b) y $g(t)$ una distribución definida en P. Si para toda $\phi \in P$ que se anula fuera de (a,b) se verifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)\phi(t)dt$$

diremos que $g(t) = f(t)$ en (a,b); es decir, podemos considerar la distribución como la función ordinaria en ese intervalo.

Ejemplo 6.2.10.

$\delta(t) = 0$ como función ordinaria en todos los intervalos de la forma $(-\infty, b)$ con $b < 0$ y (a, ∞) con $a > 0$ (la famosa condición (i)).

Para probarlo, consideremos $f(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$ y P el conjunto de las funciones continuas. Sea $\phi \in P$ tal que $\phi(t) = 0$ fuera de $(-\infty, b)$ con $b < 0$, entonces $\phi(0) = 0$.

- Por la definición de $\delta(t)$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0) = 0$
- Por ser $f(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\phi(t)dt = 0$

Po lo tanto, $\delta(t) = 0$ en $(-\infty, b)$ para todo $b < 0$. Análogamente se prueba que $\delta(t) = 0$ en (a, ∞) para todo $a > 0$.

Derivada de una distribución

Consideremos P tal que si $\phi \in P$ entonces $\phi' \in P$.
Sea $g(t)$ una distribución en P, se define la distribución derivada $g'(t)$ en P:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(t)\phi(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi'(t)dt$$

Si las $\phi(t)$ se anulan fuera de intervalos acotados, la definición de derivada de una distribución es consistente con la integración por partes de funciones ordinarias.

Ejemplo 6.2.11.

La derivada de $u(t)$ como distribución es $u'(t) = \delta(t)$.
En efecto, sea $\phi \in P$ el conjunto de las funciones continuas que son nulas fuera de algún intervalo acotado,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'(t)\phi(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\phi'(t)dt = -\int_{0}^{\infty} \phi'(t)dt = -\lim_{b\to\infty} [\phi(b) - \phi(0)] = \phi(0)$$

que coincide con $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0)$

Propiedades

a) Si $g_1(t)$ y $g_2(t)$ son distribuciones entonces $[g_1(t) + g_2(t)]' = g_1'(t) + g_2'(t)$.

b) Si $g(t)$ es una distribución y $f(t)$ es una función ordinaria adecuada entonces $[f(t)g(t)]' = f'(t)g(t)+f(t)g'(t)$. En particular, si f es constante se obtiene el resultado de multiplicar por un escalar.

Actividad 6.2.12.

a) Pruebe las propiedades anteriores.

b) Pruebe que $\left[e^{-t}u(t)\right]' = -e^{-t}u(t) + \delta(t)$
Ayuda: use el resultado de la actividad 6.2.9.

Convergencia de sucesiones
Decimos que la sucesión de distribuciones $g_n(t)$ converge a la distribución $g(t)$ y notamos $g_n(t) \to g(t)$, si $g_n(t)\{\phi\} \to g(t)\{\phi\}$ para toda $\phi \in P$ conjunto de prueba.

Volviendo al punto de partida, concluimos que en el sentido de las distribuciones:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(t) = \delta(t)$$

En efecto:
Sea ϕ continua, por el teorema del valor medio del cálculo integral, existe $\xi \in \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ tal que

$$g_\varepsilon(t)\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t)\phi(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \phi(t)dt = \frac{1}{\varepsilon}\, \varepsilon\, \phi(\xi) = \phi(\xi)$$

También por ser ϕ continua,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(t)\{\phi\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \phi(\xi) = \phi(0) = \delta(t)\{\phi\}$$

Además, para cualquier intervalo (a, b) que contenga a 0, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon > \varepsilon_0$,

$$\int_a^b g_\varepsilon(t)\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t)\phi(t) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \delta(t)\{\phi\} = \phi(0)$$

lo que deviene en la posibilidad de considerar

$$\int_a^b \delta(t)\phi(t) = \phi(0)$$

Y, como habíamos adelantado, será válida la propiedad de separación en general, sobre estos tipos de intervalos.

La teoría de distribuciones es extensa, nos hemos restringido a los conceptos necesarios para el desarrollo de este capítulo. El lector que quiera profundizar puede consultar [8]. Agregaremos solamente, vinculando con el tema que estábamos tratando, el concepto de transformada de Fourier de una distribución.

Transformada de Fourier de una distribución
Consideremos P tal que para toda $\phi \in P$ existe su transformada de Fourier y $\mathscr{F}\{\phi\} \in P$. Sea $g(t)$ una distribución en P, se define $\mathscr{F}\{g(t)\}$:

$$\mathscr{F}\{g(t)\}\{\phi\} = g(t)\{\mathscr{F}\{\phi\}\}, \quad \text{para todo } \; \phi \in \mathrm{P}$$

Ejemplo 6.2.13.

Consideremos $\delta(t-a)$ definida en el conjunto P, formado por funciones con derivadas de cualquier orden para cada una de las cuales existe una constante c_{pq}, tal que $\left|t^p f^{(q)}\right| < c_{pq}$ (se verifica que $\phi \in P \Leftrightarrow \mathscr{F}\{\phi\} \in P$). Sea $\phi \in P$:

Primero calculamos

$$\Phi(s) = \mathscr{F}\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-i2\pi ts} dt$$

entonces

$$\Phi(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-i2\pi tt_0} dt = e^{-i2\pi tt_0}\{\phi\}$$

donde pensamos $e^{-i2\pi tt_0}$ como distribución.

Por otra parte, usando la definición de transformada de una distribución y seguidamente la definición de $\delta(t-t_0)$:

$$\mathscr{F}\{\delta(t-t_0)\}\{\phi\} = \delta(t-t_0)\{\mathscr{F}\{\phi\}\} = \Phi(t_0)$$

Por lo tanto

$$\mathscr{F}\{\delta(t-t_0)\}\{\phi\} = e^{-i2\pi tt_0}\{\phi\}, \quad \text{para todo } \; \phi \in \mathrm{P}$$

y concluimos en la igualdad de distribuciones:

$$\mathscr{F}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-i2\pi tt_0}$$

Teniendo en cuenta que llamamos s a la variable en el dominio de la transformada, escribimos

$$\mathscr{F}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-i2\pi st_0}$$

Recordemos que nos referíamos a una integral como notación para definir distribuciones, observemos que, en la práctica, funcionan como integrales. Calculemos ahora la transformada de Fourier usando esa estrategia: la función $e^{-i2\pi ts}$ es continua, entonces

$$\mathscr{F}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-i2\pi ts} dt = \left. e^{-i2\pi ts}\right|_{t=t_0} = e^{-i2\pi t_0 s}$$

Actividad 6.2.14.

Muestre que $\mathscr{F}\{\delta(t)\} = 1$ (la transformada de Fourier del impulso unitario consiste de contribuciones iguales en todas las frecuencias). □

6.3. Propiedades de la transformada de Fourier

Calcular la transformada de Fourier usando la definición no siempre es sencillo, depende de la dificultad de resolver una integral impropia. Las siguientes propiedades son de gran utilidad. Válidas también para las funciones generalizadas (demostraciones para funciones ordinarias).

1) **Linealidad:** Si $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathscr{F}\{g(t)\} = G(s)$ y a, b son números complejos, entonces
$$\mathscr{F}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

2) **Similaridad:** Si $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(s)$ y a es un número real no nulo, entonces
$$\mathscr{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

3) **Traslación en el tiempo:** Si $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(s)$ y a es un número real, entonces
$$\mathscr{F}\{f(t-a)\} = F(s)e^{-i2\pi sa}$$

4) **Traslación en el dominio de la frecuencia:** Si $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(s)$ y a es un número real, entonces
$$\mathscr{F}\left\{f(t)e^{i2\pi ta}\right\} = F(s-a)$$

5) **Simetría:** Si $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(s)$ entonces $\mathscr{F}\{F(-t)\} = f(s)$
o equivalentemente $\mathscr{F}\{F(t)\} = f(-s)$

Observación Si se conoce la transformada $F(s)$ de una función $f(t)$, las propiedades 1-4 posibilitan deducir las transformadas de otras funciones relacionadas con $f(t)$; en cambio, la propiedad 5, las de funciones relacionadas con $F(t)$.

Demostración de la propiedad 2 (para funciones ordinarias)
Si $a > 0$, en la integral de la definición de la transformada de Fourier hacemos la sustitución $u = at,\ du = a\,dt,\ -\infty < u < \infty$:

$$\mathscr{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i2\pi ts}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i2\pi\frac{u}{a}s}\,\frac{1}{a}du = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i2\pi u\frac{s}{a}}du = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Si $a < 0$, hacemos la sustitución $u = at,\ du = a\,dt,\ -\infty < -u < \infty$:

$$\mathscr{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i2\pi ts}dt = \int_{\infty}^{-\infty} f(u)e^{-i2\pi\frac{u}{a}s}\,\frac{1}{a}du = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i2\pi u\frac{s}{a}}du = \frac{1}{-a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Usando la definición de valor absoluto, $|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$, resulta

$$\mathscr{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a \neq 0$$

■

Actividad 6.3.1.

a) Demuestre las propiedades 1,3 y 4 para funciones ordinarias.

b) Si $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(s)$ entonces

$$\mathscr{F}\{F(-t)\} = f(s) \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{F}\{F(t)\} = f(-s)$$

Demuestre (para funciones ordinarias) usando la propiedad de similaridad.

Ejemplo 6.3.2.

Consideremos $f(t)$ y su transformada $F(s)$ del ejemplo 6.2.2. Calculemos

a)

$$\mathscr{F}\{-2f(t)\} = -2F(s) = -2\left[e^{-i4\pi s}\left(\frac{i2\pi s+1}{4\pi^2 s^2}\right) + e^{i2\pi s}\left(\frac{i4\pi s-1}{4\pi^2 s^2}\right)\right],\ s \neq 0$$

por propiedad de linealidad con $a = -2$. Se extiende por la continuidad de F a $s = 0$.

b)

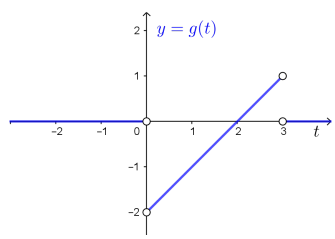
$$\mathscr{F}\{f(-2t)\} = \frac{1}{|-2|}F\left(\frac{s}{-2}\right) = \frac{1}{2}\left[e^{-i4\pi\frac{s}{-2}}\left(\frac{i2\pi\frac{s}{-2}+1}{4\pi^2\left(\frac{s}{-2}\right)^2}\right) + e^{i2\pi\frac{s}{-2}}\left(\frac{i4\pi\frac{s}{-2}-1}{4\pi^2\left(\frac{s}{-2}\right)^2}\right)\right]$$

para $s \neq 0$, por propiedad de similaridad con $a = -2$. Se extiende por continuidad.

Ejemplo 6.3.3.

Sea $g(t) = \begin{cases} t-2, & 0 < t < 3 \\ 0, & t < 0 \ \vee \ t > 3 \end{cases}$

$g(t) = f(t-1)$, f del ejemplo 6.2.2



Podemos calcular la transformada de Fourier de $g(t)$ sin resolver la integral de la definición. Por la propiedad de traslación en el tiempo aplicada para $a = 1$,

$$\mathscr{F}\{g(t)\} = \mathscr{F}\{f(t-1)\} = F(s)e^{-i2\pi s} = \left[e^{-i4\pi s}\left(\frac{i2\pi s+1}{4\pi^2 s^2}\right) + e^{i2\pi s}\left(\frac{i4\pi s-1}{4\pi^2 s^2}\right)\right]e^{-i2\pi s}$$

para $s \neq 0$. Se extiende por la continuidad de F a $s = 0$.

Ejemplo 6.3.4.

Sea $g(t) = \dfrac{3}{4+i8\pi t}$

De la actividad 6.2.3b, la transformada de Fourier de $f(t) = u(t)e^{-t}$ es $F(s) = \dfrac{1}{1+i2\pi s}$. Podemos escribir

$$g(t) = \frac{3}{4+i8\pi t} = \frac{3}{4}\,\frac{1}{1+i2\pi t} = \frac{3}{4}F(t)$$

Entonces usando las propiedades de linealidad y simetría:

$$G(s) = \mathscr{F}\{g(t)\} = \mathscr{F}\left\{\frac{3}{4}F(t)\right\} = \frac{3}{4}\mathscr{F}\{F(t)\} = \frac{3}{4}f(-s) = \frac{3}{4}u(-s)e^{s}$$

La función $G(s)$ no es continua en $s = 0$, pero esto no contradice el teorema de existencia ya que $g(t)$ no es absolutamente integrable. En efecto:

$$|4 + i8\pi t| \leq |4| + |i8\pi t| = 4 + |8\pi t| \quad \Leftrightarrow \quad |g(t)| = \left|\frac{3}{4 + i8\pi t}\right| \geq \frac{3}{4 + |8\pi t|}$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{3}{4 + |8\pi t|} dt = \lim_{A\to\infty} \int_{1}^{A} \frac{3}{4 + 8\pi t} dt = \lim_{A\to\infty} \frac{3}{8\pi}\left[\ln(4 + 8\pi A) - \ln(4 + 8\pi)\right] = \infty$$

Luego diverge $\displaystyle\int_{1}^{\infty} |g(t)|\, dt$ y asimismo $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt$.

Actividad 6.3.5.

Calcule usando propiedades considerando $\alpha > 0$:

a) $\mathscr{F}\left\{u(-t)e^{\alpha t}\right\}$

b) $\mathscr{F}\left\{e^{-\alpha|t|}\right\}$ (puede considerar que $e^{-\alpha|t|} = u(-t)e^{\alpha t} + u(t)e^{-\alpha t}$)

c) $\mathscr{F}\left\{\dfrac{1}{\alpha + i2\pi t}\right\}$ $\quad \mathscr{F}\left\{\dfrac{1}{\alpha - i2\pi t}\right\}$ $\quad \mathscr{F}\left\{\dfrac{1}{\alpha^2 + 4\pi^2 t^2}\right\}$

Actividad 6.3.6.

Calcule $\mathscr{F}\left\{\dfrac{e^{i6\pi t}}{4 + i2\pi t} + \dfrac{3}{12 - i4\pi(t + 7)}\right\}$ usando transformadas conocidas y propiedades.

Actividad 6.3.7.

Calcule usando transformadas conocidas y propiedades.

a) $\mathscr{F}\left\{e^{i2\pi a t}\right\}, \quad a \in \mathbb{R}$ $\qquad$ b) $\mathscr{F}\{\operatorname{sen}(2\pi a t)\}$ $\qquad$ c) $\mathscr{F}\{1 + 3\,\delta(t + 2)\}$

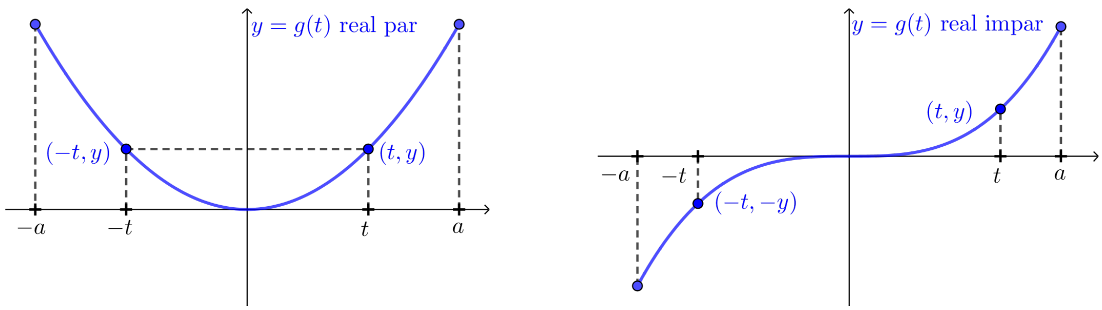
6.4. Integral de Fourier de funciones pares o impares

Recordemos las definiciones y algunas propiedades de las funciones pares o impares.

Si $g(t)$ tiene por dominio un subconjunto de $\mathbb{R}$ simétrico con respecto al origen (ejemplos: $(-a, a)$, $[-a, a]$ con $a > 0$; el mismo $\mathbb{R}$) y toma valores reales, se dice que

- $g(t)$ es par si $g(-t) = g(t)$ para todo t del dominio de g.
- $g(t)$ es impar si $g(-t) = -g(t)$ para todo t del dominio de g.

Para una función a valores reales: si es par, su gráfica resulta simétrica con respecto al eje y; si es impar, su gráfica resulta simétrica con respecto al origen de coordenadas.



En el caso de que $g(t)$ tome valores complejos:

- $g(t)$ es par si y solo si sus partes real e imaginaria son pares.
- $g(t)$ es impar si y solo si sus partes real e imaginaria son impares.

Usando las definiciones se pueden demostrar inmediatamente las propiedades.
Propiedades

- El producto de dos funciones pares o de dos funciones impares es una función par.
- El producto de una función par y una impar es una función impar.
- Si una función es par o impar entonces su módulo es una función par.
- Si una función es par entonces su derivada es impar, si la función es impar entonces su derivada es par.

Las siguientes, enuncian resultados de integrar funciones pares o impares sobre intervalos simétricos con respecto al origen.

- La función $g(t)$ es par entonces para $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} g(t)dt = 2\int_{0}^{a} g(t)dt$
  y si $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt$ converge, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 2\int_{0}^{\infty} g(t)dt$
- La función $g(t)$ es impar entonces para $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} g(t)dt = 0$
  y si $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt$ converge, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 0$

Los resultados para las integrales impropias son válidos también para los valores principales.

Formas de la transformada e integral de Fourier de funciones pares
Sea $f(t)$ una función que satisface las hipótesis del teorema de existencia de la transformada e integral de Fourier.

Si $f(t)$ es una función par entonces

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = F(s) = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\left[\cos(2\pi ts)\right] dt \quad \text{(es par)}$$

$$\frac{f(t^{+}) + f(t^{-})}{2} = 2\int_{0}^{\infty} F(s)\left[\cos(2\pi ts)\right] ds$$

En efecto:

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi ts}dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\cos(2\pi ts)-i\operatorname{sen}(2\pi ts)\right]dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t)}_{\text{par}}\underbrace{[\cos(2\pi ts)]}_{\text{par}}dt-i\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t)}_{\text{par}}\underbrace{[\operatorname{sen}(2\pi ts)]}_{\text{impar}}dt=$$

$$=2\int_{0}^{\infty} f(t)\left[\cos(2\pi ts)\right]dt$$

Evaluando F en $-s$ y teniendo en cuenta que $\cos(2\pi ts)$ es una función par, obtenemos

$$F(-s)=2\int_{0}^{\infty} f(t)\left[\cos(2\pi t(-s))\right]dt=2\int_{0}^{\infty} f(t)\left[\cos(2\pi ts)\right]dt=F(s)$$

Luego $F(s)$ es una función par. Además, si f es real y par entonces F(s) es real y par.

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{i2\pi ts}ds=vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\left[\cos(2\pi ts)+i\operatorname{sen}(2\pi ts)\right]ds=$$

$$=vp\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{F(s)}_{\text{par}}\underbrace{[\cos(2\pi ts)]}_{\text{par}}ds+i\ vp\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{F(s)}_{\text{par}}\underbrace{[\operatorname{sen}(2\pi ts)]}_{\text{impar}}ds=$$

$$=2\int_{0}^{\infty} F(s)\left[\cos(2\pi ts)\right]ds$$

Formas de la transformada e integral de Fourier de funciones impares
Sea $f(t)$ una función que satisface las hipótesis del teorema de existencia de la transformada e integral de Fourier.

Si $f(t)$ es una función impar entonces

$$\mathscr{F}\left\{f(t)\right\}=F(s)=-2i\int_{0}^{\infty} f(t)\left[\operatorname{sen}(2\pi ts)\right]dt \quad \text{(es impar)}$$

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=2i\int_{0}^{\infty} F(s)\left[\operatorname{sen}(2\pi ts)\right]ds$$

Podemos observar que si f es real e impar, F(s) es imaginaria pura e impar.

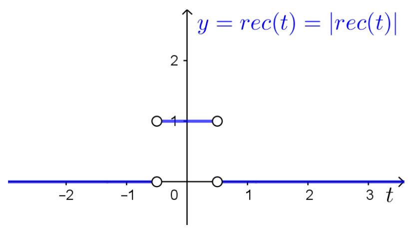
Actividad 6.4.1.

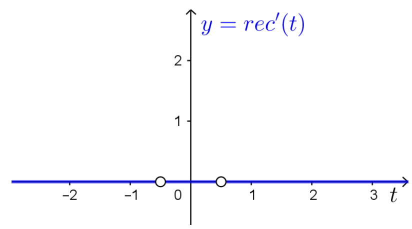
Demuestre las formas de la transformada y la integral de Fourier para funciones impares (operando análogamente al caso de la función par).

Ejemplo 6.4.2.

La función rectangular $rec(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$ (g_ε definida anteriormente con $\varepsilon = 1$) es muy usada para introducir ventanas de tiempo; esto es, si la multiplicamos por una función f, limitamos f al intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$$|rec(t)| = rec(t) \text{ pues } rec(t) \geq 0 \qquad\qquad rec'(t) = \begin{cases} 0, & |t| < \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$





La función $rec(t)$ es par porque cumple que $rec(-t) = rec(t)$ para todo t de su dominio, también en la gráfica se puede apreciar que es simétrica con respecto al eje y.

La función $rec(t)$ verifica las condiciones del teorema de existencia:

- $rec(t)$ y $rec'(t)$ son seccionalmente continuas dentro de cualquier intervalo finito de $\mathbb{R}$: ambas funciones tienen a lo sumo dos discontinuidades finitas en cualquier intervalo finito.

- $rec(t)$ es absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |rec(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} rec(t) dt \underbrace{=}_{rec(t)\ \text{par}} 2 \int_0^{\frac{1}{2}} 1\ dt = 1 < \infty$$

Calculamos la transformada de Fourier de $rec(t)$ función par:

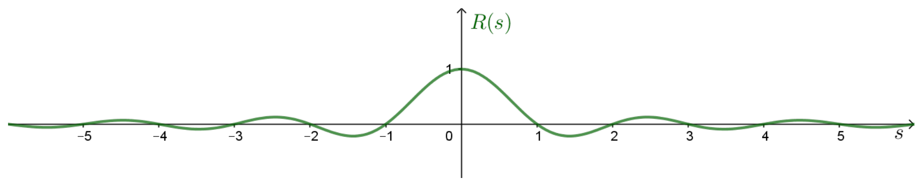
$$R(s) = \mathscr{F}\left\{rec(t)\right\} = 2 \int_0^{\infty} rec(t) \left[\cos(2\pi ts)\right] dt =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} 1\ \left[\cos(2\pi ts)\right] dt = 2\ \frac{\operatorname{sen}(2\pi ts)}{2\pi s}\Bigg]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s},\ s \neq 0$$

Por la continuidad de R, calculamos

$$R(0) = \lim_{s \to 0} F(s) = \lim_{s \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s} = 1$$

Como $R(s)$ es real y par, toda la información estará en un solo gráfico, la mayor parte de la información concerniente a la forma de $rec(t)$ está contenida en un intervalo bastante pequeño del eje de frecuencias alrededor de $s = 0$:

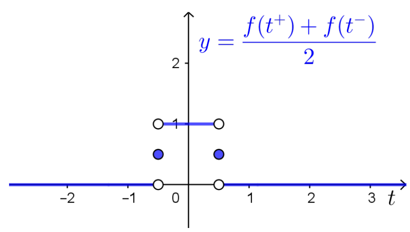


La representación de $rec(t)$ mediante su integral de Fourier para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{rec(t^+) + rec(t^-)}{2} = 2\int_0^\infty R(s)\left[\cos(2\pi t s)\right] ds =$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s}\cos(2\pi t s) ds$$

Gráfica de la función a la cual converge la integral de Fourier de $rec(t)$:



Donde $rec(t)$ es continua, es decir, para todo t real tal que $t \neq -\dfrac{1}{2}$, $t \neq \dfrac{1}{2}$,

$$\frac{rec(t^+) + rec(t^-)}{2} = rec(t)$$

y en los puntos de discontinuidad,

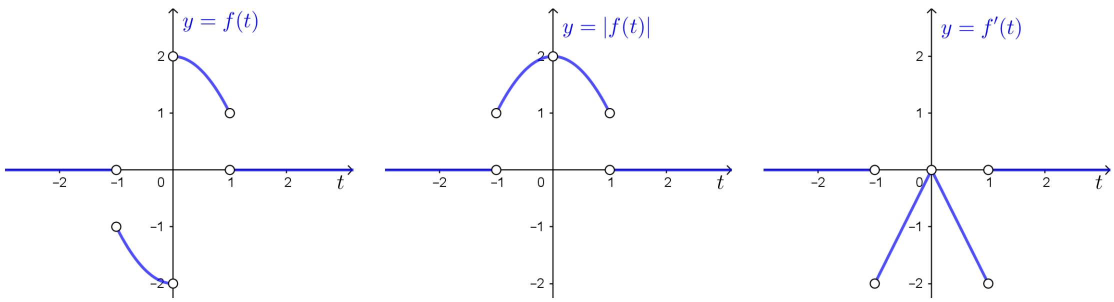
$$\frac{rec\left(-\frac{1}{2}^+\right) + rec\left(-\frac{1}{2}^-\right)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}\,, \qquad \frac{rec\left(\frac{1}{2}^+\right) + rec\left(\frac{1}{2}^-\right)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 6.4.3.

Sea $f(t) = \begin{cases} -t^2 + 2, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$, $\quad f(-t) = -f(t)$. Usando el hecho de que la función es impar, podemos disponer de las fórmulas y las gráficas de $f(t)$, $f'(t)$ y $|f(t)|$ para todo t real:

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 2, & 0 < t < 1 \\ -\left[-(-t)^2 + 2\right], & -1 < t < 0 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases} = \begin{cases} -t^2 + 2, & 0 < t < 1 \\ t^2 - 2, & -1 < t < 0 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

$$f'(t) = \begin{cases} -2t, & 0 < t < 1 \\ 2t, & -1 < t < 0 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases} \qquad |f(t)| = \begin{cases} -t^2 + 2, & 0 < t < 1 \\ -\left[t^2 - 2\right], & -1 < t < 0 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$



Observación importante. Como la función es impar podemos obviar la búsqueda de las fórmulas y gráficas de $|f(t)|$ y $f'(t)$ para $t<0$. En efecto: si $f(t)$ impar, $|f(t)|$ y $f'(t)$ son pares, entonces es posible analizar para los valores $t \geq 0$ y sacar conclusiones para todo $t \in \mathbb{R}$ usando las simetrías de la gráficas. Análogamente, en el caso de una función par.

La función $f(t)$ verifica las condiciones del teorema de existencia.

- $f(t)$ y $f'(t)$ son seccionalmente continuas dentro de cualquier intervalo finito de $\mathbb{R}$: ambas funciones tienen a lo sumo tres discontinuidades finitas en cualquier intervalo finito.
- $f(t)$ es absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt \underbrace{=}_{|f(t)| \text{ par}} 2\int_0^1 (-t^2+2)dt = \frac{10}{3} < \infty$$

Calculamos la transformada de Fourier de $f(t)$:

$$F(s) = \mathscr{F}\{f(t)\} = -2i\int_0^{\infty} f(t)\,[\operatorname{sen}(2\pi ts)]\,dt =$$

$$= -2i\int_0^1 (-t^2+2)\,[\operatorname{sen}(2\pi ts)]\,dt =$$

$$= -2i\,\frac{4\pi^2 s^2 - 2\pi^2 s^2\cos(2\pi s) - 2\pi s\operatorname{sen}(2\pi s) - \cos(2\pi s) + 1}{4\pi^3 s^3}$$

Como $F(s)$ es real e impar, toda la información estará en un solo gráfico. Proponemos al lector su realización.

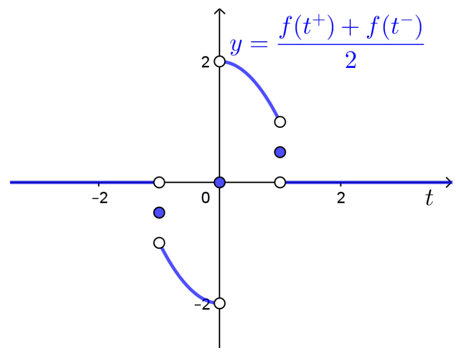
La representación de $f(t)$ mediante su integral de Fourier para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = 2i\int_0^{\infty} F(s)\,[\operatorname{sen}(2\pi ts)]\,ds =$$

$$= 2i\int_0^{\infty}\left[-2i\,\frac{4\pi^2 s^2 - 2\pi^2 s^2\cos(2\pi s) - 2\pi s\operatorname{sen}(2\pi s) - \cos(2\pi s) + 1}{4\pi^3 s^3}\right][\operatorname{sen}(2\pi ts)]\,ds =$$

$$= \int_0^{\infty}\left[\frac{4\pi^2 s^2 - 2\pi^2 s^2\cos(2\pi s) - 2\pi s\operatorname{sen}(2\pi s) - \cos(2\pi s) + 1}{\pi^3 s^3}\right][\operatorname{sen}(2\pi ts)]\,ds$$

Gráfica de la función a la cual converge la integral de Fourier de $f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$:



Donde $f(t)$ es continua, es decir, para todo t real tal que $t \neq -1,\ t \neq 0,\ t \neq 1$,

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = f(t)$$

y en los puntos de discontinuidad,

$$\frac{f(-1^+)+f(-1^-)}{2} = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2} \qquad \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \frac{2+(-2)}{2} = 0$$

$$\frac{f(1^+)+f(1^-)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 6.4.4.

Sea $g(t) = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi t)}{4\pi t} - 8f(t)e^{i6\pi t}$, $f(t)$ es la función del ejemplo 6.4.3 . Calculemos $\mathscr{F}\{g(t)\}$:

Podemos escribir

$$g(t) = \frac{1}{4}\frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi t} - 8f(t)e^{i2\pi t3} = \frac{1}{4}R(t) - 8f(t)e^{i2\pi t3}$$

donde $R(s)$ es la transformada de Fourier de la función $rec(t)$ del ejemplo 6.4.2.

Entonces usando las propiedades de linealidad, simetría y traslación en el dominio de la transformada para $a = 3$:

$$\mathscr{F}\{g(t)\} = \mathscr{F}\left\{\frac{1}{4}R(t) - 8f(t)e^{i2\pi t3}\right\} = \frac{1}{4}\mathscr{F}\{R(t)\} - 8\mathscr{F}\left\{f(t)e^{i2\pi t3}\right\} =$$
$$= \frac{1}{4}rec(-s) - 8F(s-3) \quad \text{donde}$$

$$rec(-s) = \begin{cases} 1, & |-s| < \frac{1}{2} \\ 0, & |-s| > \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 1, & |s| < \frac{1}{2} \\ 0, & |s| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$F(s-3) = -\,i\,\frac{4\pi^2(s-3)^2 - 2\pi^2(s-3)^2\cos[2\pi(s-3)]}{2\pi^3(s-3)^3} +$$
$$+\,i\,\frac{2\pi(s-3)\operatorname{sen}[2\pi(s-3)] + \cos[2\pi(s-3)] - 1}{2\pi^3(s-3)^3}$$

Actividad 6.4.5.

Para cada una de las funciones

a) $f(t) = \begin{cases} t^2, & |t| < 2 \\ 0, & |t| > 2 \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} c, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$, $\quad f(-t) = f(t)$

c) $f(t) = \begin{cases} c, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$, $\quad f(-t) = -f(t)$

d) $f(t) = \begin{cases} t+1, & 0 < t < 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases}$, $\quad f(-t) = f(t)$

e) $f(t) = \begin{cases} t+1, & 0 < t < 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases}$, $\quad f(-t) = -f(t)$

i) Verifique que cumple las condiciones suficientes para la existencia de la transformada e integral de Fourier.

ii) Halle su transformada de Fourier aplicando la forma para funciones pares o impares.

iii) Represente mediante su integral de Fourier de senos o cosenos y grafique la función a la cual converge dicha integral.

Actividad 6.4.6.

Grafique la función a la cual converge la integral:

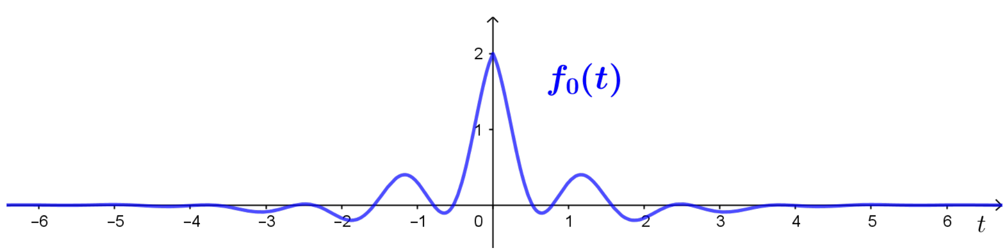
a) $\displaystyle\int_0^{\infty} G(s)\cos(2\pi ts)\,ds \quad \text{donde} \quad G(s) = \int_1^2 t^2\cos(2\pi ts)\,dt$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} G(s)\,\mathrm{sen}(2\pi ts)\,ds \quad \text{donde} \quad G(s) = \int_1^2 t^2\,\mathrm{sen}(2\pi ts)\,dt$ □

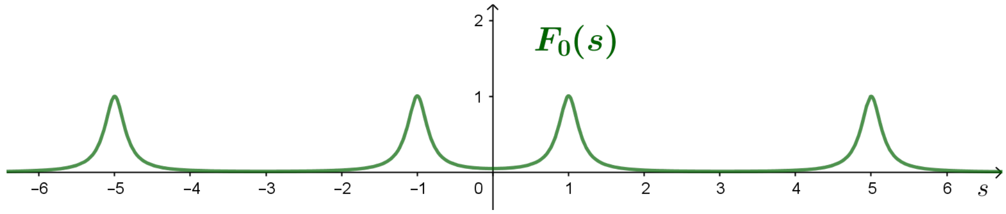
En el siguiente ejemplo daremos una interpretación de los espectros de señales muy sencillas.

Ejemplo 6.4.7.

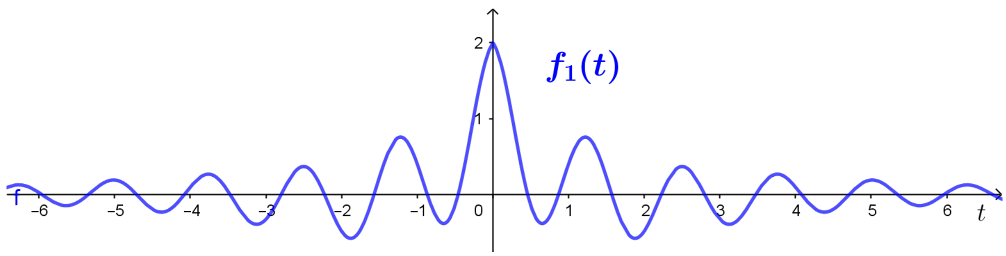
a) $f_0(t) = e^{-|t|}\cos(2\pi t) + e^{-|t|}\cos(2\pi 5t)$ es real y par.



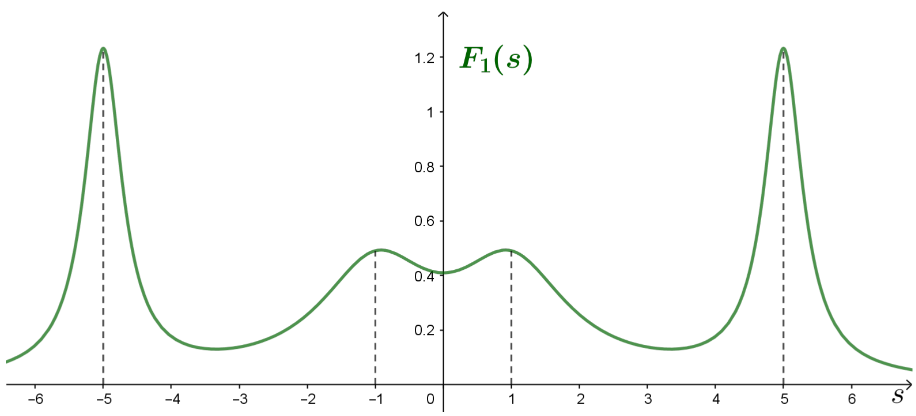
El espectro $F_0(s)$ es real y par. Revela dos frecuencias importantes, $s_1 = 1$ y $s_2 = 5$, asociadas a las partes $\cos(2\pi s_1 t)$ y $\cos(2\pi s_2 t)$ de $f_0(t)$.



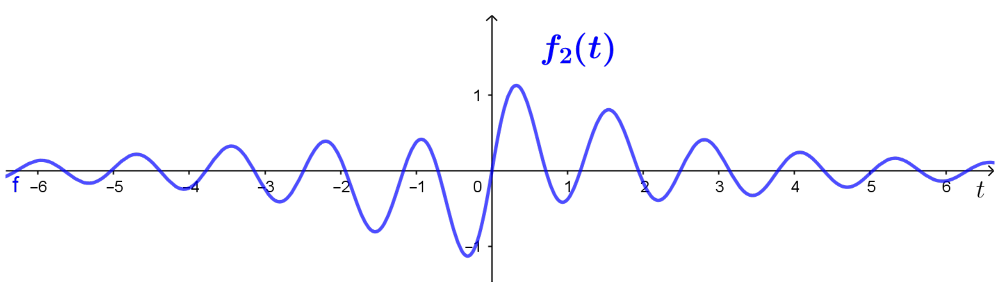
b) $f_1(t) = e^{-|t|}\cos(2\pi t) + e^{-|t/3|}\cos(2\pi 5t)$ es real y par.



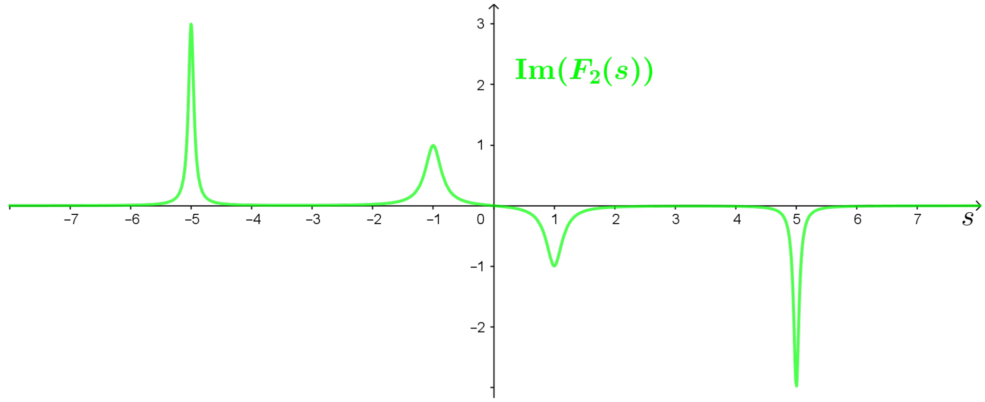
El espectro $F_1(s)$ es real y par. Revela las mismas dos frecuencias importantes pero con diferentes pesos. La parte de la señal asociada con la frecuencia alta $s_2 = 5$ está pesada por una exponencial que decae más lentamente que la otra.



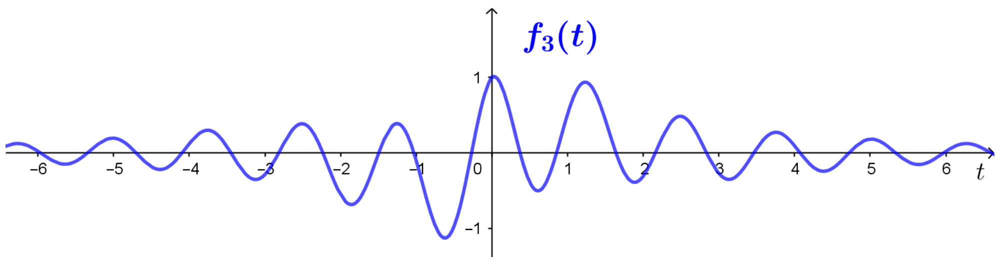
c) $f_2(t) = e^{-|t|}\,\mathrm{sen}(2\pi t) + e^{-|t/3|}\,\mathrm{sen}(2\pi 5t)$ es real e impar.



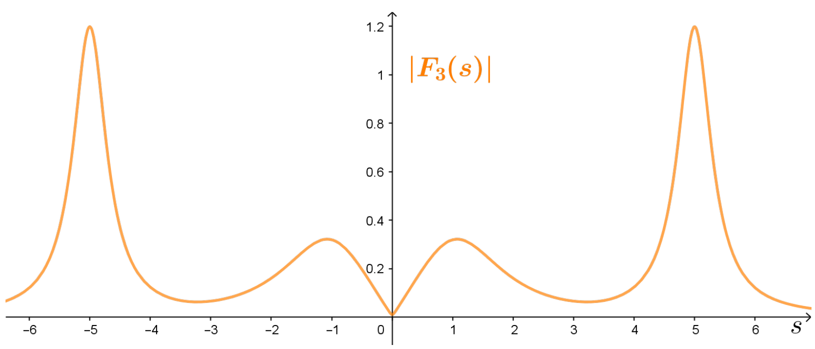
El espectro $F_2(s)$ es imaginario puro e impar, por lo que graficamos su parte imaginaria. Se observan las mismas dos frecuencias importantes pero con diferentes pesos.

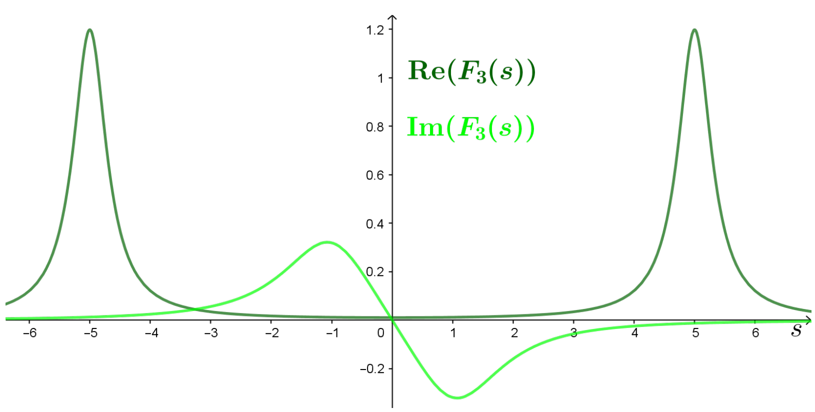


d) $f_3(t) = e^{-|t|}\,\mathrm{sen}(2\pi t) + e^{-|t/3|}\cos(2\pi 5t)$ es real, no es par ni impar.



Como $F_3(s)$ no es real, representamos el espectro de amplitud. Se observan las mismas dos frecuencias importantes con diferentes pesos. Sin embargo no permite distinguir cuál corresponde a la parte par o impar de $f_3(t)$. Graficando $\mathrm{Re}(F_3(s))$ e $\mathrm{Im}(F_3(s))$ constatamos que $s_1 = 1$ está asociada a la parte impar y $s_2 = 5$ a la par.





Si $f(t),\ g(t)$ son funciones de variable real que cumplen las condiciones suficientes para la existencia de las transformadas de Fourier, entonces

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi st}dt$$

$$\mathscr{F}\{g(t)\} = G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi st}dt$$

Además

$$\mathscr{F}\{f(t)g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-i2\pi st}dt$$

En general

$$\mathscr{F}\{f(t)g(t)\} \neq F(s)G(s)$$

Definiremos una operación entre funciones relacionada con esta cuestión.

6.5. Convolución de funciones

Definición 6.5.1. *Sean $f(t),\ g(t)$ funciones seccionalmente continuas definidas para $t \in \mathbb{R}$. Se define la operación* ***producto de convolución*** *o* ***convolución*** *de f y g, cuya notación es $f * g$, como*

$$f * g\,(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

También suele escribirse $(f * g)(t)$ o $f(t) * g(t)$.

Propiedades

Conmutatividad: $f * g = g * f$

Asociatividad: $(f * g) * h = f * (g * h)$

Distributividad con respecto a la suma: $(f + g) * h = f * h + g * h$

Ejemplo 6.5.2.

Sean $f(t) = u(t-2) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$ $\qquad g(t) = e^{4t}$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u(\tau-2)}_{u(t-2)]_\tau} \underbrace{e^{4(t-\tau)}}_{e^{4t}]_{t-\tau}} d\tau = \int_{2}^{\infty} e^{4(t-\tau)}d\tau =$$

$$=e^{4t}\int_{2}^{\infty} e^{-4\tau}d\tau = e^{4t}\lim_{B\to\infty}\int_{2}^{B} e^{-4\tau}d\tau = e^{4t}\lim_{B\to\infty}\left[\frac{e^{-4\tau}}{-4}\right]_2^B =$$

$$=e^{4t}\lim_{B\to\infty}\left[\frac{e^{-4B}-e^{-8}}{-4}\right] = e^{4t}\,\frac{e^{-8}}{4} = \frac{e^{4(t-2)}}{4}$$

$\square$

Finalmente, podemos enunciar el teorema que asegura que la transformada de Fourier del producto de convolución de dos funciones es el producto usual de las transformadas. En otras palabras, la transformada de Fourier tiene la propiedad de tornar a la operación de producto de convolución en el dominio del tiempo, una simple operación de multiplicación punto a punto en el dominio de la frecuencia.

Teorema 6.5.3. ***Transformada de la convolución***
Sean $f(t), g(t), \quad t \in \mathbb{R}$. *Si* $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(s)$ *y* $\mathscr{F}\{g(t)\} = G(s)$ *entonces*

$$\mathscr{F}\{f(t) * g(t)\} = \mathscr{F}\{f(t)\}\mathscr{F}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

Actividad 6.5.4.

Halle el producto de convolución entre $f(t)$ y $g(t)$:

a) $f(t) = u(t)$ y $g(t) = e^t$

b) $f(t) = u(t)e^{-2t}$ y $g(t) = u(t)e^{-3t}$

c) $f(t) = u(t)e^{-4t}$ y $g(t) = u(t-3)$

Actividad 6.5.5.

a) Dadas $f(t) = u(t)e^{-2t}$ y $g(t) = u(t)e^{-3t}$ calcule $\mathscr{F}\{f(t) * g(t)\}$ usando el teorema de la transformada de la convolución.

b) Muestre que $u(t)te^{-t} = u(t)e^{-t} * u(t)e^{-t}$ y calcule $\mathscr{F}\{u(t)te^{-t}\}$ usando el teorema de la transformada de la convolución.

Una aplicación importante, integradora de varios de los conceptos contemplados, es la resolución y análisis de sistemas lineales invariantes en el tiempo -LTI- [12]. Por un lado, si $h(t)$ es la respuesta del sistema al impulso unitario $\delta(t)$, la repuesta $f(t)$ a cualquier otra entrada $g(t)$ se obtiene de la convolución de la entrada con $h(t)$, es decir $f(t) = g(t) * h(t)$. Así, conociendo la respuesta al impulso unitario, es inmediata la respuesta a cualquier entrada.

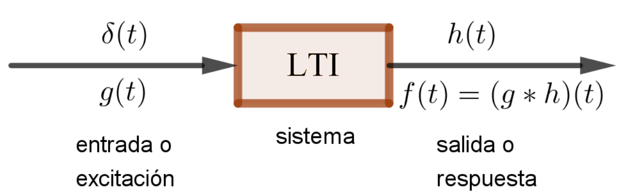


Figura 6.2: Representación esquemática de un sistema en el dominio del tiempo

Por otro lado, como la función $h(t)$ caracteriza por completo el sistema, también lo debe hacer, si existe, $H(s) = \mathscr{F}\{h(t)\}$. Si $F(s) = \mathscr{F}\{f(t)\}$ y $G(s) = \mathscr{F}\{g(t)\}$, en el dominio de la frecuencia tenemos el producto $F(s) = G(s)H(s)$, entonces, $H(s)$ para cada frecuencia s, captura el cambio de la transformada de Fourier $G(s)$ de la entrada. Esto posibilita diseñar $H(s)$ para que la señal $f(t)$ pase a tener propiedades requeridas (por ejemplo menos ruido que $g(t)$).

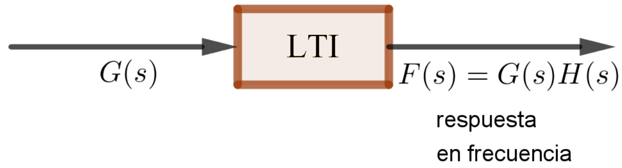


Figura 6.3: Representación esquemática de un sistema en el dominio de la frecuencia

Actividad 6.5.6.

Considere un sistema LTI donde $H(s)$ es la respuesta en frecuencia al impulso unitario.
Si $g(t) = \cos(2\pi a t)$, muestre que la respuesta en frecuencia es

$$F(s) = 1/2\delta(s-a)H(a) + 1/2\delta(s+a)H(-a)$$

Ayuda: use el resultado de la actividad 6.2.9.

La transformada de Fourier sirve para analizar sistemas LTI estables, en este contexto, para considerar también los inestables se introduce la transformada de Laplace. Aunque corresponde a materias especializadas, es oportuno señalar, que para un sistema causal con condiciones iniciales nulas, cuya transformada de Laplace de la respuesta al impulso unitario es racional, se puede analizar la estabilidad o inestabilidad mediante la ubicación de sus polos [12].

Antes de enfocarnos en la transformada de Laplace, retomando lo del surgimiento de la transformada de Fourier, nos referiremos a las EDP. En los capítulos 1 y 2 resolvimos casos particulares del problema de Dirichlet. Ahora, estamos en condiciones de abordar otros problemas de contorno.

6.6. Aplicación a Ecuaciones Diferenciales Parciales

Queremos hallar la temperatura $u(x,y)$ en estado estacionario en un sólido semi infinito, que satisface la ecuación de Laplace:

$$(1)\ u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \qquad x>0 \qquad y>0$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{cases} (2) \quad u(0,y)=0 & y>0, \\ (3) \quad u(x,0)=f(x) & x>0, \\ (4) \quad \text{u está acotada} & x>0\ ,\ y>0 \end{cases}$$

Suponemos que la función $f(x)$ cumple las condiciones siguientes: es continua, absolutamente integrable para $x>0$ y f' es seccionalmente continua en cualquier intervalo finito de la recta.

Usaremos el método de separación de variables y el siguiente resultado [3], p. 40:

Principio de superposición. Si $T_\alpha(x,y)$ es solución del problema

$$T_{xx} + T_{yy} = 0 \qquad 0<x<\infty, \quad 0<y<\infty, \qquad T(0,y)=0 \ \text{ para todo } \alpha>0$$

entonces la integral $\displaystyle\int_0^\infty T_\alpha(x,y)d\alpha$ también es solución (la superposición consiste en una integración con respecto al parámetro α).

Proponemos la solución

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

y separando las variables obtenemos (u estará acotada, en general, si lo están X y Y)

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & X(0) = 0, \quad |X(x)| < M_1, \quad x > 0 \\ \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, & |Y(y)| < M_2, \quad y > 0 \end{cases}$$

Es sencillo verificar que $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$ producen soluciones triviales.

Si $\lambda = -\alpha^2 < 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0$

- $X''(x) + \alpha^2 X(x) = 0$ tiene solución $X(x) = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \operatorname{sen}(\alpha x)$
  $X(0) = 0$ implica que $X_\alpha(x) = C(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha x)$ que cumple la condición de ser acotada.
- $Y''(y) - \alpha^2 Y(y) = 0$ tiene solución $Y_\alpha(y) = D_1(\alpha)e^{-\alpha y} + D_2(\alpha)e^{\alpha y}$,
  para que se cumpla la condición de ser acotada tiene que ser $D_2(\alpha) = 0$

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0,$ hay una solución de (1) que satisface las condiciones (2) y (4):

$$u_\alpha(x,y) = G(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha x)e^{-\alpha y}$$

Por el principio de superposición, que consiste en una integración con respecto al parámetro α real positivo, también es solución la función

$$u(x,y) = \int_0^\infty u_\alpha(x,y)d\alpha$$

Luego,

$$u(x,y) = \int_0^\infty G(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha x)e^{-\alpha y}d\alpha$$

será solución del problema original completo si existe $G(\alpha)$ que verifique la condición (3):

$$u(x,0) = \int_0^\infty G(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha x)d\alpha = f(x)\ , \qquad x > 0 \qquad (\ddagger)$$

Para encontrar G, recordemos la integral de Fourier: si f y f' son funciones seccionalmente continuas en cada intervalo finito de la recta real, f es absolutamente integrable y es función impar, entonces para cada número real x:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = 2i\int_0^\infty \left[-2i\int_0^\infty f(x)\operatorname{sen}(2\pi xs)dx\right]\operatorname{sen}(2\pi xs)ds$$

y puede escribirse

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty 4f(x)\operatorname{sen}(2\pi xs)dx\right]\operatorname{sen}(2\pi xs)ds$$

Haciendo la sustitución $\alpha = 2\pi s$,

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{4}{2\pi}f(x)\operatorname{sen}(\alpha x)dx\right]\operatorname{sen}(\alpha x)d\alpha$$

En nuestro caso, f es una función definida en $(0,+\infty)$ y admite una extensión impar que verifica las condiciones de existencia de la transformada de Fourier, como además es continua para $x>0$, $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=f(x)$. Observando (‡), resulta

$$f(x)=\int_0^\infty \underbrace{\left[\int_0^\infty \frac{4}{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(\alpha x)dx\right]}_{G(\alpha)} \mathrm{sen}(\alpha x)d\alpha$$

Entonces la función u que es solución al problema con las condiciones de contorno es

$$u(x,y)=\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{4}{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(\alpha x)dx\right] \mathrm{sen}(\alpha x)e^{-\alpha y}d\alpha$$

Ejemplo 6.6.1.

Consideremos el problema anterior con $u(x,0)=f(x)=\begin{cases} 1-x\ ,\ 0<x<1 \\ 0\ ,\ x>1 \end{cases}$

Resulta $G(\alpha)=\dfrac{2(\alpha-\mathrm{sen}\,\alpha)}{\pi\alpha^2}$ y la solución al problema:

$$u(x,y)=\int_0^\infty \frac{2(\alpha-\mathrm{sen}\,\alpha)}{\pi\alpha^2}\,\mathrm{sen}(\alpha x)e^{-\alpha y}d\alpha$$

Actividad 6.6.2.

Una lámina de metal que cubre el primer cuadrante tiene su borde a lo largo del eje y mantenido a $0°$ y el borde a lo largo del eje x mantenido a una temperatura dada por $T(x,0)=\begin{cases} 4-x^2, & 0<x<2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$, además $\lim\limits_{y\to\infty} T(x,y)=0$ y $T(x,y)$ acotada cuando $x\to\infty$.

a) Se quiere hallar la distribución de la temperatura de régimen permanente como función de x e y. De la simple observación de la condición de contorno para $y=0$ ¿considera posible el uso de la serie de Fourier en la resolución del problema mediante el método de separación de variables?

b) Resuelva usando del método de separación de variables.

Actividad 6.6.3.

Halle la temperatura $u(x,t)$ en un sólido semi infinito, donde la cara $x=0$ se mantiene a temperatura 0. La distribución inicial de temperaturas es la función $g(x)$ dada. Además u está acotada, es decir, no existe fuente instantánea de calor en la cara $x=0$ en el instante $t=0$. El problema puede representarse [3] p. 160:

$$\begin{cases} (1) \quad u_{xx}=u_t, & t>0 \quad x>0 \\ (2) \quad u(0,t)=0 & t>0 \\ (3) \quad |u(x,t)|<M & t>0 \quad x>0 \\ (4) \quad u(x,0)=g(x)=\begin{cases} 1-x, & 0<x<1 \\ 0, & x>1 \end{cases} \end{cases}$$

6.7. Transformada de Laplace bilateral y su relación con la transformada de Fourier

Se define la transformada de Laplace bilateral de $f(t)$ como

$$\mathscr{L}_b\{f(t)\} = F_{\mathscr{L}_b}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad \text{para} \quad s \in \mathbb{C} \quad \text{tales que la integral impropia exista.}$$

Si $s = i2\pi s_2,\ s_2 \in \mathbb{R}$, pertenece al dominio de $F_{\mathscr{L}_b}(s)$ y $\mathscr{F}\{f(t)\} = F_{\mathscr{F}}(s_2)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$, resulta

$$F_{\mathscr{L}_b}(2\pi i s_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi s_2 t}dt = F_{\mathscr{F}}(s_2)$$

En general, hay una relación directa con la transformada de Fourier cuando $s = s_1 + is_2$:

$$F_{\mathscr{L}_b}(2\pi s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(2\pi s_1 + i2\pi s_2)t}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t)e^{-2\pi s_1 t}\right] e^{-2\pi i s_2 t}dt = \mathscr{F}\left\{f(t)e^{-2\pi s_1 t}\right\} \text{ función de } s_2$$

Esto es, la transformada de Laplace bilateral de $f(t)$ se puede interpretar como la transformada de Fourier de $f(t)$ multiplicada por una exponencial real, considerando s_1 fijo.

Ejemplo 6.7.1.

Sea $f(t) = u(t)e^{-\alpha t},\ \alpha \in \mathbb{R}$

Probaron en la actividad 6.2.5 que para $\alpha > 0$, $s_2 \in \mathbb{R}$:

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = F_{\mathscr{F}}(s_2) = \frac{1}{\alpha + i2\pi s_2}$$

Ahora calculamos la transformada de Laplace en $2\pi s$ con $s = s_1 + is_2$:

$$F_{\mathscr{L}_b}(2\pi s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-\alpha t}e^{-2\pi st}dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+2\pi s)t}dt = \lim_{A\to\infty} \int_{0}^{A} e^{-(\alpha+2\pi s)t}dt = \lim_{A\to\infty} \left.\frac{e^{-(\alpha+2\pi s)t}}{-(\alpha+2\pi s)}\right|_{t=0}^{t=A} =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \frac{e^{-(\alpha+2\pi s)A} - 1}{-(\alpha+2\pi s)} = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{-(\alpha+2\pi s_1+i2\pi s_2)A} - 1}{-(\alpha+2\pi s_1+i2\pi s_2)}$$

Escribimos la exponencial compleja

$$\begin{aligned} e^{-(\alpha+2\pi s_1+i2\pi s_2)A} &= e^{-(\alpha+2\pi s_1)A}e^{-i2\pi s_2 A} = \\ &= e^{-(\alpha+2\pi s_1)A}\left[\cos(2\pi s_2 A) - i\,\mathrm{sen}\,(2\pi s_2 A)\right] \\ &= e^{-(\alpha+2\pi s_1)A}\underbrace{\cos(2\pi s_2 A)}_{\text{acotada}} - ie^{-(\alpha+2\pi s_2)A}\underbrace{\mathrm{sen}\,(2\pi s_2 A)}_{\text{acotada}} \end{aligned}$$

como para la exponencial real

$$\lim_{A\to\infty} e^{-(\alpha+2\pi s_1)A} = 0 \quad \text{si} \quad \alpha + 2\pi s_1 > 0$$

resulta

$$\lim_{A\to\infty} e^{-(\alpha+2\pi s_1)A-i2\pi s_2 A} = 0 \quad \text{si } \alpha + 2\pi s_1 > 0$$

Entonces

$$F_{\mathscr{L}_b}(2\pi s) = \frac{1}{\alpha + 2\pi s_1 + i2\pi s_2} \quad \text{si} \;\; s_1 > -\frac{\alpha}{2\pi}$$

- Si $\alpha > 0$, podemos calcular la transformada bilateral de Laplace en $2\pi s$ con $s_1 = 0$ pues se verifica $s_1 = 0 > -\dfrac{\alpha}{2\pi}$:

  $$F_{\mathscr{L}_b}(0 + i2\pi s_2) = \frac{1}{\alpha + i2\pi s_2}$$

  que coincide la transformada de Fourier $F_{\mathscr{F}}(s_2)$.

- Si $\alpha \leq 0$, existe la transformada bilateral de Laplace en $2\pi s$ para $\text{Re}(s) = s_1 > -\dfrac{\alpha}{2\pi}$ (se puede interpretar como la transformada de Fourier de $f(t)e^{-2\pi s_1 t}$, función de s_2 para s_1 fijo), pero la transformada de Fourier de $f(t)$ no existe. $\square$

6.8. Transformada de Laplace unilateral

En muchas aplicaciones las funciones toman el valor 0 para $t < 0$ o dependen de $t \geq 0$. De aquí la relevancia de la transformada unilateral, a la cual llamaremos, simplemente, transformada de Laplace.

Definición 6.8.1. ***Transformada de Laplace.*** *Sea $f(t)$ una función de variable real definida para $t \geq 0$. La transformada de Laplace de $f(t)$, que indicaremos $\mathscr{L}\{f(t)\}$, $F_{\mathscr{L}}(s)$ o $F(s)$ (en contextos que no genere confusión), está dada por la fórmula*

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

donde s es un parámetro real o complejo.

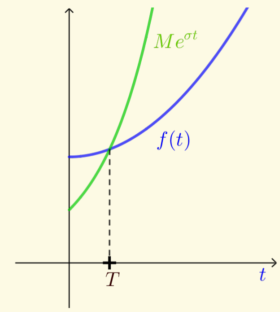
Dado que la transformada de Laplace se define por medio de una integral impropia, es importante conocer las condiciones que deben cumplir $f(t)$ y s para que dicha integral converja. Los valores de s para los cuales la integral converge constituyen lo que se denomina región de convergencia o dominio de la transformada de Laplace.

Antes de enunciar el teorema que da esas condiciones, definiremos el concepto que describe una función que crece a lo sumo tan rápido como alguna función exponencial:

Definición 6.8.2. ***Función de orden exponencial***

Se dice que una función $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$,
es de orden exponencial σ cuando $t \to \infty$,
si existen T y M constantes no negativas tales que:

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma t} \text{ para todo } t \geq T$$



Ejemplo 6.8.3.

a) Sea $f(t) = t^2, \quad t \geq 0$
Dado $\sigma > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{e^{\sigma t}} \underbrace{=}_{\text{L'Hopital}} \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{\sigma e^{\sigma t}} \underbrace{=}_{\text{L'Hopital}} \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\sigma^2 e^{\sigma t}} = 0$$

A partir de la definición de límite, se obtiene que cualquiera sea $M > 0$, existe $T_{M,\sigma} > 0$ tal que $|f(t)| = t^2 \leq Me^{\sigma t}$ para todo $t \geq T_{M,\sigma}$. Entonces podemos afirmar que $f(t)$ es de orden exponencial σ para todo $\sigma > 0$.
Con el mismo procedimento se demuestra que $f(t) = t^n$, n natural, es de orden exponencial σ para todo $\sigma > 0$ (se usa la regla de L'Hopital n veces).

b) Sea $f(t) = e^{\frac{1}{4}t}, \quad t \geq 0$
$|f(t)| \leq Me^{\sigma t}$ para todo $t \geq T$ con $M = 1$, $\sigma \geq \dfrac{1}{4}$ y $T = 0$. Podemos afirmar que $f(t)$ es de orden exponencial σ para todo $\sigma \geq \frac{1}{4}$. En particular, de orden exponencial $\sigma = \dfrac{1}{4}$:

$$|f(t)| = e^{\frac{1}{4}t} \leq 1e^{\frac{1}{4}t} \text{ para todo } t \geq 0$$

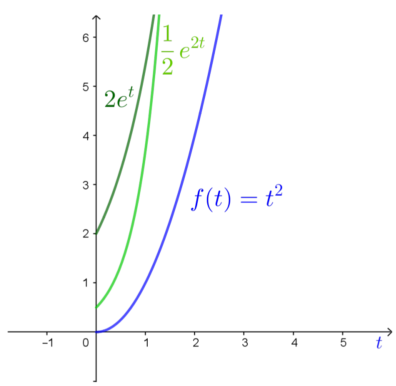


Figura 6.4: ejemplo 6.8.3a

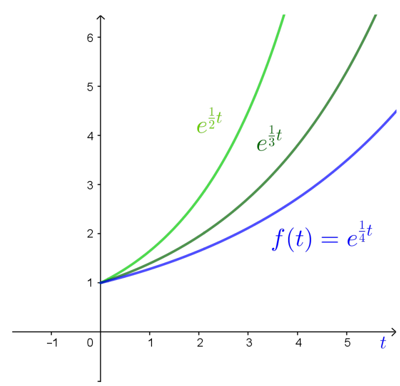


Figura 6.5: ejemplo 6.8.3b

Teorema 6.8.4. ***Condiciones suficientes para la existencia***
Si $f(t)$, $t \geq 0$ es una función seccionalmente continua en todo intervalo finito y es de orden exponencial σ, entonces existe $\mathscr{L}\{f(t)\}$ para $\mathrm{Re}(s) > \sigma$.

Ejemplo 6.8.5.

Sea $f(t) = 1, \quad t \geq 0$

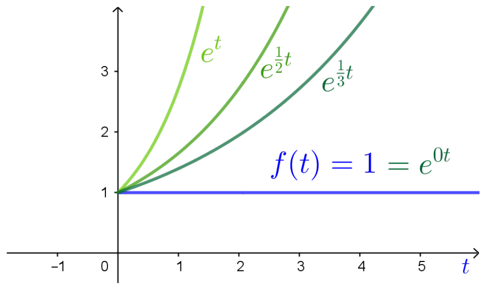


Figura 6.6: ejemplo 6.8.5

Analicemos las condiciones suficientes del teorema de existencia.

- $f(t)$ seccionalmente continua en todo intervalo finito de $t \geq 0$: se verifica pues $f(t)$ es continua en $t \geq 0$.
- $f(t)$ de orden exponencial σ: $|f(t)| \leq Me^{\sigma t}$ para todo $t \geq T$ con $M = 1$, $\sigma \geq 0$ y $T = 0$, entonces $f(t)$ es de orden exponencial $\sigma \geq 0$. En particular, de orden exponencial $\sigma = 0$:

$$|f(t)| = 1 \leq 1e^0 \text{ para todo } t \geq 0$$

Calculamos la transformada de Laplace para $s = s_1 + is_2 \in \mathbb{C}$

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty 1e^{-st}dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st}dt =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^A = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{-sA} - 1}{-s}$$

Escribimos la exponencial compleja

$$\begin{aligned} e^{-(s_1+is_2)A} &= e^{-s_1A}e^{-is_2A} = e^{-s_1A}\left[\cos(s_2A) - i\,\text{sen}\,(s_2A)\right] \\ &= e^{-s_1A}\underbrace{\cos(s_2A)}_{\text{acotada}} - ie^{-s_1A}\underbrace{\text{sen}\,(s_2A)}_{\text{acotada}} \end{aligned}$$

como para la exponencial real

$$\lim_{A\to\infty} e^{-s_1A} = 0 \quad \text{si} \quad s_1 > 0$$

resulta

$$\lim_{A\to\infty} e^{-(s_1+is_2)A} = 0 \quad \text{si} \quad s_1 > 0$$

Entonces

$$F(s) = \frac{1}{s} \quad \text{con} \quad \text{Re}(s) > 0$$

Como anunciaba el teorema de existencia, el dominio de $F(s)$ resultó $\text{Re}(s) > \sigma = 0$.

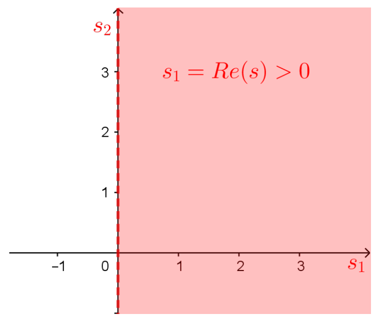


Figura 6.7: dominio de $F(s), s \in \mathbb{C}$

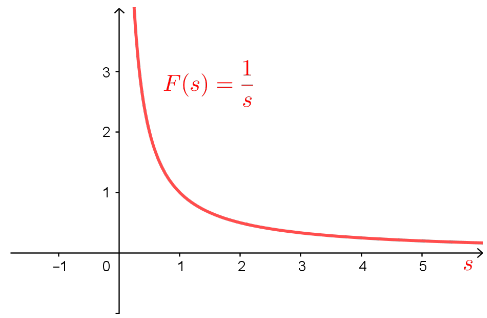


Figura 6.8: gráfica de $F(s), s \in \mathbb{R}$

Si $s \in \mathbb{R}$ resulta $\text{Re}(s) = s$, entonces

$$F(s) = \frac{1}{s} \quad \text{con} \quad s > 0$$

En el caso $s \in \mathbb{C}$, la función toma valores complejos, solamente graficamos el dominio de $F(s)$, ver figura 6.7; en cambio, cuando $s \in \mathbb{R}$ es posible realizar la gráfica de la función, figura 6.8.

Actividad 6.8.6.

Sea $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & 0 < t < 1 \\ e^t, & t > 1 \end{cases}$

Muestre que $f(t)$ satisface las condiciones suficientes para la existencia de la transformada de Laplace. Encuentre la transformada usando la definición y determine su dominio.

Actividad 6.8.7.

a) Sea $f(t) = e^{at},\ t \geq 0$, donde $a = a_1 + ia_2$ es una constante compleja. Demostrar:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \text{ si } \text{Re}(s) > \text{Re}(a)$$

Si $s, a \in \mathbb{R}$ se verifica para $s > a$

b) Sea $f(t) = t^n,\ n \in \mathbb{N},\ t \geq 0$. Demostrar (método de inducción completa e integración por partes):

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ si } \text{Re}(s) > 0$$

Si $s \in \mathbb{R}$ se verifica para $s > 0$

La transformada inversa de Laplace

La transformada inversa o antitransformada de Laplace se nota $\mathscr{L}^{-1}$ y cumple:

$$\text{Si} \ \ \mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) \ \ \text{entonces} \ \ \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t),\ t \geq 0$$

Si la transformada de Laplace de una función continua $f(t)$ es $F(s)$ para $\text{Re}(s) > \alpha$, se puede recuperar $f(t)$ calculando una integral compleja denominada **integral de inversión compleja o integral de Bromwich** ($\beta > \alpha$):

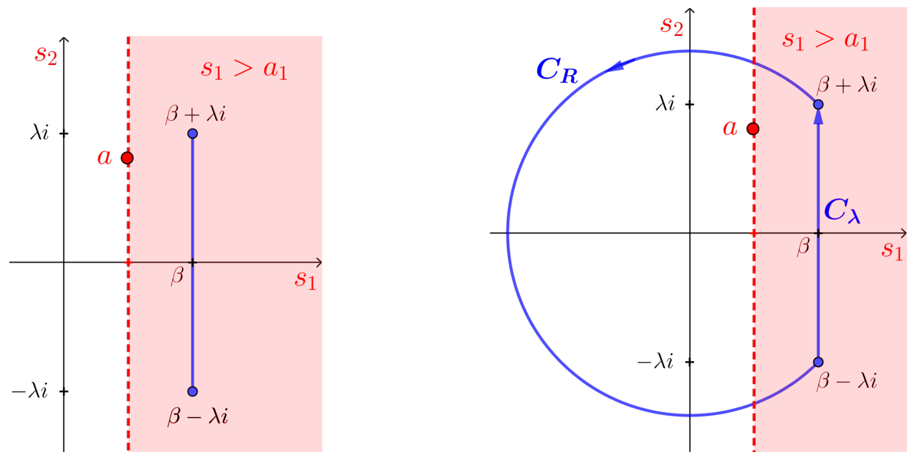
$$f(t) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\lambda}^{\beta + i\lambda} F(s) e^{st} ds \qquad t > 0$$

Ejemplo 6.8.8.

Sea $F(s) = \dfrac{1}{s-a}$, donde $s = s_1 + is_2$, $a = a_1 + ia_2$ válida en $s_1 > a_1$. Calculemos su anti-transformada de Laplace mediante la integral de Bromwich con $\beta > a_1$:

$$f(t) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda} F(s)e^{st}ds = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda} \frac{1}{s-a}e^{st}ds$$

Consideramos la curva auxiliar $C = C_R \cup C_\lambda$ con R suficientemente grande:



Como $\dfrac{1}{s-a}e^{st}$ es analítica salvo en el polo $s = a$ interior a la curva, aplicando el Teorema de los residuos:

$$2\pi i Res_{s=a}\frac{1}{s-a}e^{st} = \lim_{R\to\infty}\int_C \frac{1}{s-a}e^{st}ds = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{1}{s-a}e^{st}ds + \lim_{R\to\infty}\int_{C_\lambda} \frac{1}{s-a}e^{st}ds$$

Se puede probar que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{1}{s-a}e^{st}ds = 0$$

entonces

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda} \frac{1}{s-a}e^{st}ds = 2\pi i Res_{s=a}\frac{1}{s-a}e^{st} = 2\pi i \lim_{s\to a}(s-a)\frac{1}{s-a}e^{st} = 2\pi i e^{at}$$

Luego $f(t) = \dfrac{1}{2\pi i}2\pi i e^{at} = e^{at}$

Por otro lado, en la actividad 6.8.7a demostraron que $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$, entonces directamente podemos llegar al mismo resultado: $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{at},\ t \geq 0$ $\square$

En los casos posibles, justamente los que trataremos en lo que sigue, hallaremos la transformada inversa usando transformadas conocidas y propiedades.

Ejemplo 6.8.9.

$f_1(t) = e^{\frac{1}{4}t} \quad t \geq 0$ $\qquad$ $f_2(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{4}t} & t \geq 0, t \neq 1 \\ \frac{1}{2} & t = 1 \end{cases}$

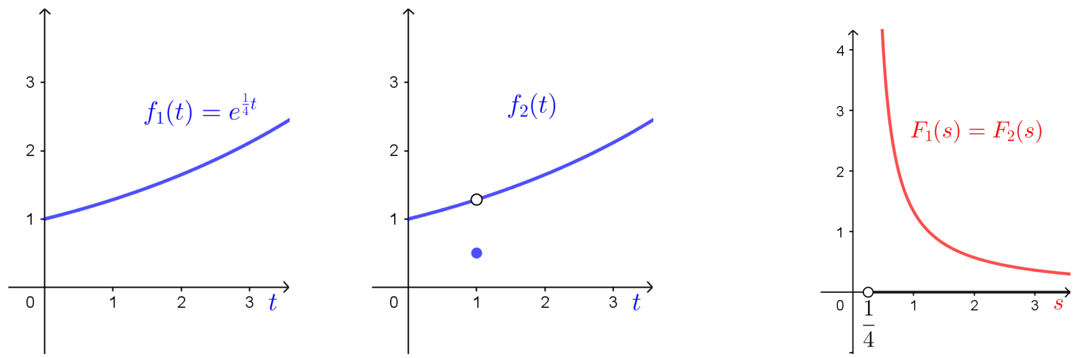


Figura 6.9: ejemplo 6.8.9

Sabemos que

$$\mathscr{L}\{e^{\frac{1}{4}t}\} = F_1(s) = \frac{1}{s-\frac{1}{4}}, \quad s > \frac{1}{4}$$

Como $f_2(t)$ difiere de $f_1(t)$ solamente en un punto (son casi iguales), la integral de la definición de la transformada dará lo mismo, es decir

$$\mathscr{L}\{f_2(t)\} = F_2(s) = \frac{1}{s-\frac{1}{4}}, \quad s > \frac{1}{4}$$

Más aún, existen infinitas funciones con la misma transformada. En este caso podríamos considerar la función continua como la antitransformada de Laplace:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{1}{4}}\right\} = e^{\frac{1}{4}t}, \ t \geq 0$$

Actividad 6.8.10.

Para cada una de las siguientes funciones encontrar la antitransformada de Laplace con su dominio.

a) $F(s) = \dfrac{1}{s+3}$ b) $F(s) = \dfrac{1}{s}$ c) $F(s) = \dfrac{6}{s^4}$

6.9. Propiedades de la transformada de Laplace

Igual que en el caso de la transformada de Fourier, las propiedades de la transformada de Laplace posibilitan, a partir de conocer las transformadas de algunas funciones, calcular las transformadas de otras sin resolver la integral de la definición. Asimismo con las antitransformadas.

Linealidad: Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones tales que

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s), \ s \in D_1 \ \text{ y } \ \mathscr{L}\{g(t)\} = G(s), \ s \in D_2$$

si α y β son constantes cualesquiera, entonces

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathscr{L}\{f(t)\} + \beta\mathscr{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s), \ s \in D_1 \cap D_2$$

Además, la antitransformada también es lineal.

Ejemplo 6.9.1.

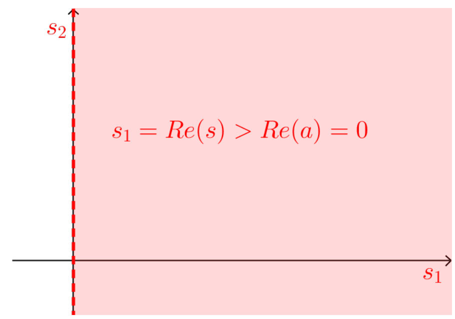
Queremos hallar la transformada de Laplace de $f(t) = \cos(bt), \quad b \in \mathbb{R}$

Recordemos que $\cos(bt) = \dfrac{e^{ibt} + e^{-ibt}}{2}$. Consideramos $a = 0 + ib$ o $a = 0 - ib$ en la actividad 6.8.7a, en ambos casos $\mathrm{Re}(a) = 0$ y obtenemos :

$$\mathscr{L}\{e^{ibt}\} = \frac{1}{s - ib}, \qquad s \in D_1 : \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$\mathscr{L}\{e^{-ibt}\} = \frac{1}{s + ib}, \qquad s \in D_2 : \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$D_1 \cap D_2 : \mathrm{Re}(s) > 0$$



Por la propiedad de linealidad:

$$\mathscr{L}\{\cos(bt)\} = \frac{1}{2}\mathscr{L}\{e^{ibt}\} + \frac{1}{2}\mathscr{L}\{e^{-ibt}\} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{s - ib} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s + ib} =$$

$$= \frac{s + ib + s - ib}{2(s^2 + b^2)} = \frac{2s}{2(s^2 + b^2)} = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

Por lo tanto

$$\mathscr{L}\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2 + b^2} \quad \text{con} \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

Actividad 6.9.2.

Dada la constante $b \in \mathbb{R}$, demostrar:

a) $\mathscr{L}\{\mathrm{sen}(bt)\} = \dfrac{b}{s^2 + b^2}$ con $\mathrm{Re}(s) > 0$

b) $\mathscr{L}\{\cosh(bt)\} = \dfrac{s}{s^2 - b^2}$ con $\mathrm{Re}(s) > |b|$

c) $\mathscr{L}\{\mathrm{senh}(bt)\} = \dfrac{b}{s^2 - b^2}$ con $\mathrm{Re}(s) > |b|$

Traslación en el dominio de la transformada (o sustitución)
Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ para $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(b)$ entonces

$$\mathscr{L}\{f(t)e^{at}\} = F(s - a) \quad \text{para} \quad \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a + b)$$

Esta propiedad enuncia que si conocemos la transformada de una función, entonces también conocemos la transformada de esa función multiplicada por una exponencial.
Además,

$$\mathscr{L}^{-1}\{\ F(s - a)\} = f(t)e^{at}, \quad t \geq 0$$

Ejemplo 6.9.3.

Calculemos la transformada de Laplace de $g(t) = te^{4t}$:

De la actividad 6.8.7b deducimos que la transformada de Laplace de $f(t) = t$ es $F(s) = \dfrac{1}{s^2}$
Aplicando la propiedad de traslación en el dominio de la transformada con $a = 4$:

$$\mathscr{L}\{g(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)e^{4t}\} = F(s-4) = \frac{1}{(s-4)^2}$$

Ejemplo 6.9.4.

Encontremos la antitransformada de Laplace de $F(s) = \dfrac{1}{s^2+2s+10}$:

Podemos expresar

$$\frac{1}{s^2+2s+10} = \frac{1}{(s+1)^2+9} = \frac{1}{3}\frac{3}{(s+1)^2+9}$$

usando la propiedad de linealidad:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+10}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3}\frac{3}{(s+1)^2+9}\right\} = $$
$$= \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+1)^2+9}\right\}$$

Recordemos que

$$\mathscr{L}\{\text{sen}(3t)\} = \frac{3}{s^2+3^2}$$

entonces por la propiedad de traslación en el dominio de la transformada con $a = -1$

$$\mathscr{L}\{\text{sen}(3t)e^{-t}\} = \frac{3}{(s-(-1))^2+3^2} = \frac{3}{(s+1)^2+9}$$

luego

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+1)^2+9}\right\} = \text{sen}(3t)e^{-t}$$

y concluimos:

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+10}\right\} = \frac{1}{3}\,\text{sen}(3t)e^{-t}, \quad t \geq 0$$

Notemos que $f(t)$ real.

También se puede factorizar el denominador en función de sus raíces y luego usar fracciones parciales:

$$\frac{1}{s^2+2s+10} = \frac{1}{[s-(-1-3i)][s-(-1+3i)]} = \frac{A}{[s-(-1-3i)]} + \frac{B}{[s-(-1+3i)]}$$

pero la antitransformada será una combinación lineal de exponenciales complejas, entonces al final, tendrá que usar alguna identidad conocida para obtener la función $f(t)$ real.

Actividad 6.9.5.

Usando la propiedad de traslación en el dominio de la transformada, demuestre

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2s+10}\right\} = \cos(3t)e^{-t} - \frac{1}{3}\,\text{sen}(3t)e^{-t}$$

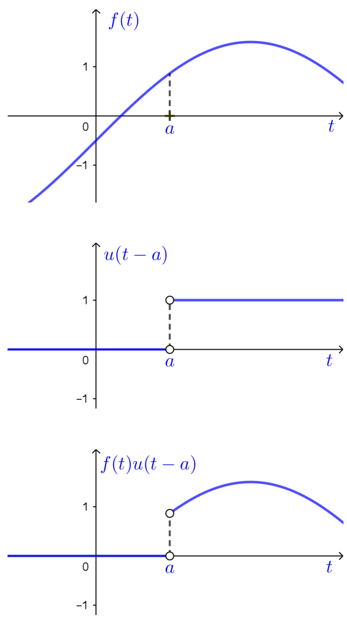
.

Actividad 6.9.6.

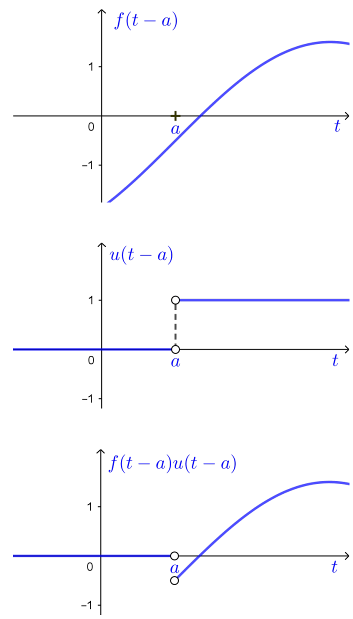
Calcule:

a) $\mathscr{L}\left\{e^{-2t}\,\mathrm{sen}(8t)\right\}$ b) $\mathscr{L}\left\{(t-7)\,\mathrm{senh}(3t)\right\}$ c) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+3)^2}\right\}$ □

En los esquemas siguientes pretendemos dejar clara la diferencia entre $f(t)u(t-a) = \begin{cases} 0, & t<a \\ f(t), & t>a \end{cases}$ y $f(t-a)u(t-a) = \begin{cases} 0, & t<a \\ f(t-a), & t>a \end{cases}$. Análogamente ocurre si consideramos que $u(t-a)$ tome el valor 1 en a.



$f(t)$ "conectada" en $t>a$



$f(t-a)$ "conectada" en $t>a$

Traslación en el dominio del tiempo

Sea $f(t), \quad t \geq 0$. Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ para $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(b)$ y a es una constante real positiva, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = F(s)e^{-as} \quad \text{para} \quad \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(b)$$

Es decir, si conocemos la transformada de una función entonces también conocemos la transformada de esa función trasladada a unidades y "conectada" a partir de a, para cualquier $a > 0$. Además,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-as}\right\} = f(t-a)u(t-a), \quad t \geq 0$$

Ejemplo 6.9.7.

Calculemos:

a) $\mathscr{L}\left\{\cos\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)u\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$

Sabemos que

$$\mathscr{L}\{\cos(t)\} = \frac{s}{s^2+1}$$

Usando la propiedad de traslación en el dominio del tiempo con $a = \dfrac{\pi}{2}$ resulta:

$$\mathscr{L}\left\{\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \frac{s}{s^2+1}\,e^{-\frac{\pi}{2}s} = \frac{s\,e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}$$

b) $\mathscr{L}\left\{\cos(t)\, u\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$

En este caso la función que multiplica a $u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$ no está evaluada en $\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$, entonces no podemos aplicar la propiedad directamente como en el inciso anterior. Trataremos de escribir la función a transformar de otra forma para que eso sea posible, en este caso, utilizaremos la fórmula para el coseno de la suma de dos ángulos:

$$\begin{aligned}\cos(t) &= \cos\left[\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right] = \\ &= \cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos(\frac{\pi}{2}) - \operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = \\ &= -\operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

entonces

$$\mathscr{L}\left\{\cos(t)\, u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \mathscr{L}\left\{-\operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{2}\right) u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

Como

$$\mathscr{L}\{\operatorname{sen}(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$$

usando primero la propiedad de linealidad y luego la de traslación en tiempo con $a=\dfrac{\pi}{2}$:

$$\mathscr{L}\left\{\cos(t)\, u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = -\,\frac{1}{s^2+1}\; e^{-\frac{\pi}{2}s} = -\,\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}$$

Ejemplo 6.9.8.

Calculemos:

a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}}{s^3}\right\}$

Escribimos $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}}{s^3}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3}\; e^{-s}\right\}$

Hallaremos en primer lugar $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3}\right\}$: teniendo en cuenta que

$$\mathscr{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

para $n=2$

$$\mathscr{L}\left\{t^2\right\} = \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{2}{s^3}$$

entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{2}\,\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = \frac{1}{2}t^2$$

Por la propiedad de traslación en el tiempo para $a=1$, la función que buscamos es la función $\dfrac{1}{2}t^2$ pero corrida 1 unidad y "conectada" en $t>1$, es decir

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\; e^{-s}\right\} = \frac{1}{2}(t-1)^2\; u(t-1), \quad t\geq 0$$

b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{se^{-4s}}{s^2+2s+10}\right\}$

Escribimos $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{se^{-4s}}{s^2+2s+10}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+2s+10}e^{-4s}\right\}$

En la actividad 6.9.5, usaron la propiedad de traslación en el dominio de la transformada para demostrar que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2s+10}\right\} = \cos(3t)e^{-t} - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t)e^{-t}$$

Por la propiedad de traslación en el tiempo aplicado para $a = 4$:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-4s}}{s^2+2s+10}\right\} = \left[\cos\left[3(t-4)\right]e^{-(t-4)} - \frac{1}{3}\operatorname{sen}\left[3(t-4)\right]e^{-(t-4)}\right]u(t-4) \quad t \geq 0$$

Actividad 6.9.9.

Calcule:

a) $\mathscr{L}\left\{\operatorname{sen}(t-\pi)u(t-\pi)\right\}$ b) $\mathscr{L}\left\{\operatorname{sen}(t)u(t-\pi)\right\}$ c) $\mathscr{L}\left\{t^2u(t-3)-u(t-1)\right\}$

d) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-4s}}{(s-3)^2}\right\}$ e) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2-6s}\right\}$ f) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{se^{-2s}}{(s-3)^2+16}\right\}$ □

Transformadas de funciones definidas por tramos

Sean a, b números reales, $a < b$, podemos definir la **función rectangular** $rec_{a,b}(t)$ como diferencia de escalones unitarios:

$$rect_{a,b}(t) = u(t-a) - u(t-b) = \begin{cases} 0-0, & t < a \\ 1-0, & a < t < b \\ 1-1, & t > b \end{cases} = \begin{cases} 1, & a < t < b \\ 0, & t < a \quad \vee \quad t > b \end{cases}$$

Un caso particular es la función $rec(t)$ definida anteriormente ya que $rec(t) = rec_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(t)$. Mencionamos oportunamente que al multiplicarla por $f(t)$ limita esta función al intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, o bien, podemos decir que $f(t)$ está "conectada" en ese intervalo. Lo mismo sucede en general, ver figura 6.10:

$$f(t)\left[u(t-a) - u(t-b)\right] = \begin{cases} f(t), & a < t < b \\ 0, & t < a \quad \vee \quad t > b \end{cases}$$

La ventaja de escribir la función definida por tramos usando escalones unitarios, reside en la posibilidad de calcular su transformada de Laplace usando propiedades.

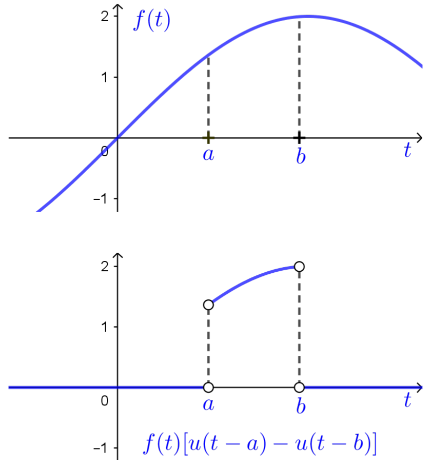


Figura 6.10: $f(t)$ limitada al intervalo (a, b)

Ejemplo 6.9.10.

Sea $g(t) = \begin{cases} e^{4t}, & 2 < t < 3 \\ 0, & 0 < t < 2 \quad \vee \quad t > 3 \end{cases}$

$$g(t) = e^{4t}\,[u(t-2) - u(t-3)]$$

Para usar la propiedad de traslación en el tiempo debemos expresar e^{4t} en función de $t-2$ y de $t-3$:

$$e^{4t} = e^{4[(t-2)+2]} = e^{4(t-2)}e^{8}, \qquad e^{4t} = e^{4[(t-3)+3]} = e^{4(t-3)}e^{12}$$

Calculamos la transformada:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\,\{g(t)\} =& \mathscr{L}\left\{e^{4(t-2)}e^{8}u(t-2) - e^{4(t-3)}e^{12}u(t-3)\right\} \\
=& e^{8}\mathscr{L}\left\{e^{4(t-2)}u(t-2)\right\} - e^{12}\mathscr{L}\left\{e^{4(t-3)}u(t-3)\right\} \\
=& e^{8}\,\frac{1}{s-4}\,e^{-2s} - e^{12}\,\frac{1}{s-4}\,e^{-3s}
\end{aligned}$$

Este razonamiento se extiende a funciones definidas con cualquier cantidad de tramos. En la figura 6.11 ilustramos la descomposición de la siguiente función:

$$g(t) = \begin{cases} f_1(t), & a < t < b \\ f_2(t), & b < t < c \\ 0, & 0 < t < a \quad \vee \quad t > c \end{cases} \qquad = f_1(t)\,[u(t-a) - u(t-b)] + f_2(t)\,[u(t-b) - u(t-c)]$$

Actividad 6.9.11.

Calcule la transformada de Laplace de

$$g(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 2 \\ e^{4t}, & 2 < t < 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases}$$

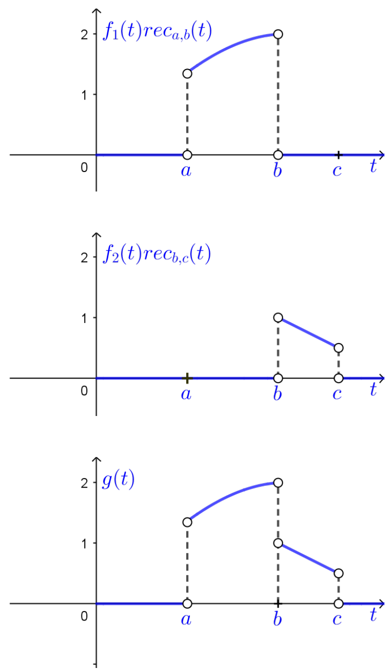


Figura 6.11: $g(t)$ definida a trozos

Transformadas de funciones periódicas

Si $f(t),\ t \geq 0$ es una función seccionalmente continua en el intervalo $(0, P)$ y es periódica de período P entonces

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-Ps}} \int_0^P f(v)e^{-sv}dv \quad \text{para} \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

Actividad 6.9.12.

Calcule la transformada de Laplace:

a) $f(t) = t,\ 0 < t < 1, \quad f(t+1) = f(t)$ b) $f(t) = \begin{cases} 4, & 0 < t < 2 \\ 0, & 2 < t < 3 \end{cases}, \quad f(t+3) = f(t)$

Transformada del impulso unitario

Calculamos mediante la propiedad de separación:

$$\mathscr{L}\{\delta(t-a)\} = \int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st}dt = e^{-st}\big|_{t=a} = e^{-sa}$$

En la definición de transformada de Laplace, cuando la función tiene peculiaridades en $t = 0$, se considera el límite inferior de la integral 0^-, por convención, valores cercanos a la izquierda del origen [5]. Con esta consideración, tenemos en particular, para $a = 0$:

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$$

6.10. Aplicación a ecuaciones integrodiferenciales

La transformada de Laplace es una herramienta muy potente para la resolución de ciertas Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Integrales e Integrodiferenciales, sobre todo en aquellas que aplicando la transformada se obtiene una ecuación algebraica.

Es indispensable descubrir la relación entre la transformada de una función y la de su derivada o integral.

Transformada de Laplace de derivadas

Transformada de la derivada primera de una función: Sea $f(t)$ continua para $t \geq 0$, de orden exponencial σ para $t \to \infty$ y $f'(t)$ seccionalmente continua para $t \geq 0$.
Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ entonces para $\text{Re}(s) > \sigma$:

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Demostración Aplicamos la definición de transformada de Laplace a $f'(t)$:

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt$$

Bajo las hipótesis se puede probar que sigue válida la fórmula de integración por partes:

$$\int_0^A f'(t)e^{-st}dt = f(t)\, e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=A} - \int_0^A f(t)\,(-s)e^{-st}dt = f(A)e^{-sA} - f(0) + s\int_0^A f(t)\, e^{-st}dt$$

como f es de orden exponencial σ, existen M, T no negativas tales que

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma t}, \text{ para todo } t \geq T$$

entonces si $A \geq T$,

$$|f(A)| \leq Me^{\sigma A}$$

multiplicando ambos miembros por $\left|e^{-sA}\right| = e^{-\text{Re}(s)A} > 0$

$$0 \leq \left|f(A)e^{-sA}\right| \leq Me^{\sigma A}e^{-\text{Re}(s)A} = Me^{[\sigma - \text{Re}(s)]A}$$

Cuando $\sigma - \text{Re}(s) < 0$, $\lim_{A\to\infty} e^{[\sigma-\text{Re}(s)]A} = 0$ y resulta $\lim_{A\to\infty} f(A)e^{-sA} = 0$.

por lo tanto para $\text{Re}(s) > \sigma$:

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \lim_{A\to\infty}\int_0^A f'(t)e^{-st}dt = -f(0) + s\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}dt = sF(s) - f(0)$$

■

Ejemplo 6.10.1.

Consideremos un LTI causal en estado inicial de reposo caracterizado por la siguiente ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes: $f'(t) + f(t) = g(t), \quad f(0) = 0$

a) Hallemos la respuesta $h(t)$ con $h(0^-) = 0$ al impulso $\delta(t)$:

$$h'(t) + h(t) = \delta(t), \quad h(0^-) = 0$$

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos miembros:

$$\mathscr{L}\{h'(t) + h(t)\} = \mathscr{L}\{\delta(t)\}$$

por la propiedad de linealidad:

$$\mathscr{L}\{h'(t)\} + \mathscr{L}\{h(t)\} = \mathscr{L}\{\delta(t)\}$$

Llamamos $\mathscr{L}\{h(t)\} = H(s)$ y reemplazamos $\mathscr{L}\{h'(t)\}$ por su expresión equivalente, obtenemos la ecuación algebraica:

$$sH(s) - h(0^-) + H(s) = \mathscr{L}\{\delta(t)\}$$

como $h(0^-) = 0$ y $\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$:

$$sH(s) + H(s) = 1$$

Resolvemos la ecuación algebraica con incógnita $H(s)$ en el dominio de la transformada:

$$(s+1)H(s) = 1$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

Aplicando la antitransformada de Laplace, obtenemos la respuesta al impulso unitario:

$$h(t) = e^{-t} \quad \text{para} \quad t \geq 0$$

Considerando $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ escribimos $h(t) = e^{-t}u(t)$, de la actividad 6.2.12:

$$h'(t) = -e^{-t}u(t) + \delta(t)$$

y corroboramos que $h(t)$ satisface la ecuación:

$$h'(t) + h(t) = -e^{-t}u(t) + \delta(t) + e^{-t}u(t) = \delta(t)$$

El efecto del impulso es provocar un salto en $h'(t)$ en $t = 0$, suponiendo la condición inicial en 0^-.

b) Queremos encontrar la respuesta $f(t)$ a la entrada $g(t) = \text{sen}(t)$:

i) En este caso que ya conocemos $h(t)$ podemos usar la convolución (resolviendo la integral cíclica):

$$f(t) = h(t) * g(t) = \int_0^t e^{-\tau} \ \text{sen}\,(t-\tau)\, d\tau = -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\text{sen}\,(t) + \frac{1}{2}e^{-t}, \quad t \geq 0$$

ii) En general, para una entrada determinada resolvemos directamente:

$$f'(t) + f(t) = \text{sen}(t), \quad f(0) = 0$$

Como en el inciso a), aplicamos la transformada de Laplace, linealidad, llamamos $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ y consideramos que $\mathscr{L}\{\text{sen}(t)\} = \dfrac{1}{s^2+1}$. Arribamos a la ecuación algebraica en el dominio de la transformada:

$$sF(s) + F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$(s+1)F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$
$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s+1)}$$

Para hallar la solución de la ecuación original con incógnita $f(t)$ en el dominio del tiempo debemos calcular $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$. Como $F(s)$ no tiene antitransformada conocida y es un cociente de polinomios, usaremos el método de fracciones parciales (la expresamos como suma de términos que tienen antitransformadas inmediatas):

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s+1)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s+1} = \frac{(As+B)(s+1)+C\left(s^2+1\right)}{(s^2+1)(s+1)} =$$

$$= \frac{As^2+As+Bs+B+Cs^2+C}{(s^2+1)(s+1)}$$

$$= \frac{(A+C)s^2+(A+B)s+B+C}{(s^2+1)(s+1)}$$

Los denominadores son iguales, entonces, los polinomios de los numeradores deben ser iguales:

$$1 = (A+C)s^2+(A+B)s+B+C$$

Igualando coeficiente a coeficiente:

$$\begin{cases} A+C = & 0 \\ A+B = & 0 \\ B+C = & 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales: $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$ y $C = \frac{1}{2}$. Resulta

$$F(s) = \frac{-\frac{1}{2}\,s}{s^2+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s^2+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1}$$

Concluyendo:

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}e^{-t}, \quad t \geq 0$$

Actividad 6.10.2.

Demuestre: Sean $f(t)$ y $f'(t)$ continuas para $t \geq 0$, de orden exponencial σ para $t \to \infty$ y $f''(t)$ seccionalmente continua para $t \geq 0$. Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ entonces para $\operatorname{Re}(s) > \sigma$

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0), \qquad \operatorname{Re}(s) > \sigma$$

Ayuda: aplique la fórmula para la transformada de la derivada primera a la función $f'(t)$.

Ejemplo 6.10.3.

Resolveremos usando la transformada de Laplace:

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^{t-3}u(t-3), \quad y(0)=0,\ y'(0)=0$$

Aplicamos la transformada de Laplace en ambos miembros, usamos linealidad y llamamos $\mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s)$:

$$\mathscr{L}\{y''(t)\} - 2\mathscr{L}\{y'(t)\} + \mathscr{L}\{y(t)\} = \mathscr{L}\{e^{t-3}u(t-3)\}$$

$\mathscr{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s), \quad \mathscr{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s)$

Por la propiedad de traslación en el tiempo: $\mathscr{L}\{e^{t-3}u(t-3)\} = e^{-3s}\,\dfrac{1}{s-1}$

Reemplazando:

$$s^2Y(s) - 2sY(s) + Y(s) = e^{-3s}\,\frac{1}{s-1}$$

Resolvemos la ecuación algebraica en el dominio de la transformada:

$$Y(s)(s^2 - 2s + 1) = e^{-3s}\,\frac{1}{s-1}$$

$$Y(s)(s-1)^2 = e^{-3s}\,\frac{1}{s-1}$$

$$Y(s) = e^{-3s}\,\frac{1}{(s-1)^3}$$

Por la propiedad de traslación en el dominio de la transformada:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\} = \frac{1}{2}\,t^2e^t$$

Finalmente, usando la propiedad de traslación en el tiempo:

$$y(t) = \frac{1}{2}\,(t-3)^2e^{t-3}u(t-3), \quad t \geq 0$$

Disponemos del siguiente resultado general.

Teorema 6.10.4. ***Transformada de la derivada de orden $n \geq 1$ de una función*** *Sean $f(t), f'(t), f^{(2)}(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ continuas para $t \geq 0$ y de orden exponencial σ para $t \to \infty$ y $f^{(n)}(t)$ seccionalmente continua para $t \geq 0$. Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ entonces para $\mathrm{Re}(s) > \sigma$:*

$$\mathscr{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Actividad 6.10.5.

Resuelva las ecuaciones diferenciales usando la transformada de Laplace.

a) $f'(t) + 3f(t) = 4t, \quad f(0) = 1$

b) $y'(t) + 3y(t) = \delta(t-1), \quad y(0) = 2$. ¿Qué efecto provoca el impulso en $y'(t)$ cuando $t = 1$?

c) $y''(t) + y'(t) = e^t, \quad y(0) = y'(0) = 0$

d) $y^{(4)}(t) - y(t) = 0, \quad y(0) = y'(0) = y^{(3)}(0) = 0, \; y''(0) = -1$

e) $y' - y = g(t), \quad y(0) = 0$ con $g(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$

e) $y' + 6y = g(t), \quad y(0) = 0$ con $g(t) = \begin{cases} 4, & 2 < t < 3 \\ 0, & 0 < t < 2 \;\vee\; t > 3 \end{cases}$

Transformada de Laplace de integrales

Recordemos que para funciones $f(t),\ g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, la convolución tiene la forma

$$(f * g)(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Si $f(t) = g(t) = 0$ para $t < 0$ resulta

$$(f * g)(t) = \int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

En efecto:

(1) $f(\tau) = 0$ para $\tau < 0$

(2) $g(t-\tau) = 0$ para $t - \tau < 0$, es decir cuando $\tau > t$

por lo tanto

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \underbrace{f(\tau)}_{=0\ (1)} g(t-\tau)d\tau + \int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau + \int_{t}^{\infty} f(\tau)\underbrace{g(t-\tau)}_{=0\ (2)}d\tau =$$

$$= \int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Teorema 6.10.6. ***Transformada de la convolución de funciones***
Sean $f(t), g(t), \quad t \geq 0$. Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s)$ para $\mathrm{Re}(s) > k$, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\mathscr{L}\{g(t)\} = F(s)G(s) \quad \text{para} \quad \mathrm{Re}(s) > k$$

Corolario 6.10.7. ***Transformada de la integral de una función***
Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ para $\mathrm{Re}(s) > k$, entonces para $\mathrm{Re}(s) > k$

$$\mathscr{L}\left\{\int_{0}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Demostración Primero escribimos la integral como una convolución:

$$\int_{0}^{t} f(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} \underbrace{f(\tau)}_{f(t)|_{\tau}} \underbrace{1}_{1|_{t-\tau}} d\tau = f(t) * 1$$

luego aplicamos la transformada y el teorema para la transformada de una convolución:

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \mathscr{L}\{f(t)*1\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\mathscr{L}\{1\} = F(s)\frac{1}{s}$$

□

Ejemplo 6.10.8.

Para calcular $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \operatorname{sen}(3\tau)e^{\tau-t}d\tau\right\}$, primero escribimos la integral como una convolución:

$$\int_0^t \operatorname{sen}(3\tau)e^{\tau-t}d\tau = \int_0^t \operatorname{sen}(3\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau = \int_0^t \underbrace{\operatorname{sen}(3\tau)}_{\operatorname{sen}(3t)|_\tau}\ \underbrace{e^{-(t-\tau)}}_{e^{-t}|_{t-\tau}}\ d\tau = \operatorname{sen}(3t)*e^{-t}$$

luego aplicamos la transformada y el teorema para la transformada de una convolución:

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t \operatorname{sen}(3\tau)e^{\tau-t}d\tau\right\} = \mathscr{L}\left\{\operatorname{sen}(3t)*e^{-t}\right\} = \mathscr{L}\{\operatorname{sen}(3t)\}\mathscr{L}\{e^{-t}\} = \frac{3}{s^2+9}\ \frac{1}{s+1}$$

Ejemplo 6.10.9.

Sea $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+4)^2}$. Ninguna de las herramientas utilizadas anteriormente sirve para calcular su antitransformada. En este caso podemos expresar

$$F(s) = \frac{s}{s^2+4}\ \frac{1}{s^2+4}$$

Luego

$$f(t) = \cos(2t)*\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) = \frac{1}{2}\int_0^t \cos(2\tau)\operatorname{sen}\left[2(t-\tau)\right]d\tau = \frac{1}{4}\,t\ \operatorname{sen}(2t),\ \ t\geq 0$$

Ejemplo 6.10.10.

Ahora resolveremos la ecuación integral

$$\int_0^t f(\tau)e^{4(t-\tau)}d\tau + f(t) = e^{3t}$$

Como $f(\tau) = f(t)\big|_\tau$ y $e^{4(t-\tau)} = e^{4t}\big|_{t-\tau}$ reemplazamos la integral por la convolución:

$$f(t)*e^{4t} + f(t) = e^{3t}$$

Aplicamos la transformada de Laplace en ambos miembros y la propiedad de linealidad:

$$\mathscr{L}\left\{f(t)*e^{4t}\right\} + \mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{e^{3t}\right\}$$

por el teorema para la transformada de una convolución:

$$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}\mathscr{L}\left\{e^{4t}\right\} + \mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{e^{3t}\right\}$$

Llamando $F(s) = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}$ y calculando las transformadas de las otras funciones involucradas:

$$F(s)\,\frac{1}{s-4} + F(s) = \frac{1}{s-3}$$

Resolvemos la ecuación algebraica con incógnita $F(s)$:

$$F(s)\left(\frac{1}{s-4}+1\right)=\frac{1}{s-3}$$

$$F(s)\left(\frac{1+(s-4)}{s-4}\right)=\frac{1}{s-3}$$

$$F(s)\left(\frac{s-3}{s-4}\right)=\frac{1}{s-3}$$

$$F(s)=\frac{s-4}{(s-3)^2}$$

Para calcular la antitransformada de $F(s)$ descomponemos:

$$F(s)=\frac{(s-3)+3-4}{(s-3)^2}=\frac{(s-3)}{(s-3)^2}-\frac{1}{(s-3)^2}=\frac{1}{s-3}-\frac{1}{(s-3)^2}$$

El primer término tiene antitransformada inmediata e^{3t}. En el segundo, tenemos $\mathscr{L}\{t\}=\dfrac{1}{s^2}$ pero evaluada en $s-3$, entonces su antitransformada es te^{3t}. Concluyendo, la solución de la ecuación integral:

$$f(t)=e^{3t}-te^{3t},\quad t\geq 0$$

Actividad 6.10.11.

Calcule:

a) $\mathscr{L}\left\{\int_0^t (t-\tau)e^{-2\tau}d\tau\right\}$ b) $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \cosh(3\tau)d\tau\right\}$ c) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4-16}\right\}$

Actividad 6.10.12.

Resuelva las ecuaciones integrales o integrodiferenciales usando la transformada de Laplace.

a) $f(t)+\int_0^t f(\tau)d\tau=1$

b) $\displaystyle\int_0^t \tau f(t-\tau)d\tau+f(t)=te^t$

c) $f'(t)+\int_0^t f(\tau)d\tau=1-\operatorname{sen}(t),\quad f(0)=0$

d) $f(t)+\int_0^t [f(\tau)+2f'(\tau)]\,(t-\tau)d\tau=(t-2)u(t-2),\quad f(0)=0$

Actividad 6.10.13.

Aplicación a un circuito eléctrico [6]**.** Consideren un circuito RLC, resistencia R, inductancia L y capacitancia C, conectados en serie a una fuente de fuerza electromotriz $V(t)$ donde t es el tiempo; se supone que la carga en el capacitor y la corriente inicial son cero.

La ecuación integrodiferencial para la corriente $I(t)$:

$$LI'(t)+RI(t)+\frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau=V(t)$$

(i) $V(t)=V_0$, V_0 una constante real

(ii) $V(t)=V_0\operatorname{sen}(wt)$

(iii) $V(t)=V_0\,[u(t-a)-u(t-b)]$

Ver figuras 6.12, 6.13 y 6.14. En los casos (i) y (ii), la entrada $V(t)$ es una función continua entonces la ecuación que modeliza el circuito se puede derivar con respecto a t y resolverse por otros métodos (variación de parámetros, coeficientes indeterminados, etc.). En el caso (iii) los métodos convencionales no se pueden aplicar [9].

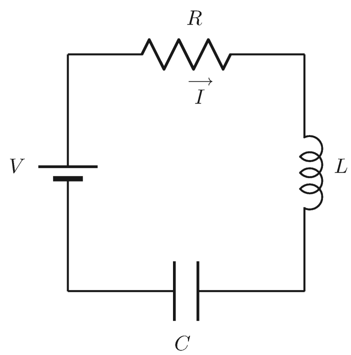


Figura 6.12: fuente (i)

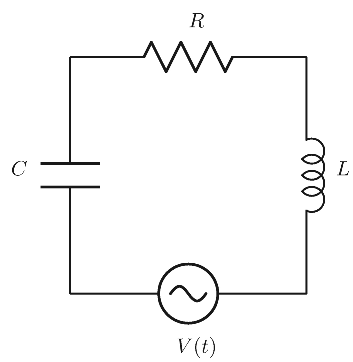


Figura 6.13: fuente (ii)

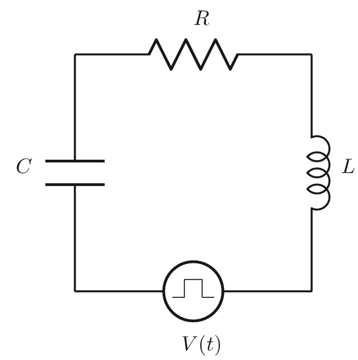


Figura 6.14: fuente (iii)

a) Demuestre resolviendo analíticamente que en el caso (i) para $L = 0$ la salida es

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\, e^{-\frac{t}{CR}}, \quad t \geq 0$$

Observe que en realidad la condición inicial nula está dada en 0^{-}.

b) Corrobore el resultado obtenido en el inciso a) usando transformada de Laplace con wxMaxima mediante el Algoritmo 1.

Algoritmo 1:
/* la ecuación integrodiferencial */
$ecuE : R * I(t) + (1/C) * integrate(I(u), u, 0, t) + L *' diff(I(t), t, 1) = V_0$;
/*aplicamos la transformada de Laplace a ambos miembros y la transformamos en una ecuación algebraica */
$ecu1E : laplace(ecuE, t, s)$;
/* hacemos intervenir las condiciones iniciales */
$ecuEev : ev(ecu1E, I(0) = 0, L = 0)$;
/* resolvemos la ecuación algebraica obtenida */
$ecu2E : solve(ecuEev, laplace(I(t), t, s))$;
/* deshacemos la lista */
$ecu3E : first(ecu2E)$;
/* finalmente obtenemos la solución utilizando el operador inverso */
$ilt(ecu3E, s, t)$;

Observe que transitó un camino análogo al de la resolución analítica. En este caso, también puede encontrar la solución directamente con el comando: $desolve([ecuE], [I(t)])$;

c) Resuelva con transformada de Laplace usando wxMaxima cuando la tensión varía sinusoidalmente (ii) para los valores de los parámetros $L = 0,01$; $R = 100$; $C = 1/1000$; $V = 15$; $W = 6$.

d) Resuelva con transformada de Laplace usando wxMaxima, mediante el Algoritmo 2, para el caso en que la tensión es una diferencia de escalones (iii).

Algoritmo 2:
/* la ecuación integrodiferencial */
$ecuE : R * I(t) + (1/C) * integrate(I(u), u, 0, t) + L *' diff(I(t), t, 1) = E * (unit_step(t - a) - unit_step(t - b));$
/* aplicamos la transformada de Laplace a ambos miembros y la transformamos en una ecuación algebraica */
$ecu1E : laplace(ecuE, t, s);$
/* hacemos intervenir las condiciones iniciales */
$ecuEev : ev(ecu1E, I(0) = 0);$
/*- resolvemos la ecuación algebraica obtenida */
$ecu2E : solve(ecuEev, laplace(I(t), t, s));$
/* deshacemos la lista */
$ecu3E : first(ecu2E);$

En este caso $laplace(I(t), t, s)$ no es un cociente de polinomios, de todos modos puede obtenerse la transformada inversa aplicando ilt a los cocientes de polinomios involucrados y luego usar propiedades de la transformada de Laplace. Este inconveniente que presenta Maxima muestra la necesidad del conocimiento de las propiedades y del método analítico de resolución.

Encuentre la respuesta para los valores de los parámetros $a = 1$; $b = 2$; $L = 0,01$; $R = 100$; $C = 1/1000$; $V = 155$.

Derivada de la transformada de Laplace

Teorema 6.10.14. ***Derivada de la transformada de una función***
Sean $f(t)$, $t \geq 0$, seccionalmente continua y de orden exponencial σ para $t \to \infty$. Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s) \quad \text{para} \quad \mathrm{Re}(s) > \sigma$$

Es decir, agregando la propiedad de linealidad, si conocemos la transformada de una función, también, la de la función multiplicada por un polinomio. Esto sirve para la resolución de algunas ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes polinómicos.
Además,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F^{(n)}(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t), \quad t \geq 0$$

resulta muy conveniente cuando no es sencillo hallar la antitransformada de una función, pero sí la de alguna derivada.

Ejemplo 6.10.15.

a) Calculemos la transformada de Laplace de $g(t) = (t^2 - 4t)\,\mathrm{sen}(t)$.

Si $F(s) = \mathscr{L}\{\text{sen}(t)\} = \dfrac{1}{s^2+1}$, entonces

$$F'(s) = \frac{-2s}{(s^2+1)^2} \quad \text{y} \quad F''(s) = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

Por linealidad y el teorema de la derivada de la transformada aplicado con $n = 2$ en el primer término y $n = 1$ en el segundo:

$$\mathscr{L}\{g(t)\} = \mathscr{L}\{t^2\,\text{sen}(t)\} - 4\,\mathscr{L}\{t\,\text{sen}(t)\} = (-1)^2 F''(s) - 4(-1)^1 F'(s) =$$

$$= \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3} + 4\frac{-2s}{(s^2+1)^2}$$

b) Dada la función real $F(s) = \ln\left(\dfrac{s-2}{s+1}\right)$, $s \in \mathbb{R}$, hallemos $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$.

No encontramos la forma con las herramientas estudiadas anteriormente. Pero por propiedad del logaritmo, $F(s) = \ln(s-2) - \ln(s+1)$, cuya derivada es

$$F'(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1}$$

Hallamos fácilmente su antitransformada:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F'(s)\right\} = e^{2t} - e^{-t}$$

Por otra parte, por el teorema de la derivada de la transformada para $n = 1$:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F'(s)\right\} = (-1)^1 t^1 f(t) = -tf(t)$$

Podemos concluir que

$$-tf(t) = e^{2t} - e^{-t}$$

de donde

$$f(t) = \frac{e^{2t} - e^{-t}}{-t}, \quad t > 0$$

Como $\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0$, definiendo $f(0) = 0$ resulta f continua en $t \geq 0$.

Actividad 6.10.16.

Calcular las transformadas o antitaransformadas:

a) (i) $f_1(t) = (1+t)e^{2t}\,\text{sen}(3t)$ (ii) $f_2(t) = te^{-t}\,\text{sen}^2(t)$

b) (i) $F_1(s) = \text{arctg}\left(\dfrac{3}{s+2}\right)$ (ii) $F_2(s) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{s}\right)$

donde $F_1(s)$ y $F_2(s)$ son funciones reales de variable real.

Actividades complementarias

1) En cada uno de los siguientes casos, determine una función f de manera que la integral sea su integral de Fourier y grafique la función a la cual converge dicha integral.

a) $vp\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_2^4 te^{-i2\pi ts}dt\right]e^{i2\pi ts}ds$

b) $\int_0^\infty \left[\int_2^4 t\cos(2\pi ts)\,dt\right]\cos(2\pi ts)\,ds$

c) $\int_0^\infty \left[\int_2^4 t\,\mathrm{sen}(2\pi ts)\,dt\right]\mathrm{sen}(2\pi ts)\,ds$

2) Considerando que $R(s) = \mathscr{F}\{rec(t)\} = \dfrac{\mathrm{sen}(\pi s)}{\pi s}$, use propiedades para encontrar la transformada de Fourier de $f(t)$.

a) $f(t) = rec\left(\frac{t}{2}\right)$

b) $f(t) = \dfrac{\mathrm{sen}(2\pi t)}{\pi t}$

c) $f(t) = rec(t)\,e^{i100\pi t}$

d) $f(t) = rec(t)\,\mathrm{sen}(100\pi t)$

3) Grafique las siguientes funciones

$f_1(t) = rec\left(\frac{t}{2}\right) t$ $\qquad f_2(t) = \begin{cases} t-1, & 0<t<1 \\ 0, & t>1 \end{cases} \qquad f(-t) = f(t)$

$g_1(t) = \begin{cases} t-3, & 2<t<4 \\ 0, & t<2 \ \vee \ t>4 \end{cases} \qquad g_2(t) = \begin{cases} 1-t, & 1<t<2 \\ t-3, & 2<t<3 \\ 0, & t<1 \ \vee \ t>3 \end{cases}$

a) Para cada una de las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$, verifique que cumple las condiciones suficientes para la existencia de la transformada de Fourier. Halle su transformada de Fourier y represente mediante la integral de Fourier usando las formas adecuadas. Grafique la función a la cual converge dicha integral.

b) Halle $\mathscr{F}\{4g_1(t)\} - 2\mathscr{F}\{g_2(t)\}$ usando el inciso anterior y propiedades.

4) Resuelva usando del método de separación de variables.

a) $T_{xx} + T_{yy} = 0 \qquad 0<x<\infty \ , \ 0<y<\infty$
$\lim_{x\to\infty} T(x,y) = 0, \qquad T(0,y) = \begin{cases} y^3 - 5y^2, & 0<y<5 \\ 0, & y>5 \end{cases}$
$T_y(x,0) = 0, \quad T(x,y)$ está acotada cuando $y \to \infty$.

b) $u_{xx} = u_t \quad x>0, \quad t>0$
$u(0,t) = 0 \qquad |u(x,t)|_{x\to+\infty} < M$
$u(x,0) = \begin{cases} 4-x^2, & 0<x<2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$

5) a) Halle la solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes usando la transformada de Laplace.

$$f'(t) + 3f(t) = \mathrm{senh}(t) \qquad g''(t) + g'(t) - 6g(t) = 4$$

b) Halle las soluciones particulares de las ecuaciones anteriores con las siguientes condiciones: $f(1) = -2$ para la primera y $g(0) = 1, \ \ g(2) = 4$ para la segunda

6) Resuelva usando la transformada de Laplace.

a) $y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0$

b) $y'' - 4y' + 3y = 1 - u(t-2) - u(t-4) + u(t-6), \quad y(0) = y'(0) = 0$

c) $y'' + y = \mathrm{sen}(t)u(t-2\pi), \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0$

d) $h''(t) + 5h'(t) + 6h(t) = 5\delta(t), \quad h(0^-) = 0, \ h'(0^-) = 0$. ¿Qué efecto provoca el impulso en $y'(t)$ cuando $t = 0$?

e) $y''(t) + y(t) = \delta(t - 2\pi)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. ¿Qué efecto provoca el impulso en $y'(t)$ cuando $t = 2\pi$?

f) $\int_0^t (t-\tau) f(\tau) d\tau + f(t) = t$

g) $\int_0^t f(\tau) d\tau = f(t) + 1 + t$

h) $4f'(t) + \pi^2 \int_0^t f(\tau) d\tau = 2\pi \left[1 - u(t-2)\right]$, $f(0) = 0$

i) $tf''(t) - tf'(t) + 2f(t) = 3t$ $\quad f(0) = 0\,, \quad f'(0) = 1$

6.11. Actividades resueltas

Actividad 6.2.4

a) $vp \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{i2\pi ts} ds$ donde $F(s) = \displaystyle\int_{-2}^{1} t^2 e^{-i2\pi ts} dt + \int_{1}^{5} 4 e^{-i2\pi ts} dt$

Suponemos que f es una función que verifica las hipótesis del teorema de existencia y entonces existe su transformada de Fourier:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi ts} dt$$

Como la integral impropia converge, podemos expresarla del siguiente modo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi ts}dt = \int_{-\infty}^{-2} f(t)e^{-i2\pi ts}dt + \int_{-2}^{1} f(t)e^{-i2\pi ts}dt + \int_{1}^{5} f(t)e^{-i2\pi ts}dt +$$
$$+ \int_{5}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi ts}dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{-2} 0.e^{-i2\pi ts}dt + \int_{-2}^{1} t^2 e^{-i2\pi ts}dt + \int_{1}^{5} 4e^{-i2\pi ts}dt + \int_{5}^{\infty} 0.e^{-i2\pi ts}dt$$

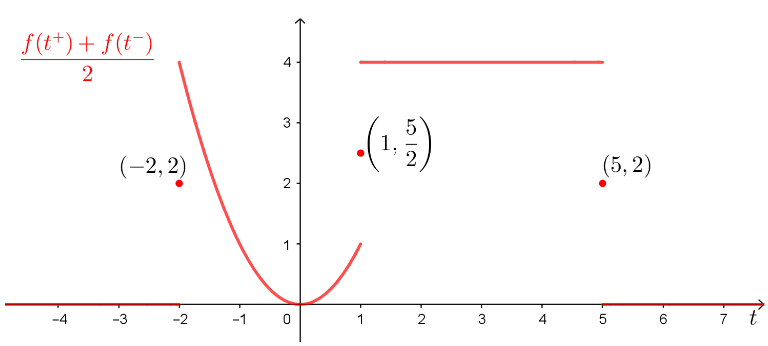
Por lo tanto la función:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si} \quad -2 < t < 1 \\ 4 & \text{si} \quad 1 < t < 5 \\ 0 & \text{si} \quad t < -2 \ \vee \ t > 5 \end{cases}$$

b) Representación de f mediante la integral de Fourier:

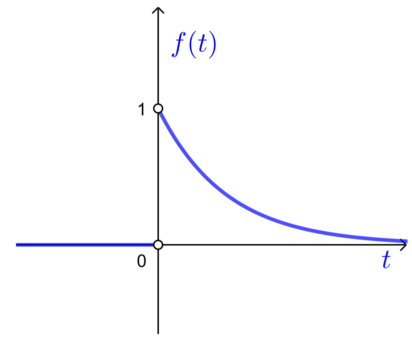
$$vp \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{i2\pi ts} ds = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Gráfica de la función a la cual converge la integral de Fourier de f:



Actividad 6.2.5

Dada $f(t) = u(t)e^{-\alpha t}$; $\alpha > 0$



Verificamos que $f(t)$ cumple las condiciones suficientes para la existencia de la transformada e integral de Fourier.

- $f(t)$ y $f'(t)$ son seccionalmente continuas en cada intervalo finito de la recta real.

- $\int_{-\infty}^{\infty} \left| u(t)e^{-\alpha t} \right| dt = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} dt = \lim\limits_{A \to \infty} \int_{0}^{A} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} < \infty$

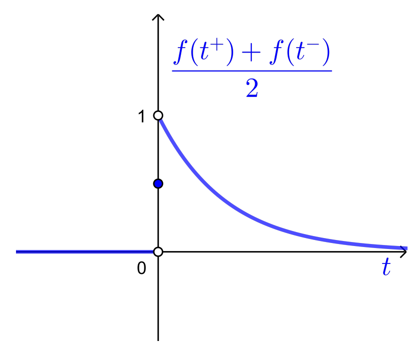
a) Halle su transformada de Fourier.

$$\mathscr{F}\{u(t)e^{-\alpha t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-\alpha t} e^{-2\pi i t s} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t(\alpha + 2\pi i s)} dt = \frac{1}{\alpha + 2\pi i s}$$

b) Represente mediante su integral de Fourier.

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha + 2\pi i s} e^{2\pi i t s} ds$$

Gráfico de la función a la cual converge la Integral de Fourier de $f(t)$:



Actividad 6.2.9

Sea $\phi \in P$ el conjunto de las funciones continuas, entonces $f\phi \in P$.

$$\delta(t - t_0) f(t) \{\phi\} \underbrace{=}_{\text{requisito } 4)} \delta(t - t_0) \{f\phi\} = (f\phi)(t_0) = f(t_0)\phi(t_0)$$

Si consideramos la función constante con valor $f(t_0)$

$$\delta(t - t_0) f(t_0) \{\phi\} \underbrace{=}_{\text{requisito } 4)} \delta(t - t_0) \{f(t_0)\phi\} = f(t_0)\phi(t_0)$$

Por lo tanto tenemos la igualdad de las distribuciones:

$$\delta(t-t_0)f(t) = \delta(t-t_0)f(t_0)$$

Actividad 6.2.12

a) (i) Consideramos cualquier $\phi \in P$,

$$[g_1(t)+g_2(t)]'\{\phi\} = -[g_1(t)+g_2(t)]\{\phi'\} = -g_1(t)\{\phi'\} - g_2(t)\{\phi'\} =$$

$$= g_1'(t)\{\phi\} + g_2'\{\phi\} = \left[g_1'(t)+g_2'(t)\right]\{\phi\}$$

Por lo tanto se verifica la igualdad entre las distribuciones:

$$[g_1(t)+g_2(t)]' = g_1'(t)+g_2'(t)$$

(ii) Consideramos cualquier $\phi \in P$.
Por un lado

$$[f(t)g(t)]'\{\phi\} = -[f(t)g(t)]\{\phi'\} = -g(t)\{f\phi'\} \quad (\dagger)$$

Por el otro

$$\left[f'(t)g(t)+f(t)g'(t)\right]\{\phi\} = \left[f'(t)g(t)\right]\{\phi\} + \left[f(t)g'(t)\right]\{\phi\} = g(t)\left\{f'\phi\right\} + g'(t)\{f\phi\} =$$

$$= g(t)\left\{f'\phi\right\} - g(t)\left\{(f\phi)'\right\} = g(t)\left\{f'\phi\right\} - g(t)\left\{f'\phi + f\phi'\right\} =$$

$$= g(t)\left\{f'\phi\right\} - g(t)\left\{f'\phi\right\} - g(t)\left\{f\phi'\right\} = -g(t)\left\{f\phi'\right\} \quad (\ddagger)$$

De (†) y (‡) resulta la igualdad de las distribuciones:

$$[f(t)g(t)]' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

b) Por la actividad 6.2.9, $e^{-t}\delta(t) = e^{-0}\delta(t) = \delta(t)$; del ejemplo 6.2.11, $u'(t) = \delta(t)$.

Por la propiedad de la derivada del producto de una función ordinaria con una distribución:

$$\left[e^{-t}u(t)\right] = -e^{-t}u(t) + e^{-t}u'(t) = -e^{-t}u(t) + e^{-t}\delta(t) = -e^{-t}u(t) + \delta(t)$$

Actividad 6.3.1

a) Propiedad de traslación en el tiempo: Si $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(s)$ entonces

$$\mathscr{F}\{f(t-a)\} = e^{-2\pi isa}F(s)$$

Demostración Planteamos la transformada por definición:

$$\mathscr{F}\{f(t-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-2\pi ist}dt =$$

Si sustituimos $u = t-a$

$$\mathscr{F}\{f(t-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-2\pi is(u+a)}du =$$

$$\mathscr{F}\{f(t-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-2\pi isa}e^{-2\pi isu}du =$$

Luego

$$\mathscr{F}\{f(t-a)\} = e^{-2\pi isa}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-2\pi isu}du = e^{-2\pi isa}F(s)$$

Actividad 6.3.5

a) Si $f(t) = u(t)e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$, por la actividad 6.2.5, $F(s) = \mathscr{F}\{u(t)e^{-\alpha t}\} = \dfrac{1}{\alpha + 2\pi is}$.

$$g(t) = u(-t)e^{\alpha t} = f(-t)$$

Entonces por la propiedad de similaridad aplicada para $a = -1$:

$$\mathscr{F}\{u(-t)e^{\alpha t}\} = \frac{1}{|-1|}F\left(\frac{s}{-1}\right) = \frac{1}{\alpha + 2\pi i\frac{s}{-1}} = \frac{1}{\alpha - 2\pi is}$$

b)

$$h(t) = e^{-\alpha|t|} = u(-t)e^{\alpha t} + u(t)e^{-\alpha t}$$

Entonces por linealidad

$$H(s) = \mathscr{F}\{e^{-\alpha|t|}\} = \mathscr{F}\left\{u(-t)e^{\alpha t}\right\} + \mathscr{F}\left\{u(t)e^{-\alpha t}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha - 2\pi is} + \frac{1}{\alpha + 2\pi is} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 s^2}$$

c)

$$\mathscr{F}\left\{\frac{1}{\alpha^2 + 4\pi^2 t^2}\right\} = \frac{1}{2\alpha}\mathscr{F}\left\{\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 t^2}\right\} \underbrace{=}_{\text{por inciso b)}} \frac{1}{2\alpha}\mathscr{F}\left\{H(t)\right\} =$$

$$\underbrace{=}_{\text{Propiedad de simetría}} h(-s) = \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|-s|} = \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|s|}$$

Actividad 6.3.7

a) Como

$$\mathscr{F}\left\{\delta(t-a)\right\} = e^{-i2\pi as} = \Delta_a(s)$$

por simetría

$$\mathscr{F}\left\{\Delta_a(-t)\right\} = \delta(s-a)$$

Es decir

$$\mathscr{F}\left\{e^{i2\pi at}\right\} = \delta(s-a)$$

b) Escribimos $\operatorname{sen}(2\pi at) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i2\pi at} - e^{-i2\pi at}\right)$
Entonces

$$\mathscr{F}\left\{\operatorname{sen}(2\pi at)\right\} = \frac{1}{2i}\mathscr{F}\left\{e^{i2\pi at}\right\} - \frac{1}{2i}\mathscr{F}\left\{e^{-i2\pi at}\right\} = \frac{1}{2i}\delta(s-a) - \frac{1}{2i}\delta(s+a)$$

c) Como

$$\mathscr{F}\left\{\delta(t)\right\} = 1 = \Delta_0(s)$$

resulta que $\Delta_0(-t) = 1$ entonces por simetría

$$\mathscr{F}\left\{1\right\} = \delta(s)$$

Luego, por linealidad

$$\mathscr{F}\left\{1+3\,\delta(t+2)\right\}=\mathscr{F}\left\{1\right\}+3\,\mathscr{F}\left\{\delta(t+2)\right\}=\delta(s)+3\,e^{-i2\pi(-2)s}=\delta(s)+3\,e^{i4\pi s}$$

Actividad 6.4.6

a) $\displaystyle\int_0^\infty G(s)\cos(2\pi ts)\,ds$ donde $\displaystyle G(s)=\int_1^2 t^2\cos(2\pi ts)\,dt$

Si $f(t)$ es una función par que verifica las condiciones del teorema de existencia de Fourier y $F(s)=\mathscr{F}\{f(t)\}$

$$F(s)=2\int_0^\infty f(t)\cos(2\pi ts)\,dt$$

y

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=2\int_0^\infty F(s)\cos(2\pi ts)\,ds$$

entonces

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=2\int_0^\infty\underbrace{\left(2\int_0^\infty f(t)\cos(2\pi ts)\,dt\right)}_{F(s)}\cos(2\pi ts)\,ds=$$

$$=\int_0^\infty\underbrace{\left(\int_0^\infty 4f(t)\cos(2\pi ts)\,dt\right)}_{G(s)}\cos(2\pi ts)\,ds$$

Como

$$G(s)=\int_0^\infty 4f(t)\cos(2\pi ts)\,dt=\int_1^2 t^2\cos(2\pi ts)\,dt$$

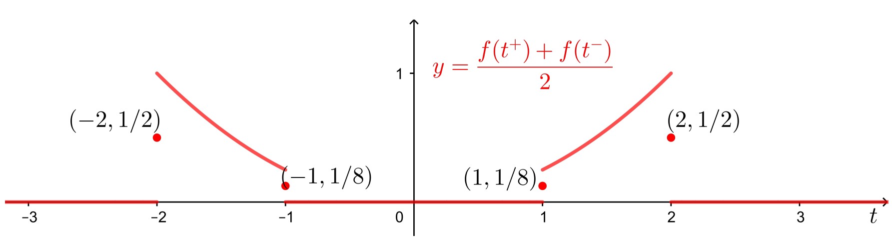
resulta

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{t^2}{4} & \text{si}\quad 1<t<2\ \vee\ -2<t<-1\\[2ex] 0 & \text{si}\quad t<-2\ \ \vee\ \ -1<t<1\ \ \vee\ \ t>2\end{cases}$$

y

$$\int_0^\infty G(s)\cos(2\pi ts)\,ds=\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}\qquad\forall t\in\mathbb{R}$$

Finalmente, la gráfica de la función a la cual converge la integral dada:



b) $\displaystyle\int_0^\infty G(s)\,\mathrm{sen}(2\pi ts)\,ds$ donde $\displaystyle G(s)=\int_1^2 t^2\,\mathrm{sen}(2\pi ts)\,dt$

Si $f(t)$ es una función impar que verifica las condiciones del teorema de existencia de Fourier y $F(s) = \mathscr{F}\{f(t)\}$

$$F(s) = -2i \int_0^\infty f(t) \operatorname{sen}(2\pi ts)\, dt$$

y

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = 2i \int_0^\infty F(s) \operatorname{sen}(2\pi ts)\, ds$$

entonces

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = 2i \int_0^\infty \underbrace{\left(-2i \int_0^\infty f(t) \operatorname{sen}(2\pi ts)\, dt \right)}_{F(s)} \operatorname{sen}(2\pi ts)\, ds =$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\left(\int_0^\infty 4f(t) \operatorname{sen}(2\pi ts)\, dt \right)}_{G(s)} \operatorname{sen}(2\pi ts)\, ds$$

Como

$$G(s) = \int_0^\infty 4f(t) \operatorname{sen}(2\pi ts)\, dt = \int_1^2 t^2 \operatorname{sen}(2\pi ts)\, dt$$

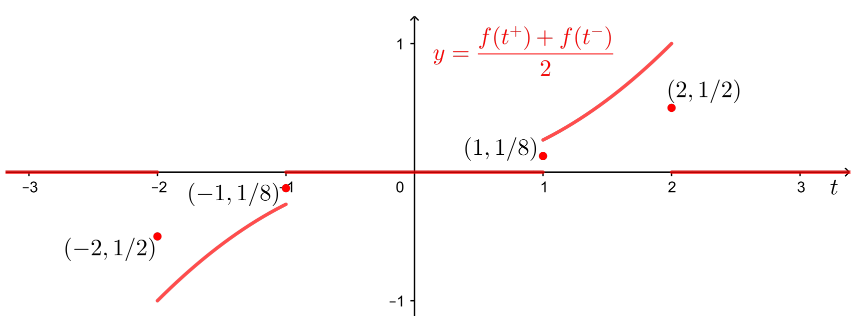
resulta

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{4} & \text{si } \ 1 < t < 2 \\[2ex] \dfrac{-t^2}{4} & \text{si } \ -2 < t < -1 \\[2ex] 0 & \text{si } \ t < -2 \ \vee \ -1 < t < 1 \ \vee \ t > 2 \end{cases}$$

y

$$\int_0^\infty G(s) \operatorname{sen}(2\pi ts)\, ds = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Finalmente, la gráfica de la función a la cual converge la integral dada:



Actividad 6.5.4

b) $f(t) = u(t)e^{-2t}$ y $g(t) = u(t)e^{-3t}$, el producto de convolución:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)e^{-2\tau}u(t-\tau)e^{-3(t-\tau)}d\tau$$

Puesto que $u(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau < 0 \\ 1 & \text{si } \tau \geq 0 \end{cases}$ y $u(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } t-\tau < 0 \\ 1 & \text{si } t-\tau \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau > t \\ 1 & \text{si } \tau \leq t \end{cases}$

$$f(t) * g(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t e^{-2\tau} e^{-3(t-\tau)} d\tau & \text{si } t > 0 \\ \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-2t} - e^{-3t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Es decir:

$$f(t) * g(t) = u(t)[e^{-2t} - e^{-3t}]$$

Actividad 6.5.5

a) $f(t) = u(t)e^{-2t}, \ g(t) = u(t)e^{-3t}$

Recordemos que $\mathscr{F}\{u(t)e^{-\alpha t}\} = \dfrac{1}{\alpha + 2\pi i s}, \ \alpha > 0$. Entonces, por el teorema de convolución:

$$\mathscr{F}\{f(t) * g(t)\} = \mathscr{F}\{f(t)\}\mathscr{F}\{g(t)\} = \frac{1}{(2+2\pi i s)(3+2\pi i s)}$$

Actividad 6.5.6

Escribiendo $\cos(2\pi a t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{i2\pi a t} + e^{-i2\pi a t}\right)$ resulta

$$G(s) = \mathscr{F}\left\{\cos(2\pi a t)\right\} = \frac{1}{2}\mathscr{F}\left\{e^{i2\pi a t}\right\} + \frac{1}{2}\mathscr{F}\left\{e^{-i2\pi a t}\right\} = \frac{1}{2}\delta(s-a) + \frac{1}{2}\delta(s+a)$$

Entonces

$$F(s) = G(s)H(s) = \frac{1}{2}\delta(s-a)H(s) + \frac{1}{2}\delta(s+a)H(s)$$

Por actividad 6.2.9: $\delta(s-a)H(s) = \delta(s-a)H(a)$ y $\delta(s+a)H(s) = \delta(s+a)H(-a)$
de donde

$$F(s) = G(s)H(s) = \frac{1}{2}\delta(s-a)H(a) + \frac{1}{2}\delta(s+a)H(-a)$$

Actividad 6.6.3

El problema puede representarse:

$$(1) \ u_{xx} = u_t \qquad t > 0 \qquad x > 0$$

$$\begin{cases} (2) & u(0,t) = 0 & t > 0, & \\ (3) & |u(x,t)| < M & t > 0, & x > 0 \\ (4) & u(x,0) = g(x) & x > 0 & \end{cases}$$

Proponemos la solución

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

y separando las variables obtenemos (u estará acotada, en general, si lo están X y T)

$$\begin{aligned} x''(x) - \lambda X(x) =& 0, \quad X(0) = 0 \ , \quad |X(x)| < M_1 \ , \quad x > 0 \\ T'(t) - \lambda T(t) =& 0, \quad |T(t)| < M_2 \ , \quad t > 0 \end{aligned}$$

Es sencillo verificar que $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$ producen soluciones triviales.

Si $\lambda = -\alpha^2 < 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0$

- $X''(x) + \alpha^2 X(x) = 0$ tiene solución $X(x) = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \operatorname{sen}(\alpha x)$
  la condición $X(0) = 0$ implica que $X_\alpha(x) = C(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha x)$
  y cumple la condición de ser acotada.

- $T'(t) + \alpha^2 T(t) = 0$ tiene solución $T_\alpha(t) = D(\alpha) e^{-\alpha^2 t}$
  que cumple la condición de ser acotada

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0,$ hay una solución de (1) con las condiciones (2) y (3):

$$u_\alpha(x,t) = G(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha x) e^{-\alpha^2 t}$$

En este caso, el principio de superposición consiste en una integración con respecto al parámetro α real positivo:

$$u(x,t) = \int_0^\infty u_\alpha(x,t) d\alpha$$

Es decir

$$u(x,t) = \int_0^\infty G(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha x) e^{-\alpha^2 t} d\alpha$$

será solución del problema original si existe $G(\alpha)$ que verifique la condición (4):

$$u(x,0) = \int_0^\infty G(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha x) d\alpha = g(x) \ , \qquad x > 0$$

Para encontrar G recordemos la transformada e integral de Fourier: Si f y f' son funciones seccionalmente continuas en cada intervalo finito de la recta real, f es absolutamente integrable y es función impar, entonces para cada número real x:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = 2i \int_0^\infty \left[-2i \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen}(2\pi x s) dx \right] \operatorname{sen}(2\pi x s) ds$$

La expresión entre corchetes es la transformada de Fourier de f.

La expresión anterior puede escribirse:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty 4 f(x) \operatorname{sen}(2\pi x s) dx \right] \operatorname{sen}(2\pi x s) ds$$

Si hacemos la sustitución $\quad \alpha = 2\pi s,$

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{4}{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(\alpha x) dx \right] \operatorname{sen}(\alpha x) d\alpha$$

Volviendo al problema, g es una función definida en $(0, +\infty)$, puede extenderse en forma impar del siguiente modo: $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \ \ x > 0 \\ -g(-x) & \text{si} \ \ x < 0 \end{cases}$

Además si g es continua, para $x > 0$ queda:

$$g(x) = \int_0^\infty \underbrace{\left[\int_0^\infty \frac{4}{2\pi} g(x) \operatorname{sen}(\alpha x) dx \right]}_{G(\alpha)} \operatorname{sen}(\alpha x) d\alpha$$

Entonces, la función u que es solución al problema es

$$u(x,t) = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{4}{2\pi} g(x) \operatorname{sen}(\alpha x) dx \right] \operatorname{sen}(\alpha x) e^{-\alpha^2 t} d\alpha$$

En este caso, $u(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1-x, & , \ 0 < x < 1 \\ 0, & , \ x > 1 \end{cases}$, $\quad G(\alpha) = \dfrac{2(\alpha - \operatorname{sen}\alpha)}{\pi\alpha^2}$
y la solución al problema es

$$u(x,t) = \int_0^\infty \frac{2(\alpha - \operatorname{sen}\alpha)}{\pi\alpha^2} \operatorname{sen}(\alpha x) e^{-\alpha^2 t} d\alpha$$

Actividad 6.8.7

Sea $f(t) = e^{at}, \ t \geq 0$, donde $a = a_1 + ia_2$ es una constante compleja.

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{at} e^{-st} dt =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{(a-s)t} dt = \lim_{A\to\infty} \left. \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right|_0^A = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{(a-s)A} - 1}{a-s} (\dagger)$$

Como

$$e^{(a-s)A} = e^{(a_1-s_1)A + i(a_2-s_2)A} = e^{(a_1-s_1)A} \underbrace{\cos[(a_2-s_2)A]}_{\text{acotada}} + ie^{(a_1-s_1)A} \underbrace{\operatorname{sen}[(a_2-s_2)A]}_{\text{acotada}}$$

dado que

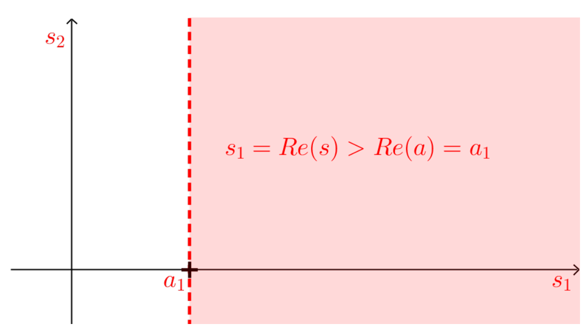
$$\lim_{A\to\infty} e^{(a_1-s_1)A} = 0 \quad \text{cuando} \quad a_1 - s_1 < 0$$

resulta

$$\lim_{A\to\infty} e^{(a-s)A} = 0 \quad \text{cuando} \quad \operatorname{Re}(a) - \operatorname{Re}(s) < 0$$

Volviendo a $(\dagger)$:

$$F(s) = \mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \ \text{si} \ \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$$



Considerando $s, a \in \mathbb{R}$ entonces $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$ si $s > a$.

Actividad 6.9.5

Podemos escribir

$$\frac{s}{s^2+2s+10} = \frac{s}{(s+1)^2+9} = \frac{(s+1)-1}{(s+1)^2+9} = \frac{s+1}{(s+1)^2+9} - \frac{1}{(s+1)^2+9}$$

Entonces

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+9} - \frac{1}{3}\frac{3}{(s+1)^2+9}$$

Recordando que

$$\mathscr{L}\{\cos(3t)\} = \frac{s}{s^2+3^2}$$

$$\mathscr{L}\{\operatorname{sen}(3t)\} = \frac{3}{s^2+3^2}$$

por la propiedad de traslación en el dominio de la transformada con $a=-1$ resulta

$$f(t) = \cos(3t)e^{-t} - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t)e^{-t}, \quad t \geq 0$$

Actividad 6.9.6

b) Ayuda: $\operatorname{senh}(3t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{3t} - e^{-3t}\right)$

c) Ayuda: $\dfrac{s}{(s+3)^2} = \dfrac{(s+3)-3}{(s+3)^2} = \dfrac{1}{s+3} - \dfrac{3}{(s+3)^2}$

Actividad 6.9.9

c) Ayuda:

$$t^2u(t-3) = [(t-3)+3]^2u(t-3) = (t-3)^2u(t-3) + 6(t-3)u(t-3) + 9u(t-3)$$

Calcule la transformada aplicando linealidad y la propiedad de traslación en el tiempo.

d) Podemos escribir

$$F(s) = \frac{e^{-4s}}{(s-3)^2} = e^{-4s}\ \frac{1}{(s-3)^2}$$

Considerando que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$$

por el teorema de la traslación en la transformada para $a=3$,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} = te^{3t}$$

entonces por el teorema de la traslación en el tiempo para $a=4$, la antitransformada de $F(s)$ es la función te^{3t}, pero corrida y activada en $t=4$, es decir

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-4s}\ \frac{1}{(s-3)^2}\right\} = u(t-4)(t-4)e^{3(t-4)} \quad t \geq 0$$

Actividad 6.10.5

a) $f'(t) + 3f(t) = 4t, \quad f(0) = 1$
Aplicamos la transformada de Laplace a ambos miembros:

$$\mathscr{L}\{f'(t) + 3f(t)\} = \mathscr{L}\{4t\}$$

por la propiedad de linealidad:

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} + 3\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{4t\}$$

Llamamos $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ y reemplazamos $\mathscr{L}\{f'(t)\}$ por su expresión equivalente, obtenemos la ecuación algebraica:

$$sF(s) - f(0) + 3F(s) = \mathscr{L}\{4t\}$$

como $f(0) = 1$ y $\mathscr{L}\{4t\} = \dfrac{4}{s^2}$:

$$sF(s) - 1 + 3F(s) = \frac{4}{s^2}$$

Resolvemos la ecuación con incógnita $F(s)$ en el dominio de la transformada:

$$F(s)(s+3) = \frac{4}{s^2} + 1$$

$$F(s) = \frac{4+s^2}{s^2(s+3)}$$

Para hallar la solución de la ecuación original con incógnita $f(t)$ en el dominio del tiempo debemos calcular $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$. Como $F(s)$ no tiene antitransformada conocida y es un cociente de polinomios, usaremos el método de fracciones parciales (lo convertimos en suma de términos que tienen antitransformadas inmediatas):

$$\frac{4+s^2}{s^2(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+3} = \frac{As(s+3) + B(s+3) + Cs^2}{s^2(s+3)} = \frac{(A+C)s^2 + (3A+B)s + B3}{s^2(s+3)}$$

Los denominadores son iguales, entonces, para que se verifique la igualdad los polinomios de los numeradores deben ser iguales. Es decir:

$$\begin{cases} A + C = & 1 \\ 3A + B = & 0 \\ B3 = & 4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales: $A = -\dfrac{4}{9}, \quad B = \dfrac{4}{3}, \quad C = \dfrac{13}{9}$.

Concluyendo:

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{4}{9}}{s} + \frac{\frac{4}{3}}{s^2} + \frac{\frac{13}{9}}{s+3}\right\} = -\frac{4}{9} + \frac{4}{3}t + \frac{13}{9}e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

b) $Y(s) = e^{-s}\dfrac{1}{s+3} + \dfrac{2}{s+3}$

$$y(t) = u(t-1)e^{-3(t-1)} + 2e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

El efecto que provoca el impulso unitario es un salto de $y'(t)$ en $t = 1$.

d) $y^{(4)}(t) - y(t) = 0, \quad y(0) = y'(0) = y^{(3)}(0) = 0, \;\; y''(0) = -1$

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos miembros:

$$\mathscr{L}\{y^{(4)}(t) - y(t)\} = \mathscr{L}\{0\}$$

por la propiedad de linealidad:

$$\mathscr{L}\{y^{(4)}(t)\} - \mathscr{L}\{y(t)\} = \mathscr{L}\{0\} \quad (\dagger)$$

Llamamos $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$ y usamos la propiedad de la transformada de la derivada:

$$\mathscr{L}\{y^{(4)}(t)\} = s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) = s^4Y(s) + s$$

Reemplazando en la ecuación diferencial ($\dagger$):

$$s^4Y(s) + s - Y(s) = 0$$

$$Y(s)(s^4 - 1) + s = 0$$

$$Y(s) = \frac{-s}{(s^4 - 1)}$$

Debemos hallar la solución de la ecuación original con incógnita $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$ pero como $Y(s)$ no tiene antitransformada conocida y es un cociente de polinomios, usaremos el método de fracciones parciales y así quedará expresada como suma de términos que tienen antitransformadas inmediatas:

$$Y(s) = \frac{-s}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

Resolviendo llegamos a: $A = -\dfrac{1}{4}$, $\quad B = -\dfrac{1}{4}$, $\quad C = \dfrac{1}{2}$, $\quad D = 0$, $\quad$ entonces

$$Y(s) = -\frac{1}{4(s-1)} - \frac{1}{4(s+1)} + \frac{s}{2(s^2+1)}$$

$$y(t) = -\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

$$y(t) = -\frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos(t) \quad t \geq 0$$

Actividad 6.10.11

b) Aplicando el teorema de la convolución:

$$\mathscr{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\,\mathscr{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t \underbrace{\cosh(3\tau)}_{f(\tau)=\cosh(3\tau)} \quad \underbrace{1}_{g(t-\tau)=1} d\tau\right\} = \mathscr{L}\{\cosh(3t) * 1\} =$$

$$= \mathscr{L}\left\{\cosh(3t)\right\}\mathscr{L}\left\{1\right\} = \frac{s}{s^2-9}\,\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2-9}$$

c) Si bien en este caso es posible usar fracciones simples, aplicaremos el teorema de convolución: $\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)G(s)\right\} = \displaystyle\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = f(t)*g(t)$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{s^4-16} = \frac{1}{s^2-4}\,\frac{1}{s^2+4}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4-16}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-4}\,\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

Considerando que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-4}\right\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{senh}(2t)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2t)$$

resulta:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-4}\,\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2t) * \frac{1}{2}\,\mathrm{senh}(2t) = \frac{1}{4}\int_0^t \mathrm{senh}(2\tau)\,\mathrm{sen}(2(t-\tau))d\tau =$$

$$= \frac{e^{-2t}\left(e^{4t}-1\right)}{32} - \frac{\mathrm{sen}\,(2t)}{16} \quad t \geq 0$$

Actividad 6.10.12

b) $\displaystyle\int_0^t \tau f(t-\tau)d\tau + f(t) = te^t$

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos miembros:

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t \tau f(t-\tau)d\tau + f(t)\right\} = \mathscr{L}\{te^t\}$$

por la propiedad de linealidad:

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t \tau f(t-\tau)d\tau\right\} + \mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{te^t\} \tag{6.1}$$

Llamamos $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y aplicando el teorema de la transformada de la convolución de funciones y la propiedad de traslación en el dominio de la transformada:

$$\mathscr{L}\left\{t * f(t)\right\} + F(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\frac{F(s)}{s^2} + F(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

Entonces:

$$F(s) = \frac{s^2}{(s-1)^2(s^2+1)}$$

Como $F(s)$ no tiene antitransformada conocida y es un cociente de polinomios podemos usar el método de fracciones parciales:

$$\frac{s^2}{(s-1)^2(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

Resolviendo nos queda: $A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2},\ C = -\frac{1}{2},\ D = 0$ entonces:

$$\frac{s^2}{(s-1)^2(s^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}$$

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\big\{F(s)\big\} = \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s-1}\Big\} + \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{(s-1)^2}\Big\} - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{s}{s^2+1}\Big\}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}\cos t$$

d) $f(t) + \int_0^t [f(\tau) + 2f'(\tau)](t-\tau)d\tau = (t-2)u(t-2)\ , \qquad f(0) = 0$

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos miembros:

$$\mathscr{L}\left\{f(t) + \int_0^t [f(\tau) + 2f'(\tau)](t-\tau)d\tau\right\} = \mathscr{L}\big\{(t-2)u(t-2)\big\}$$

por la propiedad de linealidad:

$$\mathscr{L}\big\{f(t)\big\} + \mathscr{L}\Big\{\int_0^t [f(\tau) + 2f'(\tau)](t-\tau)d\tau\Big\} = \mathscr{L}\big\{(t-2)u(t-2)\big\}$$

Llamamos $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y aplicando el teorema de la transformada de la convolución de funciones y la propiedad de traslación en el dominio del tiempo:

$$F(s) + \mathscr{L}\Big\{[f(t) + 2f'(t)] * t\Big\} = \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

$$F(s) + \mathscr{L}\big\{f(t) + 2f'(t)\big\}\mathscr{L}\big\{t\big\} = \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

$$F(s) + \Big[\mathscr{L}\big\{f(t)\big\} + 2\mathscr{L}\big\{f'(t)\big\}\Big]\mathscr{L}\big\{t\big\} = \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

$$F(s) + \Big[F(s) + 2sF(s)\Big]\frac{1}{s^2} = \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

$$\frac{F(s)(s+1)^2}{s^2} = \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\big\{F(s)\big\} = \mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{e^{-2s}}{(s+1)^2}\Big\} = g(t-2)u(t-2)$$

por propiedad de traslación en el dominio del tiempo, donde

$$g(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} e^{-t} = te^{-t}$$

Luego

$$f(t) = (t-2)e^{-(t-2)}u(t-2) \quad t \geq 0$$

Actividad 6.10.16

a) (i) $\mathscr{L}\left\{(1+t)e^{2t}\operatorname{sen}(3t)\right\} = \mathscr{L}\left\{e^{2t}\operatorname{sen}(3t)\right\} + \mathscr{L}\left\{te^{2t}\operatorname{sen}(3t)\right\}$
Calcule primero $\mathscr{L}\left\{e^{2t}\operatorname{sen}(3t)\right\}$ usando la propiedad de traslación en el dominio de la transformada y en el segundo término aplique el teorema de la derivada de la transformada.

(ii) $\mathscr{L}\left\{te^{-t}\operatorname{sen}^2(t)\right\}$
Considere la identidad $\operatorname{sen}^2(t) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2t)\right]$

Actividades complementarias

Ejercicio 2

a) Similaridad.
b) El inciso a) y simetría.
c) Traslación en la frecuencia.
d) Considere $\text{sen}(100\pi t) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i100\pi t} - e^{-i100\pi t}\right)$, calcule la transformada de Fourier usando linealidad y traslación en la frecuencia.

Ejercicio 6

d) $H(s) = \dfrac{5}{s+2} - \dfrac{5}{s+3}$

$h(t) = 5\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right), \quad t \geq 0$

El efecto que provoca el impulso unitario es un salto de $h'(t)$ en $t = 0$.

e) $Y(s) = \dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$

$y(t) = \cos(t) + \text{sen}(t - 2\pi)u(t - 2\pi), \quad t \geq 0$

El efecto que provoca el impulso unitario es un salto de $y'(t)$ en $t = 2\pi$.

i) Para resolver la ecuación diferencial primero aplicamos la transformada de Laplace y la propiedad de linealidad a ambos miembros:

$$\mathscr{L}\left\{tf''(t)\right\} - \mathscr{L}\left\{tf'(t)\right\} + 2\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{3t\right\} \qquad (\dagger)$$

Luego el teorema de la derivada de la transformada (llamamos $\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$):

$$\mathscr{L}\left\{tf''(t)\right\} = (-1)^1 \frac{d}{ds}\mathscr{L}\left\{f''(t)\right\} = -\frac{d}{ds}\left[s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\right] =$$

$$= -\frac{d}{ds}\left[s^2F(s) - 1\right] = -2sF(s) - s^2F'(s)$$

Es importante observar que la condición $f'(0) = 1$ no se usó pues $\frac{d}{ds}\left[f'(0)\right] = 0$ cualquiera sea el valor de $f'(0)$.

$$\mathscr{L}\left\{tf'(t)\right\} = (-1)^1 \frac{d}{ds}\mathscr{L}\left\{f'(t)\right\} = -\frac{d}{ds}\left[sF(s) - sf(0)\right] = -\frac{d}{ds}\left[sF(s)\right] = -F(s) - sF'(s)$$

Reemplazando en $(\dagger)$:

$$-2sF(s) - s^2F'(s) + F(s) + sF'(s) + 2F(s) = (-s^2 + s)F'(s) + (-2s + 3)F(s) = \frac{3}{s^2}$$

Es una ecuación diferencial lineal de primer orden (EDL1)

$$F'(s) + \frac{-2s+3}{-s^2+s}F(s) = \frac{3}{s^2(-s^2+s)} \qquad (\ddagger)$$

Recordemos que la solución de una EDL1 de la forma $F'(s) + P(s)F(s) = Q(s)$ es

$$F(s) = e^{-\int P(s)ds}\left[Q(s)e^{\int P(s)ds} + C\right]$$

Aplicando a la ecuación (‡):

$$F(s) = \frac{3-C}{s^3} + \frac{C}{s^2}$$

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3-C}{s^3}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{C}{s^2}\right\}$$

$$f(t) = t^2\ \frac{3-C}{2} + Ct$$

Ahora consideramos la condición $f'(0) = 1$ y resulta $C = 1$.

La solución de la ecuación diferencial original es

$$f(t) = t^2 + t, \quad t \geq 0$$

Referencias

[1] Alonso Roa, D. (2019). *Logaritmos y número e. Una mirada exponencial a la realidad.* EMSE EDAPP SL y Prisanoticias Colecciones.

[2] Asimov, I. (1998). *De los números y su historia.* Lidium.

[3] Churchill, J.V. (1966). *Series de Fourier y Problemas de Contorno.* (2^a ed.). McGraw Hill.

[4] Churchill, J.V., Brown, J.W. (1992). *Variable Compleja y Aplicaciones.* (5^a ed.). McGraw Hill.

[5] Glyn J. (2002). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería.* (2da. Edición). Pearson Educación, Prentice Hall.

[6] Gonzalez C.Z., Kleiman D.L. y Caraballo H. (2014). *Transformada de Laplace: una alternativa didáctica.* Actas del XVIII EMCI Nacional y X Internacional (Enseñanza de Matemática en Carreras de Ingeniería).

[7] Klimovsky, G., Boido, G. (2005). *Las desventuras del conocimiento matemático. Filosofía de la Matemática: una introducción.* AZ editora SA.

[8] Kolmogorov A. N., Fomin S. V. (1975). *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.* (2^a ed.). Mir.

[9] Kreysig, E. (2003). *Matemáticas avanzadas para Ingeniería.* (3^a ed., Vol.1-2). Limusa Wiley.

[10] Lang, S. (1999). *Complex Analysis.* (4^a ed.). Springer-Verlag.

[11] Luque, B. (2019). *Números Complejos. Los números imaginarios son reales.* Bonalletra Alcompas S.L.

[12] Oppenheim A.V., Willsky A.S., Nawad S.H. (1998). *Señales y Sistemas.* (2^a ed.). McGraw Hill.

[13] Papp, D. (1996). *Historia de las ciencias.* Editorial Andrés Bello.

[14] Rey Pastor, J., Babini, J. (1997). Historia de la Matemática, del Renacimiento a la actualidad. (Vol.2). Editorial Gedisa SA.

[15] Scarabino, A. (Accedido el 20 de marzo de 2021). *Transformación de Joukowsky. Apunte de cátedra de Mecánica de Fluidos I para Ingeniería Aeroespacial, Facultad de Ingeniería, UNLP.* Recuperado de www.ing.unlp.edu.ar/catedras/A0011/descargar.php?secc=0&id=A0011&id_inc=34

[16] Sokal, A., Bricmont, J. (1998). *Imposturas Intelectuales*. Paidós Ibérica.

[17] Stewart, J. (1999). *Cálculo multivariable*. (3^a ed.). Thomson.

Bibliografía ampliatoria

Alfonseca, M. (2019). *Todo es número. ¿Es matemática la realidad?* EMSE EDAPP SL y Prisanoticias Colecciones.

Bracewell, R.L. (1978). *Fourier Transform and Its Applications*. (2nd ed.). McGraw Hill.

Conway, J. (1978). *Functions of One Complex Variable*. (2^a ed.). Springer-Verlag.

Edwards, C. H. Jr., Penny, D. E. (1993). *Ecuaciones Diferenciales Elementales y Problemas con Condiciones en la Frontera*. (3^a ed.). Prentice Hall.

Maestre Blanco, N. A. (2019). *Este no es el título de este libro. Paradojas, axiomas y fundamentos de la Matemática*. EMSE EDAPP SL y Pisanoticias Colecciones.

Markushevich A. (1965). *Theory of Functions of a Complex Variable*. (Vol.1). Prentice-Hall.

Mateos Maroto, F. J. (2019). *En el principio fue el número*. EMSE EDAP.

Navarro Sandalinas, J. (2018). *Euler. Números al límite*. RBA Coleccionables, S.A.U.

Rey Pastor, J., Babini, J. (1997). *Historia de la Matemática, de la antigüedad a la Baja Edad Media*. (Vol.1). Editorial Gedisa SA.

Wunsch, A. D. (1999). *Variable Compleja con Aplicaciones*. (2^a ed.). Pearson Educación.

Zill, Denis G. (2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. (9^a ed.). Cengage Learning.

Los autores

Coordinadores

Kleiman, Diana Leonor

Dra. en Ciencias Exactas, Área Matemática, 2015, Universidad Nacional de La Plata (UNLP), Argentina; Esp. en Tecnología Informática Aplicada en Educación, 2004, UNLP; Lic. en Matemática Pura, 1985, UNLP. Profesora Titular Dedicación Exclusiva del área Matemáticas Especiales, cátedras Matemática D y D1, Facultad de Ingeniería (FI), UNLP. Integrante de la Unidad de Investigación, Desarrollo, Extensión y Transferencia, FI, UNLP: Matemática Aplicada. Desde el año 1986 docente en FI, UNLP y en diversos cursos de Matemática en Facultades de la UNLP; desde 2009 integrante de proyectos de investigación relacionados con Ecuaciones Diferenciales no lineales y su aplicación a circuitos eléctricos, Facultades de Ciencias Exactas e Ingeniería, UNLP. Egresada Distinguida de Posgrado del año 2015 de la carrera Doctorado de la Facultad de Ciencias Exactas, Área Matemática, UNLP.

Argeri, Jorge Gastón

Especialista en Estadística Matemática, 2009, Universidad de Buenos Aires, Argentina; Licenciado en Matemática, 1996, Universidad Nacional de La Plata (UNLP), Argentina. Profesor Adjunto con Dedicación Semiexclusiva en las cátedras Matemática D y D1, Profesor Adjunto con Dedicación Semiexclusiva en la cátedra Matemática B y Profesor Adjunto con Dedicación Simple en la cátedra Matemática B, Facultad de Ingeniería (FI), UNLP. Integrante de la Unidad de Investigación, Desarrollo, Extensión y Transferencia, FI, UNLP: Matemática Aplicada. Desde 1994, docente en cursos de Matemática en diversas universidades nacionales. Distinción Municipalidad de La Plata al mejor promedio de la Facultad de Ciencias Exactas, UNLP, correspondiente a la promoción 1996.

Autores

Argeri, Jorge Gastón

Especialista en Estadística Matemática, 2009, Universidad de Buenos Aires, Argentina; Licenciado en Matemática, 1996, Universidad Nacional de La Plata (UNLP), Argentina. Profesor Adjunto con Dedicación Semiexclusiva en las cátedras Matemática D y D1, Profesor Adjunto con Dedicación Semiexclusiva en la cátedra Matemática B y Profesor Adjunto con Dedicación Simple en la cátedra Matemática B, Facultad de Ingeniería (FI), UNLP. Integrante de la Unidad de Investigación, Desarrollo, Extensión y Transferencia, FI, UNLP: Matemática Aplicada. Desde 1994, docente en cursos de Matemática en diversas universidades nacionales. Distinción Municipalidad de La Plata al mejor promedio de la Facultad de Ciencias Exactas, UNLP, correspondiente a la promoción 1996.

González, Cecilia Zulema

Doctora en Ciencias Exactas, Área Matemática, 2017, Facultad de Ciencias Exactas (FCE), Universidad Nacional de La Plata (UNLP). Carrera Docente Universitaria, 2004, UNLP. Licenciada en Matemática Aplicada, 1981, FCE, UNLP. Profesora Adjunta dedicación semiexclusiva del área Matemáticas Especiales, cátedra Matemática D, Facultad de Ingeniería (FI), UNLP. Profesora Titular dedicación semiexclusiva en la cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales (FCAyF), UNLP. Integrante de varios proyectos de investigación en temas relacionados con las Ecuaciones Diferenciales Implícitas no lineales y su aplicación a circuitos eléctricos, en FCE y FI, UNLP. Docente-investigador categoría III. Participante en varios proyectos de extensión en FCAyF y FI, UNLP. Integrante de la Unidad de Investigación, Desarrollo, Extensión y Transferencia, FI, UNLP: Matemática Aplicada.

Kleiman, Diana Leonor

Dra. en Ciencias Exactas, Área Matemática, 2015, Universidad Nacional de La Plata (UNLP), Argentina; Esp. en Tecnología Informática Aplicada en Educación, 2004, UNLP; Lic. en Matemática Pura, 1985, UNLP. Profesora Titular Dedicación Exclusiva del área Matemáticas Especiales, cátedras Matemática D y D1, Facultad de Ingeniería (FI), UNLP. Integrante de la Unidad de Investigación, Desarrollo, Extensión y Transferencia, FI, UNLP: Matemática Aplicada. Desde el año 1986 docente en FI, UNLP y en diversos cursos de Matemática en Facultades de la UNLP; desde 2009 integrante de proyectos de investigación relacionados con Ecuaciones Diferenciales no lineales y su aplicación a circuitos eléctricos, Facultades de Ciencias Exactas e Ingeniería, UNLP. Egresada Distinguida de Posgrado del año 2015 de la carrera Doctorado de la Facultad de Ciencias Exactas, Área Matemática, UNLP.

Sorichetti, Carlos Dante

Ingeniero en Telecomunicaciones, 1983, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata (UNLP), Argentina; Licenciado en Matemática, 2012, Facultad de Ciencias Exactas, UNLP. Profesor Adjunto con Dedicación Exclusiva en las Cátedras de Matemática B y Matemática C y Profesor Adjunto con Dedicación Simple en la Cátedra de Matemática D, Facultad de Ingeniería, UNLP. Desde el año 1983 es docente graduado en la Facultad de Ingeniería y también se ha desempeñado en Cátedras de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNLP. Recibió la distinción Dr. Joaquín V. González, otorgada a los diez mejores promedios de los egresados de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNLP del año 2012.

Libros de Cátedra

Matemáticas especiales : con actividades resueltas / Diana Leonor Kleiman... [et al.] ; contribuciones de Sergio Daniel Rodríguez Ruiz... [et al.] ; coordinación general de Diana Leonor Kleiman ; Jorge Gastón Argeri.- 1a ed.- La Plata : Universidad Nacional de La Plata ; EDULP, 2023.
Libro digital, PDF - (Libros de cátedra)

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-950-34-2212-0

1. Matemática. I. Kleiman, Diana Leonor, coord. II. Rodríguez Ruiz, Sergio Daniel, colab. III. Argeri, Jorge Gastón, coord.
CDD 510.71

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata
48 N.º 551-599 / La Plata B1900AMX / Buenos Aires, Argentina
+54 221 644 7150
edulp.editorial@gmail.com
www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2023
ISBN 978-950-34-2212-0

exactas

EDITORIAL DE LA UNLP

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA