90

¿Qué es la armonía?

Esencia matemática de la música

Marta Sagastume

¿Qué es la armonía?
Esencia matemática de la música

COLEÇÃO CLE

VOL 90

COLEÇÃO CLE

Este libro está escrito por una matemática amante de la música. De ahí su interés por entender la vinculación entre ambas "artes", interés que quiere transmitir y promover.
Marta Sagastume se doctoró en Matemática en la Universidad Nacional de La Plata (UNLP), Argentina, en 1973; fue profesora en el IMECC de la UNICAMP de 1973 a 1980 y es miembro del CLE. De regreso a La Plata, fue profesora, directora de varios proyectos sucesivos en el área de Lógica Algebraica, autora o coautora de artículos y textos en el área; también dirigió o codirigió tesis, evaluó proyectos de investigación y fue miembro de comisiones organizadoras de varios Simposios Latinoamericanos de Lógica Matemática. Se jubiló en 2008 como Profesora Titular con Dedicación Exclusiva en la UNLP.

Desde el punto de vista de la música, hay algunos compositores que buscan nuevas afinaciones, escalas y, en general, nuevas formas de expresarse musicalmente. También hay músicos interesados en recuperar la fidelidad en la interpretación de partituras antiguas. En efecto, gran parte de la música académica, interpretada en la actual escala temperada, no es estrictamente fiel a lo que escribieron los compositores.
Por otro lado, hay actualmente gran interés de parte de algunos matemáticos por estudiar desde su punto de vista algunos aspectos de la teoría musical. Esto ha dado lugar a la creación de revistas especializadas y a la realización de congresos en el área.

UNICAMP

Centro de Lógica, Epistemologia
e História da Ciência - Unicamp

Este libro pretende ser autocontenido. Sin embargo, para leerlo se requiere cierta familiaridad con la matemática y también con la teoría musical.
En los Capítulos 1 a 4 se dan nociones básicas para la comprensión del texto.
En el Capítulo 5 se describen algunas escalas musicales "naturales" que se desarrollaron a partir de Pitágoras y que son centrales en el libro; su armonía tiene un fundamento matemático. La escala musical actualmente en uso, por ejemplo, la dada por la afinación usual de un piano, aunque tiene también cierta base matemática, no es natural.
Las gamas o escalas naturales consideran que hay armonía (o consonancia) entre dos notas si la relación entre sus alturas se expresa por un número racional (la altura de una nota mide cuán grave o aguda es).
Esta concepción de la armonía involucra cuestiones físicas, como la de frecuencia, que determina la altura. El sonido de cada nota está compuesto de otros, sus "armónicos", cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia de la nota dada.

La escala de Pitágoras se construye a partir de dos consonancias básicas, la quinta y la octava. En una quinta (por ejemplo do-sol) la relación de frecuencias es 3/2. En una octava (por ejemplo, un do y otro do que está ocho notas "más arriba") la relación de frecuencias es 1/2. La característica de esta escala es que en ella interviene fuertemente el número primo 3. Pueden construirse otras escalas naturales basadas en otro número primo, o en varios. Esta característica da lugar a una definición matemática.
En los Capítulos 6 y 7 se expone la definición de gama o escala musical desde un punto de vista matemático dada en el libro "Fundamentos matemáticos de la música" de A.E. Sagastume Berra y se detallan aspectos de la teoría que de allí deriva.
En el capítulo 8 se exploran algunas consecuencias matemáticas de esa definición.
En el Epílogo se resume algo informalmente lo tratado en el libro.

¿Qué es la Armonía?
Esencia Matemática de la Música

Primera Edición

Marta Sagastume

¿Qué es la Armonía?
Esencia Matemática de la Música

Primera Edición

Campinas, São Paulo

Volume 90, 2021

COLEÇÃO CLE

CLE – UNICAMP

COLEÇÃO CLE

Universidad de Campinas – Unicamp
Rector: Antonio José de Almeida Meirelles
Centro de Lógica, Epistemología e Historia de la Ciencia
Coordinador: Fábio Maia Bertato
Coordinador Asociado: Marcelo Esteban Coniglio
Editor: Itala M. Loffredo D'Ottaviano
Editor Asociado: Fábio Maia Bertato

Centro de Lógica, Epistemología e Historia de la Ciencia (CLE)
Cidade Universitária "Zeferino Vaz" - 13083-970 Campinas, São Paulo
www.cle.unicamp.br / clepub@unicamp.br
Secretaría Editorial
Adriana Lopes Rodrigues / Fabio Luis Basso

ISSN: 0103-3247

Catalog Record prepared by the CLE Library

Registro de catálogo preparado por la Biblioteca CLE

Sa183q Sagastume, Marta

¿Qué es la Armonía? Esencia Matematica de la Música. - Campinas : UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemología e Historia de la Ciencia, 2021.

(COLEÇÃO CLE, 90)

ISBN: 978-65-88097-08-3 *(digital version)* 978-65-88097-10-6 (*printed version)*

1. Teoria musical – Matematica. 2. Harmonia (Musica). I. Titulo.

CDD 781.2
781.3

ISBN: 978-65-88097-08-3
9 786588 097083

ISBN: 978-65-88097-10-6
9 786588 097106

Impreso en Brasil

A la memoria de mis padres Alberto y Otilia y
a mis hijos Juana Inés, Ignacio y Clara

Introducción

El sólo conocimiento de todas las proporciones predominantes en la música, tanto con respecto a la armonía como a la medida, no es suficiente para excitar el sentimiento de placer. Es necesario algo más que que nadie, hasta ahora, ha desarrollado. [1]

Leonhard Euler (1707-1783)

Siempre me interesó la percepción que tenemos de la armonía, tanto en la naturaleza como en el arte, y especialmente en la música. Creo que, en el fondo, consideramos bello aquello que nos resulta natural, que podemos oír, ver y apreciar en la naturaleza que nos rodea.

Por eso es que muchas veces he leído o preguntado a los que saben sobre la belleza y la armonía.

¿Qué es la armonía? ¿Hay una estructura intrínseca ordenada de alguna manera especial en las cosas que consideramos bellas? Estoy convencida de que sus proporciones, sus relaciones, sus disposiciones en el espacio y en el tiempo tienen una razón de ser que puede expresarse matemáticamente. Asimismo, no dudo de que la naturaleza muestra claras evidencias de una estructura matemática subyacente. Por ejemplo, la disposición de los pétalos del girasol, el trino de algunas aves, la estructura del caparazón del caracol Nautilus, la espiral de una galaxia en el universo,... Todos estas cosas tienen que ver con el "número de oro" o razón áurea $\phi = 1.61803398874989\ldots$ y la llamada sucesión de Fibonacci asociada a él.[2] En 1915 el compositor húngaro Béla Bartók concibió un método para integrar elementos de la composición musical según la razón áurea, afirmando que imitaba a la naturaleza en esta estructura. El poeta Rafael Alberti dedica un poema *A la divina proporción*.

En el caso de la música, hay un aspecto particularmente natural en ella, que proviene de la estructura misma del sonido y que se expresa por proporciones matemáticas sencillas. Dada una nota musical ¿cuáles son aquellas notas que suenan bien (son "consonantes") con la primera? Como ya lo vislumbraba Pitágoras, son las que tienen una relación simple con ella, son sus "componentes armónicos". Así surgen los intervalos "puros" entre notas que veremos en el texto. Más aún, posteriores estudios sobre la percepción del

[1] Ver [17], Lettre VIII, pág. 45

[2] Ver más en el Capítulo 2.

sonido (ver [37]) confirman la consonancia de los intervalos puros. Todo lleva a pensar, entonces, que esa naturalidad debería ser la base armónica de la composición musical.

Esencialmente, este libro contiene una teoría matemática de la armonía natural, sus motivaciones y fundamentos, ejemplos y algunas consecuencias. Nos referimos a la teoría que se define en el libro "Fundamentos Matemáticos de la Música"([41]) del que hablaremos más adelante. Hay que aclarar que la "escala de temperamento igual" actualmente en uso no responde a la definición teórica aquí expuesta, sino que es una aproximación que no comparte la naturalidad de su construcción, aunque se adopta por tener ventajas para transponer melodías.

Parecería entonces que todo reside en ciertas proporciones privilegiadas por la naturaleza que podemos encontrar ya sea en combinaciones de colores como de sonidos o incluso de palabras... ¿Es sólo eso?

Pienso que la armonía musical está sostenida en un "armazón" de relaciones matemáticas, pero que hay un plus indescriptible que escapa a todo análisis teórico (¿Será ese plus lo que llamamos inspiración?).

El músico vuelca en su obra un caudal de sentimientos, de vivencias, de emociones de tal manera que, transmitiendo ese caudal, esa música nos mueve a sentir algo similar, entrando como en una especie de resonancia. Citando a Euler: ese placer que sentimos al oír música reside en *algo que se percibe sin tener que ser entendido.* [3] ¿Es este quizá el aspecto más humano de la música?

Pero también nos llega y nos hace vibrar en resonancia aquella "esencia matemática", que proviene, según dicen, del hemisferio izquierdo del cerebro y que compartimos todos los seres humanos. Puedo imaginar que hay como una componente "horizontal" de forma, ritmo, consonancia de acordes, previsible, estructurada y también una "vertical" que surge de algo vivido y expresado bellamente en forma original, sorprendente y única.

Hay quien afirma que los matemáticos y los músicos usan en su trabajo los mismos circuitos cerebrales... Una composición musical ¿es comparable con un teorema matemático?

Trataremos de explicitar en este texto qué hay de matemática en la música ya que los matemáticos sabemos lo mucho de armonía que podemos encontrar en un resultado matemático.

En la imagen de la tapa vemos músicos como piezas de ajedrez sobre un

[3]Ver 4.5.

tablero que sigue las líneas del pentagrama. Su autora es la artista plástica Clara Gallego, (que también incursiona en la música como intérprete de saxo), mi hija. Personalmente imagino que se representa allí a la matemática como "juego de estrategia" en el que está basada la estructura armónica de la música.

En los primeros capítulos del libro se introducen los conceptos matemáticos, físicos, históricos y de teoría musical necesarios para leer el resto. La base de teoría musical está en el Capítulo 1 y los conocimientos de matemática requeridos son un poco más amplios que los adquiridos en el secundario y se exponen en el Capítulo 2. Se muestran después, en el Capítulo 3, nociones básicas de acústica musical. El libro aborda luego cuestiones de cultura general como historia de las ideas matemáticas en la teoría musical (Capítulo 4) y, en el Capítulo 5, algunas de las escalas musicales a lo largo del tiempo, intercalando anécdotas y consideraciones filosóficas. A medida que el texto avanza se trabaja con más rigor matemático; en el Capítulo 6 se da la definición de una gama natural desde el punto de vista matemático y algunas de sus propiedades, aplicándola a algunos ejemplos vistos en el capítulo anterior. Este contenido se desarrolla y se extiende en el Capítulo 7 para reencontrar formalmente nociones de teoría musical vistas en el primer capítulo. Finalmente, en el Capítulo 8 se prueban algunos resultados que pueden ser de interés matemático. Con un criterio pedagógico, los conceptos muchas veces no se han definido con precisión, sino que se han ido introduciendo a través de ejemplos tratando de llegar a una definición general lo más rigurosa posible dentro del contexto. Se omiten demostraciones largas o engorrosas dando la referencia correspondiente; sólo se incluye al final un esbozo de la demostración del importante teorema de la densidad de una gama.

Al final del texto se da una bibliografía donde figuran algunas de las fuentes consultadas.

Motivaciones personales

Desde los lejanos tiempos de la infancia me fascinaron los enigmas de la matemática, probablemente por influencia de mi papá, [4] que nos planteaba

[4]Alberto Enrique Sagastume Berra (1905-1960), doctor en Ciencias Físico-matemáticas, pionero en el área de álgebra, autor de "Lecciones de Álgebra Moderna", "Fundamentos Matemáticos de la Música", entre otras obras. Fue miembro titular de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y uno de los fundadores y miembro del primer directorio del CONICET (Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técni-

problemas a la hora de las comidas y nos hizo conocer obras como *El hombre que calculaba*, que era un cuento lleno de curiosidades matemáticas. También conocí a través de él la música, sobre todo la clásica, [5] que, explicada a veces por él, escuchábamos después de cenar. Más todavía: me enseñó a leer partituras y a tocar el piano. Autodidacta en música como en muchas otras cosas, fue un buen intérprete para disfrute de la familia y amigos y también compositor de romanzas y sonatas clásicas para piano, así como de piezas de jazz para varios instrumentos.

Este año, habiendo dejado hace un tiempo de trabajar en matemática, decidí leer hasta terminar (¡algo que nunca había logrado!) el libro *Fundamentos Matemáticos de la Música* que él publicó en 1937. Y se me ocurrió la idea de compartir en un libro todo lo que fui asimilando, porque en mi experiencia docente la mejor forma de entender algo a fondo es tener que explicarlo a alguien. Así es que el contenido de este texto podría definirse como "mi visión del libro de mi papá y algunas cosas interesantes que aprendí para leerlo".

En https://www.biodiversitylibrary.org/item/192533 está escaneada la publicación original del libro *Fundamentos Matemáticos de la Música* de A.E. Sagastume Berra en los Anales de la Sociedad Científica Argentina en 1937 en cuatro partes contenidas en el Tomo CXXIII y tres contenidas en el Tomo CXXIV. A partir de allí compaginé la edición digital del libro, que fue luego procesada por el Servicio de Difusión de la Creación Intelectual (SEDICI), Repositorio Institucional de la Universidad Nacional de La Plata, y puede encontrarse en http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/109919.

En "Fundamentos ..." se define y se desarrolla una teoría matemática de la armonía natural, aunque pienso que la teoría expuesta está allí apenas esbozada y que merecería tener un desarrollo mayor. Aparentemente, el tema de los aspectos matemáticos de la música en la actualidad ha sido objeto de interés de los matemáticos en trabajos de investigación, expuestos en congresos específicos del área y publicados en revistas especializadas.

Marta Sagastume

cas) junto a Bernardo Houssay, Luis Leloir y otros. Se casó con Otilia Edith Bourimborde y tuvieron tres hijos: Ricardo, Alicia y Marta.

[5] Según los entendidos, para hablar con propiedad debería referirme aquí a música "académica", porque con "clásica" se designa la música que corresponde al período del "clasicismo" de los siglos XVIII y XIX.

Capítulo 1

Conceptos básicos de Teoría Musical

Daremos aquí algunas nociones que serán necesarias para abordar la lectura del texto. Inclusive, el contenido será un poco más amplio, para dar una información más completa.

En general, en el texto nos referiremos a "escala" o "gama" musical como sinónimos, indicando con esto el conjunto de sonidos de los que disponemos en las composiciones musicales.

Es importante aclarar que nos referiremos aquí a conceptos definidos para la escala habitualmente en uso, la que después veremos con el nombre de "escala de temperamento igual". Sin embargo, familiarizarse con ellos nos permite entender algunas nociones básicas, útiles para estudiar otras escalas.

En general, una composición musical tiene *melodía* y *armonía*. La melodía es una sucesión de sonidos y pausas que interpreta una voz o un intrumento: es "lo que canta" la voz o instrumento principal. Podemos imaginar que al componer una canción primero aparece la melodía. La armonía, en cambio, es el acompañamiento de la melodía dado por acordes, siendo un acorde un conjunto de notas que suenan juntas. En el caso más sencillo, por ejemplo una voz acompañada por una guitarra, la voz lleva la melodía y la guitarra da los acordes que acompañan. Es cierto que puede haber melodías entremezcladas y que entre ellas se genere la armonía, como sucede en las voces de un coro, y melodía y armonía no se distinguen. Pero podemos abstraernos y pensar la melodía como sucesión de notas y la armonía como un conjunto de notas simultáneas. Inclusive, en la notación habitual de la música, podemos ver la melodía con notas que van apareciendo "horizontalmente" y cada acorde de la armonía que la acompaña se dibuja "verticalmente". Además cada una condiciona la otra: una melodía supone ciertos acordes que "van bien" con ella y recíprocamente, cierta estructura armónica (conjunto de acordes de una "tonalidad") determina las notas de la melodía.

Pero hay algo más. Desde la antigüedad se han asociado ciertas músicas a la danza. Son aquellas en que es más notable una cierta estructura repetitiva, una sucesión regular de elementos débiles y fuertes, que se manifiesta en las pausas y duraciones de las notas: esta estructura nos impulsa al movimiento, nos hace "entrar en resonancia". Distinguimos en ella el *pulso* (es la unidad que se emplea para medir el tiempo, como el latir del corazón), el *acento* (que dice dónde poner énfasis) y el *compás* (que divide la composición en intervalos iguales de tiempo); estos tres elementos definen el *ritmo*.

La melodía, la armonía y el ritmo son las tres componentes de la "materia prima" a través de la cual los músicos expresan sus impresiones, sentimientos, pasiones, percepción del mundo...

1.1. Las notas y su representación

Las siete notas $do - re - mi - fa - sol - la - si$ forman lo que se llama la *escala diatónica*. En la notación anglo-sajona, las notas empiezan por la, o sea, se considera la escala: $la - si - do - re - mi - fa - sol$ y se traducen por: $A - B - C - D - E - F - G$, como podemos ver en la Figura 1.1.

Figura 1.1: Notación sajona

Sabemos entonces que hay tres componentes básicos de la música: la melodía, la armonía y el ritmo. ¿Cómo se expresan? Una pieza de música se representa gráficamente por símbolos que constituyen una *partitura*.

Veamos lo que es básico para poder entender una partitura y eventualmente interpretarla en algún instrumento, por ejemplo, el piano.

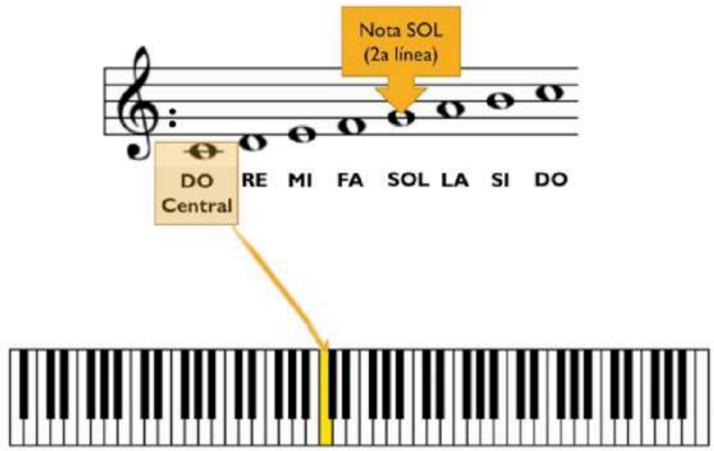


Figura 1.2: Notas en clave de Sol

El *pentagrama*, donde se dibujan las notas, está formado por cinco líneas paralelas y sus correspondientes cuatro espacios. Allí se representa la melodía horizontalmente por los símbolos sucesivos de las notas que la componen, y si hay notas simultáneas, ellas se representan sobre una misma vertical en el pentagrama. Al principio de una partitura se coloca la *clave*, más comunmente la *clave de sol*, que en una partitura para piano representa la melodía que toca la mano derecha. En la Figura 1.2 vemos las notas a partir del *do* central del piano, donde subiendo en el pentagrama tenemos notas cada vez más agudas. Asimismo, la *clave de fa* se usa para denotar las notas que interpreta la mano izquierda en el piano, porque los sonidos son más graves. Vemos esto en la Figura 1.3, donde el *do* de más arriba coincide con el primero de la Figura 1.2.

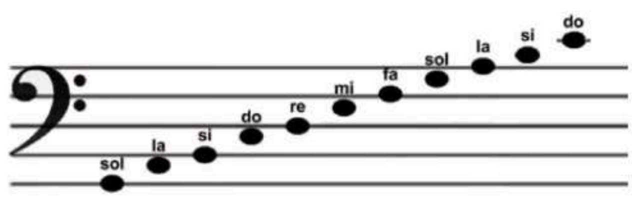


Figura 1.3: Notas en clave de Fa

Para denotar la duración de cada nota se usan los símbolos (llamados *figuras*) de: *redonda* (la más larga), *blanca*, *negra*, *corchea*, *semicorchea*, *fusa* y *semifusa*, que es la más corta. Las pausas entre notas o *silencios* tienen una duración correspondiente a las figuras: se dice, por ejemplo *silencio de blanca*, *silencio de negra*, etc. Podemos ver esto y las relaciones entre las duraciones en la Figura 1.4.

	Redonda	Blanca	Negra	Corchea	Semicorchea	Fusa	Semifusa
Notas	𝅝 =	2 𝅗𝅥 =	4 ♩ =	8 ♪ =	16 𝅘𝅥𝅯 =	32 𝅘𝅥𝅰 =	64 𝅘𝅥𝅱
Silencios	𝄻 =	2 𝄼 =	4 𝄽 =	8 𝄾 =	16 𝄿 =	32 𝅀 =	64 𝅁

Figura 1.4: Duración de notas y silencios

Hasta aquí tenemos los elementos para representar gráficamente la melodía y la armonía de una composición musical.

El ritmo está expresado, como dijimos, por el *pulso*, el *acento* y el *compás*.

El pulso es el tiempo básico de la música en cuestión. El acento, como en una palabra acentuada, marca énfasis en un pulso, generalmente el primero de cada compás. El compás es la división del tiempo de una pieza musical y esta división se representa por medio de líneas verticales. Los sonidos y silencios que hay entre dos líneas divisorias forman el compás. La partitura se divide en compases, que a veces no son todos de la misma duración y esa duración puede ser expresada por distintas figuras. Por ejemplo, si un compás contiene cuatro negras, otro puede contener sólo una redonda o bien cuatro corcheas y una blanca, etc. Cada figura se identifica por un número: la redonda es 1, la blanca es 2 (porque 2 blancas duran lo mismo que una redonda), la negra 4 (4 negras equivalen a una redonda), la corchea 8, etc... El tipo de compás (si son todos del mismo tipo) se indica al principio, al lado de la clave, mediante dos números: el de arriba indica cuántas figuras correspondientes al número de abajo contiene cada compás.

Por ejemplo, si el compás es de "dos por cuatro" (como el del tango) eso quiere decir que cada compás debe tener dos de las figuras "cuatro" (o sea, negras o su equivalente en otras figuras), si es de "tres por cuatro" (como el vals) tiene tres negras por compás (o equivalente). Algunos de los más comunes se muestran en la Figura 1.5.

Figura 1.5: Ejemplos de compases

Las notas de la escala diatónica junto con las notas “alteradas” por los sostenidos $\sharp$ y bemoles $\flat$ forman lo que se llama la *escala cromática.* Un sostenido sube la nota y un bemol la baja, en ambos casos, lo mínimo posible. Esto es, si escribimos por ejemplo *re*$\sharp$, significa que elevamos el *re* lo mínimo posible (en el piano, tomamos la tecla negra inmediatasmente a su derecha en lugar de la nota original). Análogamente, un *la*$\flat$ es la nota inmediata de *la* hacia abajo. Vemos en la Figura 1.5 que, además de la clave, figura lo que se llama la *armadura de clave*, que está formada por varios símbolos de sostenidos o bemoles que se usarán a través de toda la partitura. [1] Esto es: si en la armadura de clave aparece por ejemplo un bemol en el lugar del *sol*, cada vez que en la partitura aparezca un *sol* debemos interpretarlo como *sol*$\flat$. Esa armadura de clave indicará en qué tonalidad está la pieza musical, ya que cada tonalidad se caracteriza por su armadura de clave, como veremos. Al principio de la partitura se suele anotar también cuánto dura cada negra, porque la negra es generalmente la que se toma como unidad de duración. En síntesis, al principio de la partitura figuran: la clave, la armadura de clave y el compás. A veces también la duración de cada negra. Vemos ejemplos en las Figuras 1.6 y 1.7.

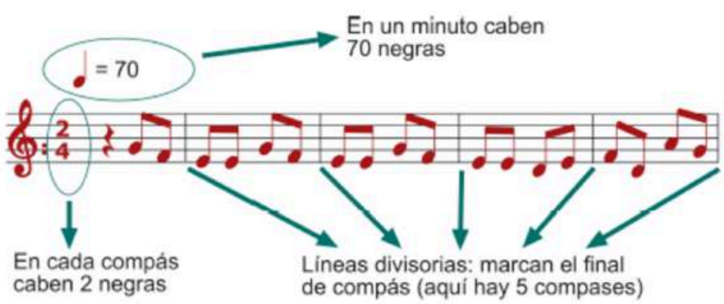


Figura 1.6: Partitura

[1]salvo excepciones, que se indican con un símbolo especial llamado *becuadro* que se denota $\natural$.

Figura 1.7: Canción

1.2. Intervalos

La distancia entre dos notas es lo que se llama *intervalo*. Los intervalos se nombran de acuerdo a la cantidad de notas contenidas entre las dos dadas. Por ejemplo:

Entre *do* y *sol* hay cinco notas: $do - re - mi - fa - sol$. Luego, el intervalo entre *do* y *sol* es un *intervalo de quinta*. También se dice que entre *do* y *sol* hay *una quinta*.

Entre *do* y mi hay un *intervalo de tercera*, ya que se recorren tres notas para llegar a mi.

Cada nota es "similar" a su *octava*: por ejemplo, de re al re siguiente más agudo hay un *intervalo de octava*. Llamamos entonces a las dos notas con el mismo nombre, con un subíndice para identificarlas si hiciera falta.

El intervalo más pequeño de la escala actual es lo que se llama un *semitono*, que es el formado por una nota y una de sus alteraciones: $\flat$ o $\sharp$. Observemos que entre mi y fa y también entre si y do hay un semitono, considerando identificados $mi\sharp$ con fa y $do\flat$ con si (en el piano, no hay una tecla negra entre mi y fa y tampoco entre si y do).

Un *tono* es el intervalo entre notas sucesivas de la escala diatónica que no sean $mi - fa$ o $si - do$. Se compone de dos semitonos: por ejemplo, de la a si hay dos semitonos: de la a $la\sharp$ y de $la\sharp$ a si.

En dicha escala $do_1 - re - mi - fa - sol - la - si - do_2$ tenemos la siguiente sucesión de tonos y semitonos:

$$T - T - S - T - T - T - S.$$

Los intervalos son *simples* si tienen menos de nueve notas y *compuestos* en caso contrario. Nos referiremos normalmente a intervalos simples.

Normalmente, como dijimos, los llamaremos por las notas que recorren: una octava, una quinta, una segunda,...

Los intervalos pueden ser clasificados también cualitativamente en varios tipos:

- perfectos o justos,
- mayores,
- menores,
- aumentados y
- disminuídos.

Los intervalos perfectos o justos son considerados *consonantes* porque "suenan bien", se consideran menos tensos y más agradables al oído. Por el contrario, hay otros considerados *disonantes* por percibirse más tensos y menos agradables al oído. Sin embargo, estas consideraciones pueden variar de una época a otra y hasta de una persona a otra. Veremos en el capítulo 7 cómo puede definirse la consonancia en abstracto.

En la teoría clásica se considera que:

-**Unísonos** (y sus complementarias, las **octavas**) justas son *consonancias perfectas*,

-**Quintas** (y sus complementarias, las **cuartas**) justas son *consonancias perfectas*,

-**Terceras** (y sus complementarias, las **sextas**) mayores y menores son *consonancias imperfectas*,

-**Segundas** (y sus complementarias, las **séptimas**) son *disonancias.*

Cuando veamos las *escalas mayores* y las *escalas menores* describiremos con más precisión lo que son los intervalos mayores y menores.

Otra razón por la que se llaman justos a los intervalos de cuarta, quinta y octava es que tienen su origen en los sistemas antiguos (como la escala pitagórica), basados en la afinación "justa" o "pura", matemática, de dichos intervalos dada por el hecho de que en ella intervienen cualidades acústicas (los armónicos, según veremos). Actualmente, en nuestra escala de temperamento igual habitualmente en uso, el único intervalo realmente puro es la octava, pues la quinta es "casi pura", es decir, un poco desafinada.

Un hecho interesante es que una octava, en cuanto se desafina un poco, se percibe como desagradable mediante los "batidos" (bien conocidos por los músicos); lo mismo ocurre con la quinta, aunque en menor medida. Los intervalos de tercera mayor y menor son consonancias; sin embargo, no es tan fácil percibir las disonancias al desafinarlas. De hecho la tercera mayor de nuestro sistema temperado es bastante "imperfecta" acústicamente. Por eso es difícil afinar (de oído) instrumentos como el violín o la guitarra y que coincidan con la afinación de un piano, que está fija por el sistema de temperamento igual.

En cuanto a los intervalos disminuídos (respectivamente aumentados): son los que se obtienen de los justos, mayores y menores bajando (respectivamente subiendo) un semitono la nota superior. Por ejemplo, la segunda (mayor) $re - mi$ aumentada es $re - mi\sharp$, donde $mi\sharp$ y f son *enarmónicas*, esto es, se escriben distinto pero suenan igual. La sexta $sol - mi\flat$ (menor) disminuída es $sol - re$.

Podemos decir que los intervalos justos o perfectos son aquellos que no pueden ser modificados sin que dejen de ser consonantes. El intervalo de octava más un semitono es una octava aumentada, que es una disonancia. Las cuartas disminuídas son terceras (consonancia imperfecta) y aumentadas son un intervalo de tres tonos, el *tritono* que fuera llamado en la Edad Media "diabolus in musica", por disonante. Análogamente, las quintas disminuidas son el tritono y aumentadas son sextas.

En la Figura 1.8 están todos los intervalos cuya primera nota es *do*, donde se indica mayor, menor disminuído o aumentado por las letras M, m, D y A respectivamente. En la Figura 1.9 vemos la representación de dichos intervalos en el pentagrama.

1.2.1. Inversión

Un intervalo se invierte al subir la nota inferior una octava (o bajar la nota superior una octava). Por ejemplo, el intervalo $do_1 - fa$, que es de cuarta, al invertirse da el intervalo de quinta $fa - do_2$, indicando aquí $do_1 - do_2$ una octava. Observemos que el número de notas de un intervalo y el de su inversión siempre suman nueve: cuarta pasa a quinta, tercera a sexta, segunda a séptima y viceversa. Además, según veremos, la inversión de un intervalo mayor es uno menor (y viceversa); la inversión de un intervalo justo es otro justo; la inversión de un intervalo aumentado es un disminuido (y viceversa). Es decir que tenemos una especie de "dualidad" en las inversiones.

Un ejemplo: el intervalo $mi\flat - do_2$ es una sexta mayor. Su inversión: $do_1 - mi\flat$ es una tercera menor.

Veremos luego las inversiones de acordes.

Semitonos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T,ST	1ST	1T	1T1ST	2T	2T1ST	3T	3T1ST	4T	4T1ST	5T	5T1ST	6T
Ejemplo	Do#-Reb	Re	Re#-Mib	Mi	Fa	Fa#-Solb	Sol	Sol#-Lab	La	La#-Sib	Si	Do
Primera	1ª aum											
Segunda	2ª m	2ª M	2ª aum									
Tercera		3ª dism	3ª m	3ª M	3ª aum							
Cuarta				4ª dism	4ª J	4ª aum						
Quinta						5ª dism	5ª J	5ª aum				
Sexta							6ª dism	6ª m	6ª M	6ª aum		
Séptima									7ª dism	7ª m	7ª M	7ª aum
Octava											8ª dism	8ª J

Figura 1.8: Intervalos de do

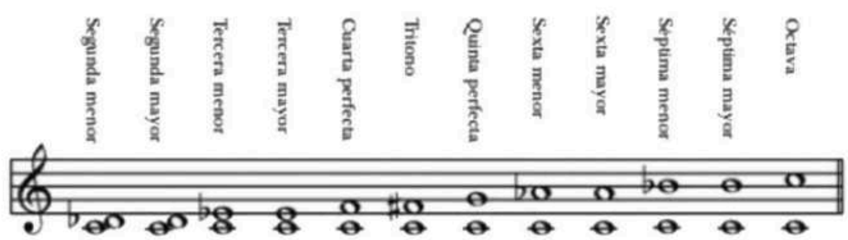


Figura 1.9: Intervalos de *do* en el pentagrama

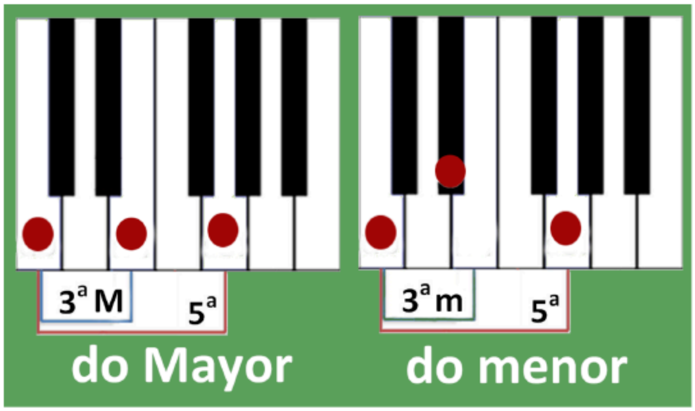


Figura 1.10: do Mayor y do menor

1.3. Acordes

Un acorde es un conjunto de notas que se interpretan simultáneamente.

Los acordes de tres notas o tríadas pueden clasificarse en cuatro tipos, basándose en los tipos de intervalos entre sus notas:

- mayor,
- menor,
- aumentado,
- disminuído.

Un acorde *mayor* (respectivamente *menor*) es el formado por una nota inferior, llamada *tónica*, que da nombre al acorde, la intermedia que está a una **tercera mayor** (respectivamente **tercera menor**) de la tónica y la superior, que está a una **quinta justa** de la tónica. Vemos un ejemplo en la Figura 1.10.

El sonido de un acorde mayor es brillante, alegre, en cambio el de un acorde menor es suave, melancólico.

Cada acorde mayor tiene su relativo menor, de acuerdo al concepto de escalas o tonalidades relativas que veremos en seguida. Por ejemplo, se dice que *la* es la *relativa menor* de *do*, o que *do* es la *relativa mayor de la*.

Un acorde *disminuído* se diferencia del menor sólo en la quinta, que es disminuída. Es decir que está formado por la tónica, su tercera menor y su quinta disminuída. Un acorde *aumentado* se diferencia del acorde mayor en que la quinta es aumentada. Es decir que está formado por la tónica, su tercera mayor y su quinta aumentada. Por ejemplo: *sol* menor es $sol - si\flat - re$,

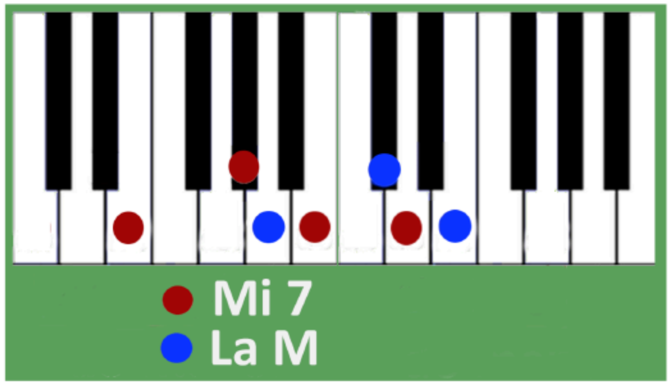


Figura 1.11: Mi7 y La M

por lo tanto el disminuído resulta $sol - si\flat - re\flat$. El acorde de re mayor es $re - fa\sharp - la$, luego el acorde aumentado es $re - fa\sharp - la\sharp$.

Los acordes de cuatro notas se forman generalmente con alguno de los acordes de tres a los que se les agrega una nota que es la séptima (mayor o menor) de la tónica. Sólo mencionaremos el llamado *de séptima dominante*, que está formado por un acorde mayor y una séptima menor; es decir, que el acorde está formado por la tónica, su tercera mayor, su quinta justa y su séptima menor. Por ejemplo, $mi - sol\sharp - si - re$, que es el acorde de mi séptima dominante, formado por mi mayor: $mi - sol\sharp - si$ al que se agrega re, que es la séptima menor de mi. Suele indicarse $mi7$.

Los acordes de séptima dominante son los que expresan una tensión (incluyen disonancias) que encuentra su descanso en el acorde de tónica; los músicos dicen que "resuelve" en el acorde que le corresponde. Por ejemplo, el acorde de sol séptima $sol - si - re - fa$ resuelve en do mayor: $do - mi - sol$. El que vimos, mi séptima, resuelve en la mayor: $la - do\sharp - mi$. Ver Figura 1.11.

¿Cómo es esa "correspondencia" que mencionamos entre el acorde de tensión y el de descanso? Dado un acorde mayor ¿Cuál es su "dominante"?

Cada acorde mayor de una nota tiene como dominante el acorde de séptima de su quinta: do mayor tiene como dominante a $sol7$ (esto puede verse en la Figura 1.12), el dominante de re mayor es $la7$,..., el de la mayor es $mi7$.

En el caso de un acorde menor, su séptima dominante es la misma que la del acorde mayor de su tónica. Por ejemplo do menor, que es $do - mi\flat - sol$, está dominado por $sol7$, re menor, que es $re - fa - la$, dominado por $la7$,

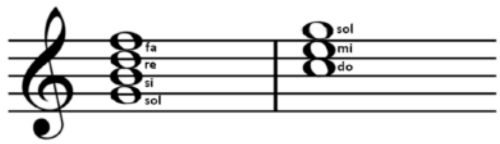


Figura 1.12: Sol7 y Do M

etc.

Vamos a definir ahora las inversiones en un acorde de tres notas, es decir, los acordes que tienen las mismas tres notas pero en diferentes posiciones.

El acorde está en la *posición fundamental* si su nota más grave es la tónica. Indicaremos con subíndices las octavas en la que está la nota. Por ejemplo, el *do* mayor en esta posición es $do_1 - mi_1 - sol_1$, aunque también puede considerarse $do_1 - sol_1 - mi_2$; se dice que tiene "bajo en *do*".

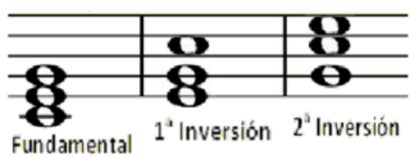


Figura 1.13: Do Mayor e inversiones

La *primera inversión* es la que tiene como nota más grave a la nota intermedia del acorde. Se obtiene subiendo una octava la tónica, es decir:

$mi_1 - sol_1 - do_2$, o bien podemos considerar otras variantes como

$mi_1 - do_2 - sol_2$ o $mi_{-1} - do_1 - sol_1$.

Decimos que es un acorde de *do* mayor con bajo en *mi*.

Observemos que, aunque las notas sólo difieren a lo sumo en una octava de las que están en la posición fundamental, los intervalos entre ellas cambian en la inversión. En $do_1 - mi_1 - sol_1$ hay una tercera mayor entre do_1 y mi_1 y una tercera menor entre mi_1 y sol_1. En $mi_1 - sol_1 - do_2$ tenemos entre mi_1 y sol_1 una tercera menor y entre sol_1 y do_2 una cuarta.

La *segunda inversión* es la que tiene como nota más grave la nota más aguda del acorde original. Podemos construir la segunda inversión a partir de la primera subiendo una octava la nota más grave. En el ejemplo anterior, sería

$sol_1 - do_2 - mi_2$.

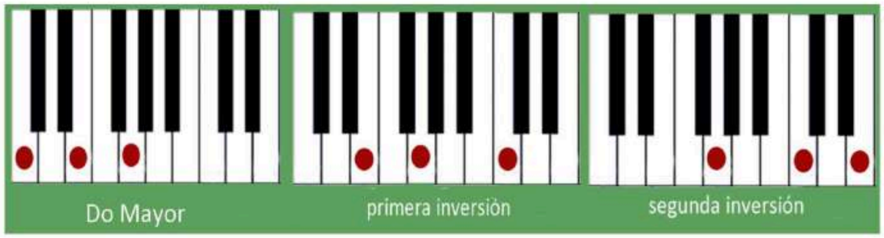


Figura 1.14: Do Mayor e inversiones en el piano

Las otras posibilidades son: $sol_1 - mi_2 - do_3$ y $sol_{-1} - do_1 - mi_1$. Decimos que es un acorde de *do* mayor con bajo en *sol*.

Ver las Figuras 1.13 y 1.14.

1.4. Tonalidades

Podemos decir que una *tonalidad* o escala es una selección de notas que se usarán en una composición musical cuya melodía y acompañamiento estarán mayormente en esa escala o en otras que armonizan bien con la original. Otra forma de pensarlo es la siguiente: en cada obra musical hay una nota que funciona como *la tónica*, que es el "centro" en torno del cual "giran" las otras, construyendo frases musicales. La armonía de esa obra, su acompañamiento, tendrá el acorde de tónica y aquellos que "combinen bien" con este. Cada tonalidad tiene sus acordes propios, salvo variaciones atribuíbles a la libertad de creación del autor. Aunque estas definiciones son un poco vagas y hay muchas variantes posibles, de acuerdo al género de la obra, a su "clima", contexto, etc., hay sin embargo ciertas reglas que se cumplen en general y que son las que detallaremos en lo que sigue.

1.4.1. Mayores y menores

La escala diatónica es la *escala mayor* de *do* o la *tonalidad de do mayor*. Las escalas mayores se obtienen de la del *do*, aplicando la misma sucesión de tonos y semitonos: $T - T - S - T - T - T - S$, pero ubicando las notas dentro de la escala cromática. En cada escala tenemos los llamados *grados*: primer grado, segundo grado,... que corresponden a la nota base de la escala, y a las que le siguen. En la escala de *do* el primer grado es *do*, el segundo es *re*, y así siguiendo.

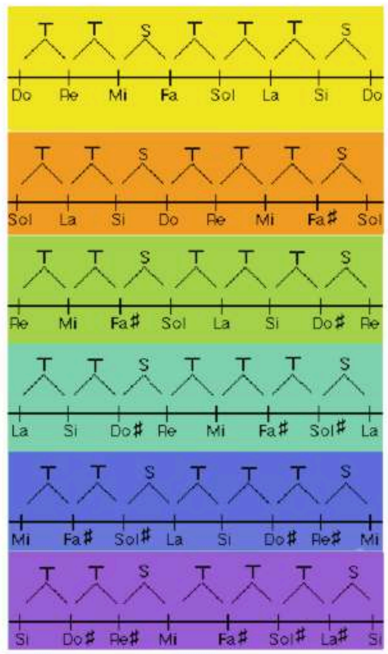


Figura 1.15: Escalas Mayores

La quinta de *do* es *sol*. Si a partir de *sol* tomamos $T-T-S-T-T-T-S$ obtenemos la escala:

$$sol - la - si - do - re - mi - fa\sharp - sol,$$

que es entonces la escala mayor de *sol*. Aquí el primer grado es el *sol*, el segundo es el *la*,...Observemos que tiene sólo un sostenido.

Si calculamos las escalas mayores siguiendo sucesivamente las quintas: $do - sol - re - la...$, veremos que los sostenidos van apareciendo: en *sol* mayor tenemos $fa\sharp$ (como vimos), en *re* mayor tenemos $fa\sharp$ y $do\sharp$, en *la* mayor tenemos $fa\sharp$, $do\sharp$ y $sol\sharp$,... Ese es el orden en el que se ponen los sostenidos en la armadura de clave, al principio de una partitura. Las escalas se ven en la Figura 1.15.

Tomemos ahora las quintas "hacia atrás", recordando que una quinta tiene tres tonos y un semitono. A partir de *do*, la nota de la cual *do* es quinta es fa, que a su vez es quinta de $si\flat$, que a su vez es quinta de $mi\flat$, y así siguiendo. Al calcular las escalas mayores de fa, de $si\flat$, de $mi\flat$,... surgen sucesivamente los bemoles: en fa mayor aparece $si\flat$, en $si\flat$ mayor aparecen $si\flat$ y $mi\flat$, en $mi\flat$ mayor aparecen $si\flat$, $mi\flat$ y $la\flat$,...

¿Por qué se ponen bemoles y no sostenidos? Porque en la escala deben aparecer todas las notas o grados, no puede quedar, por ejemplo, la sucesión $re - re\sharp$ porque mi no aparecería. Por estar refiriéndonos a la escala de temperamento igual, aquí identificamos las notas enarmónicas, que son (como ya dijimos) las que se representan distinto pero suenan igual, por ejemplo $do\flat$ y si.

Una composición musical en una tonalidad mayor suena, como su acorde principal, brillante alegre, vigorosa.

Las *escalas menores* son las que responden al “modelo” de escala siguiente: $T - S - T - T - S - T - T$. Por ejemplo, *sol* menor es:

$$sol_1 - la - si\flat - do - re - mi\flat - fa - sol_2.$$

Los músicos usan estas tonalidades apoyadas en acordes menores cuando quieren sugerir emociones suaves como dulzura, ternura o melancolía.

Según Hugo Riemann [2] los modos o escalas menores son “duales” de los mayores. Por ejemplo, el acorde menor de fa es $fa - la\flat - do$, que es dual de el acorde de *do* mayor $do - mi - sol$, pues son simétricos respecto del *do* central, en el sentido de que en $fa - la\flat - do$ se va de fa a *do* recorriendo una tercera menor y luego una tercera mayor y desde ese *do* en $do - mi - sol$ se recorre una tercera mayor y luego una tercera menor para llegar al *sol*.

Cada escala mayor tiene su *relativa menor*, que es la que comparte su armadura de clave. Dada una escala, digamos *do* mayor, su relativa menor es la que está a tres quintas a partir de *do*, o sea *la*. [3]

La escala de *la* menor es la siguiente:

$$la_1 - si - do - re - mi - fa - sol - la_2,$$

que tiene las mismas notas que la escala mayor de *do*.

Otro ejemplo: la escala menor de *mi* es:

$$mi_1 - fa\sharp - sol - la - si - do - re - mi_2,$$

que presenta un sólo sostenido. Tiene entonces las mismas notas y alteraciones que la escala mayor de *sol*. Análogamente para *si* menor y *re* mayor.

En la Figura 1.16 vemos representadas en el pentagrama las escalas mayores y sus relativas menores en sostenidos y en bemoles.

[2] Ver 4.5.

[3] En una partitura es difícil decir si está escrita en una tonalidad o en su relativa, generalmente se observan el primer y el último compás para ver cómo se inicia o cómo termina la música.

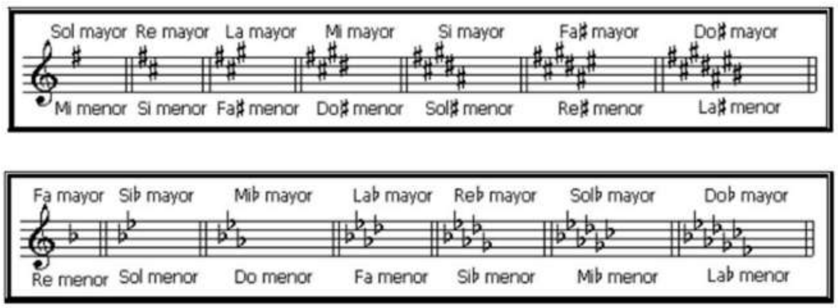


Figura 1.16: Escalas relativas menores y mayores

Podemos "ajustar" ahora las definiciones de intervalos mayores, menores y justos.

Un intervalo es mayor si la nota superior del intervalo puede ser encontrada en la escala mayor de la nota inferior, pero la nota inferior **no** está en la escala mayor de la nota superior. Por ejemplo, tomemos las notas *do* y *mi*; entre ellas hay un intervalo de tercera y la nota *mi* está en la escala mayor de *do* (color amarillo) pero *do* **no está** en la escala mayor de *mi* (color azul).

Un intervalo es justo si la nota superior del intervalo puede ser encontrada en la escala mayor de la nota inferior y también la nota inferior está en la escala mayor de la nota superior. Podríamos pensar como justo a un intervalo tal que tanto él como su inversión son mayores. Por ejemplo, tomemos $la - mi$: *mi* está en la escala mayor de *la* (color turquesa) y *la* está en la escala mayor de *mi* (color azul).

Si reemplazamos "mayor" por "menor" en la definición de intervalo mayor, tenemos la definición de intervalo menor. También podemos decir que un intervalo es menor si su inversión es un intervalo mayor (y recíprocamente).

En los siguientes links podemos encontrar todas las escalas mayores y menores:
https://learningmusic.ableton.com/es/advanced-topics/building-major-scales.html
https://learningmusic.ableton.com/es/advanced-topics/building-minor-scales.html

1.4.2. Modos griegos

En la música de la Grecia antigua se consideraban ciertas escalas (o "modos"): dórica, locria, frigia,... Con ciertas modificaciones son lo que hoy se conoce como *modos griegos*, que sería mejor llamar *escalas modales*. Vamos a definirlas.

Jónica	T T S T T T S (Mayor)
Dórica	T S T T T S T
Frigia	S T T T S T T
Lidia	T T T S T T S
Mixolidia	T T S T T S T
Eólica	T S T T S T T (menor)
Locria	S T T S T T T

Figura 1.17: Escalas modales

La escalas modales se obtienen tomando como base la escala mayor de una nota y a partir de las notas sucesivas (o "grados") de dicha escala se observa la sucesión de tonos y semitonos que se forman. Más precisamente: tomemos por ejemplo la escala de *do* mayor. La siguiente nota en dicha escala es re. Recorremos la escala a partir de re y vemos qué sucesión de tonos y semitonos se producen: esa será la escala modal *dórica* de re, o re dórico. Si empezamos por mi, obtendremos la *frigia*, a partir de fa la *lidia*, a partir de *sol* la *mixolidia*, a partir de *la* la *eólica*, que coincide con la escala menor, y por último, a partir de *si* la *locria*. Las correspondientes sucesiones de tonos y semitonos pueden verse en la Figura 1.17.

Por ejemplo, partiendo de la escala de $mi\flat$ mayor, que es:

$mi\flat, fa, sol, la\flat, si\flat, do, re, mi\flat$, obtenemos:

fa dórico: $fa, sol, la\flat, si\flat, do, re, mi\flat, fa$ (secuencia TSTTTST),

sol frigio: $sol, la\flat, si\flat, do, re, mi\flat, fa, sol$ (secuencia STTTST),...

Todos estos comparten las mismas notas, pero empiezan en notas distintas.

También podríamos partir de cualquiera de las escalas modales y desplazarse en una nota y obtendríamos el mismo ciclo. Por ejemplo empezando de un la mixolidio que es $la, si, do\sharp, re, mi, fa\sharp, sol, la$ (secuencia T T S T T S T) seguiríamos con un si eólico o menor, luego un $do\sharp$ locrio, un re mayor o jónico,...

Por otra parte, podemos también construir todas las escalas modales a partir de una misma nota, pues ya sabemos qué secuencia de tonos y semitonos debemos reproducir. Por ejemplo:

do Jónico o Mayor: $do, re, mi, fa, sol, la, si, do$,

do Dórico: $do, re, mi\flat, fa, sol, la, si\flat, do$,

do Frigio: $do, re\flat, mi\flat, fa, sol, la\flat, si\flat, do$,

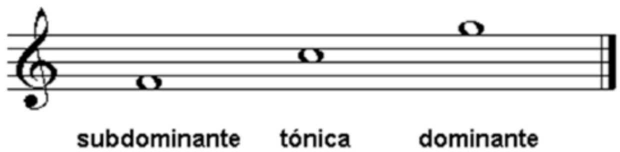


Figura 1.18: Funciones armónicas

do Lidio: $do, re, mi, fa\sharp, sol, la, si, do,$
do Mixolidio: $do, re, mi, fa, sol, la, si\flat, do,$
do Eólico o menor: $do, re, mi\flat, fa, sol, la\flat, si\flat, do,$
do Locrio: $do, re\flat, mi\flat, fa, sol\flat, la\flat, si\flat, do.$

Como hemos dicho, una música en la que predomina una escala mayor da la sensación de algo brillante, feliz, acabado; en cambio las escalas menores expresan algo sutil, delicado, íntimo, a veces triste. Las demás escalas modales representan también matices: sentimientos apasionados, miedos, o algo tenebroso. Aportan riqueza expresiva a la música.

1.4.3. Tónica, dominante y subdominante

Ya hemos visto que un acorde de séptima dominante expresa la tensión previa al reposo que representa el acorde mayor y esta situación se encuadra dentro de una escala o tonalidad mayor. La nota principal del acorde mayor es la tónica, como vimos en 1.3, y la principal del acorde dominante es la quinta de la tónica. Por ejemplo, si la tónica es *mi*, su acorde dominante es el acorde mayor de su quinta *si* al que se le agrega o no la séptima. Lo importante es que la tonalidad de *si* es *dominante* de la de *mi*. Intercambiando roles, sabemos ahora que *mi* es la quinta de *la*. Luego, parece que el *la* debe tener algo que ver con la tonalidad de *mi*. En efecto, *la* mayor es lo que se llama *subdominante* de *mi* (es la cuarta de *mi*).

En general, los acordes de tónica, dominante y subdominante son los básicos para acompañar una melodía en un tono mayor y se suelen llamar *funciones armónicas* de la tonalidad. Se obtienen análogas funciones en las tonalidades menores.

En la Figura 1.18 vemos a la tónica *do* entre la subdominante fa (por debajo, por eso se llama subdominante) y la dominante *sol* (por arriba). Si fuera, por ejemplo, la tonalidad de *sol* mayor, los acordes básicos serían *sol* mayor, *re* mayor o *re* séptima dominante y *do* mayor.

Capítulo 2

Conceptos básicos de Matemática

La función de este capítulo es "refrescar la memoria" de aquellos lectores que hayan olvidado conceptos matemáticos básicos que estudiaron en la escuela secundaria, profundizando además algunos de ellos; este repaso les será necesario como base para el resto del libro. También el último capítulo es de contenido puramente matemático, pero está dirigido a personas con algún entrenamiento más profundo en ese campo. Hablaremos aquí del conjunto de los números reales y de los distintos tipos de números que contiene: los naturales, los enteros, los racionales y los irracionales. En cuanto a su fundamentación rigurosa, podemos decir según la frase atribuída al matemático Leopold Kronecker *Dios creó a los números naturales, lo demás es invención del hombre*. Es decir, lo números que usa el hombre desde la más remota antigüedad son los naturales. Los demás son abstracciones que pueden definirse con precisión a partir de estos. Los enteros se obtienen "inventando" el 0 (si es que no lo consideramos natural)[1] y los números negativos. Podemos definir los enteros a partir de pares de naturales. En efecto, tomamos todos los pares (a, b) que "producen el mismo entero" $a - b$ y ese conjunto de pares representa al entero $a - b$. Por ejemplo, $(6, 11)$, $(821, 826)$,... están en el conjunto que denominamos -5.

De manera análoga, una vez definidos los enteros podemos obtener los racionales como pares de enteros. [2] Definimos un racional como el conjunto

[1]Es convencional considerar al 0 número natural o no.

[2]Curiosamente, las fracciones históricamente aparecieron antes que los números negativos.

de todos los pares de enteros (u, v) que "dan la misma fracción" $\frac{u}{v}$. Por ejemplo, la fracción $\frac{73}{8}$ "es" en realidad el conjunto que contiene pares como $(73, 8)$ o bien $(-438, -48)$.

En cuanto a los reales, (que se componen de los racionales más los irracionales) se pueden definir rigurosamente a partir de los racionales por lo que se llama "cortaduras de Dedekind". Cada cortadura parte en dos el conjunto de los racionales de la siguiente manera.

Un número racional queda definido por dos conjuntos: el de los racionales menores o iguales que él y el de los estrictamente mayores. Un número irracional se define por el conjunto de los racionales menores que él y el de los que son mayores que él (no existe un racional igual a un irracional).

Una vez realizado este repaso "a vuelo de pájaro" sobre los fundamentos de la artimética, estamos tranquilos de que podemos definir todos los números a partir de los naturales. Vamos a hacerlo, ya sin demasiado rigor.

Hablaremos del conjunto $\mathbb{N}$ de los números *naturales*, del conjunto $\mathbb{Z}$ de los *enteros*, del $\mathbb{Q}$ de los *racionales*, del $\mathbb{I}$ de los *irracionales* y finalmente del conjunto $\mathbb{R}$ de los *reales*. No trataremos los números complejos porque no serán usados en el texto.

2.0.1. Naturales

Los números naturales surgen de la necesidad de contar, de enumerar:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4...\}.$$

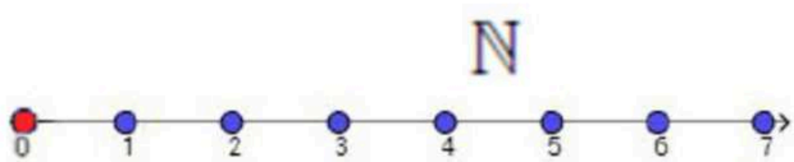


Figura 2.1: Naturales

En la Figura 2.1 vemos la representación gráfica de los naturales en una semirrecta.

Con los números naturales se puede sumar y efectuar productos, pues un producto es una suma abreviada. Sin embargo, **no se puede restar**; por ejemplo $23 - 98$ no nos da un número natural. Tampoco dividir: 7 dividido 3 no es un número natural.

Aunque la división de un número natural por otro no sea siempre un número natural, al intentar esa división obtenemos un cociente y un resto.

Algoritmo de la división

Dados a y b naturales distintos de cero, $a > b$, existen q y r naturales, donde r puede tomar sólo los valores $0, 1, ..., b-1$, (o sea, $r < b$) tales que:

$$a = b \cdot q + r.$$

Por ejemplo, $7 = 3 \cdot 2 + 1$.

Descomposición en primos

Un número *primo* es aquel número natural que sólo es divisible por sí mismo y por la unidad:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...$$

es la sucesión de los números primos, que son infinitos.

Todo número natural admite una descomposición en producto de números primos, que es única salvo el orden de los primos considerados. Veamos algunos ejemplos:

$25 = 5^2$, $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$, $78439 = 78439$, $65980394 = 2 \times 29 \times 67 \times 16979$.

Los números naturales se dividen en *pares* e *impares*. Los pares son los múltiplos de 2: $0, 2, 4, 6, 8, ...$; o sea, son todos aquellos que se pueden escribir como producto: $2 \times n$, para un n natural. Los demás son impares.

Cualquier número natural puede escribirse de manera única como producto de una potencia de 2 por un impar q. En efecto, en la descomposición en primos, q es el producto de todos los factores impares. Por ejemplo:

$$180 = 2^2 \times 45,$$

donde $q = 45$.

¿Qué ocurre si el número es impar? Habrá 0 factores 2 en su descomposición prima, luego, es el producto de $2^0 = 1$ por él mismo. Por ejemplo,

$$875 = 2^0 \times 875.$$

Esta propiedad será importante cuando consideremos la representación de las notas por su descomposición armónica, donde el factor 2 representa la octava (Capítulos 6 y 7).

Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

El mínimo común múltiplo, abreviado *mcm*, de dos o más números naturales es el menor múltiplo común a todos.

Por ejemplo, tomemos los números 56, 48 y 50. Los descomponemos en factores primos:

$$56 = 2^3 \times 7,\ 48 = 2^4 \times 3,\ 50 = 2 \times 5^2$$

Tomando $2^4 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 8400$ obtenemos el $mcm(56, 48, 50)$.

El máximo común divisor, abreviado *MCD*, de dos o más números naturales se define como el divisor más grande que los números tienen en común.

Por ejemplo: $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$, $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$, $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$. Por lo tanto, el *MCD* de los tres, denotado $MCD(180, 450, 504)$, es $2 \times 3^2 = 18$. Si, en cambio, hacemos el *MCD* de 180 y 450, obtendremos $2 \times 3^2 \times 5 = 90$ en tanto que el *MCD* de 180 y 504 es $2^2 \times 3^2 = 36$.

Si los números dados no tienen factores comunes, su MCD es 1. Se dice que los números son *primos entre sí*.

Cuando los números son muy grandes, se hace difícil calcular su descomposición en primos. Pero existe un algoritmo que permite calcular el MCD sin descomponer en primos.

Algoritmo de Euclides

Como dijimos, al dividir a por b se obtienen un cociente q y un resto r. Es posible demostrar que el máximo común divisor de a y b es el mismo que el de b y r, o sea:

$$MCD(a, b) = MCD(b, r).$$

Si dividimos b por r tendremos un nuevo resto r_1, luego

$$MCD(b, r) = MCD(r, r_1) = MCD(a, b).$$

Así siguiendo, como los restos van disminuyendo, se llega a uno que es 0. El resto anterior es

$$MCD(a, b).$$

Como ejemplo, calculemos el máximo común divisor de 2366 y 273.

- 2366 dividido 273 es 8 y sobran 182.
- 273 dividido 182 es 1 y sobran 91.
- 182 dividido 91 es 2 y sobra 0.

Luego: $MCD(2366, 273) = 91$.

2.0.2. Enteros

A partir de los números naturales podemos construir los números enteros con los cuales vamos a poder **restar**:

$$\mathbb{Z} = \{... - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Los enteros se obtienen a partir de los naturales añadiendo los “opuestos para la operación suma”, es decir todos los números de la forma $-n$ para cada n natural. Con los números enteros podemos sumar, multiplicar y restar, pero **no dividir**. Vemos que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Generalización: grupos

Los enteros tienen el 0, que es “neutro” para la suma (sumarlo o no sumarlo da el mismo resultado), porque $n + 0 = n$ para todo n entero. Además, con los números enteros podemos realizar la operación de suma (que es asociativa) y para cada número n existe su opuesto $-n$ que tiene la propiedad: $n + (-n) = 0$.

Vemos en la Figura 2.2 la representación de los enteros.

Un conjunto que tiene un neutro, una suma asociativa y en el que cada elemento tiene un opuesto constituye lo que se llama un *grupo aditivo*.

Entonces: $\mathbb{Z}$ con estas operaciones es un grupo. Además, como la suma es conmutativa, se dice que es un grupo conmutativo.

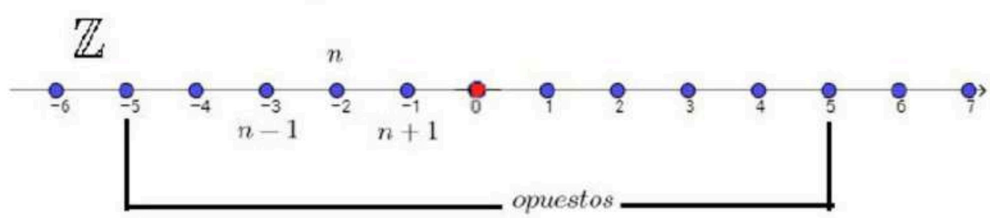


Figura 2.2: Enteros

Si en lugar de tomar $\mathbb{Z}$ tomamos pares de enteros, que es un conjunto que se denota $\mathbb{Z}^2$, también podemos darle una estructura de grupo.

En efecto, las operaciones están dadas "componente a componente", o sea: el par (m, n) sumado al par (z, t) nos da el par $(m+z, n+t)$ y el opuesto de un par (p, q) es el par $(-p, -q)$. El elemento neutro es $(0, 0)$. Se verifica sin problema que se mantienen las propiedades de grupo.

Más en general, podemos definir como grupo al conjunto $\mathbb{Z}^k$ de las $k-$ *uplas* $(n_1, ..., n_k)$ con las operaciones componente a componente.

2.0.3. Racionales

De la necesidad de dividir surgen los números racionales (o fraccionarios, o quebrados), como por ejemplo: $\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, -\frac{8}{10}, \frac{238476}{98745}, ...$ Los racionales, denotados $\mathbb{Q}$, se obtienen a partir de los enteros añadiendo los inversos para la multiplicación. Vemos algunos racionales en la recta de la Figura 2.3. Para cada z entero agregamos su inverso $\frac{1}{z} = z^{-1}$. La fracción $\frac{p}{q}$ es $p \times \frac{1}{q}$. Luego:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

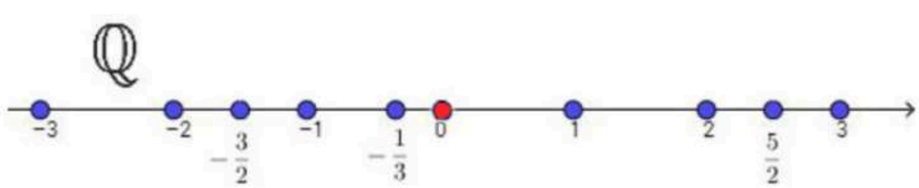


Figura 2.3: Racionales

Una fracción se dice *irreducible* si no hay factores comunes entre el numerador y el denominador. Es decir, no se puede simplificar.

Los racionales como grupo

Las operaciones que permiten definir el grupo aditivo de los enteros se pueden extender a los racionales (todos aprendimos a "sumar quebrados") y se prueba que ellos también forman un grupo con esas operaciones. Además, el conjunto de los racionales **sin el** 0 forman un grupo tomando la operación de multiplicación en lugar de la suma y el inverso en lugar del opuesto. El elemento neutro en este caso es el 1. Es un grupo multiplicativo.

Representación decimal periódica

Todo número racional admite una representación decimal, que es la que se obtiene al dividir el numerador por el denominador, por ejemplo $\frac{1}{2}$ tiene como expresión decimal $0,5$, $\frac{3548}{20} = 177,4$, $\frac{20}{27} = 0,740740740...$, $\frac{-67}{5} = -13,2$ y $\frac{1}{3} = 0,33333...$

La representación decimal, que tiene un número infinito de cifras decimales, se caracteriza por ser *periódica.* Esto significa que hay un conjunto finito de las cifras decimales (el *período*) que se repite infinitamente. Por ejemplo: $0,333333...$ tiene período 3, $125,67777777...$ tiene período 7, ó $0,740740740...$ tiene período 740; podemos considerar que los racionales que tienen finitas cifras decimales (o ninguna, como los enteros) tienen infinitos ceros, aunque no los escribimos; por ejemplo: $12,6$ tiene período 0: $12,6 = 12,600000000....$

Surge la pregunta: si damos una expresión decimal periódica ¿Existe un racional asociado a ella? Sí, puede calcularse.

Con los números racionales podemos sumar, restar, multiplicar y dividir. ¿Necesitamos algo más?

En la figura 2.4 vemos un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

Según el teorema que demostró Pitágoras, "el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"; luego: $h^2 = 1^2 + 1^2$, o sea: $h^2 = 2$. Pero puede probarse que ningún número racional al cuadrado da 2.

En efecto: supongamos que $(\frac{p}{q})^2 = 2$, siendo $\frac{p}{q}$ una fracción irreducible. Por lo tanto:

$$(\frac{p}{q})^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2,$$

de donde $p^2 = 2\,q^2$. Luego, p^2 es un número par, lo que implica que p también es par (si p fuera impar, p^2 también sería impar). Es decir que

$p = 2\,r$ y por lo tanto: $p^2 = 4\,r^2 = 2\,q^2$ y simplificando resulta $2\,r^2 = q^2$, o sea que q resulta par. Lo cual es un absurdo porque habíamos supuesto que p y q no tenían factores comunes.

Luego, un número que elevado al cuadrado da 2 **no puede ser racional**, de ahí el nombre de *irracionales* que reciben los números de este tipo. Lo llamamos $\sqrt{2}$. Es decir que hay otra operación que es extraer la raíz cuadrada (o, en general, raíz enésima), que **no se puede hacer** dentro de los números racionales.

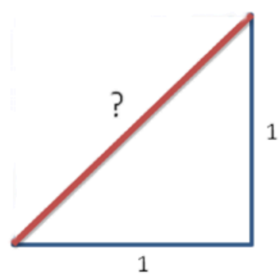


Figura 2.4: $\sqrt{2}$

2.0.4. Irracionales

Representación decimal no periódica

En el conjunto de todas las expresiones decimales, solamente aquéllas periódicas se corresponderán exactamente, como ya se vio, con números racionales; el resto forman el conjunto de los números irracionales. Por ejemplo, la expresión decimal de $\sqrt{2}$ no contiene ningún período. La siguiente es una aproximación con 65 cifras decimales:

$$1,41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799...$$

Mostraremos como ejemplo tres números irracionales de gran importancia.

El número π es conocido desde la antigüedad por ser la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.[3] El nombre de π proviene de la inicial

[3]El valor aproximado de π se conoce desde la época del escriba egipcio Ahmes en el año 1800 a. C., descrito en el papiro Rhind.

de las palabras griegas “periferia” y “perímetro” ...

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510...$$

Usaremos este número al hablar de funciones trigonométricas, recordando que la medida de un ángulo de 180^o en radianes es justamente π.

La constante e aparece en diversas ramas de la matemática. Por ejemplo, para valores muy grandes del número natural n se comprueba que la expresión $(1+\frac{1}{n})^n$ se aproxima a e y esto se aplica a cuestiones financieras. También e interviene en la definición de una de las funciones más importantes de la matemática, la *función exponencial*, que veremos luego. El valor de e truncado a sus primeras cifras decimales es el siguiente:

$$e = 2,71828182845904523536...$$

La pregunta:

¿Es posible partir un segmento en dos trozos a y b, de forma que, al dividir la longitud total $a+b$ por el trozo mayor b, obtengamos el mismo resultado que al dividir la longitud del trozo mayor b por la del trozo menor a?
tiene como respuesta: sí, es posible y eso ocurre cuando esa división da como resultado el número $\Phi = 1,618...$, como se indica en la Figura 2.5. El *número*

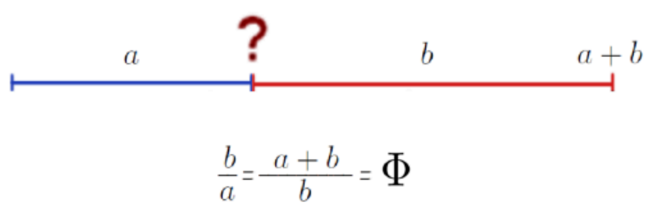


Figura 2.5: Definición de Φ

áureo o *número de oro* Φ está vinculado con la belleza en el arte y en la naturaleza. Debe su nombre a la inicial del famoso escultor griego Fidias, autor de la estatua de Palas Atenea en el Partenón de Atenas. En la Figura 2.6 vemos cómo en las proporciones del Partenón aparece Φ. Si en un rectángulo de lados a y b se cumple que $\frac{b}{a} = \Phi$, entonces su forma es “bella” y prueba de esto es que esa proporción se ha usado en muchas de las más reconocidas obras de pintura (Da Vinci, Dali,...), escultura o arquitectura (Le Corbusier...) y hasta hoy en día en la forma de las tarjetas de crédito. En cuanto a la música, daremos dos ejemplos: el número Φ lo usaba Stradivarius al construir sus famosos violines en las distancias entre sus distintas partes. En la fuga de la obra "Música para cuerda, percusión y celesta" de Bela Bartók, aparece la "sucesión de Fibonacci", íntimamente ligada al número áureo.

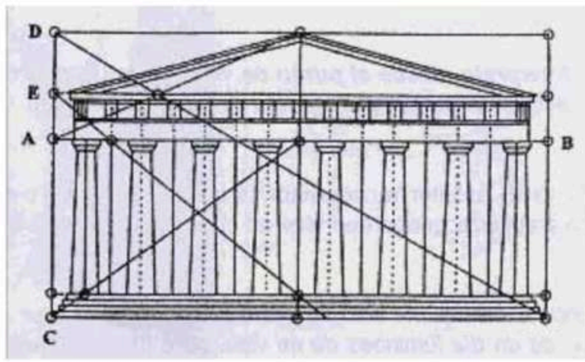


Figura 2.6: Partenón: $\frac{AB}{CD} = \frac{AC}{AD} = \frac{CD}{CA} = \Phi$

2.0.5. Reales

La unión de los racionales y los irracionales forma el conjunto de los números reales:

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}.$$

Se tiene también que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Luego, todo número real tiene una expresión decimal: si tiene un período, será racional. Si no, será irracional. Vemos su representación en la recta en la Figura 2.7.

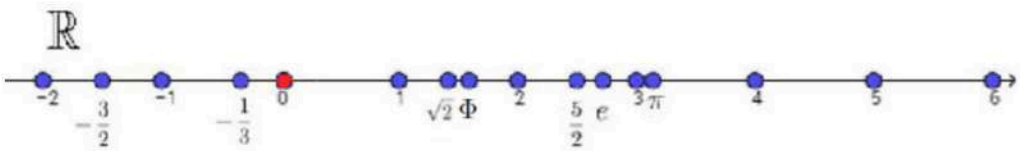


Figura 2.7: Reales

Los *intervalos* reales son conjuntos de números comprendidos entre dos números dados. El intervalo (a, b) es el conjunto de los números r tales que $a < r < b$. El intervalo $[a, b)$ (respectivamente el intervalo $(a, b]$ se forma agregando el número a (respectivamente el número b) al intervalo (a, b). El intervalo $[a, b]$ está formado agregando a y b al (a, b). La longitud de un intervalo (de cualquiera de los tipos) es la diferencia del extremo superior menos el inferior: $b - a$ en este caso.

Los reales como grupo

Los números reales también forman grupo con respecto a las operaciones extendidas de suma, cero y opuesto. Además, como en el caso de los racionales, los reales sin el 0 forman grupo con las operaciones de multiplicación, inverso y el neutro es 1.

Operaciones en los reales: notación

Sabemos que la multiplicación es un "suma abreviada":

$$a + a + ... + a = n \cdot a,$$

si a se suma n veces.

Análogamente, una potencia es una multiplicación abreviada:

$$a \cdot a \cdot ... \cdot a = a^n,$$

si a se multiplica n veces.

Pero esta forma cómoda de escribir se extiende a los casos en que n no es un número natural.

La inversa de un número real a, que es $\frac{1}{a}$, se denota:

$$\frac{1}{a} = a^{-1}$$

y en general, se denota

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Por otra parte, sabemos que la operación de tomar raíz enésima es la inversa de la operación de elevar a la potencia n. En efecto:

$$a^n = b \text{ si y sólo si } a = \sqrt[n]{b}.$$

De ahí que se denota:

$$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}.$$

Por otra parte, es útil usar el símbolo $\sum$ (sumatoria) para sumar varios términos de la misma forma. Por ejemplo: queremos sumar los números naturales al cuadrado desde 1 hasta 15. En lugar de escribir:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (15)^2,$$

escribimos:

$$\sum_{1}^{15} k^2, \quad \text{o, más explícitamente,} \quad \sum_{k=1}^{15} k^2.$$

En general, si tenemos ciertos términos que podemos indicar sucesivamente: $a_1, a_2, ...a_n$ podemos simbolizar la suma: $a_1 + a_2 + ... + a_n$ por

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

En este caso, 1 y n son los llamados *límites* de la sumatoria, que puede tomarse entre dos números arbitrarios.

Con respecto al producto, también existe la abreviatura $\prod$ que indica el producto de factores de la misma forma. Por ejemplo: el producto $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ de los números naturales desde 1 hasta n se escribe,[4] tomando $n = 7$:

$$\prod_{k=1}^{7} k.$$

En general un producto $s_1 \cdot s_2 \cdot ... \cdot s_n$ se denota:

$$\prod_{i=1}^{n} s_i.$$

También aquí podemos considerar límites más generales para el producto.

Usaremos en adelante algunas de estas notaciones.

[4]Ese producto es lo que se llama factorial de n y se denota $n!$.

Las medias pitagóricas

Ahora que conocemos los números reales y sus operaciones podemos describir lo que, como veremos, el discípulo de Pitágoras Arquitas de Tarento definió como las tres “medias”.

Supongamos que tenemos dos números naturales a y b. Tomemos otro número M_a tal que:

$$a + b = M_a + M_a.$$

Es fácil ver que:

$$M_a = \frac{a+b}{2},$$

que se llama el promedio aritmético o *media aritmética* de a y b. Por ejemplo, el promedio de 15 y 43 es 29. Esto se generaliza: el promedio de n números $a_1, a_2, ...a_n$ es $\frac{a_1+...+a_n}{n}$.

Análogamente, tomemos el número M_g tal que

$$a \cdot b = M_g \cdot M_g.$$

Este número, que verifica:

$$\frac{a}{M_g} = \frac{M_g}{b}, \quad \text{o también } M_g = \sqrt{a \cdot b},$$

recibe el nombre de *media geométrica.* [5] Por ejemplo, la media geométrica de 3 y 12 es 6.

Por último, la *media armónica* M_h se define por la propiedad:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{M_h} + \frac{1}{M_h},$$

de donde puede deducirse:

$$M_h = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{a+b}.$$

[5] Según veremos, la última expresión no es muy “pitagórica” y podrían tirarnos al mar por mencionarla...

Parte entera y parte decimal o fraccionaria

La *parte entera* de un número real r es el mayor número entero que es menor o igual que r. Por ejemplo, la parte entera de $254,576879797979...$ es 254. En cambio la parte entera del número negativo $-61,357$ es -62.

Llamando $E(r)$ a la parte entera de r, en todos los casos se verifica:

$$E(r) \leq r < E(r) + 1.$$

La regla es: si r es entero, su parte entera es el mismo r. Si r es positivo y no entero, la parte entera de r se obtiene quitando los decimales, como en el primer ejemplo. Si r es negativo y no entero, además de quitar los decimales se resta 1, como en el segundo.

La *parte decimal* o *parte fraccionaria* de r, que llamaremos $F(r)$, se define por:

$$F(r) = r - E(r).$$

En los ejemplos vistos, tendremos: que la parte decimal o fraccionaria de $254,576879797979...$ es $0,576879797979...$ y la de $-61,357$ es $0,643$. Esta parte decimal es un número real que es mayor o igual que 0 y menor que 1, o sea, que está en el intervalo $[0,1)$.

En 8.1.1 se demuestran algunas propiedades de F considerada como "función". Veremos más adelante en este capítulo el concepto de función, su representación gráfica y temas relacionados. En la Figura 2.18 se ven los gráficos correspondientes a las funciones E y F.

2.1. Coordenadas cartesianas

Las coordenadas cartesianas, llamadas así en homenaje a René Descartes, (ver Capítulo 4) que fue quien las definió, son un sistema de representación geométrica que permite, por ejemplo, situar un punto en un mapa representándolo por un par de números: su latitud y su longitud. Un punto de un plano queda determinado por sus distancias a un eje vertical y a uno horizontal. Si nos moviéramos sobre una recta, sólo necesitaríamos **un** número para determinar la posición del punto: la distancia a un punto prefijado, llamado *origen*.

En la Figura 2.8 vemos ejemplos de puntos en los cuatro "cuadrantes" del plano y en la tabla siguiente tenemos los signos correspondientes a cada cuadrante.

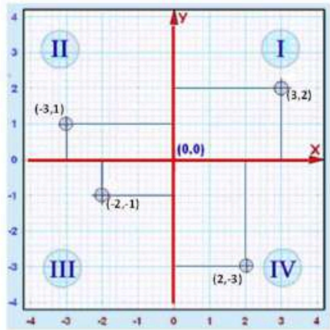


Figura 2.8: Puntos en el plano

x	y	Ejemplo	Cuadrante
Positivo	Positivo	$(3, 2)$	I
Negativo	Positivo	$(-3, 1)$	II
Negativo	Negativo	$(-2, -1)$	III
Positivo	Negativo	$(2, -3)$	IV

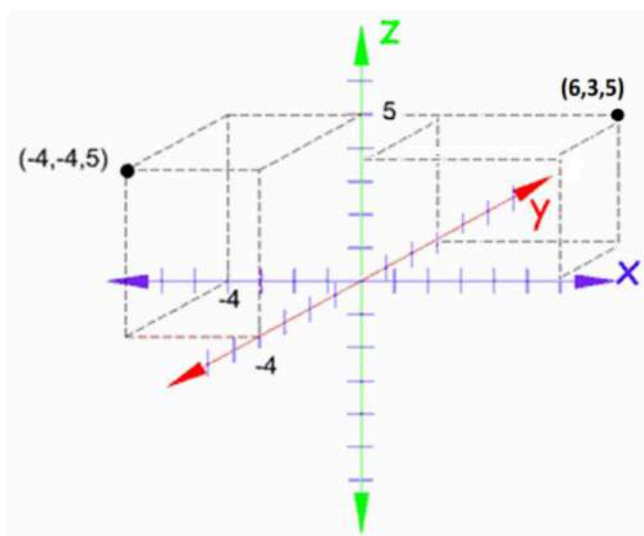


Figura 2.9: Puntos en el espacio

Si quisiéramos situar un punto del espacio, necesitaríamos un eje más, el eje z. Un punto estaría dado por tres números, que son sus coordenadas según los ejes x, y, z. En la Figura 2.9 vemos los puntos $(-4, -4, 5)$ y $(6, 3, 5)$ representados en el espacio.

Una anécdota se cuenta sobre Descartes y la invención de las coordenadas. Trabajaba en una habitación y entró una mosca... "¿Cómo determinar su posición?" dicen que pensó, a lo que se respondió, con genial inspiración: "¡Por las distancias a dos paredes y al piso!"

En general, podemos imaginar puntos situados en un espacio n-dimensional (aunque ya no podremos representarlos geométricamente), que estaría formado por n-uplas: $(x_1, x_2, ..., x_n)$, donde cada x_i, $i = 1, ..., n$ es un número real.

Cada figura que representamos geométricamente tiene su dimensión: puntos alineados, un segmento, una semirrecta, una recta tienen dimensión 1: pueden representarse sobre un sólo eje. En cambio si tenemos al menos tres puntos no alineados, ellos determinan un plano. Una figura contenida en un plano: un polígono (regular o irregular), un círculo,... necesita de **al menos** dos ejes para poder representarla. Asimismo, una esfera, un cubo, un poliedro, son cuerpos de tres dimensiones y necesitamos **al menos** tres ejes para representarlos.

¿Porqué remarcamos "al menos"? Porque podemos representar un segmento en el plano o en el espacio, una figura plana en el espacio y eventualmente (aunque eso ya lo tenemos que imaginar) un poliedro en un espacio de 4 dimensiones o más. Podemos, por ejemplo, "sumergir" una figura de 2 dimensiones (plana) en el espacio de 3 dimensiones (o más). ¿Qué es lo que cambia? Si la figura está en el plano, cada punto de ella tiene dos coordenadas. Pero si agregamos una tercera coordenada fija (normalmente se agrega 0, pero podría ser cualquier número) la figura aparece sumergida en el espacio. Vemos ejemplos en la Figura 2.10. El segmento $1\,3$ se transforma en el segmento $(1, 0)\,(3, 0)$ y el cuadrado $(a, 0)\,(a, b)\,(0, b)\,(0, 0)$ se transforma en el cuadrado $(a, 0, 0)\,(a, b, 0)\,(0, b, 0)\,(0, 0, 0)$.

2.2. Relaciones

Si tenemos dos conjuntos X e Y (que pueden ser iguales), una *relación de X en Y* es un conjunto de pares (a, b) donde a está en X y b está en Y.

Por ejemplo: sean

$$X = \{a, b, c\}, \quad Y = \{1, 2, 3, 4\}$$

y consideremos las relaciones R y R' de X en Y dadas respectivamente por

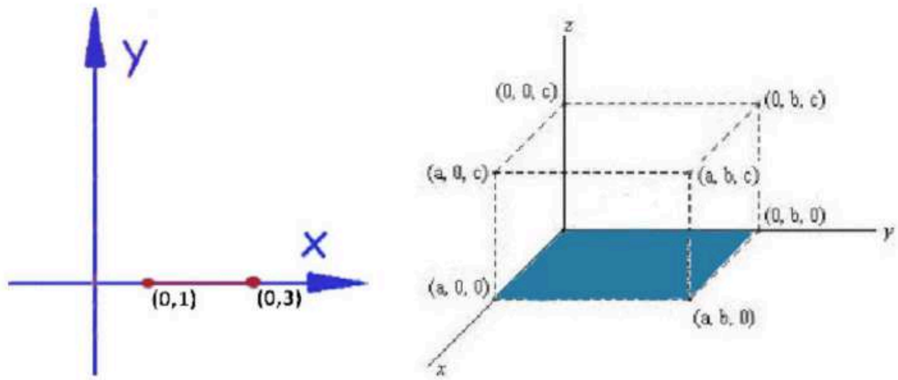


Figura 2.10: Figuras "sumergidas"

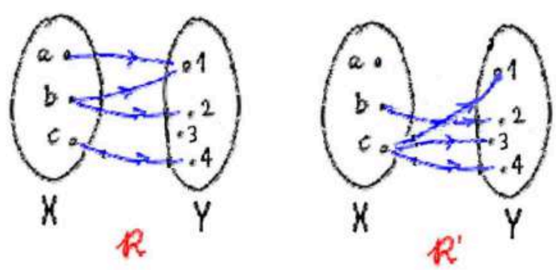


Figura 2.11: Relaciones de X en Y

el conjunto de pares:

$$R = \{(a, 1),\ (b, 1),\ (b, 2),\ (c, 4)\} \ \ y \ \ R' = \{(b, 2),\ (c, 1),\ (c, 3),\ (c, 4)\},$$

que se representan graficamente en la Figura 2.11. Ellas no tienen ninguna propiedad especial.

2.2.1. Relaciones de equivalencia

Consideremos ahora una *relación en* X, que es un caso particular en el que $X = Y$. Vemos un ejemplo en la Figura 2.12, donde vemos dos formas de representar gráficamente la misma relación R en $X = \{a, b, c, d\}$, siendo

$$R = \{(a, a),\ (a, b),\ (a, d),\ (b, b),\ (c, c),\ (c, d),\ (d, a),\ (d, d)\}.$$

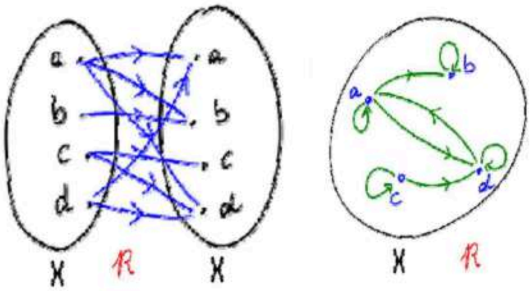


Figura 2.12: Relación R en X

Una relación R en X se llamará *reflexiva* si contiene todos los pares de elementos repetidos. Por ejemplo, tomando $X = \{2, 4, 6, 10, 12, 15\}$ y

$$R = \{(2,2), (4,4), (6,6), (10,10), (12,12), (15,15), (10,15), (12,15)\}.$$

Diremos que R es *simétrica* si para cada par (a, b) que ella contiene, contiene también el par (b, a). Por ejemplo, la relación R en $\mathbb{N}$ dada por (a, b) está en R si a no tiene factores comunes con b (o "es primo con") es simétrica. En cambio la relación

$$R = \{(4,4), (4,6), (6,4), (10,12)\},$$

no es simétrica, porque falta el par $(12, 10)$. Tampoco es reflexiva.

Por último, tenemos la propiedad de transitividad; diremos que R es *transitiva* si cada vez hay pares (a, b) y (b, c) que pertenecen a R, también está en R el par (a, c). O sea: si a se relaciona con b y b con c, entonces a se relaciona con c. La relación definida en los números reales por: $a < b$ es transitiva, pero obviamente no es simétrica ni reflexiva.

Si una relación tiene las tres propiedades: reflexividad, simetría y transitividad decimos que es una *relación de equivalencia*. Por ejemplo:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (8,8),$$

$$(1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2), (4,5), (5,4), (6,8), (8,6)\}.$$

Aquí observamos que 1, 2 y 3 están relacionados entre sí y también lo están 4 y 5, 6 y 8 y el 7 queda aislado. Tenemos así cuatro "partes" que se llaman *clases de equivalencia*:

$$\{1,2,3\}, \quad \{4,5\}, \quad \{6,8\} \ y \ \{7\}.$$

Otro ejemplo: en el conjunto

$$X' = \{4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

tenemos la relación

$$R' = \{(4,4),(5,5),...,(12,12),(4,7),(7,4),(4,10),(10,4),(7,10),(10,7),$$
$$(5,8),(8,5),(8,11),(11,8),(5,11),(11,5),(6,9),(9,6)\},$$

cuyas clases son:

$$\{4,7,10\}, \quad \{5,8,11\}, \quad \{6,9\} \ y \ \{12\}.$$

Vemos estos dos ejemplos graficados en la Figura 2.13.

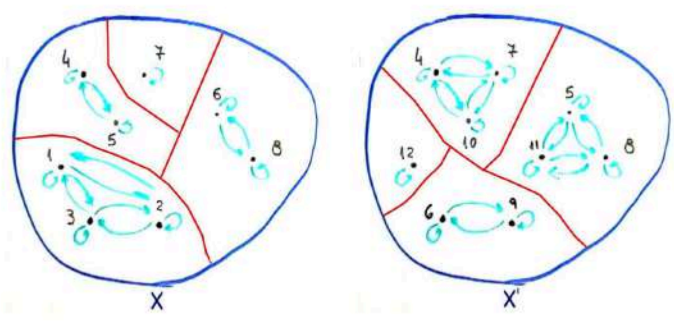


Figura 2.13: Relaciones de equivalencia

Daremos otros dos ejemplos numéricos en conjuntos infinitos que usaremos en el Capítulo 6 (6.4.5) y en el Capítulo 8 (Teorema 10).

- (1) Fijemos un número natural $n, n \neq 0$. Vamos a ver la relación de *congruencia módulo* n. Para fijar ideas, tomemos el número $n = 5$.

  En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros definimos la relación, llamada *de congruencia módulo* 5 y que se denota $\equiv_5$: dos enteros z y z'

están relacionados por esta relación o "son congruentes módulo 5" si la diferencia entre ellos es un múltiplo de 5. Suele denotarse:

$$z \equiv z'(\text{mód } 5), \text{ o bien } z \equiv_5 z'.$$

Todos los múltiplos de 5 son equivalentes entre sí, todos los que son múltiplos de 5 más 1 son equivalentes, por ejemplo 1 y 6, o 11 y 1,....Así también todos los que son múltiplos de 5 más 2 (respectivamente múltiplos de 5 más 3 y más 4) están en una clase de equivalencia y se prueba que sólo hay esas 5 clases de equivalencia y que están determinadas por los restos $0, 1, 2, 3, 4$ obtenidos al dividir por 5. Dado un número cualquiera, basta dividirlo por 5 y mirar el resto para decidir en qué clase está. Por ejemplo, $531 = 106 \cdot 5 + 1$. Luego, $531 \equiv 1(\text{mód } 5)$.

- (2) Tomemos el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Definimos allí la relación, denotada $\sim_{\mathbb{Z}}$, que es de equivalencia: dos números reales r y r' son equivalentes si su diferencia $r - s$ es un entero. Por ejemplo, el número 0 es equivalente a cualquier entero. En general, la clase de equivalencia de un número $r \in \mathbb{R}$ está formada por todos los números reales con la misma parte fraccionaria que r. [6] Vemos en la Figura 2.14 un número real a del intervalo $[0, 1)$ y sus equivalentes: ..., $-4 + a$, $-3 + a$,...,a, $1 + a$, $2 + a$,... Son todos los que tienen la misma parte fraccionaria $F(a)$.

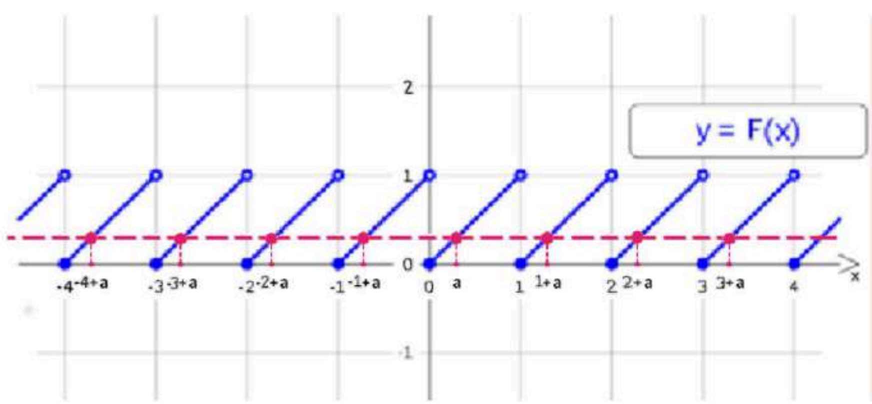


Figura 2.14: Relación $\sim_{\mathbb{Z}}$

[6] Ver Lema 6 y Observación siguiente en el Capítulo 8.

Se puede demostrar que las clases de equivalencia por la relación $\sim_{\mathbb{Z}}$ corresponden exactamente a los números reales del intervalo $[0,1)$: cada número real es equivalente a uno que tiene la misma parte fraccionaria y cuya parte entera es 0.

Siguiendo con las propiedades de las relaciones de equivalencia diremos que las clases de equivalencia forman lo que se llama una *partición* del conjunto X y una partición se caracteriza por tres propiedades de sus clases:
1) cada clase tiene al menos un elemento,
2) dos clases distintas no tienen elementos comunes y
3) cada elemento del conjunto X está en alguna clase de la partición.

A partir de una relación de equivalencia construímos la partición asociada y a partir de una partición de X se puede reconstruir su relación asociada.

Se llama *conjunto cociente* al conjunto de las clases de equivalencia por una relación dada. En el primer ejemplo de la figura, el cociente es el conjunto

$$\{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,8\},\{7\}\}.$$

La clase de equivalencia del elemento n la denotamos $\widetilde{n}$. Siguiendo con ese ejemplo, tenemos entonces:

$$\widetilde{1}=\widetilde{2}=\widetilde{3}=\{1,2,3\},\ \ \widetilde{4}=\widetilde{5}=\{4,5\},\ \ \widetilde{6}=\widetilde{8}=\{6,8\},\ \ \widetilde{7}=\{7\}.$$

En el ejemplo (1) de la congruencia módulo 5 las clases de equivalencia son:

$$\begin{aligned}\widetilde{0}&=\{...,-10,-5,0,5,10,15,...\},\\ \widetilde{1}&=\{...,-9,-4,1,6,11,16,...\},\\ \widetilde{2}&=\{...,-8,-3,2,7,12,...\},\\ \widetilde{3}&=\{...,-7,-2,3,8,13,...\},\\ \widetilde{4}&=\{...,-6,-1,4,9,14,...\}.\end{aligned}$$

El conjunto cociente se denota $\mathbb{Z}/\equiv_5$. Se tiene entonces:

$$\mathbb{Z}/\equiv_5=\{\widetilde{0},\widetilde{1},\widetilde{2},\widetilde{3},\widetilde{4}\}.$$

En el ejemplo (2) de la relación $\sim_{\mathbb{Z}}$ la clase de equivalencia de cada número real a es

$$\widetilde{a}=\{a+z,\ z\in\mathbb{Z}\},$$

como se ve en la Figura 2.14.

Observemos que para cada clase de equivalencia hay un número a, $0 \leq a < 1$ y recíprocamente, para cada número $a \in [0, 1)$ hay una clase de equivalencia. Volveremos sobre esto en el Capítulo 8.

2.2.2. Funciones

Una función f es una relación entre un conjunto dado X (llamado *dominio*) y otro conjunto Y (llamado *codominio*) de forma que a cada elemento x del dominio le corresponde **un y sólo un** elemento $f(x)$ del codominio. Se llama función *de* X *en* Y y se denota $f : X \longrightarrow Y$.

Sean $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$, y las relaciones f_1, f_2 y f_3 que se muestran en la Figura 2.15. Vemos que f_1 no cumple la condición de función: a 3 le corresponden **dos** elementos de Y. Tampoco f_3 es función: 2 no tiene correspondiente. En cambio la relación f_2 hace corresponder a cada elemento de X un y sólo un elemento de Y, luego sí es una función. Se tiene:

$$f(1) = b = f(4), \quad f(2) = c, \quad f(3) = d.$$

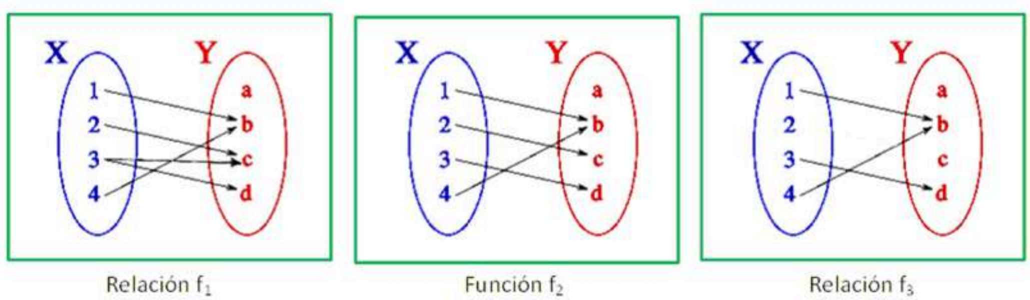


Figura 2.15: Relaciones f_1, f_2, f_3

Funciones inyectivas, suryectivas y biyectivas

Una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice *inyectiva* si a elementos distintos del conjunto X les corresponden elementos distintos en el conjunto Y. Es decir que en el conjunto X no puede haber dos o más elementos que tengan la

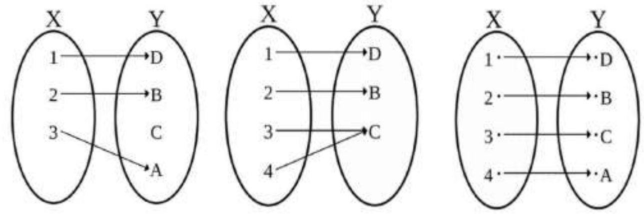


Figura 2.16: Función inyectiva, suryectiva y biyectiva

misma imagen. La función f_2 de la Figura 2.15 no es inyectiva porque 1 y 4 tienen el mismo correspondiente b en Y.

Una función es *suryectiva* cuando cada elemento de Y es la imagen de algún elemento de X. La función f_2 de 2.15 no es suryectiva, porque a no proviene de ningún punto de X.

Una función es *biyectiva* si es al mismo tiempo inyectiva y suryectiva, o sea si cada elemento del conjunto Y proviene de un y sólo un elemento de X. En la Figura 2.16 vemos ejemplos.

Funciones entre conjuntos de números

Cuando X e Y son conjuntos de números reales, una función de $f : X \longrightarrow Y$ admite una representación en coordenadas cartesianas en el plano.

El *gráfico* de una función f es el conjunto de puntos (x, y) del plano en los cuales $y = f(x)$. Vemos el ejemplo de la función g en la Figura 2.17, donde $g(0) = 0$, $g(1) = 2$, $g(2) = 3$, $g(3) = 1$, $g(4) = 0$.

Hemos visto ya ejemplos de funciones numéricas en las que dominio y codominio coinciden con el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales: la que a cada número real x le asigna su parte entera $E(x)$ o la que asigna a x su parte decimal $F(x)$, cuyos gráficos se ven en la Figura 2.18.

Cuando una función tiene como dominio y codominio un conjunto $\mathbb{R}$ de números reales, su gráfico en el plano es una curva (continua o discontinua). Veremos ejemplos de curvas que representan las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

Pero el dominio de una función f puede ser también un conjunto de **pares** de números reales, es decir, puntos del plano. La función es entonces *de dos variables*. Si su codominio es $\mathbb{R}$, el gráfico de la función estará dado por puntos del espacio, aquellos puntos (a, b, c) tales que c es la imagen por

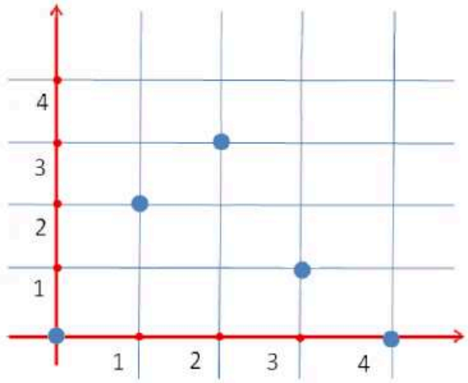


Figura 2.17: Gráfico de g

f del par (a, b), lo que se denota $f(a, b) = c$. Estos puntos determinarán una superficie en el espacio. Vemos ejemplos en la Figura 2.19.

Como veremos en el Capítulo 6, fijados dos números primos p y q, la función

$$f(n, m) = \mathbf{g}_{n,m}^{p,q},$$

donde n y m son números enteros, da por resultado las notas de una gama o escala $\mathbf{G}^{p,q}$. Por ser su dominio los pares de números enteros no determina una superficie continua, sino puntos aislados en el espacio, como podemos ver en la Figura 6.15.

2.2.3. Funciones trigonométricas

Para estudiar el sonido desde un punto de vista físico, como haremos en el Capítulo 3, necesitaremos las funciones trigonométricas, que son funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Empezaremos por definir la función *seno* [7] de un ángulo: en un triángulo rectángulo: es la relación entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa, como se ve en la Figura 2.20.

Análogamente, la relación entre el cateto adyacente y la hipotenusa es lo que se llama *coseno.* Pero podemos apartarnos un poco de los ángulos y

[7] Etimología (Wikipedia) El astrónomo y matemático hindú Aria Bhatta (476–550 d. C.) estudió el concepto de "seno" con el nombre de ardhá-jya, (siendo ardhá: "mitad" y jya: "cuerda"). Por diversas traducciones no fieles se interpretó como "bahía", traducida al latín como "sinus", que se convirtió en el español "seno".

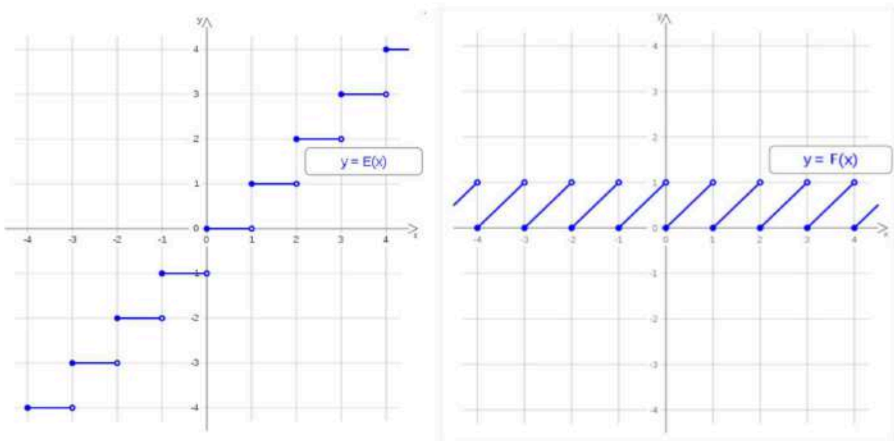


Figura 2.18: Funciones parte entera y fraccionaria

estudiar las funciones trigonométricas como dependiendo de números reales, que son los ángulos medidos en radianes, recordando la equivalencia:

$$180 = \pi \; radianes.$$

La función coseno depende de la función seno (y recíprocamente) ya que es fácil ver que

$$cos(x) = sen(x + \frac{\pi}{2}).$$

Esta relación nos permite estudiar sólamente una de las dos funciones (por ejemplo el seno, para deducir características del coseno), como haremos es seguida.

Para la descripción de un movimiento ondulatorio como el de una cuerda vibrando o el del aire transmitiendo un sonido se usan fuertemente las propiedades de la función seno. Aplicaremos estas observaciones en el Capítulo 3.

Veamos el gráfico de la función seno en la Figura 2.21. Observemos que la función toma el valor 0 en los puntos de la forma $x = n\pi$ y que tiene su máximo 1 o su mínimo -1 en los de la forma $x = n\frac{\pi}{2}$, para n un número entero. Es decir que, para cada n entero:

$$sen(n\pi) = 0 \text{ y } sen(n\tfrac{\pi}{2}) = 1 \text{ o } sen(n\tfrac{\pi}{2}) = -1.$$

Otra propiedad de esta función es que, mirando el gráfico, el "pedazo" de función entre 0 y 2π se repite en sentido creciente y decreciente. Es decir

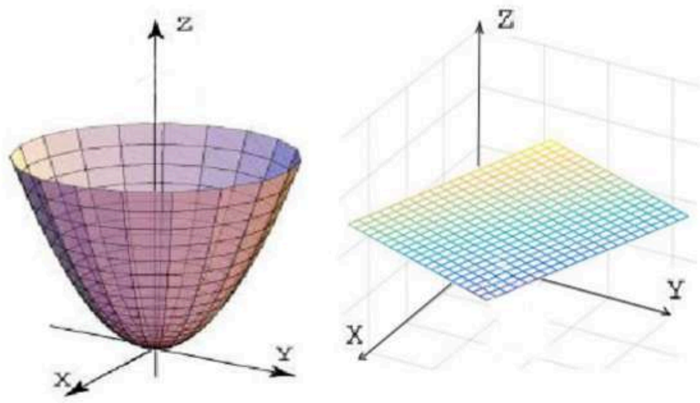


Figura 2.19: Funciones de dos variables

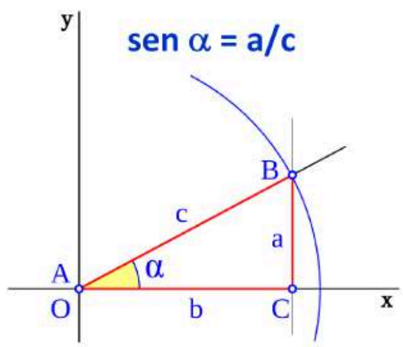


Figura 2.20: Seno

que: si tomamos un número par $2n$ (positivo o negativo), los valores de la función entre $2n\pi$ y $(2n+2)\pi$ son los mismos que entre 0 y 2π. En general, si tomamos **cualquier número** x, el valor del seno en x es el mismo que en $x + 2\pi$, o sea: $sen(x) = sen(x + 2\pi)$. Decimos por esto que la función seno es *periódica*, de período 2π. Si suponemos que la variable x representa el tiempo, el *período* T, que en el caso de la función seno es 2π, es el tiempo que se tarda en recorrer un "ciclo". Invirtiendo los términos, si el período es T, $\frac{1}{T}$ representa cuántos ciclos se recorren por unidad de tiempo, que es lo que se denomina *frecuencia*.

Si tuviéramos una función f de la forma: $f(x) = A\,sen(x)$ donde A es una constante positiva. ¿Cómo sería esa función? No cambiarían los puntos

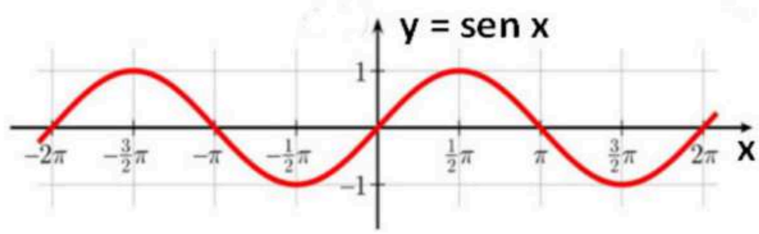


Figura 2.21: Función seno

donde f se hace cero, pero en cambio tendría máximo A y mínimo $-A$. Se dice que A es la *amplitud* de f. Veremos que en una onda de sonido A es el "volumen" máximo que puede alcanzar este.

Si fuera $f(x) = sen(2x)$, sería $f(0) = 0$ y el siguiente punto en que se anula es $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, luego $f(3\frac{\pi}{2}) = 0$, etc. Es decir que la función se anula en los puntos $n\frac{\pi}{2}$. Análogamente, si fuera $f(x) = sen(3x)$, se anularía en los puntos de la forma $n\frac{\pi}{3}$ o, en general,

$$f(x) = sen(k\,x),$$

se anula para $x = n\frac{\pi}{k}$ siendo n entero.

En cuanto al período, supongamos que tenemos $f(x) = sen(kx)$, con k natural. Luego,

$$f(x) = sen(kx) = sen(kx + 2\pi) = sen(k(x + \frac{2\pi}{k})) = f(x + \frac{2\pi}{k}),$$

por lo cual vemos que el período es $\frac{2\pi}{k}$, k veces menor que el período de $sen(x)$. Por lo tanto, la frecuencia será k veces mayor.

2.2.4. Funciones logarítmica y exponencial

Daremos algunas propiedades de los logaritmos que usaremos a partir del Capítulo 6.

Supongamos que a es un número real mayor que 1. Se llama *logaritmo* de un número real positivo x en *base* a y se denota $\log_a x$ al número y tal que: $a^y = x$.

Por ejemplo, $\log_3 81 = 4$, pues $3^4 = 81$.

Observemos que x no puede ser negativo ni 0, porque el número a es positivo y elevado a cualquier potencia dará positivo. El logaritmo existe sólo para los números positivos; dicho de otra manera, el dominio de la función logaritmo es el conjunto de números reales estrictamente positivos. Su codominio es $\mathbb{R}$, es decir, es una función de $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ en $\mathbb{R}$.

Fijada la base a, la *función logarítmica* está definida por:

$$y = \log_a x.$$

Los puntos del plano $(x, \log_a x)$ describen una curva que tiene, para $x < 1$ valor $y < 0$, para $x = 1$ es $y = 0$ y para $x > 1$ es $y > 0$. Podemos ver los gráficos en la Figura 2.22, para $a = 2, e, 10$, siendo e el número irracional que mencionamos en 2.0.4. El logaritmo con base e se llama *logaritmo natural.*

En el Capítulo 6 usaremos logaritmos de base 2.

Cuando se tiene una función $y = f(x)$ puede definirse una *función inversa* de f cuando existe otra función g tal que $g(y) = x$. Esto sucede cuando la función f es biyectiva. Como la función logarítmica es, en efecto, biyectiva, existe su inversa que es la *función exponencial*, pues:

$$\log_a x = y \quad \text{si y sólo si} \quad a^y = x.$$

Conviene aclarar una cuestión respecto a las variables. Cuando se tiene una función $y = f(x)$ se entiende que lo que se llama "variable independiente" es x y sus valores se toman sobre el eje horizontal. La variable y es "dependiente de" o "función de" x y se mide sobre el eje vertical. Cuando tomamos la función inversa g, para representarla en el plano tenemos que considerar también que la variable independiente se representa en el eje x y la que es función de ella en el eje y. O sea, debemos intercambiar de nombre a las variables y considerar $y = g(x)$. Eso es lo que se ve en la Figura 2.22, donde se muestran también las funciones exponenciales con base $a = 2, e, 10$ respectivamente. Observemos que, como la función logarítmica tiene dominio $\mathbb{R}$ menos los negativos y el cero y codominio $\mathbb{R}$, la función exponencial tiene dominio $\mathbb{R}$ y codominio $\mathbb{R}$ menos los negativos y el cero.

Enunciaremos sin demostrar las siguientes propiedades, válidas para la función logaritmo.

Propiedades

1. El logaritmo de 1 en cualquier base es 0, pues $a^0 = 1$, para todo a.

2. El logaritmo en base a de a es 1, pues: $a^1 = a$.

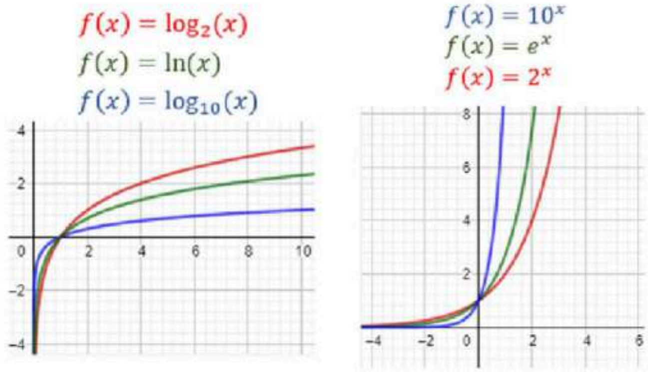


Figura 2.22: Funciones logarítmicas y exponenciales

3. El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores:
$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v.$$

4. El logaritmo de un cociente es la diferencia del logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:
$$\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a u - \log_a v.$$

5. El logaritmo de una potencia u^t es t veces el logaritmo de u (recordar que una potencia es un producto abreviado):
$$\log_a(u^t) = t \cdot \log_a u.$$

6. El logaritmo de una raíz $\sqrt[z]{u}$ es $\frac{1}{z}$ veces el logaritmo de u (recordar que $\sqrt[z]{u} = u^{\frac{1}{z}}$):
$$\log_a \sqrt[z]{u} = \frac{1}{z} \cdot \log_a u.$$

7. Para cambiar de una base a a una base b de logaritmos (generalmente de la base 10 a otra) hay que tener en cuenta que se cumple la siguiente igualdad:
$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b},$$
(por ejemplo: $\log_2 x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 2}$).

8. La función logaritmo en base a conserva las desigualdades, es decir, es una función *creciente*:

$$\text{si } u \leq v, \text{ entonces } \log_a u \leq \log_a v.$$

9. El logaritmo de un número primo es un número irracional.

El último item es fácil de probar: si p es primo, $a \neq p$ y tuviéramos $\log_a p = \frac{m}{n}$, sería $a^{\frac{m}{n}} = p$ y por lo tanto (ver 2.0.5) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = p$, de donde deducimos que $a^m = p^n$. Por la propiedad de descomposición en primos, esto no es posible. Luego, $\log_a p$ no puede ser racional.

Capítulo 3: Acústica musical

Capítulo 3

Acústica Musical

En un sentido amplio, la *acústica* es la ciencia que estudia el fenómeno del sonido: cómo se produce, cómo se transmite y cómo se recibe. Varias ciencias confluyen para estudiar el sonido y sus efectos: la matemática, la física, la fisiología, la psicología... En cuanto a la *acústica musical*, es la disciplina que combina arte y ciencia, enfocándose en el fenómeno de los sonidos musicales y sus características. Podemos incluir dentro de la acústica musical la tecnología con que se procesa el sonido, la arquitectura con la que se diseña una sala de música, la teoría musical, la teoría matemática de las ondas... o bien la fisiología del oído o de las cuerdas vocales.

Veremos en este capítulo generalidades sobre estos temas y algunos aspectos físico-matemáticos básicos, sin demostraciones.

3.1. El sonido

Empecemos por el principio.

El sonido es la "materia prima" de la música, pero...¿qué es el sonido?

Se nos contesta: *El sonido es un movimiento ondulatorio de materia.* Analicemos esto.

Hay sonidos producidos por la naturaleza: el viento, el rumor del agua, un trueno, el trino de un pájaro,... o por máquinas: un motor, el silbato de un tren,... y también están los sonidos que producen los instrumentos musicales: el de una cuerda que es pulsada, o un instrumento de viento que es soplado,... o una voz que canta. En la voz humana, las cuerdas vocales vibran, lo mismo que las cuerdas de un instrumento. Siempre hay un impulso y este produce una onda que necesita para difundirse una materia que puede comprimirse y expandirse: por ejemplo, el aire; para dar una idea, el desplazamiento de las ondas sonoras en el aire es parecido al de las ondas que se forman al tirar una piedra al agua o al de las olas del mar. El sonido se propaga en el aire a una velocidad de 340 metros por segundo por una sucesión de dilataciones y compresiones. Cada partícula transmite la perturbación a las adyacentes y hay una reacción en cadena como se muestra en la Figura 3.1. Así, el sonido llega hasta el oído y es percibido por este.

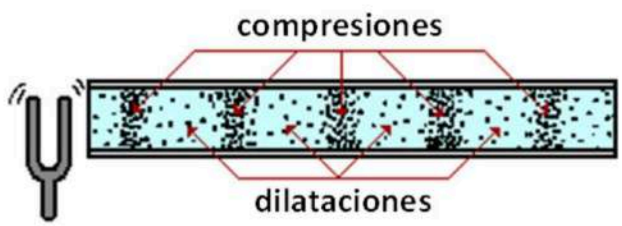


Figura 3.1: Ondas sonoras

El oído es un admirable y complejo órgano, con elementos que vibran al recibir el estímulo. Como vemos en la Figura 3.2 hay un oído externo que termina en una membrana (tímpano) que vibra, un oído medio formado por minúsculos huesos que transmiten las vibraciones y un oído interno; este contiene un líquido donde llegan esas vibraciones y también el "órgano de Corti" que es un conjunto de "cilias" (pelos diminutos) que son las encargadas de transformar la energía de las ondas sonoras en impulso nervioso que se transmite al cerebro. El proceso de la percepción y la posterior transmisión de la información al cerebro es un complicado y maravilloso mecanismo que se ha ido descubriendo a través del tiempo. Por ejemplo, se sabe que cada grupo de cilias se especializa en transmitir las diferentes frecuencias al cerebro. El oído es capaz de diferenciar un gran número de frecuencias muy cercanas unas de otras dentro del rango audible que es aproximadamente de 20 a 20.000 vibraciones por segundo.

El oído es el primero de los sentidos que se despierta, en el seno materno, y el último que se apaga: aún cuando la persona está en coma, hay estudios que prueban que puede oír. Es un sentido "siempre alerta"; por ejemplo, no tenemos párpados en los oídos y aún dormidos percibimos los sonidos de alrededor.

¿Cómo son las ondas sonoras? Una característica es que, fijado un instante

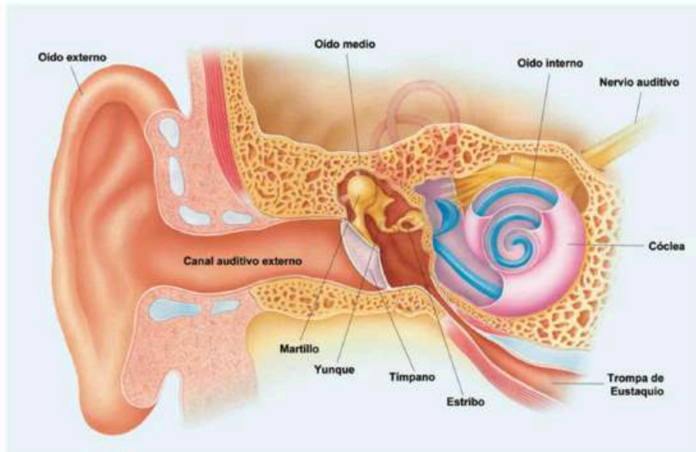


Figura 3.2: Mecanismo del oído

de tiempo, las partículas en movimiento forman un dibujo que se repite a intervalos regulares (a distancias iguales aparecen iguales estados): eso se expresa diciendo que el movimiento es *periódico* en el espacio. Por otra parte, si se fija un punto en el espacio, que representa una partícula, sus movimientos se repiten después de un cierto tiempo (a intervalos regulares se repiten los mismos estados): luego el movimiento también es periódico en el tiempo.

Cuando nos llega un sonido, podemos distinguir al menos tres características.

Percibimos si es agudo como una voz de soprano o el sonido de un violín o grave como la voz de un barítono o el sonido de un contrabajo. Esta característica es la *altura*. Cuando hablamos de que un sonido es muy fuerte o muy suave, nos referimos a su mucho o poco volumen, su intensidad o *amplitud*. Por otra parte, diferenciamos bien el sonido de un saxofón del de un piano: son sonidos compuestos de manera diferente, lo que los diferencia es el *timbre*.

Tomaremos como referencia en este capítulo el caso de una cuerda que vibra; es fácil verificar que la longitud de una cuerda, junto con otras características (sección, densidad y tensión), determinan la altura del sonido. En las cuerdas de un piano, por ejemplo, vemos que las más largas y más gruesas producen sonidos más graves, porque allí juega la longitud pero también la sección, que es el grosor, que se da con el "entorchado" o recubrimiento de metal. Si se pisa una cuerda de un violín o de una guitarra, se obtiene un sonido más agudo que si se la deja libre. También para afinar una guitarra se ajusta la tensión de las cuerdas para obtener sonidos más agudos o más graves.

La altura tiene que ver con el número de oscilaciones por segundo de la cuerda, que es lo que se llama la *frecuencia* del sonido, que se indica con f. La frecuencia se mide en *hertz*, que se abrevia Hz.

Las frecuencias de las notas $do_1 - re - mi - fa - sol - la - si - do_2$ de la escala actualmente en uso, en hertz, está dada en la tabla de la Figura 3.3.

Nota	f (Hz)
Do	261,63
Re	293,66
Mi	329,63
Fa	349,23
Sol	392
La	440
Si	493,88
Do	523,25

Figura 3.3: Frecuencias

La frecuencia que se toma como referencia es la del *la*, $440H$. El motivo es que tradicionalmente los instrumentos se afinan a partir de la nota dada por el *diapasón* (ver Figura 3.4), que es justamente ese *la*.

Figura 3.4: Diapasón

Por otra parte, el volumen de un sonido tiene que ver con la fuerza con que se impulsa inicialmente la cuerda, que hace que esta se aparte más o menos de su posición de equilibrio, es decir, determina la amplitud de la onda sonora. Esta amplitud o intensidad se mide en *decibeles*.

En cuanto al timbre, necesitamos para caracterizarlo mejor el concepto de *armónico* de un sonido dado, que veremos luego.

Analicemos un poco más de cerca las ondas sonoras.

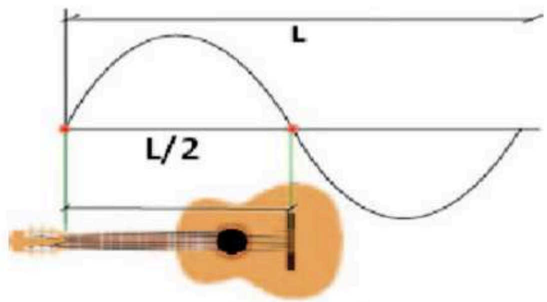


Figura 3.5: Cuerda de guitarra

3.1.1. Los armónicos

Supongamos una cuerda fija en sus extremos. Por ejemplo, una cuerda de una guitarra, como se ve en la Figura 3.5. Algunos teóricos de la música, como Wallis (1616-1703) en Inglaterra y Joseph Sauveur (1653-1716) en Francia, observaron experimentalmente que al vibrar una cuerda existen ciertos puntos, a los que Sauveur denominó *nodos*, en los que no hay ningún movimiento. Se reconoció posteriormente que las vibraciones que dan origen a esos nodos corresponden a frecuencias más altas que la asociada a la vibración "normal" de la cuerda, es decir, aquella que tiene sólo los extremos como nodos y, más aún, que las frecuencias "nuevas" eran múltiplos de la frecuencia de la vibración básica.

Entonces observamos que el sonido siempre presenta un tono o altura *fundamental* acompañado de otros sonidos que son lo que se llama sus *armónicos*, que aparecen con distintas intensidades. El movimiento que se produce es, entonces, la composición de todas esas vibraciones simultáneas, es decir que la cuerda vibra simultáneamente en la frecuencia de la nota o tono fundamental y en la de sus armónicos. En cuanto a las amplitudes, en general la fundamental o primer armónico tiene mayor amplitud y se observa que los armónicos que siguen son de amplitud sucesivamente decreciente: normalmente el segundo armónico tiene más amplitud que el tercero, el tercero más que el cuarto,... Esto sucede porque, intuitivamente, cuantos más nodos tenga el movimiento, menos se mueve la cuerda, o sea que la amplitud de la onda, que da la intensidad o volumen del sonido, será menor cuanto más alto sea el orden del armónico.

Lo que entendemos por altura de un sonido compuesto es la frecuencia del tono fundamental. En general, los sonidos que oímos son compuestos, sólo artificialmente puede generarse un sonido de un único tono. Cuáles y cuántos armónicos pueden oírse realmente junto con el fundamental es algo característico de cada cuerda (o, en general, de cada emisor de sonido) y es esto lo que determina el timbre del sonido. Por ejemplo, se sabe que en el clarinete son más fuertes los armónicos impares.

En la Figura 3.6 vemos el gráfico de los tres primeros armónicos de un sonido. Estos gráficos muestran cómo se desplaza cada partícula de una cuerda a lo largo del tiempo. Midiendo el tiempo en el eje horizontal y en el vertical el desplazamiento, las curvas que vemos representan el desplazamiento en función del tiempo. Estas funciones, como vemos, se parecen a las funciones trigonométricas. En efecto, veremos en lo que sigue que tienen mucho que ver con estas.[1]

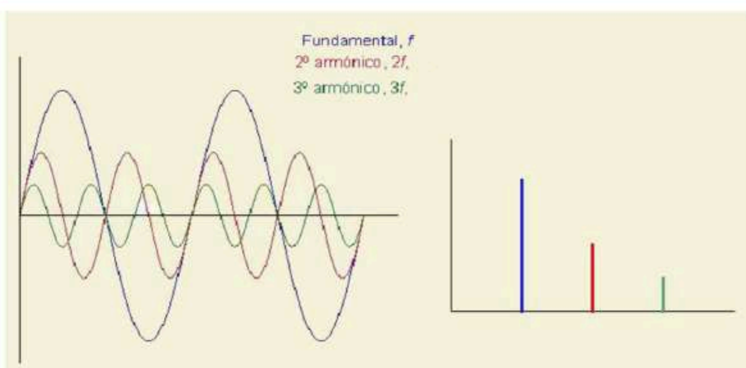


Figura 3.6: Primeros armónicos

En la Figura 3.7 se grafica separadamente a una cuerda como vibrando **sólo** en el primer armónico, sólo en el segundo, etc. y al final la cuerda

[1]Ver 2.2.2 en el Capítulo 2.

vibrando simultáneamente con los seis primeros armónicos.

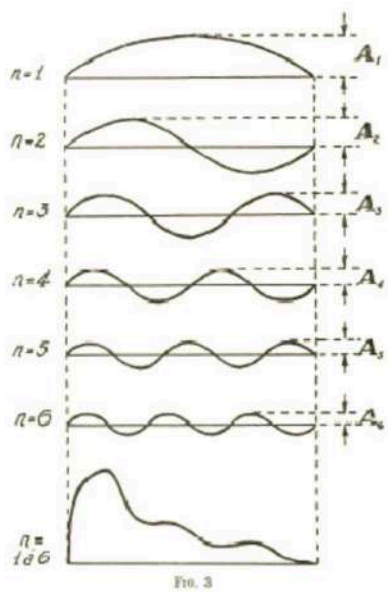


Figura 3.7: Seis armónicos

Hecho importante: Las frecuencias de los armónicos que acompañan a un tono fundamental son **múltiplos** de la de este: Si la frecuencia original es f, la del 2° armónico es $2f$, la del 3° $3f$ y así siguiendo.

Miremos en la Figura 3.7 los armónicos 1° (fundamental) y 2°. En el 2°, hay un nodo en la mitad. Pero esto corresponde exactamente a la vibración fundamental de una cuerda de la mitad de longitud. Luego, una cuerda de la mitad de longitud tiene una frecuencia de vibración fundamental del doble de la original. En general, una cuerda cuya longitud es $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,... de la longitud de la cuerda original tendrá una frecuencia de vibración de (respectivamente) 3 veces, 4 veces,... la de referencia.

En la tabla 3.3 vemos que la frecuencia de do_2 es el doble de la de do_1. Y se puede ver que se cumple siempre que una nota de frecuencia doble de la dada es su octava. Si se trata de cuerdas, la octava de una nota está emitida por una cuerda que tiene la mitad de longitud que la cuerda de la nota dada.

Remarquemos que, si la longitud de la cuerda decrece, entonces la frecuencia crece y podemos observar que el sonido es más agudo (esto ya lo observó Pitágoras, como veremos). Luego: a mayor frecuencia corresponde un sonido más agudo (en particular, todos los armónicos son sonidos más agudos que el fundamental).

Otro hecho importante: Las longitudes de las cuerdas están en relación inversa con las frecuencias de sus vibraciones fundamentales.

Según los músicos, los armónicos aportan diversas "sensaciones". Los que son potencias de dos refuerzan la altura del tono fundamental. Los que son múltiplos pares del tercero (el sexto, el doceavo,...) aportan un timbre "nasal", el quinto y el décimo producen un "color" profundo, cálido. En cambio los armónicos 7, 11, 13 y 15 son disonantes y dan un carácter "áspero" al sonido. [2]

¿Por qué se llaman "armónicos"? Porque son aquellos sonidos que naturalmente aparecen con uno dado y que nos suenan bien juntos al oído. Según veremos, esto coincide con los sonidos habitualmente considerados como "consonantes": según veremos el 2° corresponde a la octava, el 3° a la quinta...

El gran matemático Leonard Euler (ver 4.3) en sus "Cartas a una princesa alemana" le explica de una manera muy práctica la consonancia: dibuja una serie de puntos separados uniformemente y debajo otra serie separados con otras distancias. Le dice: así como el ojo percibe cuando hay un "patrón" o coincidencia entre las dos líneas de puntos, el oído precibe una coincidencia cuando hay consonancia de los dos sonidos. En el caso 1) no hay patrón, en el caso 2) sí (ver Figura 3.8).

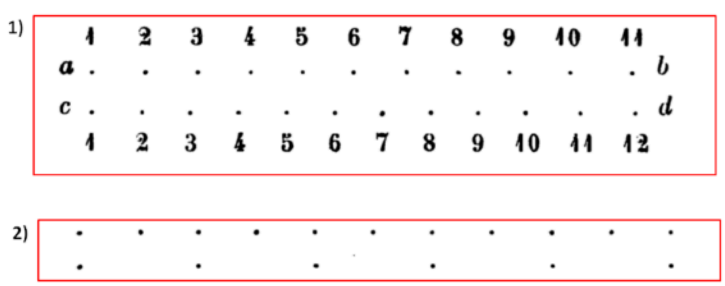


Figura 3.8: Idea de consonancia de Euler

¿Hay alguna diferencia entre un sonido musical y un ruido? Podemos decir (aunque esto es algo un poco subjetivo), que apreciamos como "musical" un

[2] Ver https://www.monografias.com/trabajos59/los-armonicos/los-armonicos.shtml

sonido que tiene las características que recién describimos y como "ruido", brevemente, un sonido cuyos armónicos pueden sonar tan fuerte como el fundamental, impidiendo identificar a este. Aparentemente, el sonido musical tiene "patrones" distinguibles, en cambio el ruido no responde a patrones que podamos registrar.[3]

El "tercer sonido" de Tartini

Al pulsar una cuerda, además de los armónicos del sonido fundamental, hay otros sonidos que acompañan a este.

Giuseppe Tartini (1692-1770) fue un violinista y teórico de la música que tuvo la siguiente experiencia:[4] *...deslizando el arco sobre las cuerdas al aire, sobre la nota Re, al juntarla casi por casualidad con la cuerda de La, me percaté de que entre los sonidos de una nota y otra se producía un armónico mayor, un zumbido grave y situado en el vértice -una octava por debajo- de un triángulo imaginario.* Ese tercer sonido es un re una octava más bajo que el del acorde $re-la$ que estaba tocando. Su frecuencia es la **diferencia** entre las dos frecuencias dadas. Hay diversas explicaciones para este fenómeno, pero es un hecho experimental que al sonar juntas dos notas se percibe también el otro sonido que descubrió Tartini, aunque otros atribuyen el descubrimiento al organista, compositor y teórico musical alemán G.A. Sorge.[5] Años después el físico Helmholtz descubrió que también aparece, débilmente, una nota cuya frecuencia es la suma de las frecuencias dadas.

3.1.2. Frecuencias de los armónicos y la escala actual

Ya vimos que la octava de una nota de frecuencia f tiene frecuencia $2f$, o sea, es su segundo armónico. ¿Qué intervalo hay entre una nota y los demás armónicos?.

Calculemos algunos armónicos de do_1, que en la escala actual tiene frecuencia $261,63$ Hz, como vemos en la Figura 3.3. Su tercer armónico tiene frecuencia $3f$, o sea, $784,89$ Hz ~ 785. Esta nota está "más arriba" que el do_2. ¿Qué nota es? Puede comprobarse que la que está más cerca es sol_2 (la quinta de do_2), cuya frecuencia es 784, pero **no es igual**. Observemos aquí que, si bajamos una octava sol_2, obtenemos sol_1 de frecuencia 392 (es la de

[3]Ver https://www.diferenciador.com/diferencia-entre-sonido-y-ruido/

[4]https://www.deviolines.com/el-misterioso-tercer-sonido-de-giuseppe-tartini

[5]http://loquelasnotasesconden.blogspot.com/2015/06

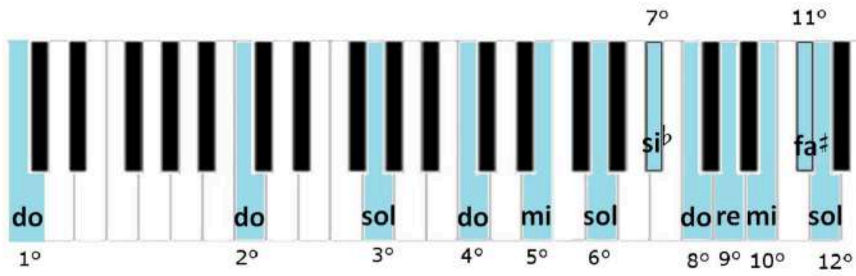


Figura 3.9: Armónicos de *do* en el piano

sol_2 dividido 2), que es la quinta de do_1. La quinta es una de las consonancias básicas, como vimos en el capítulo 1.

Aquí notamos la diferencia (no muy grande) entre las quintas de la escala actual y las *quintas puras*; estas últimas se obtienen, dada una nota de frecuencia f, calculando su tercer armónico $3f$ y luego bajando esta segunda nota una octava, entendiendo por "bajar una octava" dividir la frecuencia por 2. O sea que una quinta pura de una nota de frecuencia f es **exactamente** de frecuencia $\frac{3}{2}f$. Estas quintas puras, según veremos, son las dadas por la escala de Pitágoras.

El armónico 4 de do_1 es la octava de do_2, o sea do_3. Las octavas de la escala actual y las puras sí coinciden exactamente.

Si calculamos el armónico 5, obtenemos $5 \times 261,63$ Hz $= 1308,15$ Hz. La nota más próxima es un mi_3 (la tercera de do_3) de frecuencia $1318,52$ Hz, pero de nuevo **no es igual**. La tercera de do_1 es mi_1, que se obtiene bajando dos octavas el mi_3. El intervalo de tercera también se acepta como consonancia y además para cualquier tonalidad el acorde mayor está formado por la tónica, su tercera y su quinta, por lo que son intervalos importantes.

Aquí también podemos aclarar que las *terceras puras* son aquellas que se obtienen a partir del quinto armónico. Una tercera (mayor) pura a partir de una nota de frecuencia f se obtiene calculando su quinto armónico, de frecuencia $5f$ y luego bajando dos octavas (es decir, dividiendo por 4). De manera que la tercera pura de la nota de frecuencia f es de frecuencia $\frac{5}{4}f$. Aquí la diferencia con las terceras actuales se nota más.

El siguiente armónico, el sexto, lo podemos ver como la octava del tercero, pues $6f = 2(3f)$. Luego, nos da el valor $1569,78$ Hz, parecido a sol_3, **pero no igual**.

Vemos que, hasta el sexto armónico, las notas son *do*, *mi* o *sol*. Si siguiéramos calculando, obtendríamos aproximadamente las notas que se ven en la Figura 3.9, donde aparece hasta el armónico 12. Observemos que hay cuatro notas *do*, tres notas *sol* y dos *mi*, lo que indicaría que lo que "mejor suena" junto con un *do* es otro *do*, luego un *sol* y luego un *mi*. Dicho de otro modo: de mayor a menor en orden de consonancia se ubicarían la octava, la quinta y la tercera.

Sin embargo, aquí se trata de frecuencias que **se aproximan** a las que se obtendrían "naturalmente" a partir de los armónicos. Vemos entonces que la actual escala de temperamento igual, para la que se dice que las octavas, quintas y terceras son consonantes, no responde exactamente a la consonancia natural basada en el fenómeno de los armónicos. En esta consonancia se basan las escalas naturales que veremos en el Capítulo 5.

3.2. La cuerda vibrante

Hablaremos ahora brevemente de la forma matemática de describir el movimiento de una cuerda que vibra.

Hemos visto que el sonido se difunde como una onda y que ese movimiento ondulatorio es periódico en el tiempo y en el espacio.

Como puede verse en el capítulo sobre matemática, el seno y el coseno son funciones *periódicas*.

¿Será posible describir matemáticamente el movimiento de una cuerda que vibra mediante dichas funciones? Sí, se demostró que ellas juegan un papel fundamental en la expresión matemática de dicho movimiento. Es decir, se ha encontrado una función y que depende del espacio (variable x) y del tiempo (variable t) y que puede expresarse como combinación de funciones seno y coseno, o simplemente de funciones seno.

El físico-matemático Isaac Newton (1642-1727) trata las ondas sonoras y hace el primer intento serio de dar una teoría de estas, aunque sus hipótesis no eran del todo exactas. Antes de eso, Marin Mersenne (1588-1648) había expuesto en sus trabajos las leyes que rigen la frecuencia de los sonidos producidos por una cuerda en vibración. El matemático inglés Brook Taylor (1685-1731) fue el primero en determinar una ecuación asociada al problema de las cuerdas vibrantes. Su ecuación no era correcta, pero fue el primer paso en la solución del problema. Luego vinieron los aportes de los matemáticos Daniel Bernoulli (1700-1782), Leonhard Euler (1707-1783) y, Jean le Rond

D'Alembert (1717-1783). Bernoulli entendió que había un principio de *superposición de vibraciones* y que la ecuación del movimiento debería incluirlas a todas: la fundamental y sus armónicos. Sin embargo, no llegó a una solución matemática satisfactoria. Euler y D'Alembert estudiaron la superposición de vibraciones en casos aún más generales que el del movimiento de una cuerda vibrante y ambos concluyeron que la ecuación debía tener infinitos términos. Es decir, debía ser lo que matemáticamente se llama una *serie* de funciones. D'Alembert, por su parte, aportó un punto de vista nuevo: pensó la función que describe el movimiento de una cuerda vibrante como solución de ciertas ecuaciones diferenciales. Posteriormente Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), desarrolló la idea de que una función periódica (entre otras la del movimiento de una cuerda que vibra) puede analizarse usando series trigonométricas, dando origen a una importante teoría.

Vamos ahora a mostrar a grandes rasgos las ecuaciones obtenidas en el desarrollo de las ideas que acabamos de describir.

3.2.1. Ecuación de la cuerda vibrante

No vamos a reproducir aquí la demostración matemática de la siguiente fórmula, sino que la aceptaremos y explicaremos un poco sus componentes. En su expresión más simple, la función que describe la onda sonora vinculada a una cuerda de longitud l es:

$$y(x,t) = Asen(kx) \cdot sen(akt).$$

Las constantes A, k y a son positivas, a depende de la densidad, la sección y la tensión de la cuerda. Hablaremos con más detalle de a después.

Como la función seno tiene valor máximo 1, habrá ciertos valores de las variables x y t tales que

$$sen(kx) = sen(akt) = 1.$$

Para esos valores es $y(x,t) = A$, con lo cual la constante A es el máximo valor que puede alcanzar la función $y(x,t)$, es decir, A da la amplitud del movimiento.

Como los extremos de la cuerda están fijos, para el valor inicial $x = 0$ y para el final $x = l$ no hay movimiento; es decir, $y(0,t) = y(l,t) = 0$, en cualquier instante de tiempo t. En particular, debe ser $sen(kl) = 0$ y por lo tanto $kl = n\pi$, para algún n natural, porque es en esos puntos que la función seno se anula. Luego, la constante k será $k = n\pi/l$, para algún n natural. Reemplazando:

$$y(x,t) = Asen(\frac{n\pi}{l}x) \cdot sen(a\frac{n\pi}{l}t).$$

Dijimos que esta es una forma simple de dar la expresión del movimiento. En efecto, se demuestra que corresponde a uno sólo de los armónicos, el n-ésimo, podríamos llamarle $y_n(x,t)$ y, como A también depende de n, le llamaremos A_n.

Pero la vibración de la cuerda se compone de **todos** los armónicos, que son potencialmente infinitos, aunque sólo oiremos un cierto número finito. La expresión general es una serie, es decir una suma de los infinitos términos

$$y_n(x,t) = A_n sen(\frac{n\pi}{l}x) \cdot sen(a\frac{n\pi}{l}t).$$

La función que describe el movimiento es entonces, en realidad:

$$y(x,t) = \sum_n A_n sen(\frac{n\pi}{l}x) \cdot sen(a\frac{n\pi}{l}t),$$

donde la sumatoria se extiende a cualquier n natural.

Analicemos un poco más cada uno de estos términos fijando un n, digamos $n = 6$, cuyo gráfico es el de la Figura 3.10. Esta figura representa los puntos de la cuerda cuando se ha fijado un instante de tiempo.

Ya vimos que A_6 nos da el valor máximo de y_6; es decir, A_6 representa la amplitud (cuando la cuerda más se aparta de la condición de reposo) si consideramos que la cuerda se mueve **sólo** con el movimiento del sexto armónico. El siguiente factor, $sen(\frac{6\pi}{l}x)$, vimos que se hace 0 para $x = 0$ y para $x = l$. Pero además, si hacemos $x = \frac{l}{6}$, $x = 2\frac{l}{6}$, $x = 3\frac{l}{6}, \ldots$ también se hace $y_6 = 0$, como podemos ver en la Figura 3.10 en los puntos N_1, N_2,... Esos son los **nodos**. Y es claro que en el punto medio entre dos nodos debe haber lo que se llama un **vientre**, es decir, un punto donde se alcanza un valor máximo 1 o mínimo -1. Estos puntos son aquellos en los que $\frac{6\pi}{l}x = \frac{\pi}{2}$, o bien $\frac{6\pi}{l}x$ es un múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$; ellos son V_1, V_2,... de coordenadas $x = \frac{l}{12}$, o $x = 3\frac{l}{12}$, o $x = 5\frac{l}{12}$,... como se ve en la figura.

Estudiemos ahora el factor de $y_6(x,t)$ que depende del tiempo: $sen(a\frac{6\pi}{l}t)$. Este factor es periódico porque, según dijimos, el movimiento es periódico en el tiempo. Calculemos el período.[6] Si fijamos un punto de la cuerda y

[6]Ver *período* en 2.20, Capítulo 2.

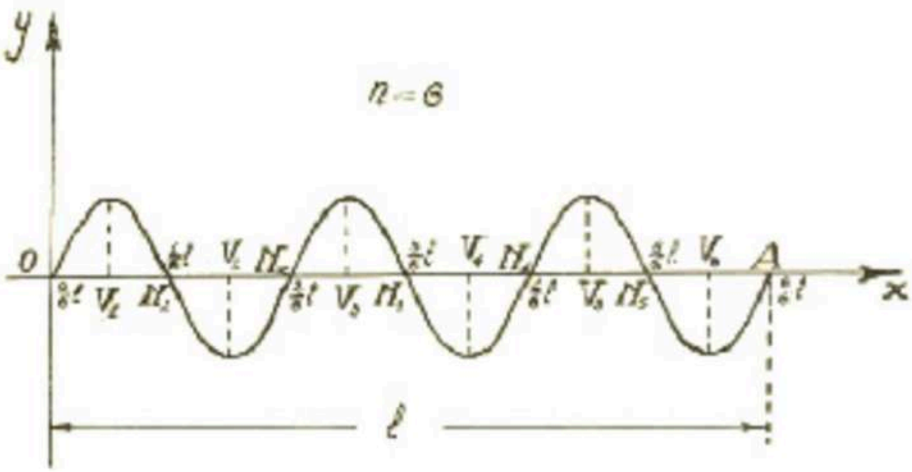


Figura 3.10: Sexto armónico

empezamos a contar el tiempo desde una posición de reposo de ese punto, la cuerda "subirá" hasta alcanzar un máximo de amplitud, que será cuando $sen(a\frac{6\pi}{l}t) = 1$, "bajará" hasta pasar por otra posición en la que $sen(a\frac{6\pi}{l}t) = 0$ y luego alcanzará un mínimo cuando $sen(a\frac{6\pi}{l}t) = -1$. Finalmente subirá hasta llegar a otra posición de reposo. Allí todo comenzará de nuevo, según la forma de la función seno. El tiempo transcurrido desde el momento inicial $t = 0$ hasta el siguiente t' en el que $sen(a\frac{6\pi}{l}t') = 0$ será la mitad del período. El período se completa en el tiempo T_6 en que vuelve a ser $sen(a\frac{6\pi}{l}T_6) = 0$.

Calculemos t', la mitad del período. Para $t = 0$ es $sen(a\frac{6\pi}{l}0) = 0$. ¿Cuándo se anula de nuevo el seno? Cuando su argumento es igual a π, es decir, cuando $a\frac{6\pi}{l}t' = \pi$. Luego, debe ser $t' = \frac{l}{6a}$. Por lo tanto el período $T_6 = 2\frac{l}{6a}$.

Aquí podemos ver con más precisión el concepto de *frecuencia*, del que ya hemos hablado informalmente.

En general, si en T_n segundos la cuerda efectúa una oscilación completa, en un segundo efectuará $\frac{1}{T_n}$ oscilaciones. Es decir que la cuerda vibra con una frecuencia f_n de $\frac{1}{T_n}$ oscilaciones por segundo. Ese número de oscilaciones por segundo, como mencionamos, es lo que se llama hertz, que es entonces la *unidad de frecuencia*. Por lo tanto, la frecuencia f_n de una cuerda de longitud l es

$$f_n = a\frac{n}{2l}.$$

Hablaremos ahora de la constante a. Como ya dijimos, la frecuencia del sonido de una cuerda vibrante depende de su sección, su densidad y la tensión a la que está sometida. Esas constantes están contenidas en a.

3.2.2. Leyes de Mersenne

Fue Mersenne, como dijimos, quien estableció las que se llamaron luego "Leyes de Mersenne" y que son la siguientes:

La frecuencia del sonido producido por una cuerda es

1) inversamente proporcional a la longitud de la misma.

2) directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión a la que está sometida la misma. (Al aumentar la tensión, la frecuencia varía en la proporción de la raíz cuadrada de aquella).

3) inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la densidad lineal de la misma. (Las cuerdas más densas producen frecuencias más graves que las cuerdas menos densas. Con objeto de aumentar la densidad se recurre al entorchado de las cuerdas, como en el piano).

4) inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la sección (o diámetro) de la misma. (De acuerdo a la esta ley, las cuerdas más gruesas se emplean en las regiones graves, reservándose las cuerdas finas para las regiones agudas. Esto guarda una estrecha relación con la tercera ley ya que al entorchar las cuerdas para aumentar su densidad también se agranda la superficie transversal de la misma, es decir su diámetro.)

De acuerdo a estas leyes se verifica que, denotando t_e la tensión, s la sección y d la densidad, se tiene que

$$a = \frac{\sqrt{t_e}}{\sqrt{sd}}.$$

Capítulo 4

Aspectos históricos

En este capítulo vamos a reseñar biografías de algunos músicos o matemáticos (en su mayoría, ambas cosas) que a lo largo de la historia se han destacado por estudiar la teoría de la música y contribuído a ella, especialmente aquellos que la han vinculado con una estructura matemática. El objetivo es poder situarnos aproximadamente en las corrientes predominantes en cada época, sin entrar en muchos detalles técnicos. Mostraremos algunas ideas filosóficas que, sobre todo en la Antigüedad, regían las teorías musicales en Occidente. Ampliaremos algunas ideas en el capítulo de escalas musicales.

En la antigüedad clásica la música era considerada parte de la matemática, al mismo nivel que la astronomía, la aritmética y la geometría y esa concepción continuó hasta cierto punto en la Edad Media. Las ideas pitagóricas de la armonía universal basada en proporciones matemáticas influenciaron un largo período de la historia de las teorías musicales. Empezaron luego a incorporarse otras ideas, como las de Aristóxeno, que daba prioridad a la experiencia auditiva sobre la teorías formales de la armonía. Posteriormente Tolomeo unifica ambas tendencias admitiendo nuevas consonancias en la escala musical, pero conservando todavía una visión global de la música como lo que armoniza el universo exterior y contribuye a la perfección del hombre. Boecio trasmite conceptos de la antigüedad a la Edad Media construyendo sobre las ideas de Pitágoras y Tolomeo una sólida teoría que tendrá una gran influencia en su tiempo. Luego, ya en el Renacimiento, empiezan a darse los "temperamentos" o "atemperaciones", como los mesotónicos, que buscan perfeccionar y corregir las escalas musicales existentes. Zarlino estudia a fondo en sus obras los fundamentos de la consonancia, y define la escala de justa entonación basada en la de Tolomeo, anticipando de cierto modo ideas posteriores como la teoría física de los armónicos. Posteriormente empieza un gran auge científico con pensadores como Newton, Descartes, Mersenne, que logran grandes avances físico-matemáticos. Aparece después Rameau que es músico y también autor de trascendentes obras en teoría musical. El gran matemático Euler estudia científicamente cuestiones vinculadas al sonido y la música, como la consonancia y el médico Helmholtz muestra un nuevo enfoque de esta desde la percepción auditiva de las disonancias.

Finalmente llegamos al siglo XX, del que daremos algunos datos biográficos de músicos y teóricos musicales que "rompen los moldes" de las teorías de la música occidental que venimos reseñando, marcando una época donde se abre un mundo de posibilidades sonoras y musicales dadas por la libertad imaginativa de los artistas y también por los avances técnico- científicos de la época.

4.1. Pitágoras y su herencia

Se sabe que desde la antigüedad los chinos, egipcios y mesopotámicos ya estudiaban rudimentariamente los principios matemáticos del sonido. Por ejemplo en China, Confucio, que era contemporáneo de Pitágoras (aprox. 551 – 479 a. C.), consideraba que los números tenían un significado sagrado vinculado a la música. También investigaban en el área de la astronomía y la astrología, vinculando estas con estudios sobre matemática y música. La armonía del universo, el destino del hombre en los astros, la religión,... todo estaba para ellos relacionado. Veían a Dios como el gran compositor que ordena los elementos del universo como si fueran notas de una melodía. La "música de las esferas" es una idea que resurge posteriormente en varios filósofos y teóricos de la música, especialmente en Grecia.

En China la música se considera creada por el legendario matemático y filósofo Ling-Lun 2.500 años antes de Cristo. Según una leyenda, el mítico emperador "amarillo" Huang-Ti o Huangdi en su afán de relacionar la música con las leyes cósmicas le encargó a Ling-Lun el trabajo de ir a los bosques más alejados del imperio para encontrar allí un pedazo de bambú y fabricar con él una flauta cuyo sonido igualase la belleza del canto de los pájaros, el murmullo de las hojas mecidas por el viento, y el sonido de las aguas acariciando las piedras: ese sonido salvaría al imperio. El matemático, tras un largo viaje, encontró que el sonido producido por una caña hueca que cortó de una longitud de un pie (aproximadamente 30cm) era el buscado.

Figura 4.1: Apolo y las musas

Luego cortó sucesivamente esa caña cuatro veces, perdiendo cada vez un tercio de su longitud. Los cinco sonidos así obtenidos dan lugar a la escala pentatónica china de la que hablaremos luego. Según cuentan, Ling-Lun creó con ese método 23 sonidos dentro de una octava, que fueron básicos en la música china.

La palabra música viene del griego: $\mu o \upsilon \sigma \iota \kappa \acute{\eta} [\tau \acute{\epsilon} \chi \nu \acute{\eta}]$ (mousiké [téchné]), que quiere decir "el arte de las musas", siendo las musas divinidades del séquito del dios Apolo que inspiraban a los artistas. Eran nueve: Calíope, Clío, Erato, Euterpe, Melpómene, Polimnia, Talía, Terpsícore y Urania. Aunque la música parece abarcarlas a todas, cada una representaba un arte particular; por ejemplo, Melpómene era la musa de la tragedia, Terpsícore la de la danza y Euterpe la de la música.

El *epitafio de Seikilos* es la partitura más antigua que se conoce, data del siglo I de nuestra era, aproximadamente. Es una canción (letra y música) que mandó grabar el griego Seikilos en la tumba de su esposa, Euterpe, que tenía el mismo nombre que la musa de la música. Vemos este epitafio en la Figura 4.2.

Los griegos creían que la música tenía una influencia crucial en el comportamiento humano y que en ella estaba la clave del orden universal. Este orden refleja el orden de las notas musicales y es el que causa la armonía ("ἀρμονία") de todo el universo.

Se dice que el poeta y músico Terpandro (siglo VII a.C.) componía canciones en base a las cinco notas de la escala pentatónica primitiva conocida entonces, a las que agregó luego las dos que faltaban para completar lo que sería luego la escala diatónica de Pitágoras; sin embargo, este agregado fue rechazado por muchos músicos tradicionales de la época, porque implicaba

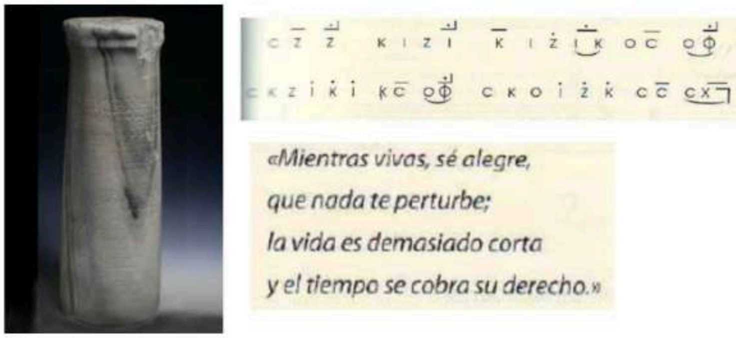


Figura 4.2: Epitafio de Seikilos

Matemáticas (el estudio de lo inmutable)			
Cantidad (lo discreto)		Magnitud (lo continuo)	
absoluta	relativa	en reposo	en movimiento
Aritmética	Música	Geometría	Astronomía
Quatrivium			

Figura 4.3: Quadrivium

el cambio de la lira usada por otra de siete cuerdas.

La ciencia matemática se dividía en: Aritmética, Geometría, Astronomía y Música. Estas cuatro disciplinas constituyen lo que Boecio llamó posteriormente el *Quadrivium*, que se mantuvo hasta la Edad Media como paradigma de la educación completa, junto con el *Trivium*, compuesto por la Gramática, la Dialéctica y la Retórica.

Como expresa B. Russell, eminente filósofo, lógico y matemático: *Pitágoras es intelectualmente uno de los hombres más importantes que han existido y que mayor influencia ha ejercido en la historia del pensamiento.* [1]

Se afirma que Pitágoras de Samos, que vivió aproximadamente de 569 al 465 antes de Cristo, fue a Mileto a conocer a Tales (uno de los siete sabios de Grecia) eminente filósofo, matemático, astrónomo y físico y de él aprendió sus primeros conocimientos científicos y heredó el amor a la sabiduría. Tales y sus discípulos le aconsejaron visitar Egipto, y en esa estadía aparentemente adquirió no sólo lo mucho de saber matemático que tenían los egipcios en esa

[1] Ver [40], vol.1, p.65.

época sino también sus inclinaciones místicas y sus costumbres de hermetismo y austeridad.

Es así que años más tarde Pitágoras se convierte en el guía y maestro de una escuela en la que filosofía, matemática, astronomía y religión estaban íntimamente relacionadas. A sus discípulos más cercanos les era exigida una disciplina severa, que incluía por ejemplo privarse de carne, ser célibe, compartir los bienes y por otra parte se comprometían a jamás divulgar los resultados obtenidos en las especulaciones y descubrimientos de los iniciados. Había dos tipos de discípulos: los del círculo más íntimo, que vivían con el maestro, que eran conocidos como los *mathematikoi* (de allí proviene la palabra matemática) y los que acudían a la escuela, llamados *akousmatikoi*.

En la escuela no se discriminaba entre hombres y mujeres. En un listado de los discípulos pitagóricos hecho por el filósofo neoplatónico Jámblico (235 - 325) en su "Vida Pitagórica" (ver [27]) figuran 17 mujeres, que hicieron contribuciones científicas muchos siglos antes que Hipatia (IV d. C.), la conocida matemática de Alejandría. Una de ellas fue Teano, también maestra en la escuela, que se supone fue la esposa de Pitágoras.

Pitágoras desarrolla la teoría de "la armonía de las esferas", sosteniendo que el Sol, la Luna y los planetas emiten un sonido producido por su movimiento orbital conformando una maravillosa sinfonía universal. Un importante pilar sobre el que se apoyaban sus teorías era la consideración de que *el número es la esencia de todas las cosas.*

En la Metafísica de Aristóteles (capítulo V, libro I) se dice: *Los filósofos pitagóricos se dedicaron al cultivo de las matemáticas y fueron los primeros en hacerlas progresar[...] Supusieron que las cosas existentes son números[...] los elementos de los números son los elementos de todos los seres existentes y la totalidad del universo es armonía y número[...]las propiedades numéricas eran inherentes a la escala musical, a los cielos y a otras muchas cosas.*

Ahora bien, en sus especulaciones consideraban sólo números naturales y sus cocientes. Los pitagóricos afirmaban que toda cantidad se podía medir a partir de "una unidad o de sus partes", lo cual significaba que solo había números racionales. Veamos una anécdota. [2]

Digresión

Es un día tormentoso en el mar en la costa de Grecia; la época, el siglo V a.C. Un barco navega por esas aguas, cuando, violentamente, un hombre es arrojado

[2] http://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2018/07/09/145421

Figura 4.4: Pitágoras y sus discípulos

por la borda con la intención de que muera ahogado. Su nombre es Hipaso de Metaponto, discípulo de Pitágoras.

Esta es la leyenda, de la que no hay constancia histórica, aunque refiere este suceso: *Hipaso era un pitagórico, pero al haber divulgado por escrito como se podía construir una esfera a partir de doce pentágonos* [3]*, pereció en el mar por haber cometido ese acto de impiedad. Recibió el mérito por ese descubrimiento pero en realidad todo provenía de Él.* Él era nada menos que el propio Pitágoras, y los descubrimientos de su escuela debían permancer secretos.

Otra versión habla de que su delito fue demostrar que $\sqrt{2}$ no podía escribirse como cociente de dos enteros, es decir, no era un número racional.[4]

Veamos cómo se inicia la relación entre la música y la matemática. Según se cuenta, Pitágoras "encontró" la música cuando descubrió la matemática en la que se basaba la armonía. Lo que es indudable es que Pitágoras y sus discípulos fueron los primeros en pensar la armonía desde un punto de vista matemático-filosófico.

Nueva digresión

El último movimiento de la suite N° 5 en Mi Mayor de Händel se ha hecho famoso independientemente y se lo conoce como "El herrero armonioso". ¿De dónde proviene ese nombre? Una de las versiones (que me gusta pensar que es la fidedigna) es la que relata el filósofo Jámblico, en su Escrito sobre la vida de Pitágoras. Dice que paseaba Pitágoras cuando *junto a una herrería escuchó los golpes que*

[3]Es el dodecaedro.

[4]Ver la Figura 2.4 en el Capítulo 2.

propinaban los martillos al hierro sobre el yunque, que provocaban, en acorde, unos sones armoniosos entre sí, excepto una combinación.... De este modo, pues, se dice que encontró la música y, una vez que la sistematizó, la confió a sus discípulos con vistas a conseguir todo lo más bello.

Figura 4.5: Pitágoras, herreros y consonancias

4.1.1. Las consonancias básicas

Pitágoras estudió los martillos que sonaban bien juntos e intuyó que la relación matemática (cociente) entre sus pesos era una proporción sencilla, cosa que no ocurría con los disonantes.[5] Estudió esas proporciones mediante *cuerdas vibrantes* y descubrió que pulsando una cuerda que daba el sonido "fundamental", si pisaba la cuerda tomando fracciones determinadas de su longitud se producían sonidos que armonizaban con el fundamental.

En primer lugar, pulsando una cuerda cuya longitud sea la mitad de la de referencia, se logra una consonancia de los dos sonidos casi perfecta. Parecen el mismo sonido, sólo que uno es más agudo que otro. Como sabemos, uno es la octava del otro. El intervalo de octava es algo básico, que comparten las escalas musicales más diversas. Luego, Pitágoras trató de establecer otros

[5]Posteriormente Vicenzo Galilei (padre de Galileo) mostró que en realidad esa proporción tenía que ver con la raíz cuadrada de los pesos, no con los pesos.

sonidos intermedios que también sonaran bien junto con la primera nota.

Observó que dos sonidos tocados simultáneamente resultaban agradables (consonantes) cuando el cociente entre las longitudes de las cuerdas era una fracción $\frac{p}{q}$ en la cual tanto p como q eran números enteros y pequeños, por ejemplo una el doble de la otra o una el triple de la otra.

Pitágoras dividió la cuerda en doce partes y dió nombre a los sonidos obtenidos al pisar la cuerda en $\frac{6}{12}$ (o sea en la mitad), $\frac{8}{12}$ (o sea en $\frac{2}{3}$ de la cuerda) y $\frac{9}{12}$ (es decir en $\frac{3}{4}$ de la cuerda). Los llamó respectivamente *diapason*, *diapente*, y *diatessaron*. Son los que hoy llamamos *octava*, *quinta* (o dominante) y *cuarta* (o subdominante) del tono fundamental, como vemos en la Figura 4.6, donde se muestra el *monocordio*, instrumento de una cuerda cuya longitud se podía modificar fácilmente, con el cual podía experimentar las distintas consonancias.

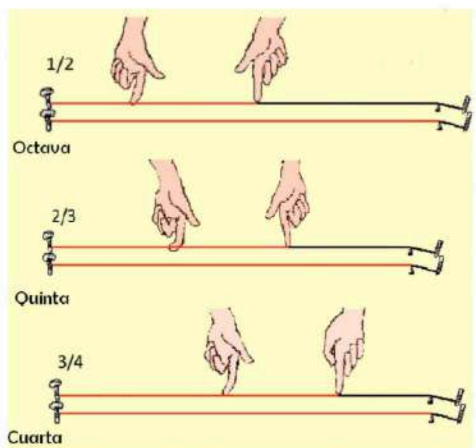


Figura 4.6: Monocordio

En la misma cita de la "Vida Pitagórica" que mencionamos, Jámblico afirma que ... *En ellos* (los martillos) *reconocía la consonancia de la octava, de la quinta y de la cuarta ...*

Pensando ya en notas musicales, lo curioso es que Pitágoras descubrió así que con la tónica, la dominante y la subdominante podemos generar tres acordes [6] que son básicos para cualquier música. De hecho, la armonía de muchas canciones populares está construída sólo con esos tres acordes.

[6]Ver 1.4.3 en el Capítulo 1.

Pitágoras no conocía el concepto de frecuencia, pero sí sabía que una cuerda de la mitad de longitud que otra suena "el doble de aguda" que la otra. Análogamente, si tomamos una cuerda de $\frac{2}{3}$ de longitud de la dada, su frecuencia o "grado de agudeza" estará en la relación inversa $\frac{3}{2}$ con el fundamental. Es decir que, además de descubrir las consonancias básicas, estableció el importante principio:

cuanto más corta sea la cuerda, más aguda será la nota producida.

Dicho en términos actuales: a menor longitud, mayor frecuencia.

Un ejemplo: si la nota fundamental de la cuerda fuera un *do* y la pensamos en un piano (ver en la Figura 4.7), la nota que emite otra cuerda de la mitad de longitud sería el *do* que está a la derecha del anterior, que es el doble de aguda; la nota de una cuerda de $\frac{2}{3}$ de longitud de la original correspondería a un *sol* a la derecha del *do* original, ($\frac{3}{2}$ de aguda en relación a la original). Contamos ocho notas de *do* a *do* (octava) y cinco notas de *do* a *sol* (quinta).

Una observación más, que resulta clara al aplicarla al piano: podemos obtener la cuarta a partir de la octava y la quinta, pues la cuarta es "complementaria" de la quinta. En efecto, si "subimos" una octava (ocho notas hacia la zona más aguda) y después "bajamos" una quinta (cinco notas hacia la zona más grave) obtenemos una cuarta de la primera nota. En el caso de *do*, esto nos daría el *fa* que está en la octava del *do* original. O sea: la quinta y la cuarta pitagóricas del *do* es aproximadamente lo que ahora llamamos, respectivamente, "quinta justa", que es el *sol* y "cuarta justa", que es el *fa*. [7]

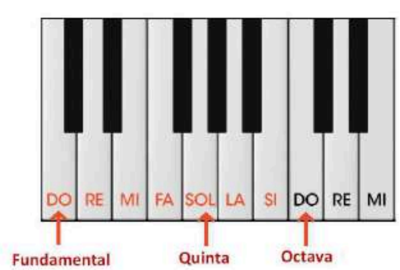


Figura 4.7: Octava y quinta

Para los pitagóricos el diez o *tetraktys* era el número sagrado por excelencia (ver Figura4.8), pues representaba el número del Universo e incluye

[7] Ver Figura 1.8.

la suma de todas las posibles dimensiones geométricas $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ (1: punto, 2: recta, 3: plano, y 4:espacio). La armonía encontrada "calzaba justo" en su teoría, ya que está basada en los números $1, 2, 3, 4$. Las relaciones entre estos números están dadas por las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, que corresponden a intervalos de octava, de quinta y de cuarta respectivamente.

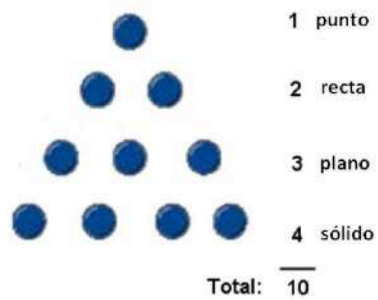


Figura 4.8: Tetraktys

Según la profesora Amaya García Pérez (ver [19]) las características principales de las teorías pitagóricas son las siguientes:

1. Los sonidos musicales tienen altura, atributo que puede ser expresado en números. Los intervalos entre sonidos musicales son expresados como proporciones entre esos números.
2. Los principios sobre los que se basa el análisis de los sistemas armónicos son matemáticos, lo que implica que la música es parte de la matemática.
3. Los sonidos musicales percibidos se definen físicamente como movimientos de un medio natural (el aire, la cuerda etc.).
4. El estudio de la armonía se concibe como parte de un estudio mucho más general sobre el universo.

4.1.2. Los discípulos

La escuela pitagórica fue una fuerte corrienta de pensamiento que produjo teorías y descubrimientos científicos, pero en las crónicas siempre estaba rodeada de leyendas y misterio, dado el secreto que debían guardar sus miembros. Por eso es difícil atribuir autoría a algunos de esos descubrimientos y teorías. Sin embargo, podemos mencionar algunos destacados discípulos de Pitágoras y sus ideas, especialmente aquellos que contribuyeron al desarrollo de las teorías musicales con base matemática.

Para **Filolao de Crotona**, matemático y astrónomo (480 – 400 a.C.), el mundo está codificado por números. El uno, que no es propiamente un número, es el "Padre de los Seres", el número 2 o *díada*, simboliza la dualidad, la contraposición, los contrastes de la naturaleza (noche y día, humedad y sequedad, calor y frío, salud y enfermedad, bueno y malo, grande y pequeño, etc.). Esto tiene sorprendente similitud con la doctrina del Yin-Yang de la filosofía china. La armonía es para él *...el resultado de los contrarios...la unicidad de la multiplicidad y el acuerdo entre los discordantes.*

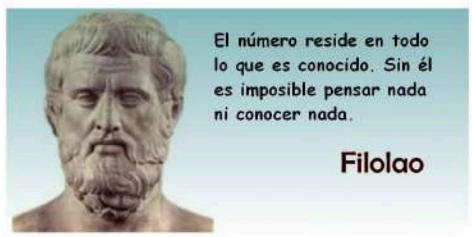


Figura 4.9: Filolao

Considera que, en el universo, todo se halla ordenado según proporciones que se corresponden con las consonancias básicas para la música, entendiendo por consonancia de dos o más sonidos la propiedad de "sonar bien" juntos.

Arquitas de Tarento(400-365 a.C.) fue quien mostró que las tres "medias": aritmética, geométrica y armónica [8] constituían una base aritmética de la escala musical pitagórica; afirmaba: *en la música existen tres medias: la primera es la media aritmética, la segunda es la geométrica, la tercera es la media subcontraria, llamada armónica.* Estas medias están relacionadas con la octava, la cuarta y la quinta, como veremos en seguida.

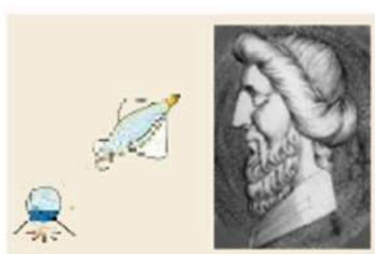
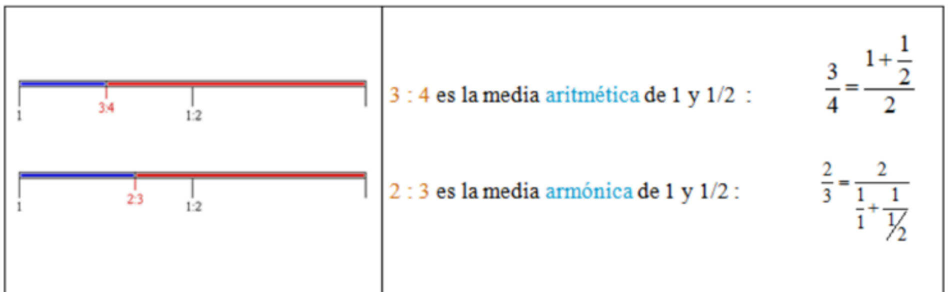


Figura 4.10: Arquitas de Tarento

[8]Ver 2.0.5, en el Capítulo 2.

Recordemos que, si hablamos de longitud de las cuerdas en relación con los sonidos, la octava está representada por la fracción $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, la quinta por $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ y la cuarta por $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Con relación a las medias: si tomamos $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, la relación entre a y b es de una octava, la media armónica $M_h = \frac{2}{3}$ es la quinta y la media aritmética $M_a = \frac{3}{4}$ es la cuarta. El gráfico de la Figura 4.11 muestra lo dicho.



Proporciones	1/1	1/2	2/3	3/4
Sonido	Unísono	Octava	Quinta	Cuarta

Figura 4.11: Medias

¿Y la media geométrica? ¿Se "erradicó" por ser irracional? Podemos pensar que está contemplada en la igualdad $\frac{1}{1/2} = \frac{1/2}{1/4}$, que expresa el hecho de que la octava de la octava es una octava "más arriba", pero siempre la misma nota.

También aplicaba estas medias a la vida política, pensando que las leyes deben ordenar armónicamente la vida y que *...la aristocracia se basa en la proporción contraria (armónica)... la democracia en la proporción geométrica...y... la oligarquía y la tiranía en la proporción aritmética...*. Observó asimismo que las proporciones pitagóricas básicas $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$ y $\frac{4}{3}$ son *superparticulares* o sea, de la forma $\frac{n+1}{n}$. Estudiando otros intervalos con este tipo de proporciones aparece la fracción $\frac{5}{4}$, que representa la *tercera*, con lo cual las consonancias pitagórica se amplían, en una escala precursora de la de Tolomeo, que veremos luego.

También es de los primeros en estudiar el aspecto acústico en la música. Por ejemplo, dice: *el sonido agudo proviene de la rapidez y el grave de la lentitud del movimiento aéreo*. Se lo conoce por varios inventos: su "peristera" (paloma) voladora, entre otros.

El filósofo **Platón** (427-347 a.C.) apoyaba la idea pitagórica de la armonía de las esferas y consideró la música como algo fundamental, pues opinaba que los sonidos influyen en el comportamiento humano de tal manera que hasta pueden afectar la política. Se refiere a esto en su obra *La República* y también en su diálogo *Timeo*. En el Timeo expresa: *Cuando todas las cosas se hallaban en desorden, el dios introdujo en cada una de ellas...todas aquellas proporciones armoniosas y conmensuradas que era posible establecer.* Sin embargo, criticaba a los pitagóricos por quedarse en las relaciones numéricas vinculadas a la música en vez de elevarse a través de ella a *las regiones más perfectas del alma.* Según afirma A. Whitehead, eminente matemáico y filósofo: *El mundo platónico de las ideas es la forma revisada y refinada de la doctrina pitagórica de que el número es la base del mundo real.*[9]

Figura 4.12: Platón y Aristóteles

Su discípulo **Aristóteles** (384-322 a.C.) rechazaba en cambio la teoría de la armonía de las esferas: *Debemos ver evidentemente, después de todo lo que precede, que, cuando nos hablan de una armonía resultante del movimiento de esos cuerpos, igual a la armonía de sonidos que se entrelazan, se está haciendo una comparación muy brillante, sin duda, pero vana; esa no es la verdad de ningún modo,...*

La música tenía, sin embargo, gran importancia para Aristóteles, que la trata teórica y prácticamente en sus *Problemas* (uno de los textos sobre música más antiguos que se conservan). Como científico, pensaba ya que el sonido se propagaba a través del movimiento del aire. Como pensador y educador, consideraba que la música debía formar parte de la enseñanza básica

[9] Ver [50], página 41.

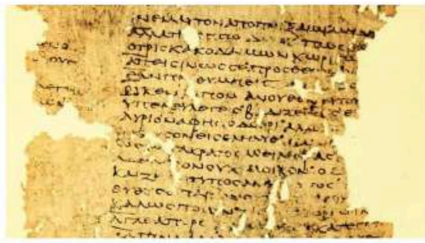


Figura 4.13: "Elementa Harmonica" de Aristóxeno, fragmento

de los jóvenes porque es una *diversión propia de hombres libres*[10] y porque contribuye a la formación del carácter y del alma. Esta última concepción es una convicción muy arraigada en el pensamiento griego. Daba también a los llamados "modos griegos" un sentido ético y los calificaba: el *dórico* era noble, el *frigio* obstinado y el *lidio* afeminado [11].

Aristóxeno de Tarento (360-300 a.C.) fue un discípulo de Aristóteles que estudió con profundidad las doctrinas pitagóricas. Escribió el tratado más antiguo de música del que se tiene conocimiento: *Elementa Harmonica.* Acepta las tres consonancias básicas de Pitágoras (octava, quinta y cuarta), pero disiente de él en la forma de encarar el estudio de la música. Filósofo y también músico, sostenía que una escala musical debía basarse en la consonancia más que en consideraciones teóricas de tipo matemático. Para él, la percepción auditiva es el criterio para juzgar a armonía, que debe formularse en términos de experiencias auditivas de las alturas de las notas o de los intervalos en lugar de basarla en algo externo como proporciones matemáticas.

Los pitagóricos y los aristoxénicos fueron, como consecuencia de esas diferencias, dos escuelas rivales.

La *Sectio Canonis*, atribuída a **Euclides** (s. III a.C.), contiene problemas sobre intervalos musicales y también teoremas sobre armonía, que hablan de proporciones asociadas a los intervalos consonantes, a la manera de Pitágoras. El algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor de dos números naturales, que consta de divisiones sucesivas, [12] aparentemente surgió de

[10]Las llamadas "artes liberales" eran, en la Edad Media influenciada por Grecia, los conocimientos y ocupaciones propias de hombres libres en contraposición con las "artes serviles" propias de esclavos.

[11]Ver el Capítulo 1.

[12]Ver 2.0.1

Figura 4.14: Nicómaco de Gerasa

la división de las cuerdas para producir sonidos consonantes. Actualmente se usa ese algoritmo para generar ritmos musicales (ver [47] y también [57]).

Arístides Quintiliano fue un teórico de la música y filósofo griego, que se supone vivió por el siglo I a.C. Escribió un tratado musical, *Sobre la música*, donde da una visión desde varios puntos de vista: artístico, filosófico, científico,...e intenta conciliar las posturas de Aristóxeno y la pitagórica: *Únicamente la música se extiende por toda materia, por así decir, y atraviesa todo tiempo: ordena el alma con las bellezas de la armonía y conforma el cuerpo con ritmos convenientes... explica la naturaleza de los números y la complejidad de las proporciones, porque revela las armonías que mediante estas proporciones existen en todos los cuerpos y, lo que en verdad es más importante y más definitivo, porque tiene la capacidad de suministrar las razones de lo que es más difícil de comprender a todos los hombres: el alma, tanto el alma individual como del alma del universo.*

4.2. Primeros siglos de nuestra era

La música en esta época se caracteriza por la simplicidad y uniformidad, con influencia pitagórica en sus fundamentos y predominio de la música sacra. Se generaliza el canto gregoriano o "canto llano", que se usa en la liturgia religiosa. Es interpretado a una sola voz (monódico) y sus notas generalmente tienen la misma duración, estructura que lleva a destacar la melodía por sobre la armonía. También hay música profana de trovadores y juglares, pero siempre es una sola voz acompañada a veces por algún instrumento. Sólo en los últimos años hay intentos de superponer varias voces.

Nicómaco de Gerasa (siglo I de nuestra era) escribió un *Manual de Harmónica*, [13] que es uno de los pocos textos que se conservan entre las obras de Aristóxeno y las de Claudio Ptolomeo. Afirma por ejemplo: *...todo lo que la naturaleza ha dispuesto en el universo parece haber sido [...] determinado y puesto en orden de acuerdo al número.* Se supone que escribió varias obras sobre teoría musical y también una *Vida de Pitágoras*, pero se han perdido. Aunque usa conceptos de Aristóxeno, sus teorías se apoyan firmemente en los fundamentos matemáticos de los pitagóricos, que da a conocer en su *Introducción a la Aritmética*, donde también adhiere a la "mística del número" propia de la escuela pitagórica.

Claudio Ptolomeo, o **Tolomeo** (100-170) fue un astrónomo, matemático y geógrafo griego que también estudió el fenómeno musical, todavía considerándolo parte de la matemática. Fue el último gran representante de la astronomía griega y sus teorías, apoyadas en las ideas pitagóricas de la armonía del universo, influyeron hasta el Renacimiento. Sus trabajos en astronomía y matemática fueros extensos y profundos, construyendo una teoría del universo en donde la Tierra es el centro y el Sol, la Luna y los planetas entonces conocidos (Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno) giran alrededor de ella.

Por otra parte, en su obra *Harmónica* formula una teoría de la música que sintetiza y unifica las ideas pitagóricas con las de Aristóxeno. Señala los errores de ambas escuelas: los que siguieron a Pitágoras, porque no dieron importancia a los hechos físicos de la música y a los aristogénicos de no haber puesto esmero en el análisis "espiritual" de este arte. Considera que la armonía musical rige en la naturaleza y el cosmos y la vincula con la del alma humana; para dar una idea de esto, veamos el título de una de las secciones: *Que la facultad de la harmonización existe en todas las cosas más perfectas en su naturaleza, pero se revela sobre todo a través de las almas humanas y los desplazamientos celestes.*

Afirma que la razón estudia la parte abstracta (matemática) del problema mientras que la percepción del oído, a través del aire que es "percutido", corrobora la perfección de la armonía obtenida. Dice: *...el oído se ocupa de la materia y la modificación, la razón de la norma y la causa...*

Considera que cuando dos sonidos suenan juntos pueden ser *equisonantes* o que suenan como un único sonido (el unísono y las octavas sucesivas), *con-*

[13]El *Manual de Harmónica* fue escrito en forma de carta dirigida a una mujer que no se sabe quién fue

Figura 4.15: Tolomeo

sonantes o que "suenan bien" como la quinta y la cuarta o *melódicos* cuya distancia es menor que una cuarta (por ejemplo, una tercera) y que sin ser estrictamente consonantes se usan en música. Admitió entre los intervalos consonantes a la tercera (lo que implica, según veremos, considerar el quinto armónico). Aunque Arquitas ya había estudiado ese intevalo, (ver 4.1) la influencia de las ideas de Tolomeo hizo que se aceptara con mayor generalidad esa consonancia contemplada en la escala que construyó, modificada después por el físico Zarlino. La tercera de Tolomeo-Zarlino se representa por la fracción $\frac{5}{4}$, como veremos en 5.4.

Estas teorías persistirán incluso durante el transcurso de la Edad Media. En su tratado *De Musica*,(ver [1]) **Agustín de Hipona** (San Agustín) (354-430) habla del arte musical sonoro pero también reflexiona acerca de los números y las armonías eternas. Fue, junto con Boecio, uno de los que transmitieron el conocimiento musical de la antigüedad a la Edad Media. Se le atribuye el haber definido dos medidas de duración de las notas *longa* y *brevis*, que son las antecesoras de la blanca y la negra actuales.

Severino Boecio (480-524) fue un notable pensador romano que investigó en vastas áreas como matemática, astronomía y teoría de la música. Se había formado posiblemente en las escuelas neoplatónicas de Atenas y quizá en Alejandría, profundizando en las cuatro áreas de lo que él denominó el *Quadrivium*: aritmética, geometría, astronomía y música. Tradujo al latín las obras de los principales filósofos y científicos griegos, a fin de divulgarlas. Su extensa obra de cinco libros, *De institutione musica* recoge sus conocimientos de la antigüedad sobre la teoría musical y sus bases en la aritmética y, desde el antiguo texto *Elementa Harmonica* de Aristóxeno, es, junto con la *Harmónica* de Tolomeo, el más importante tratado en el tema, que tuvo gran influencia durante toda la Edad Media. El rey Teodorico dice de él: *Por vuestros trabajos la lengua se ha enriquecido con la música de Pitágoras, la astronomía de Tolomeo, la aritmética de Nicómaco, la geometría de Euclides, la filosofía de Platón, la lógica de Aristóteles y la mecánica de Arquímedes.* [14]

Figura 4.16: Boecio enseñando

Boecio recoge ideas de Pitágoras y en su *Tratado sobre la Aritmética* afirma que la proporción: $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$ representa *la armonía fundamental del mundo.* Considera la armonía del universo como una de las tres partes de la música: "música mundana" (música del mundo, o armonía de las esferas), "musica humana" (música del hombre, es decir, armonía interior que une las partes del alma y los elementos del cuerpo) y "musica in instrumentis" (música instrumental, en el sentido que la entendemos hoy). Define la armonía, basándose en Filolao, como *unidad en la multiplicidad y consenso entre lo que disiente.*

Isidoro de Sevilla (c. 556-636) fue un eclesiástico erudito, hispano de la época visigoda. En las *Etimologías*, la música se aborda en el libro III, junto con las matemáticas, geometría y astronomía. Dice *Sin la música, ninguna disciplina puede ser perfecta, puesto que nada existe sin ella.* Allí resalta el valor de la memoria en música ante la falta de notación musical. Isidoro usa en sus escritos términos como "sinfonía" o "diafonía", que podrían interpretarse como un antecedente de la polifonía, aunque el texto no es claro.

En cuanto a la escritura musical, en el siglo X el compositor y teórico

[14]Sin embargo, posteriormente lo condenó a muerte por motivos político-religiosos.

musical **Hucbaldo** (840-930) propuso trazar líneas (primer esbozo de pentagrama) para simplificar la escritura musical a los cantores. El texto cantado, en lugar de escribirse abajo, se dividía en sílabas y cada una iba escrita en la línea que aproximadamente señalaba su entonación. Aunque fue el monje **Guido D'Arezzo** (991-1050) quien, en su obra *Micrologus de disciplina artis musicae* usó el *tetragrama* (parecido al pentagrama actual) donde aparecían los "neumas" (dibujo cuadrado de las notas). Estos neumas se usaban encima del texto cantado, pero sólo indicaban una melodía que el músico debía ya conocer. D'Arezzo les da un sentido más preciso indicando la altura de las notas, lo que significó un gran avance. De su método, que llamó "solmisación" deriva el *solfeo*, tan usado en la enseñanza de la música.

El origen de los nombres de las notas también se debe a D'Arezzo; las nombró $ut - re - mi - fa - sol - la$ usando las primeras sílabas de un himno a San Juan, donde justamente esas sílabas coinciden con las notas respectivas como se puede ver en la Figura 4.17. Posteriormente (por cuestiones prácticas) se cambió *ut* por *do* y se agregó el *si* por las iniciales de San Juan en latín: "Sancte Ioannes", porque la nota *si* no aparecía en el himno.

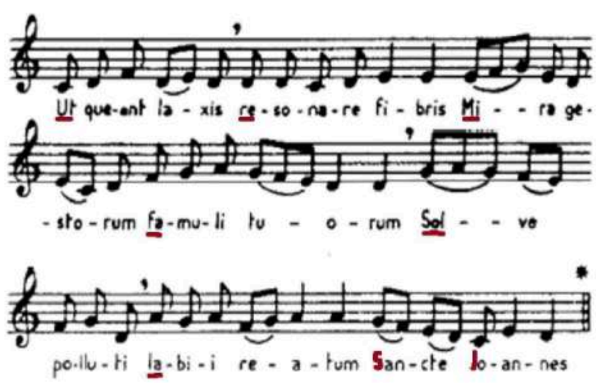


Figura 4.17: Nombres de las notas

4.3. Primera parte del Renacimiento

En este período inicial se mira hacia el múndo clásico (greco-romano) y se vuelven a estudiar a fondo los textos sobre teorías musicales de los antiguos griegos (traducidos al latín). Muchos músicos también estudian el aspecto científico de su arte.

La música religiosa se ha enriquecido con la polifonía, en la que varias voces con melodías independientes armonizan; hasta los textos cantados pueden ser diferentes. Se canta "nota-contra-nota", en latín "punctum-contrapunctum", de donde viene la palabra "contrapunto", que es la técnica de armonizar las voces de distintos registros en intervalos consonantes. La polifonía de los siglos XII y XIII suele llamarse "ars antigua" y se diferencia del "ars nova" (que aparece en Francia en el siglo XIV con Philipe de Vitry, Guillaume de Machaut y otros), que es más sofisticada, con más notas de corta duración y combinaciones originales en los intervalos. También la notación musical evoluciona.

El español **Bartolomé Ramos de Pareja** (1440-1522) fue un teórico musical y compositor, que enseñó en las universidades de Salamanca y Bolonia, suscitando polémicas por lo innovador de sus teorías. Distingue entre el aspecto artístico y el científico en la música. En su obra *Musica practica* (1482) (que vemos en la Figura 4.18) propone a partir de la división de un monocordio en 24 partes una escala musical natural basada en la octava que anticipa la de justa entonación. Lo que también llama la atención es que a partir de ciertas operaciones entre escalas parciales logra de algún modo establecer una octava de semitonos iguales, que es considerada como precursora de nuestra actual escala de temperamento igual. Propone las consonancias de cuartas, quintas y de terceras y sextas mayores y menores: quinta justa de proporción $\frac{3}{2}$, cuarta justa $\frac{4}{3}$, tercera mayor $\frac{5}{4}$, tercera menor $\frac{6}{5}$, sexta mayor $\frac{5}{3}$, sexta menor $\frac{8}{5}$, tono mayor $\frac{9}{8}$, tono menor $\frac{10}{9}$ semitono mayor,$\frac{16}{15}$.[15]

Franchino Gaffurio, (1451- 1522) fue un teórico de la música italiano para quien el arte musical se vincula con los números y el cosmos a la manera de los pitagóricos. También fue compositor, contemporáneo y amigo del importante músico Josquin des Prez y de Leonardo da Vinci, quien lo pintó según se dice en su cuadro "Retrato de un músico" (ver Figura 4.19). En sus obras teóricas, en las que apoyaba la afinación pitagórica de Boecio, contradecía las ideas del español Ramos de Pareja, de gran influencia en Bolonia, por lo que tuvo que enfrentar duras críticas. En *Theorica musice*, Gaffurio introduce algunos conceptos sobre la física del sonido, derivados de ideas clásicas. También fue uno de los primeros en dar a conocer teorías de Tolomeo al mundo renacentista.

Johannes Tinctoris (1435 – 1511) fue un personaje multifacético: compositor y teórico de la música, poeta, pintor, matemático y abogado. Escribió

[15] Ver [19] y [42].

Figura 4.18: "Música práctica"

Figura 4.19: Leonardo Da Vinci:"Retrato de un músico"

numeroso textos sobre música que muestran una detallada descripción de la práctica y la teoría musical de su época; algunos textos son originales y otros recogen ideas de autores conocidos, principalmente de Boecio. Refiriéndose a la renovación musical del Renacimiento, afirma: *Las posibilidades de nuestra música han aumentado tan maravillosamente que parece un arte nuevo...*

Pietro Aaron, (1490 -1545), fue un teórico musical y compositor italiano, amigo del músico Josquin des Prez. Escribió sus obras en italiano en lugar de latín, lo cual era innovador. En sus obras *De institutione harmonica, Toscanello in musica* trata cuestiones de armonía, con un esbozo del concepto de tonalidad. Se ocupó de los temperamentos, especialmente del mesotónico, que veremos más adelante.[16]

[16]Ver 5.6.1.

Francisco Salinas (1513-1590) fue un compositor, organista y musicólogo español. Se quedó ciego a los 10 años, lo que no le impidió estudiar en la Universidad de Salamanca, de la que después fue profesor. En esa época, la enseñanza de la música era teórico-práctica. Su "parte especulativa" (teoría) formaba parte de los estudios de matemática. Vivió durante muchos años en Italia, tomando allí contacto con las obras de los teóricos musicales griegos de la antigüedad que empezaban a conocerse traducidos al latín. Su importante tratado de teoría musical *De musica libri septem* recoge aquellos conocimientos y trata de adaptarlos a su tiempo. Preconiza que la armonía tiene que fundarse en reglas dictadas por la razón y también en el testimonio de los sentidos, dando así la razón tanto a los pitagóricos como a los partidarios de Aristóxeno. Habla del "número sonoro" abarcando ambos aspectos: el formal y el sensible. También prioriza en la música las relaciones numéricas "aritméticas" refiriéndose así a los números racionales, propios de los sistemas musicales basados en los armónicos.

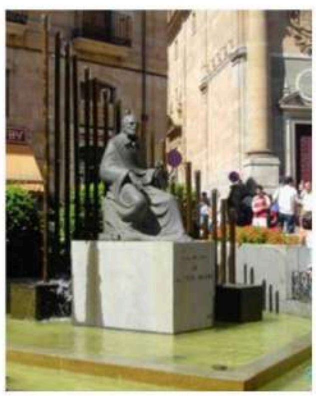


Figura 4.20: Monumento a Salinas

En un párrafo de su obra expresa: *...sabiendo por Aristóteles que los números son lo que él llama causas ejemplares de las consonancias y los intervalos armónicos, y no habiendo encontrado todas las consonancias y los intervalos menores constituidos en su justa razón, me esforcé por investigar aún más la verdad misma según los sentidos y el juicio de la razón...*

Fray Luis de León (profesor en Salamanca como él) le dedica un poema que comienza diciendo:

El aire se serena

y viste de hermosura y luz no usada,
Salinas, cuando suena
la música extremada
por vuestra sabia mano gobernada...

El veneciano **Gioseffo Zarlino** (1517 - 1590) fue un músico y también el teórico más destacado del Renacimiento. Fue probablemente el más importante desde Aristóxeno hasta Rameau. Fue organista y "maestro de capilla" de la basílica de San Marcos en Venecia.

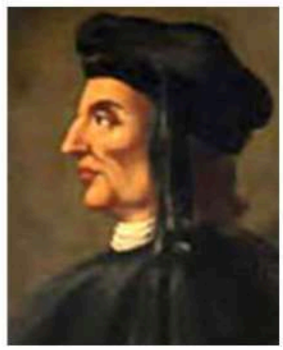


Figura 4.21: Zarlino

En sus obras: *Istitutioni harmoniche* (1558) y *Dimonstrationi harmoniche* (1571) mostró el pensamiento musical de su época sobre tonalidades, examinó los diferentes modos antiguos ("modos griegos" [17]) y propuso cambios que anticipaban las ideas de los siglos XVII y XVIII. Dio importancia a las terceras (mayores y menores) y las reconoció como intervalos básicos de la armonía. Analizó también los acordes mayores y menores y el contrapunto, basando su noción de armonía en razones matemáticas que fueron una premonición de los armónicos. Apoyándose en las teorías de Tolomeo, definió el llamado *temperamento de justa entonación*, que veremos luego. La justa entonación propone pequeñas correcciones a las escalas que habían definido Pitágoras y Tolomeo para lograr el máximo de intervalos sonando "justo" (lo más armónico posible) en un sistema que, como el actual, tiene doce notas por octava (contando sostenidos o bemoles). Sus teorías fueron muy discutidas por Vincenzo Galilei (que fue su alumno) por lo que publicó una réplica

[17] Ver 1.4.2.

Sopplimenti musicali en 1588 ampliando y reforzando sus ideas. Más adelante hablaremos de ellas (ver 5.4).

Vincenzo Galilei, (1520- 1591) fue un músico, compositor y teórico musical italiano. Se ocupó del tema de las disonancias con una visión renovadora, admitiéndolas “si las voces fluyen con suavidad”. También analizó desde el punto de vista físico la vibración de las cuerdas y del aire en los instrumentos de viento. Estudió un tiempo con Zarlino, considerado en esa época el más importante teórico de la música. En los famosos *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze* su hijo Galileo recoge algunos conocimientos de su padre, del que heredó un equilibrio entre lo teórico y lo experimental.

4.4. Segunda parte del Renacimiento

Aunque algunos autores opinan que el equilibrio de la música renacentista se debió a su base en los cánones griegos, muchos compositores de la época tuvieron también otras motivaciones e influencias. La polifonía se afianza: ya no aparecen voces y textos independientes sino que hay más relación entre las voces y una armonía más rica y ajustada. La música se diversifica: música religiosa para festividades como el “motete” y la de la liturgia (misa) llamada “cantus firmus”, en la que predomina una melodía; en la iglesia luterana aparece el “choral”. La música no religiosa evoluciona hacia la “chanson” y géneros semejantes en otras regiones. El “príncipe de la música” de este período es Josquin des Prez. Una novedad importante es que empiezan a imprimirse las partituras. Surgen nuevos instrumentos: Nicola Vicentino crea el “archicembalo” instrumento que permite diferenciar un cuarto de tono. Una novedad: las “Damas de Ferrara” son un conjunto de mujeres profesionales de la música. Maddalena Casulana compone y hace imprimir sus obras.

Pero a la gran diversidad y riqueza en el arte de la música se suma el aporte del punto de vista científico. Nace la física del sonido con su monumental base matemática. Surgen investigadores eminentes que no son músicos que marcan rumbo en estos temas. A ellos nos referiremos en seguida.

Johannes Kepler (1571-1630) fue un astrónomo y matemático alemán, conocido fundamentalmente por sus leyes sobre el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Kepler consideró que este movimiento debía cumplir las leyes pitagóricas de la armonía, que también debían valer para la música.[18] Sin embargo, privilegia la geometría en lugar de la aritmética como fundamento de la armonía universal: *El placer suscitado en nosotros por las consonancias deviene de la correspondencia de las proporciones armónicas con arquetipos geométricos impresos por Dios en nuestra alma.*

El matemático, filósofo, teólogo y músico francés **Marin Mersenne** (1588-1648) fue también un importante difusor y promotor de la ciencia, manteniendo correspondencia con importantes científicos y filósofos de la época. Es el autor del valioso tratado *L'harmonie universelle*, donde expone, desde una perspectiva científica, sus ideas sobre la teoría del sonido y de la música. Debido a estos estudios y a sus experiencias, entre otras una primitiva medición de la velocidad del sonido en el aire, se le llama "padre de la acústica". Fue el primero en enunciar la leyes de la vibración de una cuerda (ver 3.2.2), que demostró experimentalmente. Diseñó un teclado donde cada octava contenía 31 notas; según se afirma, el músico Joseph Haydn tocó en un órgano con un teclado como ese. Pensaba ya en una afinación de doce semitonos iguales por octava, como la del *temperamento igual* que se usa actualmente, [19] en la que un semitono es $\sqrt[12]{2} = 1,05946....$ Mersenne sugirió para un semitono el valor $\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}} = 1,05973....$ Este valor es algo más próximo a $\sqrt[12]{2}$ que el propuesto por Vincenzo Galilei en 1588 y que todavía se utiliza en algunas afinaciones: $\frac{18}{17} = 1,05882....$ En su correspondencia con Descartes se planteó un tema novedoso: saber cuáles son los factores psicológicos que actúan en el oyente en la comprensión del fenómeno musical, tema que fuera estudiado por Helmholz desde el punto de vista de la percepción de consonancias y disonancias mucho tiempo después (ver 4.6).

René Descartes (1596-1650), fue un filósofo, matemático y físico francés. Es muy conocida su frase *Pienso, luego existo.* En matemática, utilizó por primera vez la representación geométrica de funciones, mediante las que posteriormente se llamaron "coordenadas cartesianas". [20]

En su *Compendium musicae*, vincula el placer de escuchar música o la belleza de esta con el hecho de que los sonidos se expresan por proporciones

[18]Dice Kepler: *La Tierra canta Mi, Fa, Mi: puede deducirse de estas sílabas que en nuestro hogar podemos esperar miseria y hambre (fa-mine).* También afirmaba que muy pocas veces los planetas podrían sonar juntos en perfecta concordancia y que esto podría haber ocurrido quizás sólo en el momento de la Creación.

[19]Ver 5.7.

[20]Ver 2.1.

Figura 4.22: Mersenne

Figura 4.23: Descartes

aritméticas, en las que se basan el ritmo y la armonía. A la manera de Pitágoras, estudia las consonancias y disonancias en función de las longitudes de las cuerdas del instrumento que emite el sonido.

Expresa que su objetivo es entender mejor la manera en que la música nos conmueve y que, si se analizan matemática y físicamente las propiedades del sonido se llegará a conclusiones sobre la esencia de la música y sobre el modo en que esta se vincula a las pasiones humanas. Su obra es un primer intento de estudiar la percepción sensorial de la música. Mantuvo una nutrida correspondencia sobre estos temas con Marin Mersenne.

En su extensa obra *Musurgia Universalis, sive Ars Magna Consoni et Dissoni* ("El arte musical universal, del gran arte de la consonancia y la disonancia") **Athanasius Kircher** (1601-1680) estudió algunas de las propiedades matemáticas de la música compartiendo las ideas medioevales de que la música proviene o es parte de la matemática. En la Figura 4.24, portada de su obra, vemos a Pitágoras y los herreros y alegorías acerca de la música.

Figura 4.24: Portada de "Musurgia Universalis"

Los aportes del libro abarcan vastas áreas como la acústica, las propiedades anatómicas y funcionales del oído y del aparato emisor de la voz humana, consideraciones matemáticas sobre la consonancia y la armonía, estudio de los intervalos, etc. Usó la aritmética combinatoria en el *arca musarithmica*, una especie de máquina de calcular que, usando las reglas del libro, permitía componer música a cualquier persona.

El físico-matemático francés **Joseph Sauveur**(1653-1716) aportó sus teorías y experiencias al área que él bautizó "Acústica", como la parte de la física que estudia el sonido. Contribuyó a la teoría de la música, apoyándose en ideas de Descartes y Mersenne. Fue miembro de la Academia de Ciencias de Francia. Estudió las ondas producidas por una cuerda vibrante y llamó *nodos* a los puntos sin movimiento. Demostró experimentalmente que cuando un "cuerpo sonoro" (como una cuerda o un tubo) emite un sonido, emite también más débilmente al menos su tercer y quinto armónicos. Él es el primero en afirmar que el timbre de un sonido depende de la mezcla de distintos armónicos. También creó la "merida", una medida de intervalos : una octava esta dividida en 43 meridas.

Algo similar se atribuye a W. A. Mozart: la construcción, en 1777, de un *Juego de Dados Musical para escribir valses con la ayuda de dos dados sin ser músico ni saber nada de composición.* El juego contenía 176 compases numerados y estos números estaban ubicados en dos tablas de 8 columnas (correspondiendo a los primeros o los segundos 8 compases del vals) y 11 filas cada una, porque hay 11 posibles resultados (de 2 a 12) al sumar los dos dados. En la tirada N° x (x entre 1 y 8) se elige el número de compás de la fila y, donde y es la suma de los dos dados. Después de 16 tiradas de dados se obtenía el vals.

El físico **Christiaan Huygens** (1629-1695), que era hijo de un músico, como Galileo, conocido sobre todo por sus trabajos en óptica, también se ocupó, sin embargo, de diversos aspectos teóricos de la música. En sus trabajos *Lettre touchant le cycle harmonique* y *Novus cyclus harmónicus* Huygens muestra la relación entre el temperamento igual y el mesotónico en una escala de 31 notas y analiza consonancias considerando que los intervalos de quintas, cuartas, terceras (mayores y menores) son los más consonantes pero que también es posible la consonancia de una sexta o cuarta aumentadas.

El célebre **Isaac Newton** (1643-1727) (físico, teólogo, inventor, alquimista y matemático) es autor de los *Principia*, donde describe la ley de la gravitación universal y establece las bases de la mecánica clásica. Como matemático comparte con Leibniz la creación del cálculo infinitesimal. Nunca publicó su texto *Of music* fruto de sus estudios en teoría de la música; se interesó en las teorías de Pitágoras y de Aristóxeno, y fue uno de los primeros en proponer los logaritmos para las medidas de intervalos musicales.

William Holder (1616 - 1698) fue un teórico musical, clérigo y filósofo natural inglés. Escribió un texto *A Treatise on the Natural Grounds and Principles of Harmony* donde propone adaptar la escala de Pitágoras dividiendo la octava en 53 partes iguales que llamó "comas" y las agrupó en tonos y dos valores de semitonos, logrando casi las quintas pitagóricas.[21] No supo que el alemán Nicolaus Kauffmann (1620-1687) había propuesto algo similar unos años antes.

4.5. Desde el barroco hasta el siglo XX

En la última época del período renacentista tanto en la música religiosa de Tomás Luis de Victoria como en la música profana ya aparecían disonancias y una mayor expresividad que anunciaban el estilo del barroco. Surgen nuevos géneros como el oratorio, con una parte instrumental, los madrigales con nuevas armonías y la gran novedad: la ópera. En su libro de madrigales

[21] Ver 5.6.1.

Monteverdi afirma, defendiendo sus innovaciones al contrapunto, *(...)en lo que respecta a las consonancias y las disonancias, de que hay un modo diferente de considerarlas, distinto al ya establecido, uno que defiende la manera moderna de composición con el asentimiento de la razón y de los sentidos.* Se nota el nacimiento del "cromatismo" o expresividad en la música. Se asocian palabras con acordes: por ejemplo, "áspero" corresponde a un acorde de sexta. Se toman en cuenta las posibilidades de cada instrumento al componer la música.

En cuanto a la música como ciencia, se ven aquí los ecos de anteriores investigaciones, sobre todo del descubrimiento de la composición armónica del sonido y su descripción matemática. Se destaca la obra de Rameau, de referencia para muchos teóricos musicales. Se estudia científicamente la escala musical, proponiendo mejoras a la pitagórica o a la de Zarlino. Euler cuantifica la consonancia, Helmholtz la mide desde un punto de vista físico-fisiológico.

El organista, compositor y teórico musical de la época barroca **Andreas Werckmeister** (1645–1706) provenía de una familia de músicos y fue formado por dos de sus tíos. Estudió la armonía focalizándose en el contrapunto, relacionándolo con el movimiento de los planetas a la manera de Kepler. En sus escritos *Musicae mathematicae* (1687) y *Musikalische Temperatur* (1691), describió también un temperamento o método de afinación ahora conocido como sistema Werckmeister; es de los posteriormente llamados "buenos temperamentos" [22] en honor a la obra de Bach "El clave bien temperado", donde Bach usó su sistema propio de afinación que se asemejaba al temperamento igual de hoy en día.

Johann Philipp Kirnberger (1721, - 1783) fue un músico, compositor y teórico de la música que tuvo gran influencia en el intercambio cultural de Alemania y Polonia en su tiempo. Admiraba mucho a su maestro Johann Sebastian Bach, según él "el más grande de los compositores", y se empeñó para lograr la publicación de sus obras. En su trabajo teórico *Die Kunst des reinen Satzes in der Musik* ("El arte de la estricta composición en música") define los "buenos temperamentos" Kirnberger II y III, que pueden pensarse como una versión en números racionales del temperamento igual de hoy en día.

Jean-Philipe Rameau (1683-1764) fue un organista y compositor francés,

[22] Ver 5.6.2.

pero principalmente fue un importante teórico musical que se esforzó por hacer de la música una ciencia. Estudió los principios de la armonía en su *Traité de l'Harmonie réduite à ses principes naturels*, publicado en 1722, que fue una obra de referencia para generaciones posteriores de teóricos de la música. Afirma allí que *...la música es una ciencia que debe tener reglas precisas; esas reglas deben deducirse de un principio evidente y ese principio no puede en absoluto ser conocido por nosotros sin la ayuda de las matemáticas.*[23] Sin embargo, también toma en cuenta la experiencia empírica, fundamentalmente lo percibido por el oído, como parte de la acústica musical científicamente tratada. Respalda las ideas que venían desde Pitágoras y sus seguidores, especialmente las de Gioseffo Zarlino, destacando la importancia de los armónicos para encontrar una armonía natural; al conocer los trabajos de Joseph Sauveur sobre los armónicos siente que sus teorías se confirman y publica un texto adicional al respecto: *Generación Armónica*. Mantuvo muchas polémicas sobre sus escritos con importantes pensadores de la época, entre otros con Jean-Jacques Rousseau y Jean D'Alembert. Dice en uno de sus escritos: *De la sola resonancia del cuerpo sonoro, acaban de ver nacer la armonía, la base fundamental, el modo, sus relaciones (...) el género mayor, y el menor, casi toda la melodía, la enarmonía, (...) incluso la necesidad de un temperamento, (...) sin hablar del modo menor, ni de la disonancia, siempre emanadas del mismo principio, sólo el producido por la proporción quíntuple (...) De otro lado, con la armonía nacen las proporciones, y con la melodía, las progresiones, de suerte que estos primeros principios matemáticos encuentran ellos mismos aquí su principio físico en la naturaleza.* [24]

No hay ninguna contraposición para él entre la concepción artística y la concepción científica de la música. En cierto modo piensa que en lugar de ser la música parte de la matemática como era generalmente considerado en la Edad Media, es la matemática la que es parte de la música. Aporta conceptos como por ejemplo que la armonía genera la melodía, el principio de equivalencia de las octavas, la noción de bajo fundamental de la que deriva un concepto de consonancia.

Claude Debussy [25] dice de Rameau: *... escribió un tratado de armonía, en el que pretende restaurar los derechos de la razón y quiere hacer reinar en la música el orden y la claridad de la geometría (...) no duda ni un instante*

[23]Ver [12].

[24]Ver https://es.wikipedia.org/wiki/Jean Philippe Rameau

[25]Debussy fue un compositor francés, considerado impresionista, que influyó en la música de finales del siglo XIX y principios del XX.

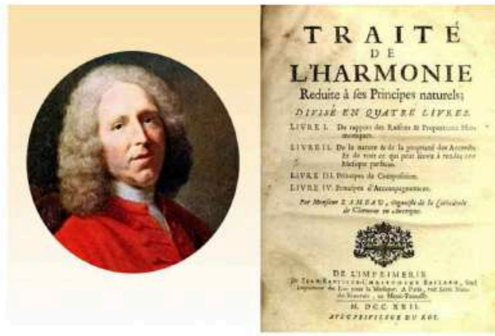


Figura 4.25: Rameau

de la veracidad del viejo dogma de los pitagóricos (...) la música entera debe ser reducida a una combinación de números; ella es la aritmética del sonido, como la óptica es la geometría de la luz. [26]

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), fue un gran pensador alemán que abarcó vastas áreas del conocimiento, entre ellas la matemática, donde introdujo varios conceptos importantes. En su época persistía la puja entre los que tenían una concepción artística de la música y aquellos que la consideraban objeto de estudio científico. En una carta al matemático Goldbach en 1712 Leibniz dice *La música es el placer que experimenta la mente humana al contar sin darse cuenta de que está contando*, o (reformula) *la música es un ejercicio inconsciente de aritmética.*[27]

Leonhard Euler (1707 - 1783) es el gran matemático del siglo XVIII y uno de los más trascendentes y prolíficos de todos los tiempos. En 1726, Euler terminó su tesis sobre la propagación del sonido, *De sono*. Además, se ocupó de la teoría musical desde el punto de vista matemático, de acuerdo a las ideas de Pitágoras y de Tolomeo - Zarlino. Como veremos, en la escala pitagórica aparecen los armónicos 2 y 3, mientras que la escala "natural" de Tolomeo - Zarlino se apoya además en el armónico 5. Euler llamó "gama matemática" a la que incluye los armónicos 2, 3 y 5.

En esa época había discrepancia entre, por una parte, la teoría musical basada en las escalas naturales y las consonancias clásicamente aceptadas y por otra la música que se componía; en esta se usaban armonías que involucraban combinaciones nuevas, que antes estaban prohibidas por "sonar mal"

[26] Ver https://es.wikipedia.org/wiki/Jean Philippe Rameau
[27] Ver http://www.leibniz-translations.com/goldbach1712.htm

Figura 4.26:

al oído, o sea, por no ser consonantes. En uno de sus artículos (*Conjecture sur la raison...* de 1766) Euler toma una posición "progresista" al decir: *...Leibniz ha advertido...en la música no se ha aprendido a contar más que hasta 5; lo cual es incontestablemente cierto en los instrumentos afinados según la armonía. Pero, si mi conjetura se cumple, se puede decir que en la composición se cuenta ya hasta 7 y que el oído está acostumbrado.*

En *Lettres à une Princesse d'Allemagne* (Cartas a una princesa alemana) (ver[17]), carta V, Euler propone una definición de consonancia como *algo que se percibe sin tener que ser entendido* e introduce una fórmula matemática para calcular el *Gradus Suavitatis* que existe entre dos sonidos. Ese "grado de suavidad" $GS(a:b)$ de un acorde de dos notas a, b podemos decir que es un un "índice de entendimiento". La idea es que si hay mucho de entendimiento, hay poco placer intrínseco de oír los sonidos juntos porque este "placer que no pasa por el entendimiento" es el que se produce justamente al oír sonidos consonantes. Si el índice es mayor, hay menos consonancia. Por ejemplo, el grado de suavidad de una quinta es 4, de una octava es 3, de una cuarta es 5 y de una séptima es 9, con lo cual la consonancia es (de mayor a menor) octava, quinta, cuarta y séptima. Además, según la concepción de Euler, no hay una frontera abrupta entre consonancia y disonancia.

Otra de sus ideas es que si un acorde o intervalo entre dos notas a y b es consonante, la fracción $\frac{a}{b}$ está expresada por números pequeños como $\frac{3}{2}$ (quinta), $\frac{4}{3}$ (cuarta), $\frac{5}{4}$ (tercera),... Esta idea viene ya de la época antigua, como vimos en 4.1.

El físico francés **Félix Savart** (1791-1841) perfeccionó la técnica de determinación de la frecuencia del sonido. Realizó importantes estudios sobre los intervalos musicales e inclusive existe una unidad de intervalo musical llamado *savart*, unidad de "desafinación musical". Aproximadamente, una octava tiene 300 savarts. Sin embargo los músicos teóricos utilizan más comúnmente el *cent* (una octava tiene 1200 cents, o sea que un semitono tiene 100 cents). Luego, 4 cents son aproximadamente 1 savart.

Hermann L. F. von Helmholtz (1821-1894) fue un médico y físico alemán, que se destacó por sus trabajos científicos sobre los procesos de percepción de la vista y del oído. Dio por primera vez explicaciones científicas de la consonancia, el timbre y otros muchos aspectos físicos de la música. Unió sus conocimientos físico-matemáticos del fenómeno vibratorio con su comprensión del mecanismo del oído. En su trabajo *Sobre la sensación del tono sobre los aspectos físicos y fisiológicos de la música*, aportó resultados sobre cómo se producen las disonancias, explicando el efecto de "aspereza" de dos sonidos que suenan juntos. Considera que cuando hay pequeñas diferencias de frecuencias se perciben "batidos", que cuando la diferencia aumenta se transforman en "aspereza". La máxima aspereza es para 30-40 Hz de diferencia y luego decrece: allí es cuando empieza la consonancia.

Helmholtz afirmó que la disonancia sensorial *resulta agotadora para el oído*, de ahí que se considere desagradable.

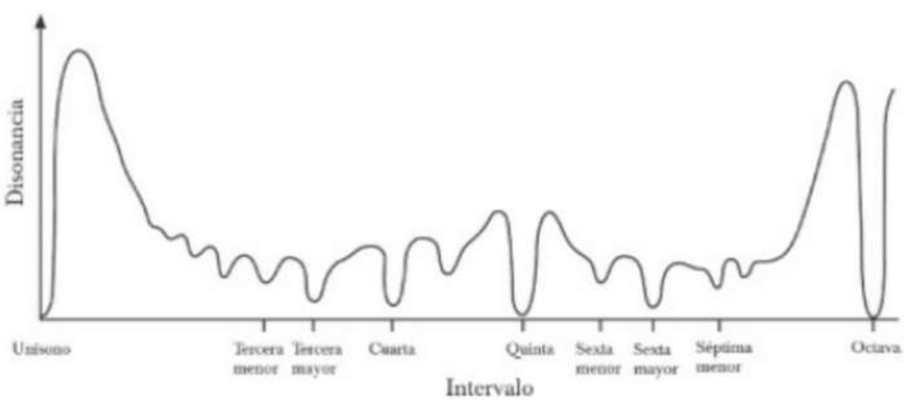


Figura 4.27: Disonancias y consonancias según Helmholtz

La cuestión consonancia-disonancia venía de la antigüedad y en el siglo XIX los grandes teóricos musicales concordaban con la tradición pitagórica en cuanto a que los intervalos más consonantes eran la octava, la cuarta y la quinta o bien la tercera como en la justa entonación. Helmholtz consiguió construir una curva que grafica cómo se perciben las disonancias y las consonancias, según vemos en la Figura 4.27. Allí apreciamos que los intervalos de unísono, octava, quinta y cuarta, en ese orden, son los más consonantes (o los menos disonantes). Afirmaba asimismo que el temperamento igual (la escala musical actualmente en uso, de doce semitonos iguales por octava) es *desagradable para los oídos puros*. Es de destacar que un siglo después R. Plomp y V.J.Levelt, basándose en los trabajos de Helmholtz, publican un artículo (ver [37]) donde muestran que las disonancias están ordenadas como sigue (de menor a mayor): unísono, octava, quinta, tercera menor, tercera mayor, cuarta y sexta mayor, como se ve en la Figura 4.28.

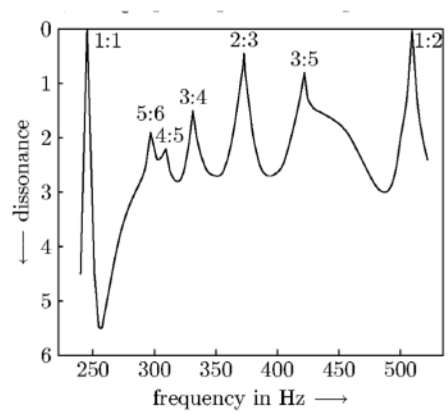


Figura 4.28: Disonancias según Plomp y Levelt

Hugo Riemann (1849-1919) fue un músico, profesor y musicólogo nacido en Alemania. Escribió numerosas obras de pedagogía de la música, y también varios trabajos sobre teoría de la música, contrapunto, un diccionario de música y músicos,... Una de sus ideas, que hereda de Rameau, es que hay una dualidad entre acordes menores y mayores y que en el acorde menor la tónica es la nota de "arriba" o sea la de frecuencia más alta.[28]

Juan Domínguez Berrueta (1866- 1959) fue un científico, pensador y músico español de principios del siglo XX interesado en las escalas musicales basadas en conceptos físico-matemáticos. Sostenía que después de Rameau *los conservatorios musicales adoptaron el temperamento igual con fines prácticos, pero se abandonó lo especulativo.* Critica al temperamento igual calificándolo de "escala termométrica", sin base en cuestiones físicas relativas a

[28]Ver acordes mayores y menores en 7.1.1.

los armónicos. Se apoya en su crítica, por ejemplo, en la opinión de Stone (en ese momento vicepresidente de la Sociedad Física de Londres): *sería deseable que la octava fuera divisible en 12 partes iguales, pero la naturaleza no lo ha hecho así.*

Escribió en 1927 el libro *Teoría física de la música*, donde propone una gama de diecisiete notas (diferenciando sostenidos de bemoles) basada en los armónicos $2, 3, 5$ y 7. Agrega el armónico 7, apoyándose en la opinión de Euler, que decía *Si se quisiera introducir todavía el factor* 7 *el número de tonos de una octava sería más grande y toda la música sería llevada a un grado más elevado*. Llegó a construir un órgano con esa escala.

4.6. Aportes del siglo XX

Reseñaremos brevemente las biografías de algunos compositores que marcaron tendencias en la teoría musical durante el siglo XX, si bien la gran diversidad de enfoques muestra que, al contrario de otras épocas, no ha habido en realidad una tendencia predominante.

En cuanto a la relación de la música del siglo XX con la matemática, como señala Benson (ver [7], 5.15) la matemática involucrada en la escala cromática de doce tonos del siglo XX es de naturaleza diferente a la usada anteriormente. La simple aritmética, base de las teorías pitagóricas se ha reemplazado actualmente por herramientas más sofisticadas como estructuras algebraicas, fractales o diversos tipos de algoritmos. Parecería que la armonía pasa a segundo plano y aparece un nuevo cromatismo, que sale de los límites de las tonalidades (mayores y menores); se usa también la combinatoria para experimentar libremente con nuevos acordes y formas melódicas. Por otra parte, es un hecho que la música innovadora del siglo XX no ha llegado en general al gusto del público; hasta hay quienes se refieren a ella como música "sociológicamente muerta" (ver [34]).

Arnold Schoenberg (1874-1951) fue uno de los más importantes compositores y teóricos musicales del siglo XX. Nacido en Viena, emigró a Estados Unidos por causa del nazismo. En los años 20 desarrolló su revolucionario *Método de composición con doce sonidos*, también conocido como *dodecafonía*, en la misma época en que el pintor Kandisky impulsaba un cambio drástico hacia la pintura abstracta.

Su *Tratado de armonía* sorprende por estar la primera parte dedicada a aprender la teoría musical tal cual estaba planteada en la época; pero luego avanza hasta llegar a la supresión de las tonalidades, con la intención de dar al alumno más libertad a medida que avanza en conocimiento: va de la escala cromática a la *serie cromática.* En lugar de "atonalidad" llama a su postura "politonalidad" o "pantonalidad". Ya no hay una tónica, y sus correspondientes dominante y subdominante: las doce notas de la escala cromática tienen igual papel. Argumenta contra la armonía clásica basada en la naturalidad de las componentes armónicas del sonido, observando que en los armónicos de orden más elevado hay disonancias. Según él, estas deben tratarse en pie de igualdad con las consonancias clásicas y esa suposición es la verdadera "naturalidad".

El *dodecafonismo* propone establecer en cada composición una serie arbitraria en la que aparezcan todas las notas de la escala cromática. A esta secuencia de doce notas se la denomina "serie original" y a partir de allí será la única estructura rectora, a partir de la cual se dará el desarrollo de la obra. Esto abre el camino al desarrollo del "serialismo" que aparece en la segunda mitad del siglo XX.

Igor Stravinsky (1882-1971) fue uno de los compositores y artistas más influyentes de la música del siglo XX, tanto en Occidente como en su Rusia natal. Sus composiciones más difundidas: *El pájaro de fuego*, *Petrushka* y *La consagración de la primavera*, han sido escritas para ballet y, según algunos críticos, redefinieron este tipo de música. En Petrushka muestra una tendencia bitonal, para llegar finalmente a la fuerte disonancia polifónica de La consagración de la primavera, donde experimenta con la tonalidad, la métrica y el ritmo. Estas innovaciones produjeron en su estreno el más famoso escándalo en la historia de la música, por la fuerte reacción adversa del público.

Abordó diversos estilos: el primitivismo, el neoclasicismo y el serialismo, este último influenciado por Schoenberg. Con la colaboración de Alexis Roland-Manuel, Stravinski publicó un trabajo teórico titulado *Poetics of Music* (Poética musical), en el cual dijo una famosa frase: *La música es incapaz de expresar nada por sí misma.*

Olivier Messiaen (1908-1992), francés, fue uno de los músicos más destacados de la época: compositor, organista, pedagogo. Pierre Boulez fue su discípulo y también influenció a Xenakis, a quien aconsejó que sacase partido de sus conocimientos matemáticos y de arquitectura, y los usase en su música. Publicó en 1944 su *Technique de mon langage musical* y otras obras, considerando que el desarrollo y estudio de las técnicas tenían un fin intelectual, estético y emocional. El estilo musical de Messiaen incluye ordenamientos como añadir duraciones a las notas o en las escalas usadas, basándose en lo que llamó "modos de transposición limitada". Estos principios se observan principalmente en su composición *Modos de valor e intensidad* (1949), donde las notas, los valores rítmicos y los matices han sido trabajados en serie. Sin embargo, Messiaen no estaba de acuerdo en usar términos como *tonal*, *modal* o *serial* sino que hablaba de música *con y sin color*. Para él autores de diversas épocas y estilos, como Monteverdi, Mozart, Chopin, Wagner, Mussorgsky y Stravinski, escribieron música fuertemente coloreada. La causa de dar importancia al color proviene del hecho de que experimentaba *sinestesia*: percibía colores cuando escuchaba o imaginaba música. Pensaba también que la composición armónica del sonido provee acordes interesantes que no aparecen en la música puramente serial.

Era un gran admirador y conocedor de los pájaros y sus cantos, los que usó en sus composiciones. También usó recursos electrónicos, como las *ondas Martenot*, instrumento que podemos ver en la Figura 4.29.[29]

Figura 4.29: Ondas Martenot

En 1940, siendo Messiaen prisionero de guerra en Francia, compuso su *Quatuor pour la fin du temps* (Cuarteto para el fin del tiempo) para ser interpretado por él al piano y violín, violonchelo y clarinete por tres amigos prisioneros. La obra fue estrenada allí ante una audiencia de prisioneros y vigilantes. El título de la obra se refiere no sólo al Apocalipsis sino al hecho de que el compositor usaba "el tiempo" musical de manera innovadora.

[29]Las ondas Martenot y el theremin son instrumentos musicales que producen sonidos generados electrónicamente.

John Cage (1912-1992) fue un revolucionario compositor, pionero de la música aleatoria y partidario de la importancia de *enfrentarse con el sonido en su totalidad*; alteraba los instrumentos para obtener los sonidos deseados, como se ve en la Figura 4.30. Cage fue uno de los compositores estadounidenses más influyentes del siglo XX. Estudioso de filosofías de origen oriental como el budismo y la filosofía zen, llegó a la conclusión de que la música debía ser aleatoria, sin denotar ninguna intención del autor. Usó habitualmente el I Ching, un antiguo texto chino sobre el azar, para componer su música. Su composición de *4'33"* es muy conocida, especialmente porque consta de tres movimientos que se interpretan **sin tocar una sola nota**. Si bien cada pieza que compuso posee cierta estructura, el efecto varía con cada ejecución ya que depende del intérprete, del recinto donde se interpreta y de la audiencia de ese día, la música se supone que "la hace" el entorno y cada oyente. Estas consideraciones dieron lugar a un movimiento cultural denominado *Environment*.

Figura 4.30: Cage alterando un piano

Se cuenta que Schoenberg después de algunas lecciones le dijo que no tenía aptitudes para la armonía: *Te encontrarás con un muro que no te será posible traspasar*, a lo que Cage contestó: *Entonces pasaré mi vida golpeándome la cabeza contra ese muro.*

Alberto Ginastera (1916-1983), compositor argentino de música académica, es considerado como uno de los más importantes del siglo XX en América. Discípulo destacado de Aaron Copland (quien a su vez fue discípulo de Stravinsky), cultivó un estilo acorde a las tendencias innovadoras de esa época como el dodecafonismo, el serialismo, el microtonalismo y la música aleatoria.

El ingeniero civil **Iannis Xenakis** (1922-2001) fue un compositor de ascendencia griega que se nacionalizó francés y pasó gran parte de su vida en

París. Estudió con Messiaen, quien al ver que Xenakis no conocía el lenguaje musical, le propuso que desarrollara uno propio, idea que lo llevó a desarrollar un simbolismo para su música en base a gráficos. En la Figura 4.31 se ve el gráfico correspondiente a su obra *Herma*, que se relaciona con álgebra booleana representada por diagramas de Venn.[30] En su libro *Formalized music* (1963) explica su método de interpretar gráficos como una notación musical. Al trabajar sus composiciones mediante algoritmos adoptó el uso de la computadora y fue el fundador de el EMAMu, conocido a partir de 1972 como CEMAMu (Centre d'Études de Mathématique et Automatique Musicales).

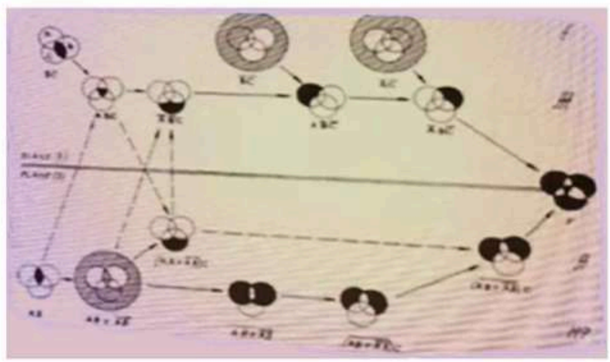


Figura 4.31: Gráfico de "Herma"

Se aleja radicalmente del serialismo bastante generalizado en su época y también de la aleatoriedad de John Cage. Lideró la llamada *música estocástica* que utiliza herramientas matemáticas de la teoría de la probabilidad para estructurar sus composiciones. En ese sentido, expresaba en su texto *La crise de la musique sérielle* sus críticas a la técnica serial: *Hay por tanto una contradicción entre el sistema polifónico lineal y el resultado percibido, que es de una superficie o masa. Esta contradicción inherente a la polifonía desaparece cuando la independencia del sonido es total.* Propone en cambio crear: *... un mundo de masas sonoras, vastos grupos de eventos sonoros, nubes y galaxias gobernadas por nuevas características como densidad, grado de orden, nivel de cambio, las cuales requieren definiciones y realizaciones usando la teoría de probabilidad.*

[30]Los diagramas de Venn son gráficos circulares que se usan para representar conjuntos en matemática elemental.

El profesor **Pierre Boulez** (1925-2016) fue compositor y director de orquesta. Estudió matemática y posteriormente armonía con Messiaen y también otras disciplinas musicales como contrapunto o técnica dodecafónica. Tenía la idea de que el serialismo dado por la corriente del dodecafonismo era una forma "tradicional" y se propuso generalizar ese método. En ese sentido, fue uno de los iniciadores del llamado *serialismo integral*, que extendía el método dodecafónico que regía sólo para las notas y sus alturas, a otros elementos musicales tales como el ritmo. Usó también la música electrónica y la generada por computadora y compartió algunas ideas musicales con John Cage. En su última época compuso obras más serenas y ricas en delicadas sonoridades. Para promover la enseñanza y la investigación en música de última generación fundó, a pedido del presidente Pompidou, el IRCAM (Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique), del que fue director.

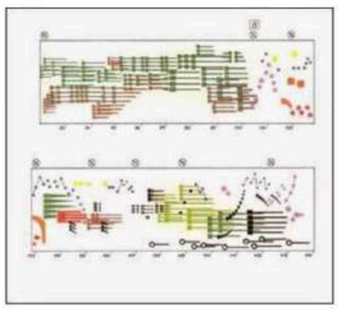


Figura 4.32: Partitura gráfica

Francisco Guerrero Marín (1951-1997) fue un artista innovador que usó herramientas informáticas y matemáticas para sus creaciones musicales. En el lenguaje musical escrito usó variantes como: indeterminación en la escritura, notación espacial, música textual, partituras gráficas (como la que se ve en la Figura 4.32), etc. En 1974 cofundó, junto a Alfredo Aracil, Tomás Garrido y Pablo Riviere, *Glosa*, un grupo dedicado a la interpretación de partituras gráficas. En cuanto a la música en sí, se apoya en modelos matemáticos combinatorios y en algoritmos informatizados que generan los sonidos. En su última época fue un pionero en el uso de la *geometría fractal* de Mandelbrot como estructura básica de una composición.

Capítulo 5

Las escalas

En este capítulo iremos mostrando algunas de las escalas o gamas musicales más importantes que se propusieron a lo largo de la historia hasta llegar a la de temperamento igual, actualmente en uso.

Un hecho básico en todas las teorías musicales vistas en la parte histórica es que una nota suena “perfectamente bien” con su octava. Casi podríamos decir: *...en el principio era la octava...*. La frecuencia de la octava de una nota, como hemos dicho en 3.1.1, es el **segundo armónico** de la frecuencia original, doble de esta.

Parece entonces muy razonable que el punto de partida en la construcción de una escala sea el intervalo de octava.

Lo que llamamos un *intervalo*, como puede verse en el Capítulo 1, es (informalmente) la distancia entre una nota de frecuencia f y otra más aguda de frecuencia f' y lo indicaremos $[f, f']$. Entendemos que un intervalo contiene todas las frecuencias intermedias g tales que $f \leq g \leq f'$. Entonces diremos que:

Construir una escala significa definir un número finito de frecuencias intermedias en un intervalo de octava.

Para construir una escala comenzaremos con una nota o tono fundamental en abstracto que llamaremos do_1. La octava de do_1, que llamaremos do_2, tendrá frecuencia doble de la de do_1. Análogamente, pasaríamos de do_2 al do_3 de la octava siguiente multiplicando otra vez por 2 y así siguiendo hacia los tonos más agudos. Inversamente, “bajamos” octavas dividiendo por 2 y así obtendríamos las octavas cada vez más graves. Los intervalos de octava son en teoría infinitos hacia ambos lados. Si suponemos que la frecuencia de do_1 es 1, estos intervalos serían:

$$...[\frac{1}{4},\frac{1}{2}],[\frac{1}{2},1],[1,2],[2,4],[4,8],[8,16]...$$

Tomemos ahora una nota n cuya frecuencia esté entre 1 y 2. La octava de n tendrá frecuencia entre 2 y 4, o sea que estará en $[2,4]$; análogamente, las sucesivas octavas de n estarán en $[4,8]$, $[8,16]$... Por otra parte, hacia las notas más graves, tendremos una "réplica" de n en los intervalos $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}],[\frac{1}{2},1]$...

Luego, bastará elegir las notas de la escala en una octava básica, porque todas las demás octavas serán réplicas de la básica.

Pero puede ocurrir que obtengamos alguna nota que no caiga dentro de esa octava. ¿Qué hacer entonces? Muy sencillo: "reducir" a la octava básica multiplicando o dividiendo la frecuencia de la nota en cuestión por 2 todas las veces que sea necesario.

5.1. Operaciones con intervalos

Veamos con más detalle lo que significa operar con intervalos.

Para facilitar algunos razonamientos y cálculos, a menudo consideraremos arbitrariamente que una nota básica (casi siempre un *do*) tiene frecuencia 1 y nos referiremos a la frecuencia de las demás **relativamente** a aquella.

Así, la octava de una nota de frecuencia 1 tiene frecuencia 2, su cuarta (que será fa) tiene frecuencia $\frac{4}{3}$ y su quinta (que será *sol*) tiene frecuencia $\frac{3}{2}$. Recordemos que podemos obtener la cuarta subiendo una octava y luego bajando una quinta, de modo que lo más importante son octavas y quintas, como vimos en la última parte de 4.1.

En general, si la nota básica fuera de frecuencia f, su octava tiene la frecuencia $2f$, su cuarta $\frac{4}{3}\cdot f$ y su quinta $\frac{3}{2}\cdot f$. Para obtener la frecuencia real o **absoluta** de las notas bastará tomar la frecuencia f de la básica y calcular las demás en función de f.[1]

Muchas veces, por abuso de lenguaje, nos referiremos indistintamente a notas o a sus frecuencias. Por ejemplo, diremos intervalo $do - sol$ o intervalo $[do, sol]$ en lugar de intervalo $[1,\frac{3}{2}]$.

Identificamos los intervalos con un número que es su *longitud*: una octava tiene longitud 2, una quinta tiene longitud $\frac{3}{2}$, una cuarta $\frac{4}{3}$. O sea, la longitud de un intervalo $[f,f']$ es el cociente $\frac{f'}{f}$.

[1]Ver frecuencias absolutas de las notas en la Figura 3.3.

Intervalos	Longitudes
5ª [f, 3/2 f]	3/2
4ª [3/2 f, 2 f]	4/3
8ª [f, 2 f]	2

Suma de Intervalos

[f, 3/2 f] (+) [3/2 f, 2 f] = [f, 2 f]

Producto de longitudes

3/2 . 4/3 = 2

Figura 5.1: Suma de intervalos básicos

¿Cómo operar con intervalos? Observemos que al sumar o unir intervalos multiplicamos sus longitudes. Por ejemplo, si subimos una quinta a partir de *do*, obtenemos un *sol* y si a partir de *sol* subimos una cuarta, obtenemos el *do* una octava más agudo que el dado. Veamos esto esquematizado en la Figura 5.1: si a un intervalo de longitud $\frac{3}{2}$ le agregamos otro de longitud $\frac{4}{3}$, obtenemos otro de longitud 2 o sea, una octava. O sea que, "añadiendo" dos intervalos obtenemos un tercer intervalo cuya longitud es el producto de las dos longitudes dadas.

Análogamente, veremos que "restando" intervalos obtenemos como resultado un intervalo cuya longitud es el cociente de las dadas.

Tenemos en la Figura 5.2 otro ejemplo de suma de intervalos. Usaremos las frecuencias de mi y de la en la escala de Tolomeo-Zarlino, que son respectivamente $\frac{5}{4}$ y $\frac{5}{3}$, como veremos en 5.4.

Consideramos las notas *do*, el mi tolemaico y el *sol* pitagórico, de frecuencias, respectivamente 1, $\frac{5}{4}$ y $\frac{3}{2}$. Al intervalo $do - mi$ (en frecuencias $[1, \frac{5}{4}]$) le agregaremos el $mi - sol$ (en frecuencias $[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$).

El intervalo $do - mi$ es de longitud $\frac{5}{4}$ y el $mi - sol$ es de longitud $\frac{6}{5} = \frac{3}{2} \div \frac{5}{4}$. Luego, el resultado, que es el intervalo $do - sol$, tendrá longitud $\frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{2}$.

En la Figura 5.2 mostramos también la operación de resta o diferencia: al intervalo $sol - do$ le restamos el $la - do$. Calculemos las longitudes:

$2 \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$ es la longitud de $sol - do$ y $2 \div \frac{5}{3} = \frac{6}{5}$ la longitud de $la - do$.

Luego, resulta el intervalo $sol - la$ de longitud $\frac{4}{3} \div \frac{6}{5} = \frac{10}{9}$.

Observación 1. En primer lugar, la longitud del intervalo $do - mi$ es $\frac{5}{4} \div 1 =$

$\frac{5}{4}$. Esto es un ejemplo de un hecho general, suponiendo *do* de frecuencia 1:

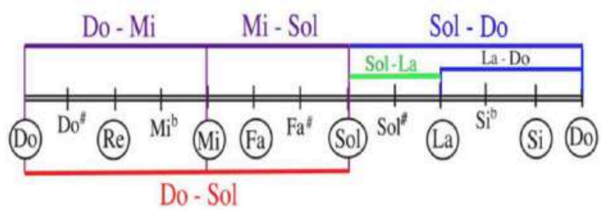
La frecuencia de una nota n es igual a la longitud del intervalo $do - n$.

Además, lo que hemos hecho al agregar al intervalo $do - mi$ el intervalo $mi - sol$ podemos considerarlo también como la operación de "subir el *mi*" un intervalo de longitud $\frac{3}{2} \div \frac{5}{4} = \frac{6}{5}$ (que se considera una tercera menor). Multiplicando la frecuencia de *mi*, que es $\frac{5}{4}$, por $\frac{6}{5}$ obtenemos $\frac{3}{2}$, que es la longitud del intervalo $do - sol$. Aquí también tenemos una regla general:

Subir la nota n un intervalo de longitud k es multiplicar la frecuencia de n por k.

Veamos el caso de la resta. Si hubiéramos tomado $do - sol$ (de longitud $\frac{3}{2}$) y le restamos $mi - sol$ (de longitud $\frac{6}{5}$), hubiéramos bajado el *sol* en una tercera menor. Luego, dividiendo $\frac{3}{2}$ (frecuencia de *sol*) por $\frac{6}{5}$ hubiéramos obtenido $\frac{5}{4}$, que es la frecuencia de *mi*. O sea que se cumple:

Bajar n un intervalo de longitud k es dividir la frecuencia de n por k.



SUMA de intervalos		RESTA de intervalos	
$\frac{f_1}{f_2}(+)\frac{f_2}{f_3}$	$\frac{f_1}{f_2}\times\frac{f_2}{f_3}=\frac{f_1f_2}{f_2f_3}=\frac{f_1}{f_3}$	$\frac{f_1}{f_3}(-)\frac{f_2}{f_3}$	$\frac{f_1}{f_3}:\frac{f_2}{f_3}=\frac{f_1f_3}{f_2f_3}=\frac{f_1}{f_2}$
Ejemplo: (Do-Mi)+(Mi-Sol)=Do-Sol		Ejemplo:(Sol-Do)— (La-Do)=Sol-La	

Figura 5.2: Operaciones de intervalos

5.2. Escala de Pitagóras

Comenzaremos por la primera escala conocida que se basó en cuestiones matemáticas y filosóficas. Supongamos que no sabemos nada de armónicos ni de frecuencias. Lo único que conocía Pitágoras eran las consonancias básicas, que se reducían para él a la octava, la quinta y la cuarta.

Fijemos una octava básica, digamos de do_1 a do_2, como se hace con la octava central del piano, cuyo *la* es el que tiene frecuencia 440 Hz (ver Figura 3.3).

Siguiendo a Pitágoras, y considerando, como dijimos, que "todo puede reducirse a lo que pasa en la octava", vamos a generar la escala usando sólamente las quintas "puras" (ver 1.2 y 3.1.2 y 4.1.1) y reduciendo a la octava básica.

Como hemos mencionado en 4.1, consideramos que la cuarta y la quinta de *do* son respectivamente el fa y el *sol*, ahora necesitamos descubrir las demás notas en la octava de *do*.

Los nombres actuales de las notas fueron dados mucho después de Pitágoras. [2]

Empecemos con un fa más bajo que el do_1, el que está en la octava $[1/2, 1]$, anterior a $[1, 2]$. Esto significa que su frecuencia, en lugar de ser $\frac{4}{3}$ será $\frac{4}{3}.\frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Si tomamos la quinta de fa, que sería $\frac{2}{3}.\frac{3}{2} = 1$, llegamos al do_1 (como habíamos observado antes, al ver que la cuarta es "complementaria" de la quinta). Luego tomamos la quinta de do_1, que será *sol*, que está todavía en la octava $[1, 2]$. Si tomamos la quinta de *sol*, su frecuencia es $\frac{3}{2}.\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$, y está en la octava $[2, 4]$. La llamaremos re y por estar en la octava $[2, 4]$ tenemos que reducirla: $\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$. Tomamos ahora la quinta de re y obtenemos la frecuencia $\frac{27}{8}$, que cae en el intervalo $[2, 4]$ y cuya reducción es $\frac{27}{16}$. Así siguiendo, la quinta de la sería $\frac{81}{16}$, que está en la octava $[4, 8]$, por lo que la bajamos dos octavas, obteniendo el valor $\frac{81}{64}$ para la frecuencia de la nota que llamaremos mi. La quinta de mi, que llamaremos si, será de frecuencia $\frac{243}{32}$, que reducida es $\frac{243}{128}$. Podemos ver estos valores en la Figura 5.3. Es el llamado **ciclo de quintas** que nos da las siete notas:

fa – do – sol – re – la – mi – si

La escala formada ordenando los valores de las frecuencias de las notas es la que se observa en la Figura 5.4, donde también se ven las relaciones entre la frecuencia de una nota y la anterior. Observemos que entre mi y fa hay la misma relación: $\frac{256}{243}$ que entre si y *do*. Las otras relaciones son siempre $\frac{9}{8}$. Se dice que *do* y re, re y mi, fa y *sol*, *sol* y la, la y si están entre sí a distancia de un *tono* (aunque no es lo mismo que el tono de la escala actual) y que mi y fa, si y *do* están a distancia de un *hemitono* (antecesor de lo

[2]Ver en 4.2 el origen del nombre de las notas tal como las conocemos ahora.

Siete Notas				
2/3	Fa_{-1}	corrección	2x(2/3)=	4/3
2/3 . 3/2 = 1	Do_1			1
3/2 . 1 = 3/2	Sol_1			3/2
3/2 . 3/2 = 9/4	Re_2	corrección	(1/2)x(9/4)=	9/8
9/4 . 3/2=27/8	La_2	corrección	(1/2)x(27/8)=	27/16
27/8 . 3/2=81/16	Mi_3	corrección	(1/4)x(81/16)=	81/64
81/16 . 3/2=243/32	Si_3	corrección	(1/4)x(243/32)=	243/128

Escala de Pitágoras

1< 9/8 < 81/64 < 4/3 < 3/2 < 27/16 < 243/128 < 2

Do_1 Re Mi Fa Sol La Si Do_2

Figura 5.3: Siete notas

que hoy llamamos semitono). Esta Escala de Pitágoras de llama *diatónica*, porque "está basada en" o "pasa a través de" tonos (en realidad en tonos y hemitonos).

Lo que produce admiración es el hecho de que de esta escala, que fue construida por Pitágoras 500 años antes de nuestra era, nacen todas las demás, con la misma sucesión de tonos y semitonos (aunque no los mismos valores, claro). También este "ciclo de quintas", como dijimos en 1.4.1, es esencial para los músicos, porque contiene información sobre escalas mayores y sus relativas menores, sostenidos y bemoles, armonías de las tonalidades...

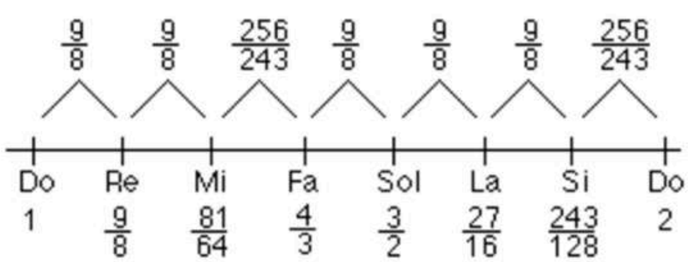


Figura 5.4: Escala pitagórica diatónica

Pero hemos usado un pequeño "truco" iniciando el ciclo con el *fa* en lugar de iniciarlo en do_1.

De no haber hecho ese truco, al llegar a *si* y calcular la quinta (que debería ser *fa*) hubiéramos obtenido

$$\frac{243}{128} \cdot \frac{3}{2} = \frac{729}{256}$$

que pasa de 2, lo que dividiendo por 2 para bajar una octava nos quedaría

$$\frac{729}{512}$$

que debería corresponder a *fa* que es $\frac{4}{3}$. Sin embargo, hay una diferencia:

$$\frac{729}{512} = 1,4238... \quad \text{y} \quad \frac{4}{3} = 1,3333...$$

Llamemos *fa sostenido* o *fa*$\sharp$ a este nuevo *fa*, que está "un poco más arriba" (es más agudo) que el que teníamos y no estaba en la escala pitagórica diatónica.

Hagamos ahora lo siguiente: partiendo de do_1, vayamos ascendiendo por quintas sin corregir para quedar dentro de la octava do_1, do_2. Recordemos que las octavas son:

- ..., octava anterior a la primera, frecuencias entre $\frac{1}{2}$ (o sea 2^{-1}) y 1,
- primera octava, frecuencias entre 1 y 2, o sea, entre 2^0 y 2^1,
- segunda octava, frecuencias entre 2 y 4, o sea, entre 2^1 y 2^2,...

Al subir sucesivamente una quinta iremos subiendo de octava, hasta que lleguemos (esperamos!) nuevamente a un *do*, cerrando el ciclo. Debemos multiplicar sucesivamente por $\frac{3}{2} = 1,5$ y así tendremos los valores de las frecuencias, que expresados con decimales (aproximados al cuarto decimal) son como se muestran en la Figura 5.5.

Al realizar el "ciclo" de las doce quintas, (que es en realidad un ciclo aproximado porque no se cierra) hemos ido obteniendo las doce notas de lo que suele llamarse la *escala cromática*. El ciclo debería cerrarse al completar las siete octavas, pero en lugar de obtener exactamente el do_8, que es de frecuencia 128, obtuvimos una nota ligeramente diferente, que es de frecuencia 129, 7464. Es decir que **doce quintas no son exactamente lo mismo que siete octavas**: lo que mide el error es la relación $\frac{129,7464}{128}$, o sea, $\frac{(\frac{3}{2})^{12}}{2^7} = 1,01364375$, que es lo que se llama *coma pitagórica*.

El ciclo no puede cerrarse por una razón matemática. Supongamos que seguimos creando notas y subiendo por quintas. Para llegar a un do_k de alguna octava k (el *do* que tiene frecuencia 2^k), deberíamos poder obtener la

Ciclo de quintas

1	=	**do_1**	(1^{a} octava),
$3/2 = 1{,}5$	=	**sol_1**	(1^{a} octava),
$(3/2)^2 = 2{,}25$	=	**re_2**	(2^{a} octava),
$(3/2)^3 = 3{,}375$	=	**la_2**	(2^{a} octava),
$(3/2)^4 = 5{,}0625$	=	**mi_3**	(3^{a} octava),
$(3/2)^5 = 7{,}5938$	=	**si_3**	(3^{a} octava),
$(3/2)^6 = 11{,}3906$	=	**$fa\sharp_4$**	(4^{a} octava),
$(3/2)^7 = 17{,}0859$	=	**$do\sharp_5$**	(5^{a} octava),
$(3/2)^8 = 25{,}6289$	=	**$sol\sharp_5$**	(5^{a} octava),
$(3/2)^9 = 38{,}4434$	=	**$re\sharp_6$**	(6^{a} octava),
$(3/2)^{10} = 57{,}6650$	=	**$la\sharp_6$**	(6^{a} octava),
$(3/2)^{11} = 86{,}4976$	=	**$mi\sharp_7 \approx fa_7$**	(7^{a} octava),
$(3/2)^{12} = 129{,}7464 \approx$		**$do_8 = 128$**	(8^{a} octava).

Figura 5.5: Ciclo de 12 quintas

siguiente igualdad: $(\frac{3}{2})^n = 2^k$, pero eso significaría que $3^n = 2^n \cdot 2^k = 2^{n+k}$, lo que es imposible porque ninguna potencia de 3 es potencia de 2 (salvo $3^0 = 2^0 = 1$).

Si reducimos (ahora sí) a la primera octava y ordenamos por frecuencias, la **escala cromática** nos queda:

$$do_1,\ do\sharp,\ re,\ re\sharp,\ mi,\ fa,\ fa\sharp,\ sol,\ sol\sharp,\ la,\ la\sharp,\ si,\ do_2.$$

¿Qué pasaría si, en lugar de subir, bajáramos por quintas? Obtendríamos, sucesivamente, a partir de *do*: el *fa* y luego las notas a las que se da el nombre de: *si*$\flat$, *mi*$\flat$, *la*$\flat$, *re*$\flat$, *sol*$\flat$,... que coinciden casi exactamente con *la*$\sharp$, *re*$\sharp$, *sol*$\sharp$, *do*$\sharp$, *fa*$\sharp$,... Pero nunca se cerraría el ciclo, siempre las doce quintas exceden las siete octavas. Lo que hacen algunos es considerar una quinta "defectuosa", que será ligeramente menor que las demás y por lo tanto, no tan consonante (las dos notas juntas no sonarán tan bien como las de una quinta normal). Es lo que más adelante se llamó la "quinta del lobo"[3], que se ubicó en un lugar de la escala donde se usara poco. Quedó entonces el ciclo como se ve en la Figura 5.6.

[3]Se dice que se llamó "del lobo" porque sonaba tan mal como el aullido de un lobo.

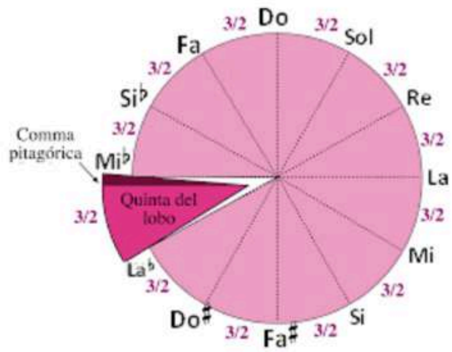


Figura 5.6: Quinta del lobo

Dijimos que si construyéramos el ciclo en sentido contrario, obtendríamos "casi" las notas que ya conocíamos. En realidad, hay pequeñas diferencias entre las notas llamadas *enarmónicas* como por ejemplo $mi\sharp$ y fa, o $sol\flat$ y $fa\sharp$.

¿Cómo calcular la escala cromática? Veamos. Como dijimos, el siguiente de *si* en el ciclo de quintas es $fa\sharp$. Luego, para obtener su valor tenemos que agregarle una quinta, o sea, multiplicar por $\frac{3}{2}$. La frecuencia de *si* es $\frac{3^5}{2^7}$ luego, la de $fa\sharp$ será $\frac{1}{2} \times \frac{3^5}{2^7} \times \frac{3}{2} = \frac{3^6}{2^9}$, donde dividimos por 2 para reducir a la primer octava. Análogamente, para $do\sharp$ obtenemos: $\frac{3^7}{2^{11}}$. Luego para $sol\sharp$ obtenemos: $\frac{3^8}{2^{12}}$ (esta vez sin dividir por 2).

Ahora debemos suponer que $mi\sharp$ y fa son "la misma" nota, de frecuencia $\frac{2^2}{3}$ y también que $si\sharp$ y *do* coinciden en la frecuencia 2.

Los otras dos notas de la escala, $re\sharp$ y $la\sharp$, podemos obtenerlas "yendo para atrás": retrocediendo una quinta (multiplicando por $\frac{2}{3}$) desde fa llegamos a $si\flat \approx la\sharp$ y, multiplicando por 2 para estar en la octava, obtenemos $\frac{2^4}{3^2}$. Usando este valor de $la\sharp$ nuevamente multiplicando por $\frac{2}{3}$ llegamos a $re\sharp \approx mi\flat$ que es $\frac{2^5}{3^3}$. Vemos la tabla completa en la Figura 5.7.

Remarcamos que la escala pitagórica está basada en el intervalo de quinta $[1, \frac{3}{2}]$, por lo que todas las notas obtenidas son productos de potencias de 2 y de 3. Como sabemos, el segundo armónico de una nota de frecuencia f es $2f$.[4] Su tercer armónico es $3f$, es decir que se puede obtener tomando la octava (multiplicando por 2) de la quinta (multiplicando por $\frac{3}{2}$) de la nota

[4]Ver 3.1.1, 3.1.2 y 4.1.1.

DO	DO #	RE	RE #	MI	FA	FA #	SOL	SOL #	LA	LA #	SI
1	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^7}$

Figura 5.7: Escala pitagórica cromática

dada. Este hecho indica, como mencionáramos en 3.1.2, que la quinta en la escala de Pitágoras es el tercer armónico al que hemos bajado una octava. Es por esa dependencia de un armónico que se llaman "puras". En cambio el intervalo de tercera $do - mi$, que es de longitud $\frac{81}{64}$, no es puro (no proviene de un armónico al que se ha bajado una o varias octavas). Es el llamado *ditono* pitagórico, que consta de dos tonos iguales de $\frac{9}{8}$ cada uno. La tercera se obtiene al recorrer cuatro quintas, como se ve en la Figura 5.3:

$$do - sol - re - la - mi.$$

En el Capítulo 1 se muestra cómo se forman los acordes más importantes que son base de una composición musical. Los mayores y menores, por ejemplo, están formados por una nota, su tercera (mayor o menor) y su quinta. Al tratar la escala de Tolomeo-Zarlino veremos que la tercera depende del quinto armónico. En la escala pitagórica sólo aparece el tercer armónico, por lo que los acordes básicos deberían tener sólo dos notas separadas por una quinta.

El ciclo de **doce** quintas originado por los pitagóricos va generando por primera vez una a una las **doce** notas de la escala cromática. Aunque las afinaciones y las escalas se modificaron posteriormente, las doce notas perduran.

5.3. Escala pentatónica

La pentatónica es una de las más antiguas escalas musicales de la humanidad y aparece en diversas formas en numerosas culturas primitivas: asirios, chinos, griegos, celtas, incas...

En la leyenda china de la creación de la música (ver 4.1) 2.500 años antes de Cristo, Ling-Lu encontró cinco notas, que se obtienen por quintas, que son: $fa\sharp$ - $do\sharp$ - $sol\sharp$ - $re\sharp$ - $la\sharp$; ordenadas por sus alturas dentro de una octava forman la escala pentatónica china: $fa\sharp$, $sol\sharp$, $la\sharp$, $do\sharp$, $re\sharp$, que se corresponden hoy con las teclas negras del piano, aunque es frecuente considerar la escala china sin los sostenidos, lo que haremos en adelante.

Hay diversas maneras de definir hoy lo que es una escala pentatónica.

Aquí lo haremos usando las quintas, es decir, como derivada de la escala de Pitágoras.

Si tomamos, a partir de do, las cinco primeras notas del ciclo de quintas:

$$do - sol - re - la - mi$$

y las reubicamos: $do - re - mi - sol - la$, tenemos una escala con la estructura de tonos y semitonos que se ve en la Figura 5.8, es decir, la sucesión:

T - T - T+S - T - T+S.

Usando esa misma estructura a partir del fa tenemos la *escala celta*:

$$fa - sol - la - do - re,$$

que coincide con la china, obtenidas del ciclo de quintas empezando por fa.

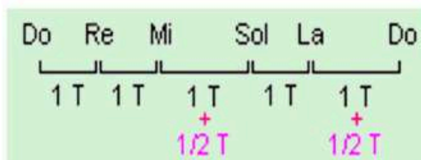


Figura 5.8: Escala pentatónica de do

Por analogía a lo que se hace para definir las escalas mayores y menores (ver 1.4.1), algunos consideran que esa estructura es la de *escala pentatónica mayor* y que hay una *escala pentatónica menor* relativa a la anterior. Por ejemplo, la relativa a la escala $do - re - mi - sol - la$ es, usando las mismas notas a partir de la,

$$la - do - re - mi - sol$$

Esta tiene una estructura distinta, como podemos ver en la Figura 5.9, que es:

T+S - T - T - T+S - T.

Según los estudiosos, la *escala de los incas* era

$$re - fa - sol - la - do,$$

que es la escala pentatónica menor relativa a la de fa.

Es curioso observar que la escala pentatónica fue usada por estos y otros pueblos primitivos de muy diversas latitudes.

Esta escala y sus variantes han aparecido en canciones infantiles tradicionales en Argentina (estribillo de "sobre el puente de Avignon", por ejemplo).

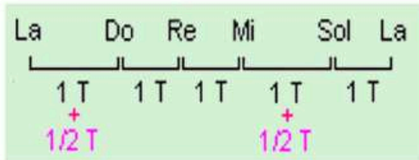


Figura 5.9: Escala pentatónica menor

5

Actualmente se usa por su facilidad para improvisar en música de jazz. En el Estudio N°5 en *Sol♭* de Chopin, llamado "de las teclas negras" se usan principalmente esas cinco notas; también se usa *exclusivamente* la escala pentatónica en el quinto preludio latinoamericano de Ginastera.

Figura 5.10: Estrella de 5 puntas

En la Figura 5.10 vemos el ciclo de quintas reducido a las cinco notas mencionadas al principio.

Si unimos sucesivamente cada nota con su siguiente en frecuencia:

$$do \to re \to mi \to sol \to la \to do,$$

vemos que se forma una estrella simétrica. No ocurre lo mismo si lo hacemos, por ejemplo, con las seis primeras notas del ciclo de quintas. Otros ejemplos de esta propiedad de simetría se dan para siete y para doce notas. Nos referiremos a esto más adelante (en 6.4).

[5] Ver https://ar.pinterest.com/pin/349099408612247123/ , https://www.youtube.com/watch?v=KRugV31Km18&ab_channel=jorgeembon

5.4. Escalas de Tolomeo y Zarlino

Siete Notas				
2/3	Fa_{-1}	corrección	2x(2/3)=	4/3
2/3 . 3/2 = 1	Do_1			1
3/2 . 1 = 3/2	Sol_1			3/2
3/2 . 3/2 = 9/4	Re_2	corrección	(1/2)x(9/4)=	9/8
5/3	La_2			5/3
5/3 . 3/2= 5/2	Mi_3	corrección	(1/2)x 5/2=	5/4
5/2 . 3/2= 15/4	Si_3	corrección	(1/2)x(15/4)=	15/8

Escala de Tolomeo

1< 9/8 < 5/4 < 4/3 < 3/2 < 5/3 < 15/8 < 2

Do_1	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do_2

Figura 5.11: Escala de Tolomeo

En el siglo II, Tolomeo (ver 4.2) introduce una "escala natural", que es una modificación de la escala de Pitágoras. Vemos en la Figura 5.11 que, salvo al pasar de *re* a *la*, las notas se generan por quintas. Sin embargo, el intervalo $[re, la]$ tiene longitud $\frac{5}{3} \div \frac{9}{8} = \frac{40}{27} = 1,481...$ que es "casi" $\frac{3}{2}$. Al pasar de *la* a *mi* por una quinta se obtiene $\frac{5}{2}$, que es el quinto armónico de *do* bajado una octava (ver 3.1.1). Corrigiendo a la primer octava, obtenemos para *mi* el valor $\frac{5}{4}$, que ya Arquitas había anticipado para la frecuencia de la tercera (ver 4.1.2).

Observemos las diferencias de las escalas en la Figura 5.12.

Pitágoras	Tolomeo
Primera: do = 1	Primera: do = 1
Segunda: re = 9/8	Segunda: re = 9/8
Tercera: mi = 81/64	Tercera: mi = 5/4
Cuarta: fa = 4/3	Cuarta: fa = 4/3
Quinta: sol = 3/2	Quinta: sol = 3/2
Sexta: la = 27/16	Sexta: la = 5/3
Séptima: si = 243/128	Séptima: si = 15/8

Figura 5.12: Comparación de escalas

Basándose en la escala natural de Tolomeo, Zarlino en el Renacimiento construye una teoría de la música donde las escalas se fundamentan en proporciones matemáticas pero también en consideraciones acústicas, como presintiendo la presencia de los armónicos. Define el *temperamento justo*, o "justa entonación", afinación que considera importante la consonancia de la tercera (mayor), que es justamente el intervalo entre el cuarto y quinto armónicos. En efecto, si observamos los armónicos del do_1, vemos que el cuarto es do_3 (un *do* dos octavas más arriba que el original) y que el quinto es un mi_3 dos octavas más arriba que el de la escala original.[6] Y es claro que entre do_3 y mi_3 hay una tercera.

En el sistema de Pitágoras (ver 5.2) teníamos las quintas puras, que son así llamadas porque provienen de un armónico, el tercero en este caso. También mencionamos allí que la tercera $do - mi$, que es de longitud $\frac{81}{64}$, no es pura.

Por otra parte, en el sistema de justa entonación se reduce el intervalo de tercera a $\frac{80}{64} = \frac{5}{4}$, que es, sí, una tercera **pura** (es el quinto armónico transportado dos octavas más abajo) pero formada por dos tonos distintos: $\frac{9}{8}$ y $\frac{10}{9}$. Calculando la longitud del intervalo entre la tercera mayor pura y el ditono, que es $\frac{81}{64} \div \frac{80}{64}$, se obtiene el valor $\frac{81}{80}$, llamado *coma sintónica* (cs en la Figura 5.13).

Para conseguir la reducción de las terceras, partiendo del círculo de quintas pitagórico se toma una quinta de cada cuatro y se reduce precisamente en una coma sintónica. Esas quintas reducidas se llaman quintas *sintónicas* (en puntos rojos en la Figura 5.13) y en lugar de $\frac{3}{2}$ miden $\frac{3}{2} \div \frac{81}{80} = \frac{40}{27}$.

En el ciclo de doce quintas, al reducir tres de ellas, se aumenta la "quinta del lobo" (que se había disminuido en una coma pitagórica con el fin de cerrar el ciclo). Pero no se obtiene una quinta justa, ya que tres comas sintónicas suman más que la coma pitagórica, que es $(\frac{3}{2})^{12} \div 2^7$.

Como vemos, la afinación de justa entonación de Zarlino se hace tomando algunas quintas naturales (las pitagóricas) y otras sintónicas. Se tiene por ejemplo la quinta natural $sol - re$ y la quinta sintónica $re - la$.

Analicemos cuales son los acordes principales que se forman a partir de esta escala. Los mayores y menores, como se ve en el capítulo de teoría musical, están formados por una nota, su tercera (mayor o menor) y su quinta. Como aquí la tercera (dada a partir del armónico 5) y la quinta (definida a partir del 3^{er} armónico) son puras, los acordes también los son (salvo ligeras diferencias debido a las correcciones de las quintas); por ejemplo $do - mi - sol$, $fa - la - do$ y $sol - si - re$ son puros. Estos se simbolizan abreviadamente $4 : 5 : 6$, porque dividiendo por 4 nos da 1, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, que

[6]Ver la Figura 3.9 en el Capítulo 3.

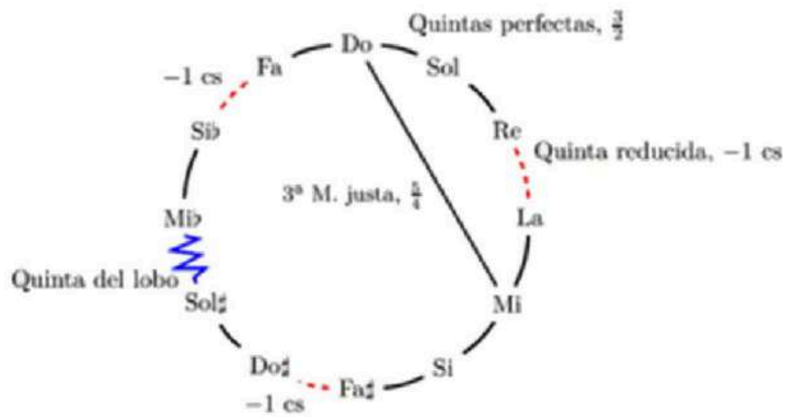


Figura 5.13: Dos tipos de quintas

son las frecuencias relativas de las notas del acorde (considerando la tónica igual a 1).

Hay varias formas de intercalar notas en la escala diatónica para formar la escala cromática de justa entonación.

Veamos una manera, que parece caprichosa pero que seguramente fue obtenida de acuerdo a la experiencia de los músicos en las afinaciones más convenientes.

El $re\sharp$ lo obtenemos bajando la quinta en una tercera:

$$\frac{3}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{6}{5}.$$

El $sol\sharp$ es la tercera de la tercera:

$$\frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{5^2}{2^4}.$$

Luego, a partir del $re\sharp$ subimos una quinta:

$$\frac{2 \cdot 3}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}$$

y obtenemos $la\sharp$.

El $do\sharp$ resulta de $sol\sharp$ disminuyendo una quinta y el $fa\sharp$ del $do\sharp$ disminuyendo también una quinta y multiplicando por 2 para estar en la octava correcta. Los valores se ven en la tabla de la Figura 5.14.

DO	DO ♯	RE	RE ♯	MI	FA	FA ♯	SOL	SOL ♯	LA	LA ♯	SI
1	$\frac{5^2}{3.2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3.2}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{5^2}{3^2.2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5^2}{2^4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3.5}{2^3}$

Figura 5.14: Escala cromática de justa entonación

Una observación: si tomamos una nota y calculamos sucesivamente terceras, se "cierra un ciclo" *aproximadamente*; por ejemplo, si calculamos la frecuencia del *do* más agudo en $do - mi - sol\sharp - do$, resulta [7]

$$\frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{125}{64} = 1,953 \neq 2.$$

Aún admitiendo esa aproximación, necesitaríamos cuatro ciclos de terceras para generar todas las notas: $do - mi - sol\sharp - do,\ \ re - fa\sharp - la\sharp - re,$ $fa - la - do\sharp - fa,\ \ si - re\sharp - sol - si.$

5.5. Escala de Domínguez Berrueta

Un ejemplo de escala basada en consideraciones acústicas es la dada por el español Domínguez Berrueta en su obra "Teoría física de la música" de 1927. Mientras se generalizaba el uso de la escala temperada, Domínguez Berrueta, apoyándose en las ideas de otros teóricos de la música como Rameau o Helmholtz, la criticaba enfáticamente. Como Pitágoras, Tolomeo y Zarlino, da prioridad a una gama basada en los intervalos consonantes, consonancia que proviene de los armónicos que intervienen: la quinta de Pitágoras, la tercera de Tolomeo y Zarlino. Siente que la evolución de la armonía tiene que ver con incluir cada vez más armónicos. Apoya las ideas de Euler, quien propuso una "gama matemática" de la música que coincide en las notas diatónicas

[7]Ver [15], Chapter 2.

con la de Zarlino y se basa en los números primos (armónicos) 2, 3 y 5, aunque admite que el armónico 7 también podría estar presente en una gama musical.

Domínguez Berrueta toma en consideración los armónicos del 2 al 10, aunque en realidad estos se basan sólo en el 2°, 3°, 5° y 7°, que corresponden a los números primos entre 2 y 10. Considera los intervalos puros y sus longitudes: 2 (la octava), $\frac{3}{2}$ (la quinta), $\frac{4}{3}$ (la cuarta), $\frac{5}{4}$ (la tercera), $\frac{6}{5}$ (tercera menor), ...

Define entonces la escala que se ve en la Figura 5.15, que tiene diecisiete notas, ya que se consideran diferentes sostenidos y bemoles. También construyó un órgano afinado en esa escala.

do	*do* ♯	*re* ♭	*re*	*re* ♯	*mi* ♭	*mi*	*sol* ♯	*fa*	*fa* ♯	*sol* ♭	*sol*	*la* ♭	*la*	*la* ♯	*si* ♭	*si*
1	$\frac{21}{20}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{14}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{15}{8}$

Figura 5.15: Escala DB

En 3.1.2 mostramos los armónicos de *do*, entre los cuales estaba el séptimo, $si\flat$. En realidad es una aproximación, ya que el piano se rige por la escala temperada que no cuadra muy bien con los armónicos. ¿Cuál debería ser el valor de la frecuencia relativa del séptimo armónico llevado a la octava? Si la frecuencia inicial (de *do*) es 1, la del armónico es 7 y para que caiga dentro de la octava $[1, 2]$ debemos bajarla dos octavas dividiendo por 4, luego, es $\frac{7}{4} = 1,75$. Como $si\flat \approx la\sharp = 9/5 = 1,8$ en la escala tolemaica, lo que hace Domínguez Berrueta es "bifurcar" las notas enarmónicas y toma: $la\sharp = \frac{7}{4}$ y $si\flat = \frac{9}{5}$.

Considerando que el *do* tiene frecuencia $260,7407$, relativa a un *la* de 440 Hz, si calculamos el armónico 7 de *do*, obtenemos: $1825,1849$, que reducido a la primera octava nos da $456,2962$. Esta frecuencia está próxima a $si\flat \approx la\sharp = 466,1638$ de la escala temperada, pero no coincide con esta.

Observemos que en el caso del séptimo armónico se da casi la coincidencia entre el intervalo de séptima y el séptimo armónico, lo que no ocurre con el tercero (corresponde al intervalo de quinta) y al quinto (que corresponde a un intervalo de tercera).

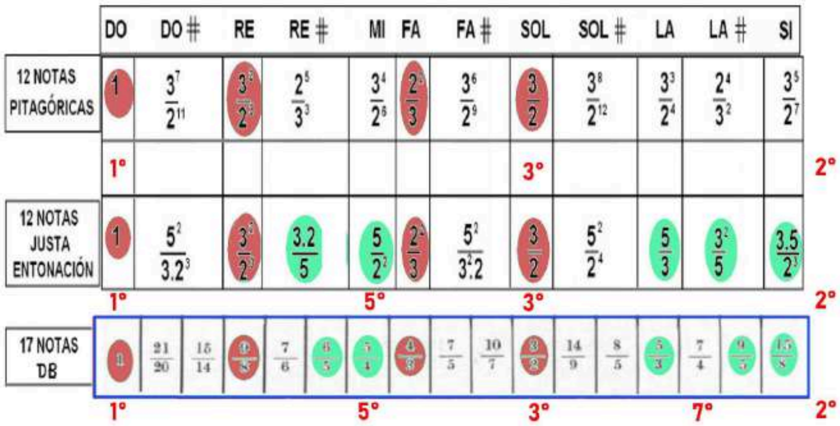


Figura 5.16: Pitágoras, Zarlino, D.B.

En cuanto a los acordes asociados a esta escala, dado que (sin tener en cuenta las octavas) depende de los armónicos $3, 5, 7$, es lógico pensar que debería generalizarse la idea de lo que es un acorde mayor. En el sistema de justa entonación, los acordes mayores se forman con una nota como tónica más su tercera y su quinta. En el sistema de Domínguez Berrueta donde hay tres armónicos que definen la escala debería entonces haber cuatro notas en cada acorde mayor: la tónica, su tercera, su quinta y su séptima (las tres reducidas a la octava de la tónica). Por ejemplo: $do - mi - sol - la\sharp$ es do mayor y $fa - do - la - re\sharp$ es fa mayor.

En la Figura 5.16 aparecen marcadas las coincidencias entre las tres escalas cromáticas estudiadas: en rosa, con la pitagórica, en turquesa, con la de justa entonación.

5.6. Otras escalas

En los siglos XVI y XVII y aún en el siglo XV, se van aceptando nuevas consonancias, como las sextas y hasta las séptimas. Se empiezan a proponer "ajustes" de las distintas versiones de la justa entonación para obtener escalas donde se admitan otras consonancias. El concepto de armonía se amplía, buscándose entonces escalas adecuadas al avance de la teoría musical y de las prácticas de ejecutantes y compositores, a veces alejadas de la teoría. En general, se "tempera" la escala agregando o quitando pequeñas diferencias de frecuencias a las quintas. En la elección de la escala es importante cómo suenen en ella los acordes de las tonalidades más usadas, los acordes mayores y menores, qué acordes son justos, etc.

Recordemos que hay dos problemas en el ciclo de quintas, uno es la coma pitagórica:

$$\frac{(\frac{3}{2})^{12}}{2^7} = 1,01364375,$$

proveniente del hecho de que doce quintas son más que siete octavas, por lo que el ciclo de quintas no cierra. Eso lleva a considerar una de las doce quintas un poco más chica para que el ciclo cierre. Esa es la llamada "quinta del lobo".

El otro problema aparece con la modificación que introduce Tolomeo, que produce para la tercera mayor de *do*, que es *mi*, el valor $\frac{5}{4}$ en lugar del $\frac{81}{64}$ pitagórico (mayor que $\frac{5}{4}$). Esto produce la llamada coma sintónica (ver 5.4).

$$\frac{\frac{81}{64}}{\frac{5}{4}} = \frac{81}{80} = 1,0125.$$

5.6.1. Temperamentos mesotónicos

Hay diversas variantes de lo que se llama *temperamento mesotónico*, aunque el clásico es el de "un cuarto de coma" que definió Pietro Aron en el siglo XVI. [8]

Como Zarlino, Aron intentaba resolver el problema de la tercera pitagórica que no era pura. Consideró también que cuatro quintas hacen una tercera, ya que, como dijimos, por ejemplo de *do* a *mi* se llega recorriendo las cuatro quintas $do-sol$, $sol-re$, $re-la$ y $la-mi$. Entonces repartió la coma sintónica **uniformemente** entre las quintas, bajando cada quinta en un cuarto de coma. Entonces todas las quintas resultan iguales, salvo la del lobo. Pero en las tonalidades más usadas por los músicos no había problema. En particular, las terceras quedan compuestas de dos tonos iguales (en la justa entonación había dos tonos distintos), tomando aquí un "tono promedio" o "tono del medio", de ahí el nombre de *temperamento mesotónico*.

[8]Ver 4.3.

Observemos aquí que "bajar una quinta en un cuarto de coma" significa, como hemos dicho, que operamos con las longitudes de los intervalos: el de quinta y el de una coma. Una quinta tiene longitud $\frac{3}{2}$ y la coma $\frac{81}{80}$.

Por otra parte, un intervalo de "un cuarto de coma" debe tener una longitud L tal que repitiéndolo cuatro veces me dé la coma, o sea:

$L.L.L.L = L^4 = \frac{81}{80}$ (porque agregar intervalos es multiplicar longitudes). Luego:

$$L = \sqrt[4]{\frac{81}{80}}.$$

Por lo tanto, la operación que realiza Aron es tomar quintas "corregidas" de longitud

$$\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt[4]{\frac{81}{80}}}.$$

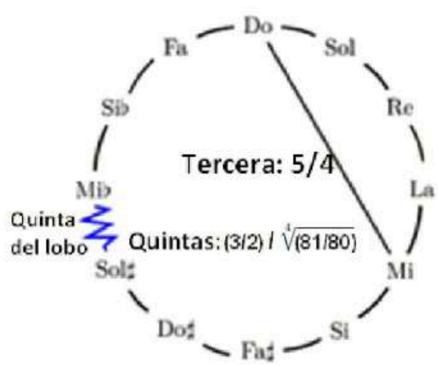


Figura 5.17: Cuarto de coma

También William Holder (1614-1697) intenta temperar el sistema pitagórico basándose en la espiral de quintas ampliada hasta 53 de ellas, que equivalen aproximadamente a 31 octavas. Define en primer lugar lo que luego se llamó "coma de Holder" que es un intervalo pequeño de longitud

$$\sqrt[53]{2}.$$

Luego repitiendo 53 veces la coma se obtiene la octava que es 2.

Define también un tono T como el intervalo formado por 9 comas sucesivas, es decir que

$$T = (\sqrt[53]{2})^9$$

y dos tipos de semitonos: uno de 5 y otro de 4 comas.

Si nos quedamos con las notas cromáticas más habituales, la distribución que se obtiene es prácticamente la misma que en la afinación pitagórica. Los tonos son iguales (no hay tono grande y tono pequeño como en la justa entonación). La quinta tiene 31 comas y es sorprendentemente próxima a la quinta pura de Pitágoras.

Francisco Salinas describe en su libro "De Musica Libri Septem" (1577) un temperamento por el cual logra dividir una tercera justa en dos tonos iguales. Considera que, siendo la tercera $\frac{5}{4}$, tiene que cumplirse, para que esté compuesta de dos tonos iguales T:

$$T^2 = \tfrac{5}{4}, \text{ de donde } T = \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \tfrac{\sqrt{5}}{2}.$$

Además, como la octava tiene 5 tonos y 2 semitonos, se tiene que:

$$T^5 \times S^2 = 2, \text{ de donde resulta } S = \tfrac{8}{5\sqrt[4]{5}}.$$

Con esto, partiendo del *do* y agregando un tono o un semitono pueden construirse las demás notas de la escala.

5.6.2. Buenos temperamentos

Durante el período barroco surgieron los "buenos temperamentos" que trataban de suprimir la desafinada quinta del lobo a costa de repartir la coma pitagórica irregularmente entre las quintas, provocando ligeras desafinaciones. Estos métodos en los que conviven distintos tipos de quintas, hacen que las tonalidades tengan distinto "color" según de cuál de estas se trate, como ocurría en las escalas naturales y como no ocurre en la de temperamento igual. A diferencia de los mesotónicos, estos temperamentos son cíclicos, es decir, se cierran en sí mismos.

Durante el siglo XVII era común que el ejecutante de un instrumento fuera su propio afinador, lo que probablemente produjo una variedad muy grande de maneras de temperar. Se sabe que Johann Sebastian Bach, uno de los más grandes compositores de la historia de la humanidad, ganaba algún dinero como afinador, fuera de sus magros sueldos de maestro de capilla. Algunos le atribuyen haber sido de los primeros en usar la escala de temperamento igual en su imponente obra "El clave bien temperado", constituída por una fuga y un preludio en cada una de las doce tonalidades (menores y mayores). Sin embargo, es más probable que haya usado algunos de estos buenos temperamentos para poder expresar mejor sus ideas musicales en cada tonalidad.

Mencionamos aquí una curiosa teoría acerca de como definió Bach la escala en cuestión.

Vemos en la Figura 5.18 la tapa de su obra "El clave bien temperado".

Figura 5.18: *El clave bien temperado*

En su artículo [28] el Dr. Bradley Lehman afirma que Bach puso en los trazos curvos de la ornamentación de la tapa de dicha obra una clave para descifrar cuál fue exactamente la afinación que usó. Esta clave estaría dada por el dibujo, que puede verse en la Figura 5.19, donde se ven además las anotaciones del autor del artículo, donde usa la notación sajona de las notas (ver 1.1).

Figura 5.19: Afinación de Bach

El sistema Werckmeister IV (1691) (ver 4.5) es uno de estos buenos temperamentos. Este sistema se caracteriza por reducir un tercio de coma pitagórica algunas quintas del ciclo, concretamente los 5 intervalos $si\flat - fa$, $do - sol$, $re - la$, $mi - si$ y $fa\sharp - do\sharp$; además, las 2 quintas $sol\sharp - re\sharp$ y

$re\sharp - la\sharp$ son agrandadas en un tercio de coma. Luego la reducción global es de una coma pitagórica, y el sistema se cierra. Las quintas $fa - do$, $sol - re$ y $la - mi$ son justas.

Otro ejemplo es el sistema Kirnberger III (1779) (ver 4.5), ya de la época del clasicismo musical, ideado por Johann Philipp Kirnberger, un alumno de Johann Sebastian Bach. En este sistema, las quintas $do-sol$, $sol-re$, $re-la$ y $la - mi$ son reducidas un cuarto de coma sintónica, como en el mesotónico clásico, pero se reduce además la quinta $do\sharp - fa\sharp$ para que se cierre el ciclo. Las demás quintas son justas.

5.7. La escala de temperamento igual

Las escalas que hemos estado viendo están basadas, de un modo u otro, en el ciclo de quintas que surgió con Pitágoras. Algunas tienen dos tipos de tonos o de semitonos, quintas diferentes de acuerdo a la frecuencia, algunas puras, otras "retocadas". Son maneras de definir las diferentes notas dentro de la octava.

Sin embargo, podríamos "cortar por lo sano" y, aceptando que el intervalo de octava es la consonancia básica y que en él estarán contenidas las otras notas, ¿por qué no dividir la octava en subintervalos iguales?

Esa es la característica del sistema de temperamento igual: la división de la octava en doce intervalos (de semitono) iguales. Por lo tanto, todas las tonalidades son equivalentes: se puede transportar de una a otra sin problemas. Sin embargo, si vamos a ser exactos, en este sistema **todos los intervalos** excepto la octava, están desafinados, ya que no coinciden con la afinación natural.

Siguiendo a Euler diremos que *...las diferencias entre esos tonos no son iguales entre ellas y que algunas son más grandes y otras más pequeñas; es también eso lo que la verdadera armonía exige. Pero, como la desigualdad no es considerable, se mira comúnmente todas las diferencias como iguales y se llama al salto de cada tono al siguiente un semitono; es así que se dice que la octava está dividida en 12 semitonos. Actualmente muchos músicos también las consideran iguales, aunque esto sea contrario a los principios de la armonía.*[9]

Demos un ejemplo. Supongamos que un violinista y un pianista interpretan juntos una obra. Al principio, el violinista toma el *la* del piano para

[9] Ver [17], carta VII.

afinar su instrumento. Pero las demás notas las afina “a oído” y, por lo tanto, estarán en la escala natural asociada a los armónicos, mientras que en el piano, la afinación está fija, con semitonos iguales. Luego, se producirán ligeros batidos o disonancias entre las notas de uno y otro instrumento.

El príncipe Chu Tsai Yu (o Zhu Zaiyu) de la dinastía Ming, matemático, físico y músico, propuso en 1584 algunos dicen que por primera vez, la idea de esta escala musical. Sin embargo, el español Bartolomé Ramos de Pareja ya había propuesto en su obra *De musica practica* (1482) un sistema que de alguna manera contiene en una octava doce semitonos iguales.[10]

A pesar de su antigüedad, y debido principalmente a la falta de métodos de afinación precisos, fue universalmente aceptada recién en el siglo XIX. Esta afinación es, con ligeras variantes, la misma que se usa hoy en día.

Veamos cómo se construye la escala.

Supongamos una escala cromática, cuyas frecuencias son:

$$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}$$

y sea s la longitud del intervalo entre cada nota y la siguiente (que, suponemos, no varía), es decir:

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} = \frac{f_4}{f_3} = ... = \frac{f_{12}}{f_{11}} = s.$$

Se tiene entonces que

$$\frac{f_1}{f_0} \cdot \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{f_3}{f_2} \cdot \frac{f_4}{f_3} \cdot ... \cdot \frac{f_{12}}{f_{11}} = s^{12}.$$

Simplificando y teniendo en cuenta que el intervalo $f_0 - f_{12}$ es una octava, es claro que $\frac{f_{12}}{f_0} = s^{12} = 2$, de donde:

$$s = \sqrt[12]{2}.$$

Si en lugar de 12 fuera r el número de notas, sería: $s = \sqrt[r]{2}$.

Entonces las notas de la escala cromática, relativamente a *do*, tienen las frecuencias que se ven en la Figura 5.20.

La escala diatónica, que es la escala de *do* mayor, es entonces:

$$1 < \sqrt[12]{2^2} < \sqrt[12]{2^4} < \sqrt[12]{2^5} < \sqrt[12]{2^7} < \sqrt[12]{2^9} < \sqrt[12]{2^{11}} < 2.$$

[10] Ver 4.3 y 6.5.3.

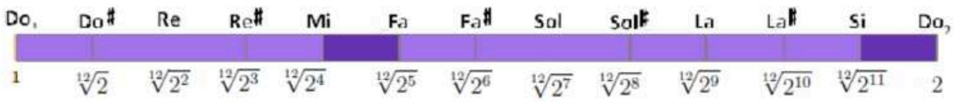


Figura 5.20: Escala cromática de temperamento igual

En cuanto al problema de transponer una melodía de una tonalidad a otra, es claro que no va a haber cambios en los intervalos entre notas, que serán, empezando por cualquier nota, la misma sucesión, por ejemplo los intervalos de la escala mayor $T-T-S-T-T-T-S$, que es igual a la de *do* mayor.

5.8. Comparación de escalas

Hemos visto sistemas cuya estructura armónica se basa en la naturaleza misma del sonido, es decir, se consideran "consonantes" o que "suenan bien juntas" las notas extremas de un intervalo donde aparece una nota fundamental y una octava baja de alguno de sus armónicos. En la escala pitagórica intervienen los armónicos 2 y 3, en la de justa entonación aparece además el 5 y hemos visto también la de Domínguez Berrueta, donde se agrega el 7. Son escalas "naturales".

Según Euler en sus cartas a una princesa alemana: *... los principios de la Armonía se reducen en último término a números, [...] el número* 2 *produce sólo octavas [...]. Después el número* 3 *produce los tonos que difieren de los anteriores en una quinta. Pero introduzcamos también el número* 5 *[...] es llamado una tercera mayor y produce una consonancia muy agradable [...] No admitiendo más que estos tonos, se está en condiciones de componer muy bellas melodías, cuya belleza se fundamenta únicamente en la simplicidad de los números que producen estos tonos. Si se quisiera también introducir el número* 7*, el número de tonos de una octava sería mayor, y se llevaría toda la música a un grado más alto. Pero aquí la Matemática abandona la armonía a la Música.*[11]

Las otras escalas (mesotónicas, buenos temperamentos, cíclicas,...) se muestran "buenas"en ciertas tonalidades pero en otras no, en general cada tonalidad tiene un "color" distinto y es difícil pasar de una a otra. Cada

[11] Ver [17], final de Lettre VII.

sistema tiene sus logros: por ejemplo muchos acordes puros o bien que se cierre el ciclo de quintas.

Las escalas basadas en los armónicos tienen la ventaja evidente de que la consonancia de los intervalos más importantes a la armonía, como las quintas y las terceras, es natural, porque proviene de la composición intrínseca de los sonidos. Además, todas las frecuencias y los intervalos entre ellas se expresan en números racionales, productos de potencias de números primos, propiedad que se pierde si establecemos una gama en la que todos los intervalos entre nota y nota son iguales, como es la escala de temperamento igual. En este caso todas las frecuencias son números irracionales.

Sin embargo, las escalas naturales tienen un inconveniente. No es posible transponer exactamente una melodía de una tonalidad a otra, algo muy frecuente entre los músicos. Es decir, si queremos subir o bajar una sucesión de notas en una medida que no sea una octava (por ejemplo, una quinta), no se conservan los intervalos originales entre las notas de la sucesión.

Ejemplo: Consideremos la escala mayor de *do* en la afinación de temperamento justo:

$$1 < \frac{9}{8} < \frac{5}{4} < \frac{4}{3} < \frac{3}{2} < \frac{5}{3} < \frac{15}{8} < 2.$$

Los intervalos entre las notas son los siguientes:

$$\frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{16}{15}.$$

La escala de *sol* mayor es

$$sol_1, la, si, do, re, mi, fa^\sharp, sol_2.$$

Como se puede ver en la sección 5.4, el $fa^\sharp$ es $\frac{5^2}{2\cdot 3^2}$.

Veamos qué pasa en el cambio de tonalidad de *do* mayor a *sol* mayor.

La escala mayor de *sol* es:

$$\frac{3}{2} < \frac{5}{3} < \frac{15}{8} < 2 < \frac{9}{4} < \frac{5}{2} < \frac{5^2}{3^2} < 3.$$

Si calculamos los intervalos entre las notas, resulta, sucesivamente:

$$\frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}, \frac{27}{25}.$$

Podemos ver entonces que los intervalos entre nota y nota (tonos o semitonos) no coinciden con los de la escala de *do*.

En cambio en la escala de temperamento igual todas las tonalidades funcionan igualmente bien (o "igualmente mal" como dice Benson en [7], 5.15, ya que ningún intervalo es puro).

El poder conciliar en una misma gama la armonía natural con la posibilidad de transponer melodías ha sido una preocupación de muchísimos músicos y teóricos de la música a lo largo de la historia.

Con los medios actualmente disponibles, como los sintetizadores, podrían lograrse cosas sorprendentes. Por ejemplo, se podría re-afinar casi cada nota, por lo que no haría falta el temperamento igual. Un ejemplo de excepción a este uso es el compositor Wendy Carlos, que ha escrito música en diferentes escalas: usa la justa entonación en "La bella y la bestia" y escalas mesotónicas en otras composiciones.

Veamos un dato curioso; el especialista en acústica William Sethares ha ideado un original dispositivo llamado "Adaptun" que permite a un teclado electrónico adaptar su afinación nota por nota para encontrar los intervalos "óptimos" en cualquier momento de una interpretación musical. Podemos ver detalles en [43].

Capítulo 6

Las gamas

En el capítulo anterior hemos dado "un paseo" por la historia de las escalas musicales, que serán nuestros ejemplos motivadores de la teoría general que nos proponemos describir. Esta teoría englobará a todas aquellas que contemplan la estructura del sonido: las llamadas escalas "naturales" basadas en los armónicos. Como hemos dicho, lo que todas las escalas tienen en común (aún la de temperamento igual) es que están basadas en la octava, que es, además, indiscutiblemente, el intervalo más consonante.

En cada escala natural hay diferentes armónicos que generan las frecuencias de las notas, y, de acuerdo a eso, tonalidades, consonancias y acordes básicos.

Recapitulando un poco, veamos la escala pitagórica. Considerando la frecuencia fundamental como 1, las frecuencias de la escala pitagórica son todas de la forma: $2^m \cdot 3^n$, con m y n enteros. En esta escala se consideran entonces como consonancias básicas, además de la octava, la quinta (y su complementaria, la cuarta). Para cada nota, su acorde básico contiene su tercer armónico (o su representante en la octava correspondiente).

En cuanto a la escala de Tolomeo - Zarlino, también llamada "física" o de justa entonación, la única modificación respecto de la de Pitágoras es esencialmente agregar el quinto armónico. Tendríamos que incluir entonces todas las frecuencias de la forma: $2^q \cdot 5^r$ y todas las combinaciones posibles de unas con otras. En general, las frecuencias serán de la forma: $2^m \cdot 3^n \cdot 5^r$. En consecuencia, las consonancias básicas son la quinta y la tercera y los acordes son formados por la tónica, la tercera y la quinta. Una variante de la de justa entonación es la gama natural definida por Ramos de Pareja que mencionamos en 5.7.

ESCALA	ACORDE MAYOR (intervalos)	ACORDE MAYOR (armónicos)
Pitagórica	Tónica - Quinta	1° - 3°
Justa Entonación	Tónica – Quinta – Tercera	1° - 3° - 5°
Domínguez Berrueta	Tónica – Quinta – Tercera - Séptima	1° - 3° - 5°- 7°
Temperamento igual	Tónica – Quinta – Tercera	1° - ? - ?

Figura 6.1: Escalas y acordes

Luego vimos la escala de Domínguez Berrueta, como ejemplo de escala generada por los armónicos 3, 5 y 7, es decir que sus frecuencias son productos de potencias de 2, 3 , 5 y 7. Se agrega a las consonancias anteriores la séptima, que coincide (casi) con el séptimo armónico. Los acordes tendrán cuatro notas, incluyendo la séptima.

Podemos ver un resumen de lo que decimos en el cuadro de la Figura 6.1.

¿Qué otros armónicos podríamos admitir? Es fácil ver que sólo importan en realidad los armónicos de índice **primo**, ya que los demás se obtienen a partir de estos (ver 2.0.1). Por ejemplo, el armónico 6 se obtiene del 2 y el 3.

Dado un número natural n, como vimos también en 2.0.1, existe un número impar q único tal que n es producto de una potencia de 2 por q. Se dice que n *representa* a q. Esto es importante porque, si n es una frecuencia, sólo interesa el impar al que representa n, ya que la potencia de 2 sólo determina la octava de n.

Con todo esto en mente, demos ahora un "salto al vacío" y comencemos a imaginar cómo crear un conjunto de notas o gama musical (que podrá ser infinita) de la cual extraer escalas finitas y estudiar en general los conceptos en los que se fundamenta la armonía musical: consonancia, tonalidades, acordes básicos,...

6.1. Las octavas

En primer lugar observemos en la Figura 6.2 cómo se distribuyen las frecuencias de las octavas en la recta numérica en comparación con la sim-

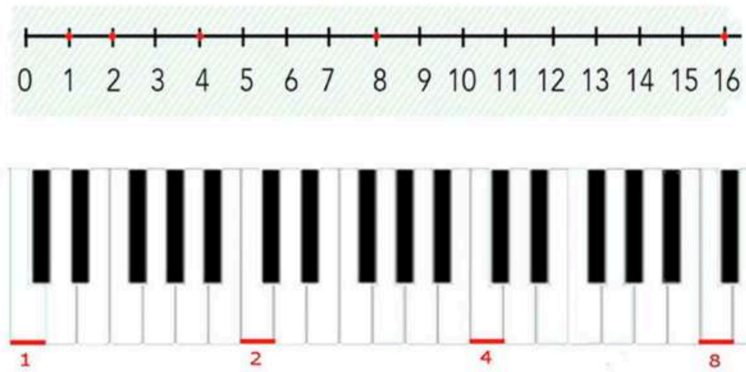


Figura 6.2: Octavas

plicidad y regularidad de la distribución de las octavas en el piano.

En vista de esto, nos preguntamos si hay algún "conversor" que me lleve de la recta numérica a las octavas todas iguales en longitud. La respuesta está en la Figura 6.3.[1]

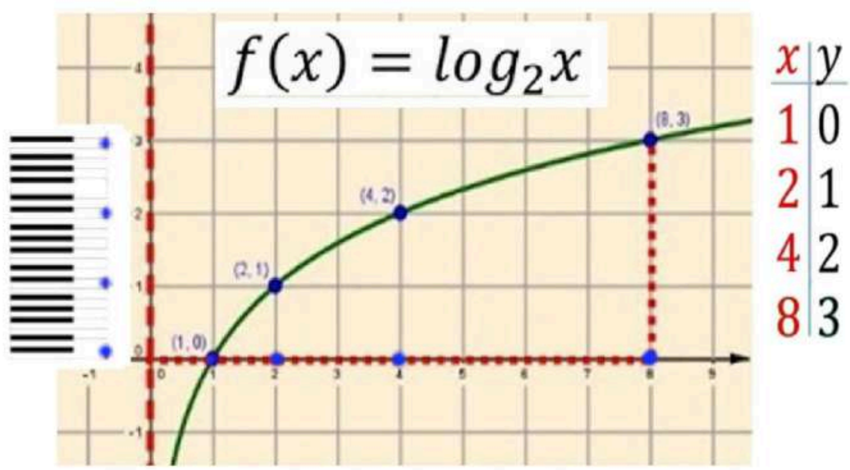


Figura 6.3: Función $\log_2$

¿Qué transforma los y en x? Esto es lo que pasa en la tabla:

$$2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, \ldots$$

[1]Ver funciones exponenciales y logarítmicas en el Capítulo 2.

Es decir que $2^y = x$.

¿Qué transforma las x en y? (esto es lo que en realidad nos interesa). Es justamente la función logaritmo en base 2 (ver 2.2.4). Dado x, $y = \log_2(x)$ es un número que cumple: $2^y = x$.

Comprobemos:

$$\begin{aligned} \log_2(1) &= 0, \quad \textit{porque} \quad 2^0 = 1, \\ \log_2(2) &= 1, \quad \textit{porque} \quad 2^1 = 2, \\ \log_2(4) &= 2, \quad \textit{porque} \quad 2^2 = 4, \ldots \end{aligned}$$

Usaremos de aquí en adelante las propiedades de la función logaritmo, que pueden verse en 2.2.4.

Con la trasformación de la función $\log_2$ logramos pasar a tener las frecuencias ubicadas en "prolijas" octavas.

Ahora queremos limitarnos a trabajar sólo con frecuencias de la primera octava, o sea, la octava que está entre las frecuencias 1 y 2, según se ve en la Figura 6.4. Es decir, queremos construir nuestras notas en la primera octava y después replicarlas en las demás.

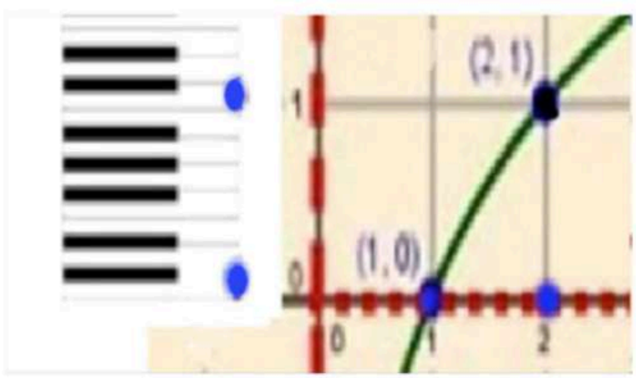


Figura 6.4: Función $\log_2$ entre 1 y 2

Analicemos la siguiente afirmación:

"que una frecuencia f esté en la primera octava equivale a que su logaritmo, $\log_2 f$, esté entre 0 y 1",

es decir:

$$2^0 \leq f < 2^1 \text{ si y sólo si } 0 \leq \log_2 f < 1.$$

Esto es verdad, porque calculando $\log_2$ en la primera expresión llegamos a la segunda, ya que la función $\log_2$ conserva desigualdades y además $\log_2(2^0) = 0$, $\log_2(2^1) = 1$. Recíprocamente, elevando 2 a las potencias de la segunda expresión tenemos la primera, porque $2^{\log_2 f} = f$.

En general, razonando de la misma manera tenemos que: para todo número natural n:

$$2^n \leq f < 2^{n+1} \text{ si y sólo si } n \leq \log_2 f < n+1. \quad (*)$$

Tomemos ahora una frecuencia f cualquiera en la octava $[2^n, 2^{n+1}]$ y calculemos, usando logaritmos, la frequencia f' asociada a ella que está en la primera octava. Es decir que será $f' = 2^t \cdot f$, donde t puede ser positivo o negativo (ver 2.0.5).

Por $(*)$, restando n:

$$0 \leq \log_2 f - n < 1,$$

luego tenemos que $\log_2 f$ será n más el número $\log_2 f - n$ que está entre 0 y 1. Luego (ver 2.0.5):

n es la **parte entera** y $\log_2 f - n$ la **parte fraccionaria** de $\log_2 f$,

con lo que hemos descubierto que:

El logaritmo de la reducción a la primera octava f' de una frecuencia f es la parte fraccionaria del logaritmo de f.

En efecto, al número $\log_2 f - n = F(\log_2 f)$ podemos pensarlo como el logaritmo de una frecuencia f', que es entonces la reducción al primer cuadrante de f. Podemos calcular f', que será

$$f' = 2^{F(\log_2 f)},$$

sin conocer el número n.

6.2. Definiendo una gama

Como dijimos al principio del capítulo, en las escalas que estudiamos juegan los armónicos primos: el 3 en la pitagórica, el 3 y el 5 en la de Tolomeo-Zarlino y el 3, 5 y 7 en la de Domínguez Berrueta, ya que todas las frecuencias son producto de potencias de esos primos multiplicadas por potencias de 2 (que ubican en la octava).

En general, podemos considerar frecuencias

$$f = 2^{n_0} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot ... p_r^{n_r},$$

siendo $p_1, p_2, ..., p_r$ números primos correspondientes a los armónicos, $n_1, ..., n_r$ enteros.

Obtenemos así una infinidad de notas. Fijados los primos $p_1, p_2, ..., p_r$ podremos definir una gama.

Dada una nota de frecuencia f, consideraremos que está representada, como dijimos, por la parte fraccionaria de su $\log_2$.

Observemos que, llamando

$$g = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot ...p_r^{n_r},$$

se tiene

$$\log_2(2^{n_0} \cdot g = n_0 + \log_2 g \text{ y } F(n_0 + \log_2 g) = F(\log_2 g).$$

Luego, podemos olvidarnos del factor 2^{n_0} al calcular la parte fraccionaria.

Tomemos, por ejemplo, $fa\sharp$ en la justa entonación, que es: $\frac{5^2}{2 \cdot 3^2}$, que también podemos escribir: $2^{-1} \cdot 3^{-2} \cdot 5^2$ (ver 2.0.5).

La representación de la nota con la que vamos a trabajar es, según lo dicho,

$$F(\log_2(3^{-2} \cdot 5^2)) = F(-2\log_2 3 + 2\log_2 5).$$

Indicaremos estas representaciones con $\mathbf{g}$, a los que agregamos como supraíndices los números primos básicos de la gama (en este ejemplo 3 y 5) y como subíndices los exponentes de cada uno de ellos (en nuestro caso -2 y 2). Luego, el $fa\sharp$ sería:

$$\mathbf{g}^{3,5}_{(-2),2}.$$

Definimos en general la siguiente expresión:

$$\mathbf{g}^{p_1...p_r}_{n_1...n_r} = F(\log_2 f),$$

que representará la nota correspondiente a la frecuencia f. Estas notas son **números que están en el intervalo** $[0, 1)$, pues son de la forma $F(r)$, para el número real $r = \log_2 f$. Observemos entonces que

$$\mathbf{g}^{p_1...p_r}_{0..,0} = 0, \text{ y que } \mathbf{g}^{p_1...p_r}_{n_1...n_r} \neq 1 \text{ para cualquier } n_1...n_r.$$

Dado un valor $\mathbf{g}^{p_1...p_r}_{n_1...n_r}$, siempre podemos calcular la frecuencia correspondiente (que resultará en la primera octava) tomando su antilogaritmo, o sea, tomando

$$2^{\mathbf{g}^{p_1...p_r}_{n_1...n_r}}.$$

Notación:

Para simplificar la notación a menudo indicaremos la n-upla $(n_1, ..., n_r)$ por N y suprimeremos los supraíndices cuando estén sobreentendidos.

Fijados los primos $\{p_1, p_2, ..., p_r\}$, llamaremos *gama* y la denotaremos $\mathbf{G}^{p_1,p_2,...,p_r}$ al conjunto de todos los números $\mathbf{g}_{n_1...n_r}^{p_1...p_r}$ que se obtienen variando los $n_1, n_2, ..., n_r$ en el conjunto de los enteros:

$$\mathbf{G}^{p_1,p_2,...,p_r} = \{\mathbf{g}_N,\ \text{con } N = (n_1, ..., n_r), n_1, ..., n_r \text{ enteros }\}.$$

Obtenemos así un conjunto infinito de notas en la gama. Pero deberíamos seleccionar de alguna manera un número finito de frecuencias para poder realmente pensar en hacer música con esas notas. Esta selección es lo que suele llamarse *atemperación* o *escala.* Según dijimos, construir una escala significa intercalar un número finito de notas en una octava. Pero...¿Con qué criterio elegir nuestras notas?

Proponemos tres condiciones a cumplir por una atemperación que consideremos "buena":

1) Que el número de notas no sea demasiado grande,

2) que sea "casi" cíclica (con poco error) y

3) que sea *regular*, en el sentido de que haya pocos intervalos distintos (en lo posible uno sólo) entre una nota y la siguiente.

El punto 2 quiere decir que debe ser pequeña la *coma* (error) que se comete al identificar como octava de la tónica a una nota que está a distancia pequeña de dicha octava. El punto 3 significa, por ejemplo, que la escala diatónica pitagórica es más regular que la diatónica tolemaica, porque tiene dos intervalos distintos: $\frac{9}{8}$ (un tono) y $\frac{256}{243}$ (un semitono) frente a la tolemaica que tiene tres: $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$ (tonos) y $\frac{16}{15}$ (semitono). La escala cromática de temperamento igual es regular: todos sus intervalos son semitonos.

Vamos a aceptar estos criterios, si bien no son muy rigurosamente definidos, teniendo en cuenta que estamos pensando en algo tan poco preciso como el concepto de armonía, que puede variar de una época a otra o de un lugar a otro, según la cultura.

6.3. Operando con las notas

Supondremos en esta sección, para fijar ideas, que tenemos sólo tres primos en la gama: p_1, p_2 y p_3. Llamaremos π_i, para $i = 1, 2, 3$ a $\log_2 p_i$. Todo lo que digamos se puede generalizar a un número cualquiera de primos. Sólo vamos a enunciar algunas propiedades que usaremos en este capítulo y el siguiente y que serán demostradas en el Capítulo 8.

Uno de los puntos a señalar es la propiedad de que las notas quedan unívocamente determinadas por las N (ver Corolario 12 de 8.2):

Propiedad 1. *Los valores de las notas están unívocamente determinados:* $\mathbf{g}_N = \mathbf{g}_{N'}$ *si y sólo si* $N = N'$.

Ahora vamos a ver cuales son las notas más "simples".

Consideremos en primer lugar las ternas con una sola componente no nula, o sea, las de la forma $(u, 0, 0)$, o bien $\mathbf{g}_{0,v,0}$, o $\mathbf{g}_{0,0,w}$, con u, v, w enteros.

Las correspondientes notas $\mathbf{g}_{u,0,0}$, $\mathbf{g}_{0,v,0}$ y $\mathbf{g}_{0,0,w}$ serán llamadas *notas básicas*. Se tiene entonces que

$$\mathbf{g}_{u,0,0} = F(u\ \pi_1), \quad \mathbf{g}_{0,v,0} = F(v\ \pi_2), \quad \mathbf{g}_{0,0,w} = F(w\ \pi_3),$$

siendo $\pi_i = \log_2 p_i$. En particular, interesan las notas básicas cuya única componente no nula es 1, que llamaremos *notas coordenadas*, que indicaremos con $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$. Se tiene que

$$\mathbf{g}_i = F(\pi_i),$$

o sea:

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_{1,0,0}, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_{0,1,0}, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_{0,0,1}.$$

Si suponemos que $p_1 = 3$, $p_2 = 5$ y $p_3 = 7$, tenemos que las notas coordenadas son:

$$\mathbf{g}_1 = F(\log_2 3) = F(1,58496) = 0,58496,$$

$$\mathbf{g}_2 = F(\log_2 5) = F(2,32193) = 0,32193,$$

$$\mathbf{g}_3 = F(\log_2 7) = F(2,80735) = 0,80735.$$

Podemos observar asimismo que las notas básicas corresponden a frecuencias donde sólo aparece uno de los armónicos p_i elevado a cierta potencia:

$$\mathbf{g}_{u,0,0} = F(\log_2(p_1^u)) = F(u\ \pi_1),$$

$$\mathbf{g}_{0,v,0} = F(\log_2(p_2^v)) = F(v\ \pi_2),$$

$$\mathbf{g}_{0,0,w} = F(\log_2(p_3^w)) = F(w\ \pi_3).$$

Veremos después cómo descomponer una nota en función de básicas.

En 5.1 vimos que subir o bajar una nota en un intervalo involucra operaciones de "suma" y "resta" correspondientes al producto y cociente de frecuencias. Vamos a presentar ahora esta relación de una manera más elegante.

Definiremos para eso ciertas operaciones en el intervalo $[0, 1)$, que aplicaremos a las notas, ya que todas las gamas $\mathbf{G}^{p_1 \cdots p_r}$ están contenidas en ese intervalo.

La operación que vamos a definir es una "suma truncada": si la suma $a + b$ se pasa de 1, le restamos 1. Por ejemplo, si a=$0,6$ y $b = 0,9$ obtenemos $a + b = 1,5$. Nuestro resultado será $0,5$, que es la parte fraccionaria de $1,5$, o sea $F(1,5)$. [2]

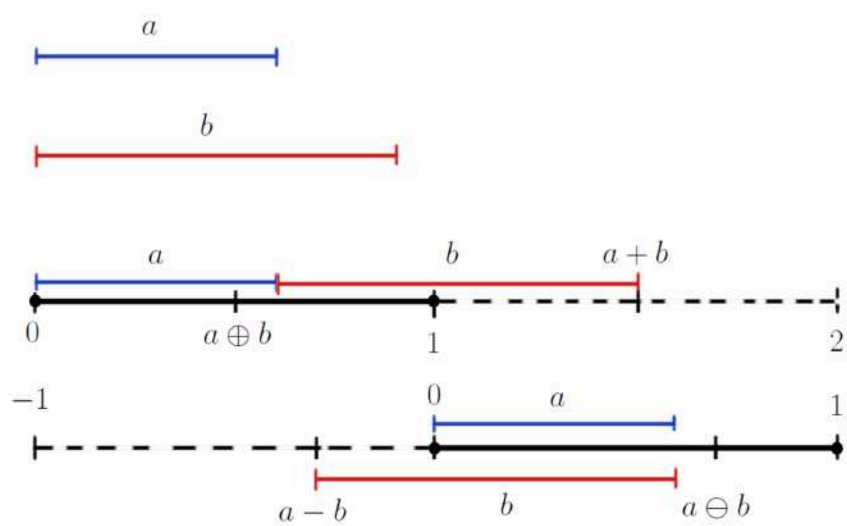


Figura 6.5: Operaciones $\oplus$ y $\ominus$

También tendremos una operación "diferencia truncada" en $[0, 1)$. El resultado de esta operación nos da la diferencia $a - b$, si $b \leq a$, y $a - b + 1$, si $b > a$. Por ejemplo, tomando los mismos a y b, tenemos $a - b = -0,3$, luego la diferencia truncada será $1 - 0,3 = 0,7$, que es $F(-0,3)$.

[2] Ver 2.0.5 en el Capítulo 2.

Podemos ver la representación gráfica de estas operaciones en la Figura 6.5.

Definimos formalmente las operaciones $\oplus$ y $\ominus$, para a y b en $[0,1)$ por:

$$a \oplus b = F(a+b), \quad a \ominus b = F(a-b),$$

siendo F la función parte fraccionaria.

Las operaciones $\oplus$ y $\ominus$ gozan de las siguientes propiedades, que serán demostradas en 8.2.

El siguiente resultado (Lema 13 de 8.2) se refiere a la descomposición de una nota en notas más simples:

Propiedad 2. *Toda nota* $\mathbf{g}_N$ *tiene una descomposición como suma de notas básicas.*

Sea $N = (u, v, w)$. Se verifica, en efecto, que

$$\mathbf{g}_N = \mathbf{g}_{u,0,0} \oplus \mathbf{g}_{0,v,0} \oplus \mathbf{g}_{0,0,w},$$

donde $\mathbf{g}_{n_1} = \mathbf{g}_{n_1,0,0}$, $\mathbf{g}_{n_2} = \mathbf{g}_{0,n_2,0}$, $\mathbf{g}_{n_3} = \mathbf{g}_{0,0,n_3}$.

Otro resultado que simplifica los cálculos es el que sigue (ver el Lema 14 en 8.2):

Propiedad 3. *Sean* $M = (m_1, m_2, m_3)$ *y* $N = (n_1, n_2, n_3)$*; se verifican las siguientes igualdades:*

$$\mathbf{g}_N \ominus \mathbf{g}_M = \mathbf{g}_{N-M}, \quad \mathbf{g}_M \oplus \mathbf{g}_N = \mathbf{g}_{M+N},$$

donde $M+N = (m_1+n_1, m_2+n_2, m_3+n_3)$, $N-M = (n_1-m_1, n_2-m_2, n_3-m_3)$.[3]

Una propiedad que muestra el significado de $\oplus$ y $\ominus$ es la siguiente (ver Corolario 16 en 8.2):

Propiedad 4. *Sean las frecuencias*

$$f = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot p_3^{m_3} \;\; y \;\; g = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3},$$

cuyas notas correspondientes son:

$$\mathbf{g}_{m_1,m_2,m_3} = \mathbf{g}_M \;\; y \;\; \mathbf{g}_{n_1,n_2,n_3} = \mathbf{g}_N.$$

[3] Ver 2.0.2.

La notas

$$\mathbf{g}_M \oplus \mathbf{g}_N \quad y \quad \mathbf{g}_N \ominus \mathbf{g}_M$$

corresponden, respectivamente, a

$$f \cdot g \quad y \quad \frac{g}{f}.$$

Entonces vemos que la suma $\oplus$ de notas traslada la nota $\mathbf{g}_M$ un intervalo $[\mathbf{g}_{0,0,0}, \mathbf{g}_N]$. Esto es lo mismo que decir, por ejemplo, que si $\mathbf{g}_N$ fuera un *sol*, y suponiendo que $\mathbf{g}_{0,0,0} = 0$ representa un *do*, $\mathbf{g}_M$ se sube una quinta, ya que el intervalo $[0, \mathbf{g}_N]$ representa una quinta.

También podemos ver que la longitud del intervalo entre dos notas $[\mathbf{g}_M, \mathbf{g}_N]$ (asociada con el cociente de sus frecuencias) queda medida por la diferencia $\mathbf{g}_N \ominus \mathbf{g}_M$ entre ellas.

En el cálculo de los acordes mayores y menores nos ayudará el siguiente resultado, cuya demostración está en el Lema 17 de 8.2:

Propiedad 5. *La nota que representa el armónico k-ésimo (aquí $k = 1, 2, 3$) de $\mathbf{g}_N$ es:*

$$\mathbf{g}_N \oplus \mathbf{g}_k.$$

Análogamente, $\mathbf{g}_N$ representa el armónico k-ésimo de la nota

$$\mathbf{g}_N \ominus \mathbf{g}_k.$$

Usaremos también la siguiente propiedad de la longitud de los intervalos (ver en el Corolario 18 en 8.2 y en [41], Lema I de la sección 16 y resultado de la sección 23).

Propiedad 6. *La longitud de un intervalo $[\mathbf{g}_M, \mathbf{g}_N]$ se conserva por traslación, es decir que para $K = (k_1, k_2, k_3)$ se tiene que la longitud de $[\mathbf{g}_M, \mathbf{g}_N]$ es igual a la de $[\mathbf{g}_{M+K}, \mathbf{g}_{N+K}]$.*

Como, según vimos, $\mathbf{g}_M \oplus \mathbf{g}_K = \mathbf{g}_{M+K}$, $\mathbf{g}_N \oplus \mathbf{g}_K = \mathbf{g}_{N+K}$, esto último significa que si trasladamos $\mathbf{g}_M$ y $\mathbf{g}_N$ en una misma nota $\mathbf{g}_K$, la longitud del intervalo no se altera.

El conjunto $\mathbf{G}^{p_1,p_2,\ldots,p_r}$ tiene también la importante propiedad de *densidad* en el intervalo $[0, 1]$, cuya demostración está resumida en 8.3: [4]

[4]Ver demostración original en [41], sección 16 y siguientes.

Dado un número t en el intervalo real $[0,1]$, o bien $t = \mathbf{g}_{n_1 \ldots n_r}^{p_1,p_2,\ldots,p_r}$ para ciertos enteros $n_1, n_2, \ldots, n_r$, o bien podemos tomar elementos de $\mathbf{G}^{p_1,p_2,\ldots,p_r}$ tan próximos de t como se quiera.

Más precisamente, como veremos en 8.3:

Teorema:*El conjunto $\mathbf{G}^{p_1,p_2,\ldots,p_r}$ es denso en $[0,1)$.*

En las próximas secciones estudiaremos ejemplos de atemperaciones de una gama $\mathbf{G}^{p_1 \cdots p_r}$, para los casos $r = 1, 2, 3$.

6.4. Gamas con un sólo armónico

En primer lugar, supongamos que tenemos sólo un número primo p en nuestra gama. Supondremos que $p = 3$. La gama $\mathbf{G}^3$ es un conjunto infinito de frecuencias de la forma:

$$f = 3^n,$$

siendo la fundamental $f = 3^0 = 1$; las notas tendrán la representación siguiente:

$$\mathbf{g}_n^3 = F(\log_2 f) = F(n \cdot \log_2 3),$$

y la fundamental $\mathbf{g}_0^3 = 0$.

En esta gama la única nota coordenada es $\mathbf{g}_1^3 = F(\log_2 3) = 0,58496$. Todas las demás son notas básicas.

Observemos que como las frecuencias son potencias de 3, son sucesivos armónicos terceros. Luego podemos pensar que la sucesión de las notas es una sucesión de quintas (bajadas a la primera octava)

Vemos algunos valores en la tabla de la Figura 6.6.

Para dar una atemperación o escala dentro de la gama $\mathbf{G}^3$ debemos elegir un conjunto finito $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ de exponentes de 3, lo que equivale a fijar un conjunto de frecuencias y correspondientemente, un conjunto de notas:

$$\{\mathbf{g}_{n_1}^3, \mathbf{g}_{n_2}^3, \ldots, \mathbf{g}_{n_k}^3\}.$$

En general vamos a tomar atemperaciones que sean conjuntos de la forma:

$$\{\mathbf{g}_0^3, \mathbf{g}_1^3, \ldots, \mathbf{g}_k^3\},$$

Geométricamente, esto significa que son puntos sucesivos sobre un eje de 0 a k, o sea, determinadas por segmentos desde el origen hasta un número k.

n	$\mathbf{g}_n^3$	n	$\mathbf{g}_n^3$	n	$\mathbf{g}_n^3$
0	0,00000	6	0,50977	12	0,01955
1	0,58496	7	0,09474	13	0,60451
2	0,16992	8	0,67970	14	0,18947
3	0,75489	9	0,26466	15	0,77444
4	0,33985	10	0,84962		
5	0,92481	11	0,43459		

Figura 6.6: $\mathbf{G}^3$

Llamaremos $\mathbf{G}_k^3$ a una atemperación así.

¿Cómo elegir una atemperación? Trataremos de que cumpla las tres condiciones que vimos anteriormente: número de notas razonable, "casi cíclica" y con regularidad aceptable.

Siguiendo la idea de Pitágoras, deberíamos establecer (aunque sea aproximadamente) un ciclo, es decir, tomar sucesivamente $\mathbf{g}_0^3, \mathbf{g}_1^3, ..., \mathbf{g}_k^3$ de manera que $\mathbf{g}_{k+1}^3 \approx \mathbf{g}_0^3 = 0$ (o bien $1 - \mathbf{g}_{k+1}^3 \approx 0$).

Observación 2. La gama $\mathbf{G}^3$ no contiene el 1 (ninguna gama lo contiene). Pero podemos pensar que, así como el 0 representa a la primera nota de la octava, digamos *do*, el 1 sería la octava del *do* inicial. Luego, para "cerrar" un ciclo da lo mismo acercarse a 0 o a 1, porque es sólo cambiar de octava.

Hemos visto al tratar la escala de Pitágoras (ver 5.2) que **no es posible** que se obtenga un ciclo allí, ya que esto significaría que alguna potencia de 3 es potencia de 2. Tratando ahora con nuestras notas, obtenidas tomando parte fraccionaria de un múltiplo de $\log_2 3$, vemos, por ser $\log_2 3$ un número irracional (ver en 2.2.4, el último item de las Propiedades del logaritmo), que tampoco es posible que sea $\mathbf{g}_{k+1}^3 = \mathbf{g}_0^3 = 0$ para ningún k. En efecto, si fuera $\mathbf{g}_{k+1}^3 = F((k+1)\log_2 3) = 0$, debería ser $(k+1)\log_2 3$ entero (son los únicos reales con parte fraccionaria igual a 0). Pero eso no es posible, por ser $\log_2 3$ un número irracional.

Por el teorema de densidad que mencionamos en la sección anterior (ver también 8.3), si tenemos un número real t entre 0 y 1, pueden ocurrir dos cosas: o bien encontramos n tal que $t = \mathbf{g}_n^3$, o bien resulta que t es aproximable por los elementos de $\mathbf{G}^3$, es decir, podemos suponer que t "coincide" (con cierto error) con algún $\mathbf{g}_n^3$ con tal de tomar n suficientemente grande. En nuestro caso t será 0 (o 1, según vimos).

Luego, podemos acercarnos tanto como se quiera a 0 (o a 1) aumentando el número k de notas de la atemperación. La nota $\mathbf{g}_{k+1}^3$ es la que estará cerca de 0 o de 1 y **no pertenecerá a la atemperación** ya que $\mathbf{g}_{k+1}^3$ sería la octava (aproximada) de $\mathbf{g}_0^3$ y la atemperación contiene sólo las notas de **una** octava. Una vez elegido k, la *coma* o error de la escala será por definición la diferencia $\mathbf{g}_{k+1}^3 - 0 = \mathbf{g}_{k+1}^3$, o bien $1 - \mathbf{g}_{k+1}^3$ (la menor de las dos).

La coma es la longitud del intervalo $[0, \mathbf{g}_{k+1}^3]$, que es $\mathbf{g}_{k+1}^3$ (o bien de $[\mathbf{g}_{k+1}^3, 1]$, que es $1 - \mathbf{g}_{k+1}^3$). Supongamos que la coma es $\mathbf{g}_{k+1}^3$.

Observación 3. Podemos ver que $\mathbf{g}_{k+1}^3$ es la menor entre las longitudes de los intervalos $[\mathbf{g}_n^3, \mathbf{g}_{k+1}^3]$, para cada $\mathbf{g}_n^3$ en la atemperación. En efecto, la longitud de $[\mathbf{g}_n^3, \mathbf{g}_{k+1}^3]$ es

$$\mathbf{g}_{k+1}^3 \ominus \mathbf{g}_n^3.$$

Por la Propiedad 6 de la sección anterior tenemos que esa longitud es igual a la del intervalo

$$[\mathbf{g}_{n-n}^3, \mathbf{g}_{(k+1)-n}^3] = [0, \mathbf{g}_{(k+1)-n}^3] = \mathbf{g}_{(k+1)-n}^3.$$

Pero, para $n = 1, ..., k$, la diferencia $(k+1)-n$ toma los valores: k, $k-1$,...,2,1 o sea que $(k+1)-n$ es uno de los índices de las notas de la gama. Habíamos elegido $\mathbf{g}_{k+1}^3$ mínimo, luego $\mathbf{g}_{(k+1)-n}^3$ no puede ser menor.

Esta demostración se puede generalizar usando el concepto de "puntos vecinos" (que veremos luego), a toda atemperación de toda gama.

Buscaremos que la coma sea pequeña (es la condición 2 que planteamos), pero es claro que el número k de notas debe ser "razonable", no es práctico tomar un número muy grande (esa es la condición 1).

En cuanto a la regularidad (condición 3), esta reside en el hecho de que los intervalos entre dos notas sucesivas sean "casi" iguales. Estos intervalos los determinamos por sus longitudes, que son las diferencias o *diferencias primeras* entre las notas sucesivas. Si son todas iguales (o difieren en una coma, que es el error tolerable), tendremos regularidad. Si no, calculamos las *diferencias segundas* o diferencias entre diferencias. Si estas son pequeñas, todavía tendremos una cierta regularidad. Es decir, convendremos en que hay regularidad si se tiene un número (pequeño, si es posible 1) de diferencias primeras y una magnitud (pequeña) de las segundas.

En la Figura 6.7 representamos en el plano los puntos

$$(0, \mathbf{g}_0^3), (1, \mathbf{g}_1^3), ..., (15, \mathbf{g}_{15}^3).$$

Podemos observar allí marcados los $\mathbf{g}_n^3$ más próximos al 0 o al 1, que son $\mathbf{g}_5^3$, $\mathbf{g}_7^3$ y $\mathbf{g}_{12}^3$.

Para fijar ideas, convendremos en que la escala empieza por una nota que llamamos fa, cuyo valor es 0, que corresponde a la frecuencia $f = 3^0$. A partir de allí, las frecuencias se obtienen multiplicando por 3, o sea, son sucesivos armónicos terceros, que reducimos a la primera octava. Por lo tanto, la sucesión es la del ciclo de quintas.

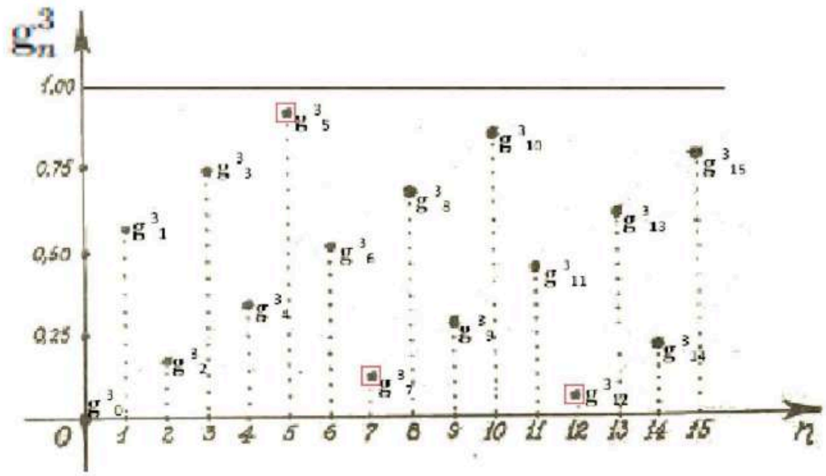


Figura 6.7: Gráfico de $\mathbf{G}^3$

6.4.1. Escala pentatónica

Tomemos, por ejemplo, $k = 4$, porque vemos que $\mathbf{g}_5^3 = 0,92481$ está cerca de 1; la coma, pequeña en este caso, es:

$$1 - \mathbf{g}_5^3 = 1 - 0,92481 = 0,07519.$$

Llamamos:

$$fa = \mathbf{g}_0^3, \ \ do = \mathbf{g}_1^3, \ \ sol = \mathbf{g}_2^3, \ \ re = \mathbf{g}_3^3, \ \ la = \mathbf{g}_4^3,$$

y la que cierra aproximadamente el ciclo es

$$\mathbf{g}_5^3 = 0,92481.$$

Ordenando los valores que vemos en la tabla 6.6 tenemos las notas:

$$fa, sol, la, do, re,$$

que forman la escala pentatónica usada por pueblos primitivos (ver 5.3). En la tabla 6.8 vemos las notas de esta escala en orden creciente y las diferencias primeras entre ellas.

Gama primitiva

Notas	Intervalos
0,00000	
	0,16992
0,16992	
	0,16993
0,33985	
	0,24511
0,58496	
	0,16993
0,75489	
	0,24511
1,00000	

Figura 6.8: Notas e intervalos de $\mathbf{G}_4^3$

Veamos la regularidad de esta escala. Aparecen allí dos intervalos cuyas longitudes (diferencias primeras) son: $0,16992$ y $0,24511$. Una vez admitida la coma como límite de error tolerable, puede considerarse que los dos intervalos (dentro de esa tolerancia), son iguales. En efecto:

$$0,16992 + coma = 0,16992 + 0,07519 = 0,24511.$$

Luego, vemos que se cumplen para $\mathbf{G}_4^3$ las tres condiciones requeridas para ser una buena atemperación, siendo:

$$\mathbf{G}_4^3 = \{\mathbf{g}_0^3, \mathbf{g}_1^3, \mathbf{g}_2^3, \mathbf{g}_3^3, \mathbf{g}_4^3\}.$$

6.4.2. Escala pitagórica diatónica

Otra posibilidad es tomar $k = 6$, porque $\mathbf{g}_7^3$ está cerca del 0. En este caso obtendríamos la *escala diatónica de Pitágoras*

$$fa, do, sol, re, la, mi, si,$$

que, ordenada por sus valores, es :

$$fa, sol, la, si, do, re, mi.$$

La coma es $\mathbf{g}_7^3 = 0,09474$, mayor que la de la escala pentatónica. No consideramos que esta coma sea pequeña y por lo tanto la descartamos como atemperación aceptable.

6.4.3. Escala pitagórica cromática

El siguiente k tal que $\mathbf{g}_k^3$ se acerca a 0 es $k = 11$. En este caso la coma es menor que las dos anteriores, pues $\mathbf{g}_{12}^3 = 0,01955$.

Gama de Pitágoras

Notas	Intervalos	Notas	Intervalos
			0,07519
0,00000		0,58496	
	0,09474		0,09474
0,09474		0,67970	
	0,07518		0,07519
0,16992		0,75489	
	0,09474		0,09473
0,26466		0,84962	
	0,07519		0,07519
0,33985		0,92481	
	0,09474		0,07519
0,43459		1,00000	
	0,07518		
0,50977			

Figura 6.9: Notas e intervalos de $\mathbf{G}_{11}^3$

En la tabla 6.6 figuran los valores de las notas $\mathbf{g}_n^3$ de $\mathbf{G}_{11}^3$ en el orden en que se generan, que es el de las quintas de la escala pitagórica cromática:

$$fa - do - sol - re - la - mi - si - fa\sharp - do\sharp - sol\sharp - re\sharp - la\sharp.$$

Si los ordenamos según sus valores en orden creciente, obtenemos:

$$\mathbf{g}_0^3 < \mathbf{g}_7^3 < \mathbf{g}_2^3 < \mathbf{g}_9^3 < \mathbf{g}_4^3 < \mathbf{g}_{11}^3 < \mathbf{g}_6^3 < \mathbf{g}_1^3 < \mathbf{g}_8^3 < \mathbf{g}_3^3 < \mathbf{g}_{10}^3 < \mathbf{g}_5^3,$$

o sea, según sus nombres, la *escala pitagórica cromática*:

$$fa,\ fa\sharp,\ sol,\ sol\sharp,\ la,\ la\sharp,\ si,\ do,\ do\sharp,\ re,\ re\sharp,\ mi.$$

Vemos estos valores colocados en la recta en la Figura 6.10, donde en cada punto se indica la nota según el índice correspondiente. El orden numérico es también el de la tabla 6.9.

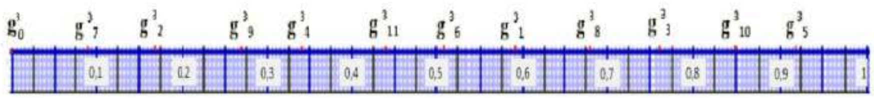


Figura 6.10: Notas de $\mathbf{G}_{11}^3$

En este caso, como en el de la escala pentatónica, podemos considerar que hay un sólo intervalo, ya que, siendo la coma $0,01955$, se tiene que los dos intervalos que aparecen en la tabla 6.9 se identifican:

$$0,07519 + 0,01955 = 0,09474.$$

Luego, podemos aceptar como "buena" esta atemperación:

$$\mathbf{G}_{11}^3 = \{\mathbf{g}_0^3, \mathbf{g}_1^3, ..., \mathbf{g}_{11}^3\}.$$

Para conseguir una coma menor tendríamos que ir a $k = 52$, lo que nos da la *escala de Mersenne* de 53 notas. Si consideramos aceptable este número de notas, analizando la regularidad podríamos obtener otra atemperación buena de la gama $\mathbf{G}^3$.

6.4.4. Acordes perfectos

La gama $\mathbf{G}^3$ y por lo tanto, toda atemperación de ella, se caracteriza por la intervención del armónico 3 y sólo él. Luego, si agregamos a la nota fundamental representada por $\mathbf{g}_0^3 = 0$ su armónico 3, que es, según la Propiedad 5 de la sección 6.3,

$$\mathbf{g}_0^3 \oplus \mathbf{g}_1^3 = \mathbf{g}_1^3,$$

tendremos el acorde característico de la gama. Lo llamaremos *acorde tonal o perfecto*. Por la Propiedad 6 de invariancia de la longitud de los intervalos por traslación, si en vez de considerar los puntos 0 y 1 tomamos dos números consecutivos cualesquiera n y $n+1$, el intervalo no se altera (hacemos una traslación del intervalo $[\mathbf{g}_0^3, \mathbf{g}_1^3]$ en el $[\mathbf{g}_n^3, \mathbf{g}_{n+1}^3]$). Luego, se formarán acordes perfectos con dos notas sucesivas cualesquiera $\mathbf{g}_n^3$, $\mathbf{g}_{n+1}^3$.

Por ejemplo, en $\mathbf{G}_{11}^3$, tendremos los acordes:
$fa - do$, $do - sol$, $sol\sharp - re\sharp$, etc.,
que son los acordes de quinta.

6.4.5. Propiedad de simetría

Remarquemos que hay dos formas de ordenar el conjunto de las notas de una atemperación en $\mathbf{G}^3$: el dado por la forma en que se generan y el que heredan como elementos del intervalo $[0, 1)$, que corresponde al orden de sus frecuencias. El de generación de las notas está dado por sucesivos armónicos terceros, es decir, por quintas (pues se reducen a la primera octava).

Si comparamos ambos órdenes, tendremos una relación entre los índices de las notas. Los índices ordenados según el orden de generación son simplemente: $0, 1, 2, 3, 4, ...$ En cambio, si consideramos las notas en el orden de los números reales del intervalo $[0, 1)$, los índices quedan (tomando aquí sólo las primeras 12 notas): $0, 7, 2, 9, 4, 11, 6, 1, 8, 3, 10, 5$, (ver la Figura 6.10).

Si consideramos sólo las cinco primeras notas generadas (escala pentatónica), este último orden es: $0, 2, 4, 1, 3$, que es lo que se llama una *permutación* de los números $0, 1, 2, 3, 4$ y que suele denotarse:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Esta permutación tiene una "ley de formación".

Multiplicando los números de la primera fila por 2 obtenemos: $0, 2, 4, 6, 8$. Los dos últimos no están en la fila de abajo, sólo pueden aparecer allí números del 0 al 4. Sin embargo, podemos ver que

$$3 \cdot 2 = 6 \equiv 1 (\text{mód } 5) \;\text{ y }\; 4 \cdot 2 = 8 \equiv 3 (\text{mód } 5).$$

[5] Entonces, decimos que hay un "multiplicador", que es 2, que produce esta permutación, siempre que reduzcamos los números por la relación $\equiv (\text{mód } 5)$ a los 5 permitidos.

[5] Ver congruencia módulo n en 2.2.1.

En este caso, como vimos en 5.3, si ponemos las 5 notas distribuidas en un círculo con el orden de generación y las unimos sucesivamente de acuerdo al orden de sus frecuencias, obtenemos un "polígono estrellado simétrico" o estrella simétrica.[6]

Para el caso de la escala pitagórica diatónica también se cumple esta propiedad. La permutación es, en este caso,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Intuimos que el multiplicador es 2 también y que debemos reducir los números obtenidos de la multiplicación aplicando la congruencia módulo 7 en este caso. En efecto,

$$4 \cdot 2 = 8 \equiv 1 (\text{mód } 7),$$

$$5 \cdot 2 = 10 \equiv 3 (\text{mód } 7),$$

$$6 \cdot 2 = 12 \equiv 5 (\text{mód } 7).$$

También obtenemos aquí una estrella simétrica.

Por último, analicemos la escala pitagórica cromática. La permutación es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 0 & 7 & 2 & 9 & 4 & 11 & 6 & 1 & 8 & 3 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Como vemos en la segunda columna, el multiplicador parece ser 7 y efectivamente es así, teniendo en cuenta que aquí debemos aplicar la congruencia módulo 12. Comprobemos algunos números:

$$4 \cdot 7 = 28 \equiv 4 (\text{mód } 12),$$

$$5 \cdot 7 = 35 \equiv 11 (\text{mód } 12),$$

$$9 \cdot 7 = 63 \equiv 3 (\text{mód } 12).$$

Dejamos como ejercicio comprobar los demás.

Como contraejemplo veamos el caso de elegir las cuatro primeras notas generadas $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$. Como $\mathbf{g}_0 < \mathbf{g}_2 < \mathbf{g}_1 < \mathbf{g}_3$, aquí la permutación es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

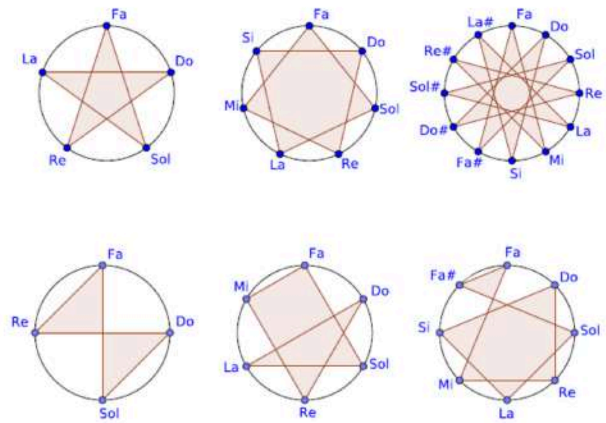


Figura 6.11: Estrellas simétricas y no simétricas

De acuerdo a la segunda columna el multiplicador debería ser 2. Sin embargo, $2 \cdot 2 = 4 \equiv 0(\text{mód } 4)$ y también $3 \cdot 2 = 6 \equiv 2(\text{mód } 4)$; es decir que falla en los dos casos. No se genera aquí una estrella simétrica.

En caso de atemperaciones de la gama pitagórica de a lo sumo 12 notas generadas sucesivamente, es posible probar que hay simetría para los casos en que se toman las primeras 1, 2 (casos triviales), 3, 5, 7 y 12 notas generadas y no la hay para los casos de 4, 6, 8, 9, 10 y 11; vemos algunos ejemplos en la Figura 6.11, extraída de [11].

6.5. Gamas con dos armónicos

Dando un paso más en la generalización, debemos considerar una gama $\mathbf{G}^{p_1,p_2}$ donde aparecen dos números primos.

Vamos a analizar el caso particular $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, o sea, en la cual aparecen sólo los armónicos 3 y 5.

Cada nota está definida por:

$$\mathbf{g}^{3,5}_{n_1,n_2} = F(n_1 \cdot \log_2 3 + n_2 \cdot \log_2 5) = F(n_1\pi_1 + n_2\pi_2).$$

Por ejemplo, la tónica y las notas coordenadas son:

[6] Ver http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1130 y [49].

$$\mathbf{g}^{3,5}_{0,0} = 0, \quad \mathbf{g}^{3,5}_{1} = \mathbf{g}^{3,5}_{1,0} = F(\pi_1) = 0,58496, \quad \mathbf{g}^{3,5}_{2} = \mathbf{g}^{3,5}_{0,1} = F(\pi_2) = 0,33985.$$

Vemos en la Figura 6.12 los valores de las notas

$$\mathbf{g}^{3,5}_{n_1,n_2},$$

para los valores $n_1 = 0, 1, .., 7$, $n_2 = 0, 1, ..., 10$.

$n_2 \downarrow$ \ $n_1 \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0,00000	0,58496	0,16992	0,75489	0,33985	0,92481	0,50977	0,09474
1	0,32193	0,90689	0,49185	0,07682	0,66178	0,24674	0,83170	0,41667
2	0,64386	0,22882	0,81378	0,39875	0,98371	0,56867	0,15363	0,73860
3	0,96578	0,55074	0,13570	0,72067	0,30563	0,89059	0,47555	0,06052
4	0,28771	0,87267	0,45763	0,04260	0,62756	0,21252	0,79748	0,38245
5	0,60964	0,19460	0,77956	0,36453	0,94949	0,53445	0,11941	0,70438
6	0,93157	0,51653	0,10149	0,68646	0,27142	0,85628	0,44134	0,02631
7	0,25350	0,83846	0,42342	0,00839	0,59335	0,17831	0,76327	0,34824
8	0,57542	0,16038	0,74534	0,33031	0,93527	0,50023	0,08519	0,67016
9	0,89735	0,48231	0,06727	0,65224	0,23720	0,82216	0,40712	0,99209
10	0,21928	0,80124	0,38920	0,97417	0,55913	0,14409	0,72905	0,31402

Figura 6.12: Notas de $\mathbf{G}^{3,5}$

En este caso, las funciones $\mathbf{g}^{3,5}_{n_1,n_2}$ dependen de las dos variables n_1 y n_2 y por lo tanto, estarán representadas por puntos $(n_1, n_2, \mathbf{g}^{3,5}_{n_1,n_2})$ del espacio tridimensional (ver 2.1).

Debemos ahora elegir un número finito de elementos dentro de la gama para que sean las notas de nuestra atemperación. ¿Qué debemos tener en cuenta? Veamos algunas consideraciones al respecto.

Si elegimos puntos (n_1, n_2) que estén todos ubicados en el eje horizontal n_1, que serán de la forma $(n_1, 0)$, obtendremos una "copia" de la gama $\mathbf{G}^3$, puesto que sólo varía lo referente al armónico 3. Es decir que en realidad las notas dependerían de una sola variable y si hiciéramos un gráfico de los puntos $(n_1, 0, \mathbf{g}^{3,5}_{n_1,0})$, sería como el de la Figura 6.7 pero ahora sobre el plano coordenado $(n_1, 0, n_3)$. Lo mismo pasaría eligiendo sólo puntos de una recta paralela al eje n_1; por ejemplo para $n_1 = 9$ obtendríamos el mismo gráfico sobre el plano $(n_1, 9, n_3)$.

Sobre estas rectas, como vimos en $\mathbf{G}^3_{11}$, de una nota a la siguiente podemos pensar que hay una quinta.

En la gama $\mathbf{G}^5$, en cambio, las notas sucesivas difieren en una tercera (juega el 5° armónico).

Si tomamos ahora paralelas al eje n_2, obtenemos de la misma manera copias de la gama $\mathbf{G}^5$ (que no hemos estudiado).

Por lo tanto, si tomáramos una atemperación de $\mathbf{G}^{3,5}$ con notas sobre una paralela al eje n_1, conseguiríamos una atemperación "unidimensional", equivalente a tomar ciertos $\mathbf{g}^3_n$ de la gama $\mathbf{G}^3$. Una situación análoga ocurriría tomando notas sobre una paralela al eje n_2: sería equivalente a tomar una atemperación de la gama $\mathbf{G}^5$.

Debemos elegir entonces un conjunto de pares (n_1, n_2) donde efectivamente varíen ambas variables.

Observemos que una atemperación interesante debería contener, además de la nota fundamental $\mathbf{g}^{3,5}_{0,0}$, sus armónicos 3 y 5; como vimos en la Propiedad 5 de la sección 6.3, ellos corresponden respectivamente a:

$$\mathbf{g}^{3,5}_{0,0} \oplus \mathbf{g}^{3,5}_{1} = \mathbf{g}^{3,5}_{1}, \quad \mathbf{g}^{3,5}_{0,0} \oplus \mathbf{g}^{3,5}_{2} = \mathbf{g}^{3,5}_{2}.$$

o sea las notas coordenadas $\mathbf{g}^{3,5}_{1,0}$ y $\mathbf{g}^{3,5}_{0,1}$.

Buscamos entonces un conjunto de puntos (n_1, n_2) con n_1 y n_2 enteros, que formarán un polígono. Lo llamaremos *polígono atemperante*.

En lo que sigue suprimiremos los supraíndices de las notas para simplificar la escritura.

6.5.1. Escala tolemaica diatónica

Vamos a elegir un polígono atemperante. Para empezar, según dijimos, tomaremos los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y sus correspondientes notas. Entre las notas $\mathbf{g}_{1,0}$ y $\mathbf{g}_{0,0}$ hay un intervalo de quinta y entre $\mathbf{g}_{0,1}$ y $\mathbf{g}_{0,0}$ uno de tercera. Recordemos (ver 5.6.1) que la coma sintónica es el error que se comete al tomar la tercera tolemaica en lugar de las cuatro quintas pitagóricas (tercera pitagórica).

Si a partir de $\mathbf{g}_{0,0}$ tomamos cuatro quintas, llegamos a $\mathbf{g}_{4,0}$. Tomemos, por ejemplo, fa como la tónica, o sea, $fa = \mathbf{g}_{0,0} = 0$, luego $\mathbf{g}_{4,0} = la$. Pero

$\mathbf{g}_{0,1}$ es la tercera tolemaica de $\mathbf{g}_{0,0}$, o sea $\mathbf{g}_{0,1} = la$. ¿Cuál es la longitud del intervalo entre $\mathbf{g}_{0,1}$ y $\mathbf{g}_{4,0}$? Haciendo los cálculos se ve que es

$$\mathbf{g}_{4,0} \ominus \mathbf{g}_{0,1} = \mathbf{g}_{4,0} - \mathbf{g}_{0,1} = 0,3399 - 0,3219 = 0,0180 \text{ (coma sintónica).}$$

Entonces, podemos tomar $\mathbf{g}_{0,1}$ en lugar de $\mathbf{g}_{4,0}$ con poco error. Podemos completar el polígono agregando los puntos $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$, $(1,1)$ y $(2,1)$, formando el trapecio T, cuyos vértices son: $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ y $(2,1)$ y que se muestra en la Figura 6.13.

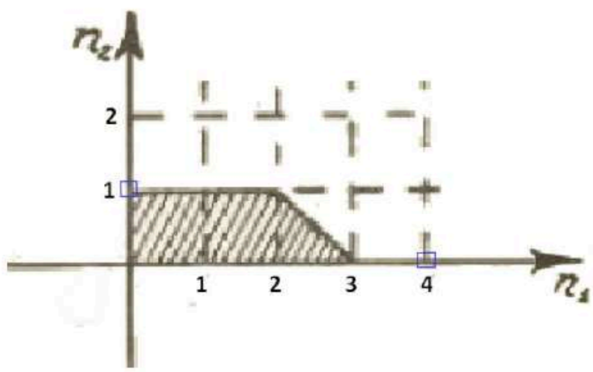


Figura 6.13: Gama diatónica Tolomeo-Zarlino

Observemos que, como dijimos, si nos movemos sobre el eje n_1, estamos calculando el armónico 3. Por ejemplo, la nota $\mathbf{g}_{3,0}$ correspondiente al punto $(3,0)$ es la quinta de $\mathbf{g}_{2,0}$, que corresponde al $(2,0)$. En cambio sobre el eje n_2 es el armónico 5 el que juega: por ejemplo, $\mathbf{g}_{2,1}$ es la tercera de $\mathbf{g}_{2,0}$.

Esto se refleja en el diagrama siguiente (que coincide con el polígono T) donde hemos puesto las notas que se calculan en 6.14:

$$\begin{tikzcd}
la \arrow[r, "\times 3"] & mi \arrow[r, "\times 3"] & si & \\
fa \arrow[u, "\times 5"] \arrow[r, "\times 3"] & do \arrow[u, "\times 5"] \arrow[r, "\times 3"] & sol \arrow[u, "\times 5"] \arrow[r, "\times 3"] & re
\end{tikzcd}$$

Podemos ver los valores de las notas y las frecuencias que representan en la Figura 6.14, donde también se muestran los valores de las frecuencias considerando que la fundamental es fa de frecuencia tolemaica $\frac{4}{3}$ y la respectiva reducción de estas a la primera octava.

Notas	Frecuencias	Fa fundamental	Reducción a 1ª octava
$g_{00}=0$	$3^0.5^0=1$	(4/3).1=4/3	4/3 (fa)
$g_{10}=F(\log_2 3)=0{,}58496$	$3^1.5^0=3$	(4/3).3=4	1 (do)
$g_{20}=F(2\log_2 3)=0{,}16992$	$3^2.5^0=9$	(4/3).9=12	3/2 (sol)
$g_{30}=F(3\log_2 3)=0{,}75489$	$3^3.5^0=27$	(4/3).27=36	9/8 (re)
$g_{01}=F(\log_2 5)=0{,}32193$	$3^0.5^1=5$	(4/3).5=20/3	5/3 (la)
$g_{11}=F(\log_2 3+\log_2 5)=0{,}90689$	$3^1.5^1=15$	(4/3).15=20	5/4 (mi)
$g_{21}=F(2\log_2 3+\log_2 5)=0{,}49185$	$3^2.5^1=45$	(4/3).45=60	15/8 (si)

Figura 6.14: Datos de $\mathbf{G}_{\mathrm{T}}^{3,5}$

Obtenemos entonces exactamente las frecuencias de la escala diatónica de Tolomeo-Zarlino o de justa entonación. O sea, la atemperación de $\mathbf{G}^{3,5}$ dada por el polígono T produce la escala natural de Tolomeo-Zarlino.

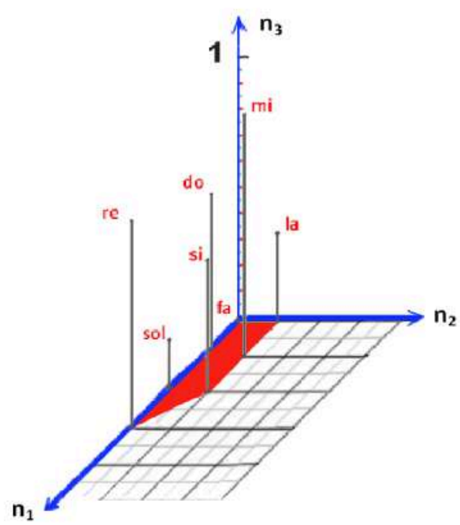


Figura 6.15: $\mathbf{G}_{\mathrm{T}}^{3,5}$

En la Figura 6.15 se muestra la representación en el espacio de las notas de $\mathbf{G}_{\mathrm{T}}^{3,5}$ que figuran en la primera columna de 6.14.

Comprobemos que se cumplen para el polígono T las condiciones que vimos en la sección anterior para que sea una buena atemperación.

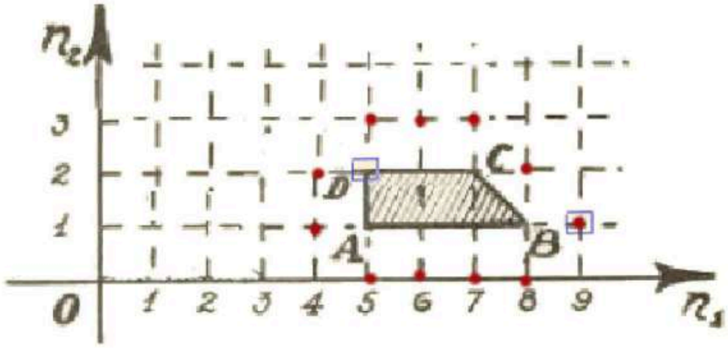


Figura 6.16: Trapecio ABCD y puntos vecinos

Llamaremos *puntos vecinos* de los del polígono a puntos que estén a "distancia 1" de los de este, o sea, aquellos que difieren una unidad en una sóla de las coordenadas: si $P = (a, b)$ está en el polígono, un Q vecino es de la forma, por ejemplo, $Q = (a + 1, b)$, o bien $Q = (a, b - 1)$, etc. En la Figura 6.16 están marcados con rojo. Esto significa que están "a una quinta", si lo que varía es la primera coordenada y "a una tercera", si varía la segunda.

Generalizando el caso de la gama $\mathbf{G}^3$ vamos a considerar que la coma es la longitud del mínimo intervalo que se puede formar entre una nota calculada en un punto del polígono y una calculada en un vecino. Pensemos, intuitivamente, que elegiremos una "nota vecina", que hará el papel que hacía el $\mathbf{g}^3_{k+1}$ de "cerrar el ciclo" aproximadamente.

Es decir, para cerrar el ciclo de las notas de la atemperación dada por un polígono, consideraremos el mínimo intervalo entre $\mathbf{g}_{n_1,n_2}$ y $\mathbf{g}_{m_1,m_2}$, con un $P = (m_1, m_2)$ en el polígono y un $Q = (n_1, n_2)$ vecino.

Hacemos ahora una traslación del trapecio T al T'= ABCD que se muestra en la Figura 6.16, para que tenga sólo vecinos con ambas coordenadas positivas y así facilitar cálculos. Sabemos que, aunque los valores de las notas cambian, los intervalos no se alteran por traslación, de modo que podemos analizar los intervalos en la tabla de la Figura 6.17 en lugar de la de la Figura 6.14.

Haciendo los cálculos puede probarse que la coma sintónica, que es $\varepsilon = 0,018$, cumple los requisitos. Es decir, la nota $\mathbf{g}_{9,1} = 0,58659$, correspondiente al punto $(9, 1)$, que es vecino al trapecio T', es la que está a mínima distancia de todos las demás notas correspondientes al trapecio y esa distancia es la

Nota	Intervalo	Nota	Intervalo
			0,15200
re= $g^{3,5}_{8,1}$ = 0,00163		la= $g^{3,5}_{5,2}$ = 0,56867	
	0,15200		0,16993
mi= $g^{3,5}_{6,2}$ = 0,15363		si= $g^{3,5}_{7,2}$ = 0,73860	
	0,09311		0,09310
fa= $g^{3,5}_{5,1}$ = 0,24674		do= $g^{3,5}_{6,1}$ = 0,83170	
	0,16993		0,16993
sol= $g^{3,5}_{7,1}$ = 0,41667		re= 1+ $g^{3,5}_{8,1}$ = 1,00163	

Figura 6.17: Notas e Intervalos de T'

coma sintónica. Los puntos $(9,1)$ y $(5,2)$ son traslaciones de $(4,0)$ y $(0,1)$, luego:

$$\mathbf{g}_{9,1} - \mathbf{g}_{5,2} = 0,5866 - 0,5687 = 0,0179 \sim 0,0180 \text{ (coma sintónica).}$$

La coma de esta atemperación es entonces, pequeña. Se cumple la segunda condición.

En 6.17 tenemos los intervalos entre notas sucesivas, lo que da las diferencias primeras, en las que consideramos identificados los números que difieren en una coma.

Entonces, podemos identificar los intervalos $0,16993$ y $0,15200$ porque:

$$0,16993 - 0,15200 = 0,01793 \sim 0,0180 \text{ (coma sintónica).}$$

Luego, tendremos sólo dos intervalos distintos, contando $0,09311$. Además, la diferencia segunda (calculada entre estos dos) es $0,07681$. Esto nos dice que se cumple la tercera condición de regularidad.

Y el número de notas es siete. Hemos comprobado así que se cumplen las tres condiciones pedidas.

6.5.2. Escala tolemaica cromática

Podríamos dar muchas otras atemperaciones buenas de $\mathbf{G}^{3,5}$. Por ejemplo, tomando en la Figura 6.18 diversos polígonos dentro del ABKL, se puede probar que la mejor atemperación se obtiene con el polígono rayado, que produce 21 notas.

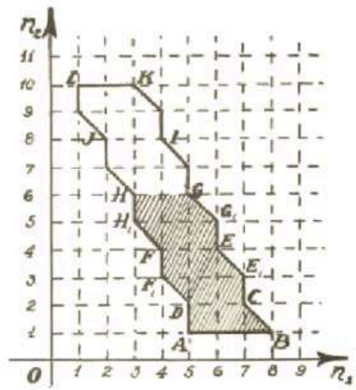


Figura 6.18: Polígonos atemperantes

Pueden interpretarse como tres copias de las siete notas, que geométricamente aparecen como los trapecios $T' = ABCD$, $U = F_1E_1EF$ y $V = H_1G_1GH$. Las notas $\mathbf{g}_{5,1} = 0,24674$ y $\mathbf{g}_{4,3} = 0,30563$, que corresponden a los puntos A y F_1, difieren en $0,05889$. Al pasar de T' a U y de U a V se registra también esa diferencia. Podemos entonces pensarla como un "semitono" y denotaremos con $\flat$ las notas correspondientes a T', las de U serán las diatónicas $do, re, mi, fa, sol, la, si$ y las correspondientes a V las denotamos con $\sharp$.

Observemos que aquí no coinciden las notas "enarmónicas" en la escala actual (como $la\sharp$ y $si\flat$ o $mi\sharp$ y fa).

Llamaremos *escala tolemaica cromática* a $\mathbf{G}^{3,5}_{ABGH}$. Vamos a calcular sus notas.

En primer lugar, los puntos de T' dan lugar a las notas con $\flat$; las obtenemos agregando sólo el símbolo $\flat$ a las que figuran en la tabla 6.17.

Si a estas les sumamos $c = 0,05889$, obtenemos una tabla que corresponde a $U = F_1E_1EF$, de las notas naturales o diatónicas.

Si a estos resultados le sumamos c, obtenemos las notas con $\sharp$, que corresponden al trapecio $V = H_1G_1GH$.

Ahora tomamos $\mathbf{g}_{5,3} = do = 0,89059$ y le restamos su valor para que resulte un do inicial $\mathbf{g}_{0,0} = 0$.

Podemos ver en la Figura 6.19 como queda el polígono atemperante ABGH una vez trasladadas todas las notas. Por ejemplo,

$$fa,\ do,\ sol,\ re$$

corresponden, respectivamente, a los puntos de coordenadas:

$$(-1,0),\ (0,0),\ (1,0),\ (2,0).$$

Los restantes puntos de $U = F_1E_1EF$ son

$$(-1,1),\ (0,1),\ (1,1)$$

y corresponden a las notas

$$la,\ mi,\ si.$$

En $ABCD$ los puntos son ahora:

$A = (0,-2)$ correspondiente a $fa\flat$,
$B = (3,-2)$ correspondiente a $re\flat$,
$C = (2,-1)$ correspondiente a $si\flat$,
$D = (1,-1)$ correspondiente a $la\flat$.

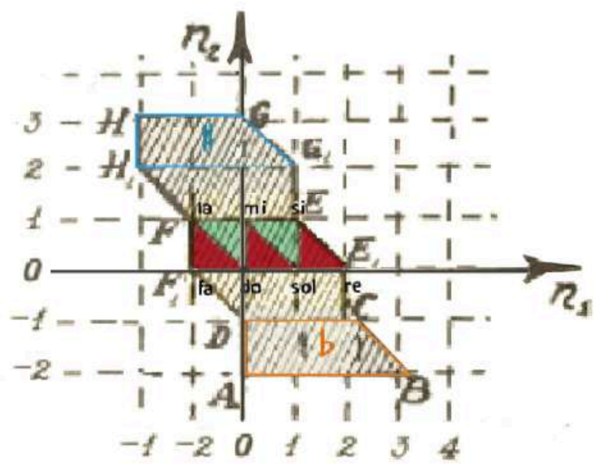


Figura 6.19: Traslación de ABGH y acordes

Trasladar el *do* de $(5,3)$ a $(0,0)$ podemos verlo como resultado de hacer la operación:

$$\mathbf{g}_{5,3} \ominus \mathbf{g}_{5,3}.$$

Luego, corregimos toda la escala restando ese valor a cada nota, es decir, hacemos:

$$\mathbf{g}_{n_1,n_2} \ominus \mathbf{g}_{5,3},$$

para cada una de las notas de $\mathbf{G}^{3,5}_{ABGH}$. Recordemos que cuando la diferencia da negativa en lugar de restar $0,89059$ sumaremos $1 - 0,89059 = 0,10941$.

Estos valores son los que aparecen en la tabla 6.20.

En la Figura 6.19 están marcados algunos de los acordes perfectos, de los cuales hablaremos en seguida.

Denominación	Nota	Intervalo	Denominación	Nota	Intervalo
					0,05214
do	0,00000		*sol* ♭	0,52608	
		0,05890			0,05888
do #	0,05890		*sol*	0,58496	
		0,05214			0,05890
re ♭	0,11104		*sol* #	0,64386	
		0,05889			0,03424
re	0,16993		*la* ♭	0,67808	
		0,05889			0,05889
re #	0,22882		*la*	0,73697	
		0,03422			0,05890
mi ♭	0,26304		*la* #	0,79587	
		0,05889			0,05214
mi	0,32193		*si* ♭	0,84801	
		0,03422			0,05888
fa ♭	0,35615		*si*	0,90689	
		0,02468			0,03422
mi #	0,38083		*do* ♭	0,94111	
		0,03421			0,02468
fa	0,41504		*si* #	0,96579	
		0,05890			0,03421
fa #	0,47394		*do*	1,00000	

Figura 6.20: Gama tolemaica cromática

Acordes perfectos mayores y menores

Los acordes perfectos de las escalas con dos armónicos están compuestos por una nota considerada como fundamental y sus dos armónicos, en este caso 3 y 5; o sea, están compuestos por la fundamental y las notas obtenidas sumando a esta las dos notas coordenadas. Si la fundamental es $\mathbf{g}_{p,q}$, las otras son, por las Propiedades 3 y 5 de 6.3:

$$\mathbf{g}_{p,q} \oplus \mathbf{g}_{1,0} = \mathbf{g}_{p+1,q}, \quad \text{y} \quad \mathbf{g}_{p,q} \oplus \mathbf{g}_{0,1} = \mathbf{g}_{p,q+1}.$$

Los puntos: (p,q), $(p+1,q)$, $(p,q+1)$ forman un triángulo rectángulo. En el trapecio $U = F_1E_1EF$ tenemos los acordes:

$$fa - la - do,\ do - mi - sol \text{ y } sol - si - re.$$

Análogos acordes obtendríamos en el trapecio $ABCD$ agregando $\flat$ a cada nota (respectivamente en el trapecio GHH_1G_1 agregando $\sharp$ a cada nota).

En el trapecio invertido E_1F_1DC tendremos los acordes:

$$la\flat - do - mi\flat \text{ y } mi\flat - sol - si\flat.$$

En el trapecio invertido G_1H_1FE tendremos:

$$la - do\sharp - mi \text{ y } mi - sol\sharp - si.$$

Consideremos ahora otro tipo de acordes que pueden formarse. Tomemos la nota $\mathbf{g}_{p,q}$; el armónico 3 de la nota:

$$\mathbf{g}_{p,q} \ominus \mathbf{g}_{1,0} = \mathbf{g}_{p-1,q},$$

y el armónico 5 de la nota

$$\mathbf{g}_{p,q} \ominus \mathbf{g}_{0,1} = \mathbf{g}_{p,q-1}$$

son ambos iguales a $\mathbf{g}_{p,q}$, por las mencionadas Propiedades 3 y 5.

Los acordes de la forma $\mathbf{g}_{p,q}$, $\mathbf{g}_{p-1,q}$, $\mathbf{g}_{p,q-1}$ son llamados *acordes perfectos menores*. Los construídos como en el párrafo anterior serán llamados ahora *acordes perfectos mayores*.

Son acordes menores en U:

$$mi - la - do \text{ y } si - mi - sol.$$

En la Figura 6.19 vemos en rojo los acordes perfectos mayores y en celeste los menores en $U = F_1E_1EF$.

Tendremos otros acordes menores análogos en los trapecios $ABCD$ y GHH_1G_1.

En cuanto a los trapecios invertidos E_1F_1DC y G_1H_1FE, cada uno contiene tres acordes menores. Por ejemlo, en E_1F_1DC están:

$$fa - do - la\flat,\ do - sol - mi\flat \text{ y } sol - re - si\flat.$$

En la Figura 6.21 se muestran el acorde mayor $mi - sol\sharp - si$ y el acorde menor $mi - la - do$ centrados en mi. Observemos que el acorde marcado con rojo $mi - sol - si$ (musicalmente considerado el acorde de mi menor) es una traslación del $mi - la - do$ y, por lo tanto, los intervalos son los mismos.

Otra forma de ver los acordes menores es, a la manera de Rameau y de Hugo Riemann,[7] como "inversiones" de los mayores, en el sentido siguiente. En el acorde menor, los intervalos que lo componen (tercera menor y quinta) se toman "hacia abajo" de la tónica.

En efecto, tomemos por ejemplo el acorde $do - mi - sol$ (do mayor). Una tercera hacia abajo de do es $la\flat - do$ y una quinta hacia abajo de do es $fa - do$. Luego el acorde "inverso" de do mayor quedaría: $fa - la\flat - do$, que es un acorde menor (fa menor).

[7] Ver 4.5.

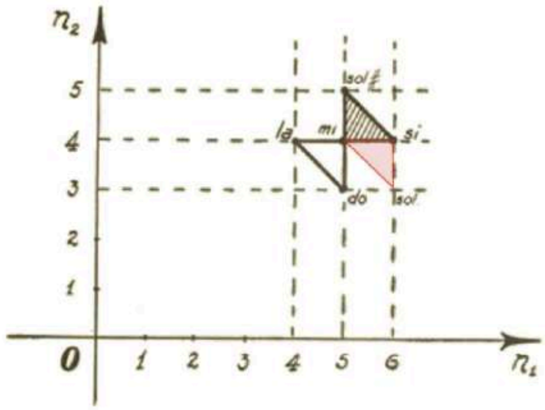


Figura 6.21: Acordes en *mi*

6.5.3. Escala de Ramos de Pareja

Veremos ahora otro ejemplo: una escala definida por Ramos de Pareja (ver 4.3). Es una escala cromática donde se conservan las quintas entre las notas diatónicas salvo la $sol - re$, que se corrige en una coma sintónica. Podemos considerarla como una atemperación de $\mathbf{G}^{3,5}$ dada por el paralelogramo que se ve en la Figura 6.22.

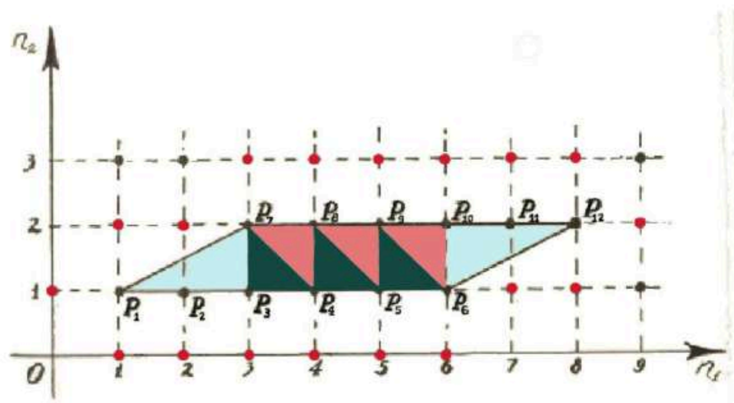


Figura 6.22: Polígono atemperante de Ramos de Pareja

En la tabla de la Figura 6.23 se muestran los valores de las notas en el orden de los puntos del paralelogramo y a la derecha estos valores en el orden creciente, estos últimos redondeados a 3 decimales.

Punto P_k	$g^{3,5}_{P_k}$	Punto P_k	$g^{3,5}_{P_k}$	Notas
$P_1(1,1) =$ = la♭	0.90689	$P_7(3,2) =$ = re	0.39875	0,077 si♭
$P_2(2,1) =$ = mi♭	0.49185	$P_8(4,2) =$ = la	0.98371	0,154 si
$P_3(3,1) =$ = si♭	0.07682	$P_9(5,2) =$ = mi	0.56867	0,247 do
$P_4(4,1) =$ = fa	0.66178	$P_{10}(6,2) =$ = si	0.15363	0,324 do♯
$P_5(5,1) =$ = do	0.24674	$P_{11}(7,2) =$ = fa#	0.73860	0,399 re
$P_6(6,1) =$ = sol	0.83170	$P_{12}(8,2) =$ = do#	0.32356	0,492 mi♭
				0,569 mi
				0,662 fa
				0,739 fa♯
				0,832 sol
				0,907 la♭
				0,984 la

Figura 6.23: Notas de la escala de Ramos de Pareja

Calculando los valores de las notas en los puntos vecinos a los del paralelogramo (marcados con rojo) y comparando con los de la tabla se puede ver que la coma es $0,00163$, lo que es muy conveniente. Los intervalos distintos son tres, pero dos de ellos difieren en una coma, luego podemos identificarlos. Y la diferencia entre los dos restantes es $0,01792$, también pequeña. Tenemos doce notas, o sea que las condiciones pedidas se cumplen y se puede ver que esta atemperación resulta aún mejor que la del polígono ABGH.

Acordes perfectos mayores y menores

En la Figura 6.22 podemos ver en color más oscuro los acordes mayores y en rosa los menores.

Los acordes mayores son:

$$si\flat - fa - re,\ fa - do - la,\ do - sol - mi.$$

Los menores:

$$la - re - fa,\ mi - la - do,\ si - mi - sol.$$

6.6. La gama $\mathbf{G}^{3,5,7}$ y la escala tetraharmónica

Consideraremos ahora una gama determinada por tres armónicos y fijaremos estos en $p_1 = 3$, $p_2 = 5$ y $p_3 = 7$. En particular, trataremos ahora brevemente una atemperación de la gama $\mathbf{G}^{3,5,7}$ dada por J. Domínguez Berrueta en el año 1927 (ver [14]), que él llamó *tetraharmónica.*

Dentro de la teoría que estamos desarrollando, puede verse esta gama como atemperada por un poliedro P, que es el que se ve en la Figura 6.24.

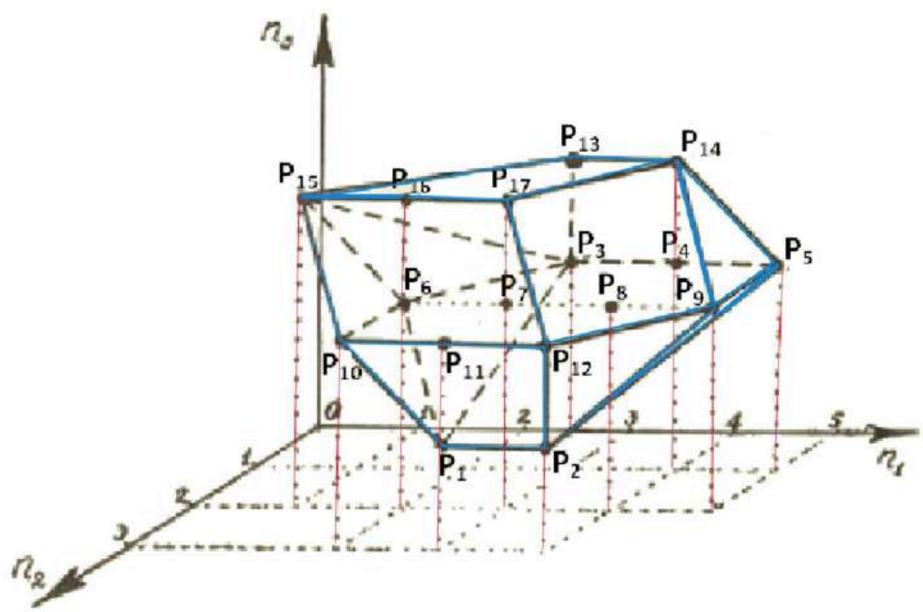


Figura 6.24: Poliedro atemperante de $\mathbf{G}^{3,5,7}$

Las notas de la gama tetraharmónica son:

$$\mathbf{g}^{3,5,7}_{n_1,n_2,n_3} = F(n_1\log_2 3 + n_2\log_2 5 + n_3\log_2 7).$$

La atemperación de Domínguez Berrueta está dada por la elección de los 17 puntos del poliedro. Las notas correspondientes se ven en la siguiente tabla, donde indicamos con $\rightarrow$ la correspondencia entre punto y nota.

$$
\begin{array}{ll}
P_1 = (3,3,1) \to sol\flat & P_9 = (5,2,2) \to re \\
P_2 = (4,3,1) \to re\flat & P_{10} = (2,3,2) \to la \\
P_3 = (3,1,2) \to la\flat & P_{11} = (3,3,2) \to mi \\
P_4 = (4,1,2) \to mi\flat & P_{12} = (4,3,2) \to si \\
P_5 = (5,1,2) \to si\flat & P_{13} = (3,1,3) \to fa\sharp \\
P_6 = (2,2,2) \to fa & P_{14} = (4,1,3) \to do\sharp \\
P_7 = (3,2,2) \to do & P_{15} = (1,2,3) \to sol\sharp \\
P_8 = (4,2,2) \to sol & P_{16} = (2,2,3) \to re\sharp \\
 & P_{17} = (3,2,3) \to \mathbf{te}
\end{array}
$$

A la nota $la\sharp$, que corresponde al séptimo armónico de do, le da un nuevo nombre: te, porque rima con re, así como sol y do, fa y la , mi y si. Observemos también que, si consideramos la escala cromática habitual:

$$do_1,\ do\sharp,\ re,\ re\sharp,\ mi,\ fa,\ fa\sharp,\ sol,\ sol\sharp,\ la,\ la\sharp,\ si,\ do_2,$$

allí se identifican las notas enarmónicas $sol\flat$ y $fa\sharp$, $re\flat$ y $do\sharp$, $la\flat$ y $sol\sharp$ $mi\flat$ y $re\sharp$, $si\flat$ y $la\sharp$. La gama tetraharmónica, en cambio, las diferencia. De ahí que "sobren" cinco notas.

Notemos que al variar las primeras componentes estamos moviéndonos según el tercer armónico, es decir por quintas (aparece el "ciclo de quintas" $fa - do - sol - re - la - mi - si$). Si varía la segunda componente, se sube (o se baja) una tercera, es decir, juega el quinto armónico; finalmente moviendo la tercera componente un lugar varía en una séptima. Podemos calcular las notas $\mathbf{g}^{3,5,7}_{n_1,n_2,n_3}$, que ordenadas por valores ascendentes son:

$$\begin{gathered} do,\ do\sharp,\ re\flat,\ re,\ re\sharp,\ mi\flat,\ mi,\ fa, \\ fa\sharp,\ sol\flat,\ sol,\ sol\sharp,\ la\flat,\ la,\ te,\ si\flat,\ si,\ do. \end{gathered}$$

Estudiando las condiciones de esta atemperación, se puede probar que la coma es: $\varepsilon = 0,00642$, que es muy pequeña. Hay 5 intervalos diferentes entre notas sucesivas y las diferencias segundas son pequeñas, de modo que tiene una regularidad aceptable. El número 17 de notas es manejable. Se cumplen así las tres condiciones requeridas para que la escala sea "buena".

6.6.1. Acordes perfectos mayores y menores

Se observa aquí que los acordes mayores perfectos tienen 4 notas, por ejemplo:

$la\flat - mi\flat - do - fa\sharp$,

$mi\flat - si\flat - sol - do\natural$,

$fa - do - la - re\natural$.

Estos corresponden, respectivamente, a los tetraedros:

$(3,1,2),(4,1,2),(3,2,2),(3,1,3)$,

$(4,1,2),(5,1,2),(4,2,2),(4,1,3)$ y

$(2,2,2),(3,2,2),(2,3,2),(2,2,3)$.

Como dijimos en la sección anterior, una traslación no altera los intervalos, de modo que podríamos tomar como "prototipo" un tetraedro en el origen, que tendrá vértices:

$(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$.

Por otra parte, son acordes menores, por ejemplo:

$si - mi - sol - re\flat$,

$te - re\natural - fa\natural - do$.

Ellos corresponden a los tetraedros:

$(4,3,2),(3,3,2),(4,2,2),(4,3,1)$ y

$(3,2,3),(2,2,3),(3,1,3),(3,2,2)$.

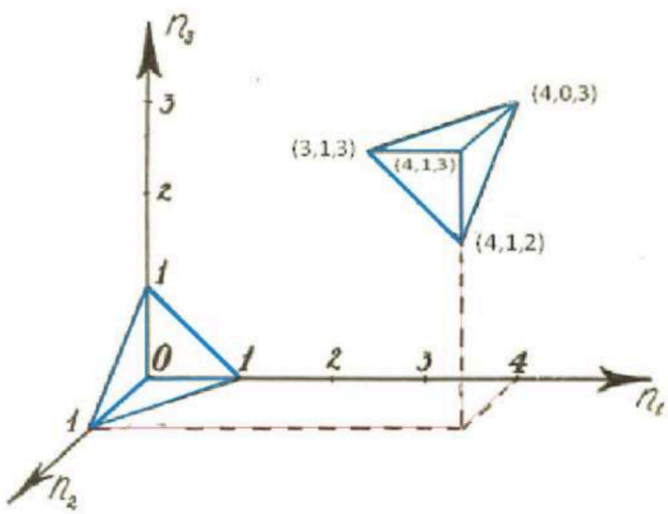


Figura 6.25: Acordes mayor y menor

Análogamente, podemos considerar como prototipo de los acordes menores el acorde en el punto $(1,1,1)$:

$(1,1,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)$

Los acordes mayores y menores se ubican simétricamente en el espacio, como se ve en la Figura 6.25.

Capítulo 7

La armonía

Cuando cantamos, emitimos notas sucesivas que forman lo que se llama una *melodía*. Pero no podemos cantar dos notas a la vez. La música se enriquece si acompañamos una melodía con notas o conjuntos de notas que “suenen bien” junto con esta, emitidas por instrumentos o por otras personas que cantan. Es lo que sucede en un coro o en una orquesta. Estos acompañamientos o armonizaciones, que forman acordes, son los que determinan la *armonía* de una composición musical. La melodía y la armonía se complementan de tal modo que se condicionan mutuamente. Como podemos ver en el capítulo de teoría musical, en una partitura los acordes se escriben en forma vertical, mientras que la melodía se desarrolla horizontalmente, formando entre ambas como un plano sonoro.

Dentro del marco de la teoría de las gamas que acabamos de exponer en el capítulo anterior podemos desarrollar ahora algunos aspectos de la armonía desde un punto de vista matemático.

Definiremos distintos tipos de acordes: los característicos de cada gama que son los mayores y menores (que vimos en los ejemplos), y también los alterados y los imperfectos.

Estudiaremos cómo representar un acorde por una frecuencia llamada el *bajo fundamental*, que resume la “información” de las frecuencias del acorde más los que se agregan por condiciones físicas: armónicos y diferencias de Tartini. A partir de esa noción podremos definir diversos tipos de consonancia de un acorde.

7.1. Los acordes

Hemos visto en los ejemplos del capítulo anterior lo que llamamos acordes perfectos mayores y menores de cada gama. Vamos a dar ahora una definición general de ellos y de otros tipos de acordes que pueden definirse en esta teoría que estamos desarrollando.

7.1.1. Acordes perfectos mayores y menores

En los ejemplos de atemperaciones del capítulo anterior vimos, en primer lugar, que para una gama generada con un solo número primo elegimos números que están **sobre una recta**; tomamos, por ejemplo, naturales sucesivos $0, 1, 2, 3, 4$ en $\mathbf{G}_4^3$ y $0, 1, 2, ..,11$ en $\mathbf{G}_{11}^3$. Para el caso de dos números primos, elegimos pares de números enteros que están **en un plano** y a ese conjunto lo identificábamos con un polígono que puede dibujarse en el plano y que llamábamos "polígono atemperante", como el trapecio que produce la escala diatónica de Tolomeo-Zarlino. Cuando considerábamos tres números primos generadores de la gama elegíamos ternas de números enteros, que están en el espacio E_3 de 3 dimensiones, que definían lo que llamamos "poliedro atemperante", como el caso del poliedro asociado a la escala tetraharmónica de Domínguez Berrueta.

En general, podemos tener un número cualquiera r de números primos que genera una gama $\mathbf{G}^{p_1,p_2,...,p_r}$. Una atemperación de ella se define por un poliedro generalizado a r dimensiones que llamaremos "r-poliedro atemperante", que estará en el espacio E_r de r dimensiones. Claro está que ya no tendremos una representación geométrica.

Fijemos una $\mathbf{G}_U^{p_1,p_2,...,p_r}$ atemperada por un r-poliedro U. Sea una nota $\mathbf{g}_{n_1,n_2,...,n_r}^{p_1,p_2,...,p_r}$. Suprimiremos el supraíndice $p_1, p_2, ..., p_r$ para mayor claridad y abreviaremos en lo posible la r-upla $(n_1, n_2, ..., n_r)$ por N, como veníamos haciendo.

En primer lugar, recordemos que las frecuencias que estamos considerando son de la forma

$$f = p_1^{n_1} \cdot ... \cdot p_r^{n_r},$$

(con $p_1, ...p_r$ primos mayores que 2) porque estamos estudiando lo que podemos hacer con las notas, que queremos que estén en la primera octava.

Recordemos que

$$\mathbf{g}_N = \mathbf{g}_{n_1,n_2,...,n_r} = F(n_1 \log_2 p_1 + n_2 \log_2 p_2 + ... + n_r \log_2 p_r) =$$

$$= F(n_1\pi_1 + n_2\pi_2 + ... + n_r\pi_r).$$

Veamos cómo es la forma general de los acordes perfectos mayores y menores.

Como enunciamos en 5 de 6.3, el armónico p_k de una nota $\mathbf{g}_N$ es

$$\mathbf{g}_N \oplus \mathbf{g}_k,$$

siendo $\mathbf{g}_k$ la nota coordenada:

$$\mathbf{g}_k = F(\log_2 p_k) = F(\pi_k).$$

El acorde perfecto mayor por definición es el formado por la nota fundamental o tónica y todos sus armónicos $p_1, p_2, ..., p_r$. Luego, el acorde mayor de tónica $\mathbf{g}_N$ estará dado por:

$$\mathbf{g}_N, \quad \mathbf{g}_N \oplus \mathbf{g}_1, \quad \mathbf{g}_N \oplus \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_N \oplus \mathbf{g}_r.$$

También en 6.3, Propiedad 3, vimos que la suma $\oplus$ de dos notas da como resultado una nota que corresponde a la r-upla suma [1] de las de las notas sumadas, es decir, en este caso:

$$(n_1, n_2, ..., n_k, ..., n_r) + (0, 0, ..., 1, ..., 0) = (n_1, n_2, ..., n_k + 1, ..., n_r).$$

Luego, podemos dar esta forma del acorde mayor, haciendo variar k desde 1 hasta r:

$$\mathbf{g}_{n_1,n_2,...,n_r}, \quad \mathbf{g}_{n_1+1,n_2,...,n_r}, \quad \mathbf{g}_{n_1,n_2+1,...,n_r}, ..., \mathbf{g}_{n_1,n_2,...,n_r+1},$$

como puede verse en la sección 39 de [41].

Denotaremos un acorde mayor por las coordenadas de su nota fundamental entre corchetes:

$$[n_1, n_2, ..., n_r].$$

Como vimos, por la Propiedad 6 de 6.3, una traslación no altera los intervalos, por lo que cuando convenga podemos tomar el acorde mayor en el punto $(n_1, n_2, ..., n_r) = (0, 0, ..., 0)$ del espacio E_r.

Vamos a calcular ahora los acordes perfectos menores.

El acorde perfecto menor es por definición el formado por la nota fundamental o tónica $\mathbf{g}_N$ y las r notas para las cuales $\mathbf{g}_N$ es su armónico k-ésimo.

[1] Ver 2.0.2 en el Capítulo 2.

Como vimos en 5 de 6.3, $\mathbf{g}_N$ representa el armónico k-ésimo de la nota

$$\mathbf{g}_N \ominus \mathbf{g}_k.$$

Luego, el acorde perfecto menor será (poniendo la tónica al final, por ser la más alta):

$$\mathbf{g}_N \ominus \mathbf{g}_1, \quad \mathbf{g}_N \ominus \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_N \ominus \mathbf{g}_k, ..., \mathbf{g}_N \ominus \mathbf{g}_r, \mathbf{g}_N.$$

Teniendo en cuenta 3 de 6.3, podemos ver que

$$\mathbf{g}_N \ominus \mathbf{g}_k = \mathbf{g}_{n_1,n_2,...,n_k,...n_r} \ominus \mathbf{g}_{0,0,...,1,...,0} = \mathbf{g}_{n_1,n_2,...,n_k-1,...n_r}.$$

Por lo tanto, las notas del acorde serán (haciendo variar sucesivamente $k = 1, ..., r$):

$$\mathbf{g}_{n_1-1,n_2,...,n_r}, \quad \mathbf{g}_{n_1,n_2-1,...,n_r}, \cdots, \mathbf{g}_{n_1,n_2,...,n_r-1}, \quad \mathbf{g}_{n_1,n_2,...,n_r}.$$

Podemos tomar cuando convenga el acorde menor trasladado al punto $(1, 1, ..., 1)$ del espacio E_r.

Denotamos los acordes menores con el índice de la nota que lo determina entre llaves:

$$\{n_1, n_2, ..., n_r\}.$$

Estas definiciones, como dijimos en 6.5, coinciden en esencia con las ideas de Rameau y de H. Riemann, [2] en el sentido de considerar el acorde menor como una especie de inversión del mayor, ya que los intervalos que contiene el menor, contados hacia abajo, son los mismos que contiene el acorde mayor, pero en este contados hacia arriba. Se considera entonces que la nota fundamental del acorde menor es la más alta, mientras que en el mayor es la más baja. Aparece entonces un *principio de dualidad.* El acorde mayor es el que revela directamente la estructura armónica de la gama en la cual trabajamos, pues nos da una nota y todos sus armónicos. El menor parecería no ser tan "natural". Es por eso tal vez que el acorde mayor da sensación de plenitud, de brillo. En cambio el menor da una sensación más tenue e intimista.

Veamos algunos ejemplos.

En la gama Pitagórica cromática $\mathbf{G}^3_{11}$, el acorde mayor *do* − *sol* cuyas notas corresponden a los puntos 0 y 1 se denota [0], el *si* − *fa*♯ será [5], etc. Los acordes menores, cuya nota fundamental es la "de arriba", serán,

[2] Ver 4.5.

por ejemplo, $\{1\}$, que es $sol - do$,"el mismo" que el acorde mayor $[0]$; otro ejemplo: $\{8\}$, que corresponde al acorde menor de $sol\sharp$: $sol\sharp - do\sharp$.

En $\mathbf{G}^{3,5}_{F_1E_1EF}$, que es copia de la gama tolemaica diatónica, vimos que los acordes mayores son (ver Figura 6.19):

$$fa - la - do, \quad do - mi - sol \text{ y } \; sol - si - re,$$

que se simbolizan, respectivamente:

$$[-1, 0], \quad [0, 0] \text{ y } \; [1, 0],$$

según las coordenadas de fa, do y sol.
Los acordes menores son:

$$mi - la - do \text{ y } \; si - mi - sol,$$

que se denotan:

$$\{0, 1\} \text{ y } \; \{1, 1\},$$

por las coordenadas de mi y de si.

En cuanto a la gama $\mathbf{G}^{3,5,7}$, los acordes mayores

$$la\flat - mi\flat - do - fa\sharp, \quad mi\flat - si\flat - sol - do\sharp \text{ y } \quad fa - do - la - re\sharp,$$

se denotan, respectivamente,

$$[3, 1, 2], \; [4, 1, 2] \text{ y } \; [2, 2, 2].$$

Los acordes menores

$$si - mi - sol - re\flat \text{ y } \; te - re\sharp - fa\sharp - do$$

se denotan:

$$\{4, 3, 2\} \text{ y } \; \{3, 2, 3\}.$$

Observación 4. A menudo al dar un acorde como ejemplo se dan las notas en el orden numérico en que aparecen en la tabla (que es el usual de las notas: *do*, *re*,...) y **no** en el orden del acorde según se definió. Por ejemplo: el acorde $fa - la - do$ está dado en el orden de las notas, correspondiente a los puntos $(-1, 0)$, $(-1, 1)$ y $(0, 0)$. El orden en el que se definió el acorde, sin embargo, es: $(-1, 0)$, $(0, 0)$ y $(-1, 1)$.

Veamos ahora otro tipo de acordes que pueden definirse en general.

7.1.2. Acordes alterados

Hemos visto en el Capítulo 1 las nociones de acorde aumentado y disminuído. Vamos a introducir aquí una noción que podemos considerar una generalización de aquellas.

Así como los acordes perfectos mayores y menores presentan una “dualidad”, las alteraciones de los mayores (respectivamente de los menores) son “sustituciones” operadas sobre algunas de sus notas.

Indicaremos por $\overline{\mathbf{g}_{n_1,\ldots,n_r}}$ a una nota tal que $\overline{\mathbf{g}_{n_1,\ldots,n_r}} > \mathbf{g}_{n_1,\ldots,n_r}$ y no hay otra nota entre las dos. Análogamente, $\underline{\mathbf{g}_{n_1,\ldots,n_r}}$ es tal que $\underline{\mathbf{g}_{n_1,\ldots,n_r}} < \mathbf{g}_{n_1,\ldots,n_r}$ y no hay ninguna nota entre las dos.

Las notas $\overline{\mathbf{g}_{n_1,\ldots,n_r}}$ y $\underline{\mathbf{g}_{n_1,\ldots,n_r}}$ son las *alteraciones* de $\mathbf{g}_{n_1,\ldots,n_r}$.

Para facilitar la notación, a menudo escribiremos $\underline{(n_1,\ldots,n_r)}$ en lugar de $\underline{\mathbf{g}_{n_1,\ldots,n_r}}$ y $\overline{(n_1,\ldots,n_r)}$ en lugar de $\overline{\mathbf{g}_{n_1,\ldots,n_r}}$.

Dado un acorde mayor $[n_1,\ldots n_r]$, denotaremos $\overline{[n_1,\ldots n_r]}$ al acorde que se obtiene del anterior sustituyendo la tónica por su alteración ascendente. Análogamente $\underline{[n_1,\ldots n_r]}$ denotará el acorde obtenido sustituyendo en el dado la tónica por su alteración descendente. De la misma manera definimos los acordes $\overline{\{n_1,\ldots n_r\}}$ y $\underline{\{n_1,\ldots n_r\}}$ a partir del acorde menor $\{n_1,\ldots n_r\}$.

También se pueden alterar otras notas del acorde. Supongamos que tenemos un acorde mayor de $\mathbf{G}^{3,5}_{ABGH}$ formado por tres notas a, b y c, siendo $a = \mathbf{g}_{m,n}$ la tónica, $b = \mathbf{g}_{m+1,n}$, $c = \mathbf{g}_{m,n+1}$. Tenemos las siguientes posibilidades, que daremos con su correspondiente notación abreviada:

$$\overline{[m,n]} = \overline{a} - b - c,$$

$$[\overline{m},n] = a - \overline{b} - c,$$

$$[m,\overline{n}] = a - b - \overline{c},$$

$$[\overline{m},\overline{n}] = a - \overline{b} - \overline{c},$$

$$\overline{[\overline{m},n]} = \overline{a} - \overline{b} - c,$$

$$\overline{[m,\overline{n}]} = \overline{a} - b - \overline{c},$$

$$\overline{[\overline{m},\overline{n}]} = \overline{a} - \overline{b} - \overline{c}.$$

Dado un acorde (mayor o menor), llamaremos *acorde alterado* de aquél en una atemperación $\mathbf{G}^{p_1,p_2,\ldots,p_r}_{W}$ al que se obtiene sustituyendo una o varias notas por la o las de valor más próximo por defecto o por exceso, es decir, por sus alteraciones.

Veamos algunos ejemplos.

Tomemos la gama $\mathbf{G}^{3}_{11}$ (ver Figuras 6.7, 6.9 y 6.10).

El acorde mayor $la - mi$, como hemos visto, se denota $[3]$. Entonces $\overline{[3]} = la\sharp - mi$ y $\underline{[3]} = sol\sharp - mi$.

Consideremos ahora la atemperación $\mathbf{G}^{3,5}_{ABGH}$ de la gama $\mathbf{G}^{3,5}$ que se grafica en la Figura 6.19 de la sección 6.5. Recordemos que el trapecio $ABCD$ contiene las notas de la escala cromática con bemoles, el F_1E_1EF las notas naturales y el trapecio H_1G_1GH las notas con sostenidos. Sus valores están en la tabla 6.20.

El acorde mayor $mi\flat - sol - si\flat$ está formado por las notas de los puntos $(1,-1)$, $(1,0)$ y $(2,-1)$.

La tónica del acorde, $mi\flat$, que correspondía al punto $(6,2)$, se obtiene por (como dijimos en 6.5.2):

$$\mathbf{g}_{6,2} \ominus \mathbf{g}_{5,3} = \mathbf{g}_{1,-1}.$$

Luego, el acorde mayor será denotado: $[1,-1]$.

Como podemos ver en la tabla 6.12: $\mathbf{g}_{6,2} = 0,15363$ y $\mathbf{g}_{5,3} = 0,89059$.

Luego resulta:

$$\mathbf{g}_{1,-1} = 0,26304,$$

que es el valor de $mi\flat$ correspondiente a la tabla 6.20.

Luego $\underline{[1,-1]}$ es el acorde $re\sharp - sol - si\flat$, obtenido "bajando" la tónica a su alteración descendente y $\overline{[1,-1]}$ es $mi - sol - si\flat$, obtenido reemplazando la tónica por su alteración ascendente.

Tomemos ahora el acorde mayor $do-mi-sol$, que se origina en los puntos $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ y que se denota $[0,0]$.

Las alteraciones de la nota sol son, como puede comprobarse en la tabla 6.20, $\underline{sol} = sol\flat$ y $\overline{sol} = sol\sharp$.

Luego, del $[0,0]$ también obtenemos los acordes $do - mi - sol\sharp$ y $do - mi - sol\flat$ alterando el sol.

Por último, tomemos en la atemperación $\mathbf{G}^{3,5,7}_{P}$ de Domínguez Berrueta el acorde menor:

$$te - re\sharp - fa\sharp - do,$$

que corresponde al tetraedro

$$(3,2,3), (2,2,3), (3,1,3), (3,2,2),$$

y se denota

$$\{3,2,3\}.$$

Algunos de los posibles acordes alterados son:

$$\underline{\{3,2,3\}} = la - re\sharp - fa\sharp - do,$$

$$\overline{\{3,2,3\}} = si\flat - re\sharp - fa\sharp - do,$$
$$te - \overline{re\sharp} - fa\sharp - \overline{do} = te - mi\flat - fa\sharp - do\sharp,$$

etc.

Podemos extender aún más esta definición, como veremos en seguida.

7.1.3. Acordes imperfectos

A partir de los acordes característicos de la gama, que son los mayores y menores, veremos ahora una nueva manera de obtener acordes "sumergiendo" las notas en otras de dimensión mayor. Los que trataremos ahora son también obtenidos por alteraciones, pero provenientes "de otra dimensión", por lo que serán llamados alterados *imperfectos*.

Hasta ahora hemos supuesto que el espacio que contiene al r-poliedro atemperante tiene la dimensión r del poliedro; por ejemplo: un segmento está contenido en la recta, que es un espacio de dimensión 1, un polígono está contenido en el plano, que es de dimensión 2, un poliedro está en el espacio de dimensión 3 y más allá no podemos representarlo gráficamente y nos es difícil imaginarlo. Pero también podemos considerar un segmento en el plano, o un polígono en el espacio, o un poliedro en un espacio de 4 o más dimensiones. Podemos ver ejemplos en la Figura 2.10 de 2.1.

Si consideramos al r-poliedro U como sumergido en un espacio de dimensión s, con $s > r$, podemos definir lo que llamaremos un acorde alterado imperfecto de un acorde dado (mayor o menor), o simplemente *acorde imperfecto*; este será el obtenido sustituyendo una (si $s = r+1$) o varias notas por las de valor más próximo. ¿Cuántas podemos sustituir? Tantas como $s - r$, que son las que "sobran".

Veamos primero una propiedad de las notas básicas que nos ahorrará cálculos.

Observación 5. Tomemos gamas de a lo sumo tres primos p_1, p_2, p_3, aunque esta propiedad vale en general.

Dada una nota básica $\mathbf{g}_a \in \mathbf{G}^{p_1}$, ella tiene el mismo valor que las notas básicas $\mathbf{g}_{a,0} \in \mathbf{G}^{p_1,p_2}$ (o que $\mathbf{g}_{a,0} \in \mathbf{G}^{p_1,p_3}$) y que $\mathbf{g}_{a,0,0} \in \mathbf{G}^{p_1,p_2,p_3}$. En efecto:

$$\mathbf{g}_a = \mathbf{g}_{a,0} = \mathbf{g}_{a,0,0} = F(a \log_2 p_1).$$

Análogamente, para una nota básica $\mathbf{g}_b \in \mathbf{G}^{p_2}$ se tiene que

$$\mathbf{g}_b = \mathbf{g}_{0,b} = \mathbf{g}_{0,b,0} = F(b \log_2 p_2),$$

siendo $\mathbf{g}_{0,b} \in \mathbf{G}^{p_1,p_2}$ (o bien $\mathbf{g}_{b,0} \in \mathbf{G}^{p_2,p_3}$) , $\mathbf{g}_{0,b,0} \in \mathbf{G}^{p_1,p_2,p_3}$. Por último vemos que si $\mathbf{g}_c \in \mathbf{G}^{p_3}$ es básica, se cumple que:

$$\mathbf{g}_c = \mathbf{g}_{0,c} = \mathbf{g}_{0,0,c} = F(c \log_2 p_3),$$

siendo $\mathbf{g}_{0,c} \in \mathbf{G}^{p_1,p_3}$ o $\mathbf{g}_{0,c} \in \mathbf{G}^{p_2,p_3}$, $\mathbf{g}_{0,0,c} \in \mathbf{G}^{p_1,p_2,p_3}$.

Vamos a ver ahora algunos ejemplos de acordes imperfectos.

Tomemos el acorde mayor $do - mi - sol$ de $\mathbf{G}^{3,5}_{T'}$, de la gama diatónica tolemaica (ver Figura 6.16 y tabla 6.17) cuya tónica es el *do* representado por $\mathbf{g}_{6,1}$ y lo sumergimos en el espacio de tres dimensiones. El acorde, que originalmente está determinado por las notas “de dos dimensiones” $\mathbf{g}_{6,1}, \mathbf{g}_{7,1}, \mathbf{g}_{6,2}$, ahora está originado por los puntos $(6,1,0)$, $(7,1,0)$ y $(6,2,0)$ y podemos considerarlo parte del acorde mayor de $\mathbf{G}^{3,5,7}_{P}$, la gama tetraharmónica de Domínguez Berrueta.

La tónica del acorde, $\mathbf{g}_{6,1}$, ahora la miramos como $\mathbf{g}_{6,1,0}$ y la nota que representa su séptimo armónico es, como sabemos, $\mathbf{g}_{6,1,1}$, que se obtiene sumando 1 a la tercera componente. Calculamos esa nota en $\mathbf{G}^{3,5,7}_{P}$ (ver 6.6). Aplicando la Propiedad 2, tenemos que: $\mathbf{g}_{6,1,1}$ es la suma $\oplus$ de las notas $\mathbf{g}_{6,0,0}$, $\mathbf{g}_{0,1,0}$ y $\mathbf{g}_{0,0,1}$, que son, respectivamente, tomando en cuenta los valores dados en 6.3:

$$\mathbf{g}_{6,0,0} = F(6 \log_2 3) = F(6 \cdot 1,58496) = F(9,50976) = 0,50976,$$

$$\mathbf{g}_{0,1,0} = F(\log_2 5) = 0,32193,$$

$$\mathbf{g}_{0,0,1} = F(\log_2 7) = 0,80735.$$

La suma da $1,63904$, luego

$$\mathbf{g}_{6,1,1} = F(1,63904) = 0,63904.$$

Buscamos ahora **en la gama original** $\mathbf{G}^{3,5}_{T'}$ (ver tabla 6.17) el valor más próximo a ella **por defecto o por exceso** ya sea que queremos alterarla “hacia abajo” o “hacia arriba”. Las notas obtenidas son, respectivamente:

$$\mathbf{g}_{5,2} = 0,56867 \text{ y } \mathbf{g}_{7,2} = 0,73860.$$

Completando ahora el acorde original con las notas así calculadas, obtenemos, respectivamente:

$$\mathbf{g}_{6,1}, \mathbf{g}_{7,1}, \mathbf{g}_{6,2}, \mathbf{g}_{5,2} \text{ y } \mathbf{g}_{6,1}, \mathbf{g}_{7,1}, \mathbf{g}_{6,2}, \mathbf{g}_{7,2},$$

o sea:

$$do - mi - sol - la \text{ y } do - mi - sol - si.$$

La nota agregada será llamada *disonancia característica* y se indicará entre paréntesis. Vemos la disonancia en el primer acorde entre *sol* y *la* y en el segundo entre *do* y *si*.

Consideremos ahora el plano que contiene al polígono $ABGH$ que atempera la gama tolemaica cromática (ver Figura 6.19) sumergido en el espacio de tres dimensiones, donde el tercer eje representa el armónico 7. Tomemos el acorde mayor $mi\flat - sol - si\flat$ que está dado por los puntos $(1, -1)$, $(1, 0)$ y $(2, -1)$.

Sumergido ahora en la gama tetraharmónica, podemos completarlo al acorde mayor: $[1, -1, 0]$. El armónico 7 de la tónica está dado por el punto $(1, -1, 1)$. Calculemos $\mathbf{g}_{1,-1,1}$. Por la propiedad de descomposición (ver Propiedad 2 de 6.3), tenemos que:

$$\mathbf{g}_{1,-1,1} = \mathbf{g}_{1,0,0} \oplus \mathbf{g}_{0,-1,0} \oplus \mathbf{g}_{0,0,1}.$$

Como habíamos observado en 5:

$$\mathbf{g}_{1,0,0} = \mathbf{g}_{1,0}^{3,5} = \mathbf{g}_{1}^{3} = 0,58496,$$

$$\mathbf{g}_{0,0,1} = F(\log_2 7) = 0,80735.$$

Además:

$$\mathbf{g}_{0,-1,0} = F(-\log_2 5) = 1 - F(\log_2 5) = 0,67817,$$

Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{g}_{1,0,0} \oplus \mathbf{g}_{0,-1,0} \oplus \mathbf{g}_{0,0,1} = F(0,58496 + 0,67817 + 0,80735),$$

obtenemos

$$\mathbf{g}_{1,-1,1} = 0,07048.$$

Ahora observamos en 6.20 cuáles son los valores por encima y por debajo de este. Resulta:

$$\overline{\mathbf{g}_{1,-1,1}} = re\flat \quad \text{y} \quad \underline{\mathbf{g}_{1,-1,1}} = do\sharp.$$

Concluímos que el acorde imperfecto ascendente del $mi\flat - sol - si\flat$, es

$$mi\flat - si\flat - sol - re\flat.$$

Lo indicamos por

$$[1, -1, (\overline{7})].$$

El acorde imperfecto descendente es

$$mi\flat - si\flat - sol - do\sharp.$$

Lo indicamos por

$$[1, -1, (\underline{7})].$$

Tomemos ahora el acorde menor de mi: $la - do - mi$ de la atemperación $\mathbf{G}^{3,5}_{ABGH}$, que en la Figura 6.19 está dado por los puntos $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ y se simboliza $\{0, 1\}$.

Podemos considerarlo sumergido en el acorde menor de la gama $\mathbf{G}^{3,5,7}_{P}$, representado por los puntos $(-1, 1, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(0, 1, -1)$ y $(0, 1, 0)$.

Recordando que $(0, 1, 0)$ da el séptimo armónico de la nota $\mathbf{g}_{0,1,-1}$, será (ver Propiedad 5 en 6.3)

$$\mathbf{g}_{0,1,-1} = \mathbf{g}_{0,1,0} \ominus \mathbf{g}_{0,0,1} = 0,32193 \ominus 0,80735 = 0,51458.$$

Ahora debemos buscar en la tabla 6.20 cuáles son los valores por encima y por debajo de este. Encontramos $0,52608$, que es $sol\flat$, y $0,47394$, que es $fa\sharp$, respectivamente.

Luego, obtenemos: $\{0, 1, (\overline{7})\}$, $\{0, 1, (\underline{7})\}$ que son:

$$la - do - mi - sol\flat \quad \text{y} \quad la - do - mi - fa\sharp.$$

7.1.4. Acordes relativos

Vamos a definir ahora el concepto de *acordes relativos*, similar al que conocemos. [3]

Consideremos, en general, un acorde mayor: $[n_1, n_2, ..., n_r]$ en una gama $\mathbf{G}^{p_1,p_2,...,p_r}$. Está compuesto, como vimos, por las notas:

$$\mathbf{g}_{n_1,n_2,...,n_r},\ \mathbf{g}_{n_1+1,n_2,...,n_r},\ \mathbf{g}_{n_1,n_2+1,...,n_r}, \cdots,\ \mathbf{g}_{n_1,n_2,...,n_r+1}.$$

y un acorde menor $\{m_1, m_2, ..., m_r\}$, por las notas:

$$\mathbf{g}_{m_1,m_2,...,m_r},\ \mathbf{g}_{m_1-1,m_2,...,m_r},\ \mathbf{g}_{m_1,m_2-1,...,m_r}, \cdots,\ \mathbf{g}_{m_1,m_2,...,m_r-1}.$$

Vamos a definir como los *acordes relativos menores* correspondientes a $[n_1, n_2, ..., n_r]$ a todos aquellos que tengan un máximo de notas coincidentes con el dado.

[3] Ver Capítulo 1.

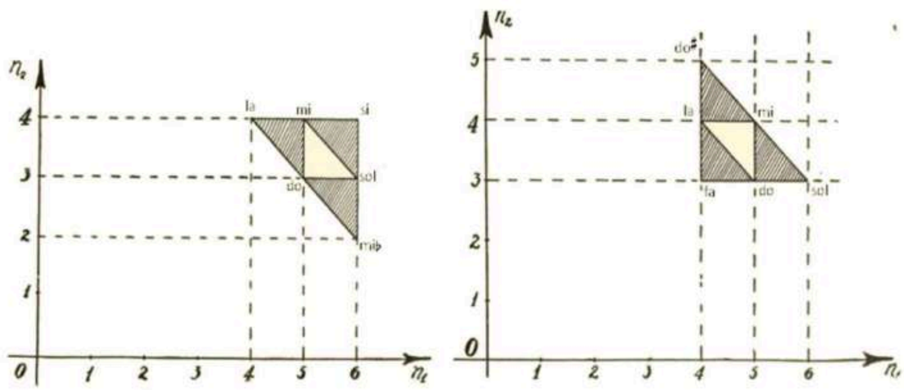


Figura 7.1: Acordes relativos menores y mayores

Es posible probar, dada la forma de los acordes menores, que ese número máximo es 2 y que hay exactamente $\frac{r(r+1)}{2}$ de ellos. [4] Por dualidad, dado un acorde menor $\{m_1, m_2, ..., m_r\}$, habrá también $\frac{r(r+1)}{2}$ *acordes relativos mayores* asociados a él.

En la Figura 7.1 se puede ver, a la izquierda, el acorde mayor $[5, 3]$ ($do - mi - sol$ en la escala tolemaica cromática) y sus relativos menores: $si - mi - sol$, $sol - do - mi\flat$, $mi - la - do$.

A la derecha el acorde menor $\{5, 4\}$ ($mi - la - do$) y sus relativos mayores: $la - mi - do\sharp$, $do - sol - mi$ y $fa - do - la$.

7.1.5. Bajo fundamental de un acorde

Vamos a tratar ahora de encontrar una frecuencia, que llamaremos el *bajo fundamental* y que denotaremos **b**, que caracteriza a cada acorde menor o mayor dados por sus frecuencias. Cada una de las del acorde, los armónicos de estas y todas las "diferencias de Tartini" serán múltiplos de **b**.[5]

Las frecuencias f que estamos considerando, en una gama cualquiera, son productos de potencias de números primos (incluído ahora el 2) de la forma:

$$f = 2^{n_0} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot ...p_r^{n_r}.$$

[4] Ver sección 44, páginas 120 y 121 de [41].

[5] Ver Tartini en Capítulo 3, 3.1.1.

Supongamos que conocemos un acorde por el conjunto de sus frecuencias: $f_1 - f_2 - ... - f_k$. Cada frecuencia es en general un número racional, pero podemos multiplicar a cada una por el mínimo común múltiplo de los denominadores [6] que aparecen en las $f_1 - f_2 - ... - f_k$, que llamaremos m, y las subimos todas en ese número para trabajar con números naturales, obteniendo así las frecuencias $f'_1, f'_2, ..., f'_k$. Lo que hacemos es calcular el armónico m de las frecuencias $f_1 - f_2 - ... - f_k$. Tomamos ahora el máximo común divisor d [7] de los números naturales $f'_1, f'_2, ..., f'_k$.

Esta frecuencia d es el *bajo fundamental* del acorde $f'_1, f'_2, ..., f'_k$. El bajo fundamental **b** del acorde original $f_1 - f_2 - ... - f_k$ será la frecuencia $\frac{d}{m}$.

Por ejemplo, tomemos el acorde mayor.

Se prueba que todos los sonidos que acompañan al acorde son múltiplos de **b**. ¿Cuáles son esos sonidos? Son, como dijimos, en primer lugar los armónicos de los del acorde y además los "sonidos de Tartini". Veamos esto.

En primer lugar, **b** es divisor de cada una de las frecuencias f_i del acorde, o sea, cada f_i es múltiplo de $\mathbf{b} = \frac{d}{m}$. En efecto, para $i = 1, ...k$ es $f'_i = f_i \cdot m$ luego se tiene

$$f_i = (\frac{d}{m}) \cdot \frac{f'_i}{d},$$

por lo que, como d es divisor de f'_i, f_i resulta **b** multiplicado por un entero.

Además, cada armónico de cada f_i es múltiplo de **b**, pues los armónicos son múltiplos de f_i. Por otra parte, se ve por recurrencia que cada diferencia de múltiplos es también un múltiplo.

Si las frecuencias son números primos entre sí, su bajo fundamental es 1.

Veamos un ejemplo.

Consideremos el acorde tolemaico mayor $fa - la - do$, cuyas frecuencias son $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$ y 2. Si multiplicamos la frecuencias por 3, obtendremos: $4, 5, 6$, que también es un acorde mayor porque los intervalos se conservan por traslación, según la propiedad 6 de 6.3. Observemos que multiplicar por 3 es tomar el armónico 3 de cada frecuencia, que también se obtiene subiendo una quinta (es decir, multiplicando por $\frac{3}{2}$) y luego una octava (multiplicando por 2). En este nuevo acorde $4, 5, 6$ las frecuencias son números primos entre sí. Luego, su bajo fundamental es 1, o sea, la cuarta parte de la tónica. En el acorde original el bajo fundamental será una frecuencia que tiene con la tónica la misma relación que en el $4, 5, 6$, o sea, será la cuarta parte de la tónica,

[6] ver Capítulo 2.
[7] ver Capítulo 2.

que es un fa dos octavas más abajo que el dado, cuya frecuencia: $\frac{1}{3}$, se obtiene dividiendo por 3 el bajo fundamental del $4, 5, 6$. Observemos que las frecuencias originales son múltiplos de $\mathbf{b} = \frac{1}{3}$:

$\frac{4}{3} = 4 \cdot \frac{1}{3}$, $\frac{5}{3} = 5 \cdot \frac{1}{3}$ y $2 = 6 \cdot \frac{1}{3}$.

Veamos este mismo ejemplo con frecuencias absolutas, considerando como referencia la afinación del *la* en la frecuencia 440, como es habitual. Si queremos que la referencia sea *la*, dividamos las tres frecuencias $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$ y 2 por $\frac{5}{3}$. Nos queda, simplificando: $\frac{4}{5}$, 1 y $\frac{6}{5}$. Multiplicando por 440, tenemos que las frecuencias absolutas de fa, *la* y *do* son, respectivamente:

$$440 \cdot \frac{4}{5} = 88 \cdot 4, \;\; 440 \cdot 1 = 88 \cdot 5 \;\; y\; 440 \cdot \frac{6}{5} = 88 \cdot 6.$$

Luego, el máximo común divisor de las tres frecuencias (bajo fundamental) es 88.

Como fa es $4 \cdot 88$, o sea $2^2 \cdot 88$, resulta que el bajo fundamental está dos octavas abajo del fa del acorde, como ya sabíamos.

Observemos también aquí que el bajo fundamental, 88, es la **frecuencia absoluta dividida por la frecuencia relativa** de cada nota del acorde. En efecto: las frecuencias relativas de fa, *la* y *do* son, respectivamente: 4, 5 y 6. Luego:

$$88 = (440 \cdot \frac{4}{5}) \div 4 = 440 \div 5 = (440 \cdot \frac{6}{5}) \div 6.$$

Veamos otro ejemplo.

En la gama tolemaica cromática (ver Figura 6.19) tomemos el acorde mayor

$$do - sol - mi, \;\; \text{que es } [0,0], \; \text{dado por } (0,0), (1,0), (0,1).$$

Las notas tienen frecuencias:

$$3^0 \times 5^0 = 1, \;\; 3^1 \times 5^0 = 5 \;\; y\; 3^0 \times 5^1 = 3.$$

Como nos interesan los acordes menores que una octava, reducimos a la primera octava y tenemos: 1, $\frac{3}{2^1}$ y $\frac{5}{2^2}$. Para obtener valores enteros, multiplicamos por 2^2. O sea, multiplicamos por la mayor potencia de 2, que es la que divide al armónico mayor, 5 en este caso. Nos quedan: 4, 6 y 5, que son primos entre sí. Luego el MCD es 1 (bajo fundamental). Este se sitúa 2 octavas más abajo que la tónica, que es $4 = 2^2$. O sea que el bajo fundamental estará k octavas más abajo de la tónica, donde 2^k es la potencia de 2 por la que hay que dividir al armónico mayor para situarlo en la primera octava (en el ejemplo, $k = 2$).

En general, se prueba que *el bajo fundamental de un acorde mayor* $[n_1, n_2, ...n_r]$ *está tantas octavas más abajo de la tónica como indica el exponente* k *de 2 que corresponde para que el cociente* $\frac{p_r}{2^k}$ *esté en la primera octava, siendo* p_r *el armónico mayor*. Esto quiere decir que el número k de octavas que hay que correr hacia abajo la tónica es la parte entera E [8] del $\log_2 p_r$, al que llamamos usualmente π_r. En efecto:

$$1 \leq \frac{p_r}{2^k} < 2 \text{ es equivalente a } 2^k \leq p_r < 2^{k+1},$$

de donde

$$\log_2(2^k) = k \leq \log_2(p_r) < \log_2(2^{k+1}) = k + 1.$$

Esto significa que

$$E(\log_2(p_r)) = E(\pi_r) = k.$$

Podríamos observar entonces que *el bajo fundamental de un acorde mayor sólo depende del armónico mayor* p_r *de la gama.*

Por ejemplo, en cualquier gama $\mathbf{G}^{\cdots 11}$ que tenga como último factor primo el 11, todo acorde mayor tendrá su bajo fundamental 3 octavas más abajo de la tónica, pues $2^3 \leq 11 < 2^4$ o, lo que es equivalente, $1 \leq \frac{11}{2^3} < 2$.

Comprobamos lo dicho: $\log_2 11 = 3,45943$, o sea que es $3 = E(\log_2 11)$.

En cuanto a los acordes menores, también podemos mostrar con otro ejemplo una propiedad general que enunciaremos luego.

Tomemos el acorde menor tolemaico $mi - la - do$ (en la Figura 6.19), es el $\{0, 1\}$). Las frecuencias son

$$3^0 \times 5^1 = 5, \;\; 3^{-1} \times 5^1 = \frac{5}{3} \;\; y \; 3^0 \times 5^0 = 1.$$

en la primera octava son $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{3}$ y 1 respectivamente. Necesitamos que *la* y *do* tengan frecuencias menores que la de *mi*, porque en el acorde menor la tónica es la nota de mayor frecuencia. Luego, llevamos *la* una octava más abajo y obtenemos: $\frac{5}{6}$, 1 y $\frac{5}{4}$. Multiplicamos por 12 (mínimo común múltiplo de los denominadores) y nos queda en enteros: 10, 12 y 15.

[8] ver Capítulo 2.

Digresión ¿Qué significa multiplicar por 12? Observemos que $12 = \frac{3}{2} \times 2^3$. Luego lo que hacemos es subir una quinta (multiplicar por $\frac{3}{2}$) y luego tres octavas (multiplicar por 2^3).

Ahora tenemos que el MCD de 10, 12 y 15 es 1.

Para volver al acorde inicial dividimos por 12, es decir que el bajo fundamental es $\mathbf{b} = \frac{1}{12}$. Podemos ponerlo en la forma:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{3},$$

lo que indica que es un fa cuantro octavas más abajo de la octava básica.

Visto de otra manera, al bajo fundamental 1 del acorde $10 - 12 - 15$ se llega dividiendo la tónica 15 por $15 = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot 2^3$. Si hacemos lo mismo con la tónica $\frac{5}{4}$ del acorde $\frac{5}{6} - 1 - \frac{5}{4}$, obtenemos:

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{8} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{16}.$$

En esta forma observamos que el bajo fundamental de este acorde menor se obtuvo dividiendo por el producto de los factores primos propios de la gama, en este caso 3 y 5.

Se prueba en general que *el bajo fundamental de un acorde menor* $\{n_1, n_2, ..., n_r\}$ *se obtiene dividiendo la nota fundamental o tónica por el producto de los factores primos correspondientes a todos los armónicos de la gama:* $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r$.

Podemos ver entonces que *el bajo fundamental de un acorde menor depende de todos los armónicos.*

Por lo tanto, observamos que con respecto al bajo fundamental no hay una dualidad entre los acordes mayores y menores.

7.2. Consonancia

Este concepto está directamente relacionado al de armonía y es esencial para determinar esta. La primera definición que se nos ocurre de consonancia, con respecto a un acorde, es decir que "suena bien". Y ¿qué significa "sonar bien"?

Podemos atribuirle significado según el punto de vista: si nos interesa el aspecto **matemático**, diremos, como los pitagóricos, que suenan bien juntos dos sonidos que guardan entre sí una proporción aritmética sencilla por

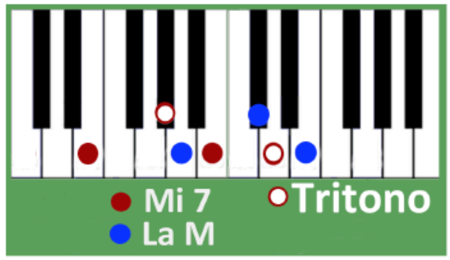


Figura 7.2: Tritono en el acorde *mi*7

ejemplo 1 (tónica) y $\frac{2}{1}$, o bien 1 y $\frac{3}{2}$, que corresponden a la octava y a la quinta, respectivamente, o también (y esto es más importante) al segundo y tercer armónicos de una nota dada, considerada la tónica. Podríamos agregar la tercera de Tolomeo: $\frac{5}{4}$, que corresponde al quinto armónico, y otros intervalos que se consideraron consonantes en épocas posteriores.

Al decir “en épocas posteriores” ¿estamos afirmando implícitamente que el concepto de consonancia depende de la época...?

Es que podemos ver también las cosas focalizándonos en nuestra **percepción**, que es algo subjetivo, cambiante de una época a otra o de un lugar geográfico a otro, e inclusive de una persona a otra. Tiene que ver con la cultura, el gusto y también con nuestro sentido del oído y con la forma en que percibimos los sonidos.

Pero hay otros elementos que nos permiten juzgar objetivamente la consonancia (y que misteriosamente coinciden, en general, con nuestras percepciones y con el aspecto matemático) y que son los que nos dan el aspecto **físico** de la cuestión: el sonido como fenómeno vibratorio y sus características.

Y ¿qué podemos decir de la disonancia? También podemos verla desde los tres aspectos: matemáticamente, desde nuestra percepción o físicamente.

Las disonancias dan color y “suspenso” en la música, es bueno abrir nuestros oídos y nuestra mente para sonoridades nuevas y expresivas. Por ejemplo, el *tritono* que, según la leyenda, era llamado “Diabolus in musica” en la Edad Media, suena mal, pero sin embargo en el contexto de un acorde de séptima dominante es un factor necesario para un clima de tensión que “resuelve” en un tono mayor o menor. [9] Podemos ver un ejemplo en la Figura 7.2, [10] donde se destacaron las notas *sol*$\sharp$ y *re* que forman el tritono (abarcan tres tonos)

[9] Ver Capítulo 1, sección 1.2.

[10] Ver también Figura 1.11 en el Capítulo 1.

entre las que componen el acorde $mi7$. La exclusión del tritono en la Edad Media tiene una explicación, que damos en seguida.

En la escala que se usaba entonces, que era más o menos la de Pitágoras modificada luego por Tolomeo, el ciclo de quintas no "cierra". Vimos que todo anda bien en las quintas del ciclo: $fa - do - sol - re - la - mi - si$, porque cada una de ellas tiene 3 tonos y 1 semitono. Pero la "quinta del lobo", la que sonaría mal, es $si - fa$, que justamente, ¡tiene 3 tonos! Es por eso que se pasa de si a $fa\sharp$ y se sigue el ciclo, aumentando el número de notas, o se divide el error en las quintas de alguna manera un poco "artesanal".

Los conceptos de consonancia y disonancia han ido variando. Podemos considerar que una clasificación bastante de acuerdo con la concepción pitagórica-tolemaica es la que se muestra en la Figura 7.3.

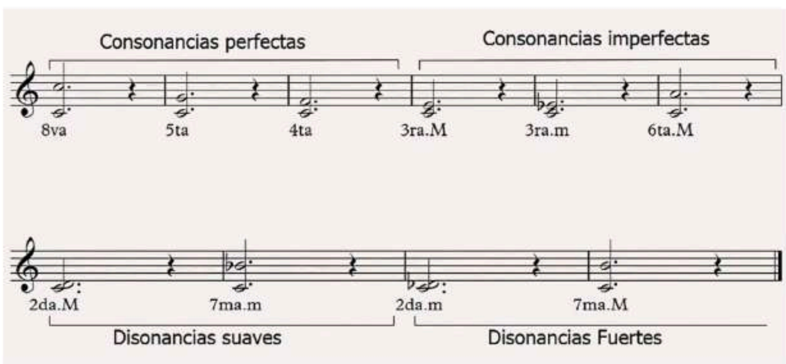


Figura 7.3: Consonancias y disonancias

Consonancias				Disonancias
Absolutas	Perfectas	Medias	Imperfectas	Segundas Séptimas Tritono
Octava	Quinta, Cuarta	Tercera Mayor, Sexta Mayor	Tercera menor, Sexta menor	

Figura 7.4: Nuevas consonancias y disonancias

Algunas disonancias son rechazadas naturalmente por razones fisiológicas. Cuando suenan juntos dos sonidos cercanos en frecuencia se produce lo que se llama "disonancia sensorial", que es una sensación áspera y como chirriante. Pero un dato curioso es que la separación necesaria entre los dos sonidos para que el oído detecte esa disonancia es distinta dependiendo de la frecuencia absoluta de los dos sonidos. Estos fenómenos fueron estudiados, como vimos en 4.5, por el fisiólogo y físico Hermann von Helmholtz a principios del siglo XX y posteriormente por Plomp y Levelt.[11] De acuerdo a estos estudios y a opiniones posteriores, se tiene la clasificación de consonancias y disonancias que se muestra en la Figura 7.4.

7.2.1. Tipos de consonancia

Tradicionalmente, se considera consonante un acorde de acuerdo a un cierto "test" que describimos en seguida.

Veamos un ejemplo sencillo: el acorde *do* mayor: $do - mi - sol$, considerado en la escala tolemaica. Sus frecuencias son proporcionales a 1, $\frac{5}{4}$ y a $\frac{3}{2}$, o, multiplicando todo por 4, proporcionales a 4, 5 y 6. Las diferencias primeras son:

$6 - 4 = 2$, $6 - 5 = 1$ y $5 - 4 = 1$.

Las frecuencias nuevas que aparecen son 1 y 2, que son octavas debajo de la tónica dada.

Las diferencias segundas son:

$6-2=4$, $6-1=5$, $5-2=3$, $5-1=4$, $4-2=2$, $4-1=3$, $2-1=1$.

La frecuencia nueva es 3, que está una octava abajo de 6.

Las diferencias terceras son:

$6-3=3$, $5-3=2$, $4-3=1$, $3-2=1$, $3-1=2$, ninguna nueva.

Vemos que todas las diferencias sólo dan octavas de las frecuencias dadas, lo que nos dice que en cierto modo el acorde es "cerrado" en cuanto a generar nuevos sonidos, todo lo que genera es consonante con lo que estaba.

Algo análogo ocurriría si consideramos el acorde pitagórico $do - sol$.

Un acorde que no resulta consonante según este criterio (y que se considera normalmente disonante) es $do - mi - sol - si\flat$ de la escala tolemaica cromática. En efecto, las frecuencias son proporcionales a 1, $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{2}$ y $\frac{16}{9}$ o, en números enteros, a 36, 45, 54 y 64. Al hacer las diferencias primeras obtenemos por ejemplo: $64 - 45 = 19$, que no es octava baja de ninguno de los sonidos originales.

[11] Ver Capítulo 4, sección 4.5

Parece razonable entonces tomar este criterio como prueba de consonancia.

Pero veamos ahora el siguiente contraejemplo: el acorde menor tolemaico $la - do - mi$ es considerado consonante por los músicos. Sin embargo, sus frecuencias son proporcionales, como vimos, a $\frac{5}{6}$, 1 y $\frac{5}{4}$, o bien, a 10, 12 y 15. Y se tiene que $12 - 10 = 2$ no es octava baja de ninguna de las tres notas.

Otro contraejemplo para el criterio propuesto: la inversión $mi - sol - do$ del acorde de *do* mayor (que ya probamos que era consonante) **no** resulta consonante, ya que sus frecuencias son proporcionales a 5, 6 y 8 y puede verse que una de las diferencias segundas es 7, que no es octava de ninguna de las dadas. Claro que aquí podemos observar que en una inversión, los intervalos entre notas no son los mismos que en el acorde mayor.

Según la teoría dada en [41], se consideran consonantes y se denominarán *estrictamente consonantes* los acordes compuestos por una tónica y aquellos de sus armónicos que componen la gama en la que situamos la tónica. Es decir, sólo los acordes menores y mayores.

Resumiendo: la consonancia básica de una gama está dada por los acordes que serán llamados *estrictamente consonantes* y que son sólo sus acordes mayores y menores. Se denominarán *asonantes* a aquellos acordes que verifican el criterio que hemos mencionado: entre sus diferencias sólo aparecen octavas de las notas originales. Se dejará la palabra *consonante* para denominar a aquellos acordes que generalmente los músicos consideran consonantes, que podemos considerar los que están en la Figura 7.4, aunque este último concepto es un poco vago.

Por ejemplo, tomemos como ejercicio comprobar lo que se afirma en la tabla de la Figura 7.5, donde se comparan los tres conceptos:

Acorde	Frecuencias (relativas)	Estrictamente consonante	Consonante	Asonante
do-mi-sol	4 , 5 , 6	sí	sí	sí
mi-sol-do	5 , 6 , 8	sí	sí	no
do-mi-sol-te (D.B.)	4 , 5 , 6 , 7	sí	no	sí
sol-te-do-mi »	6 , 7 , 8 , 10	sí	no	no
mi-sol-te-do-re »	5 , 6 , 7 , 8 , 9	no	no	sí
do-mi-sol-si♭	36 , 45 , 54 , 64	no	no	no

Figura 7.5: Comparación de consonancias

Vamos a indicar ahora (sin hacer las demostraciones) la forma de probar [12] que hay sólo tres tipos de acordes menores que una octava que son a la vez estrictamente consonantes y asonantes.

Para eso hay que tener en cuenta algunos resultados que se refieren a los números naturales.

En primer lugar, observemos que las frecuencias, que son números racionales de la forma

$$2^{n_0} \cdot p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r},$$

con $n_0, n_1, \ldots, n_r$ enteros, pueden llevarse a números naturales multiplicando, como hemos visto, por el producto de sus denominadores

Supongamos entonces que las frecuencias con las que trabajamos son números naturales.

Dado un número natural n, existe un número impar q único tal que n es producto de una potencia de 2 por q, como vimos en 2.0.1. Es decir,

$$n = 2^t \cdot q.$$

Se dice que n *representa* a q. Si pensamos en términos de frecuencias, significa que n es la frecuencia obtenida de q subiendo t octavas. Llamaremos *inversión* de un acorde

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k,$$

al obtenido subiendo una octava la primera nota:

$$n_2 < \ldots < n_k < 2\,n_1.$$

Se verifican entonces las siguientes propiedades:

Propiedad I: *Dado un número natural n, en la sucesión $n+1, n+2, \ldots, 2n+1$ los números representan a todos los impares $1, 3, \ldots, 2n+1$.*

Veamos un ejemplo: tomemos $n = 4$. La sucesión es, entonces: $5, 6, 7, 8, 9$. Veamos a quien representan.

$$5 = 2^0 \cdot 5, \quad 6 = 2^1 \cdot 3, \quad 7 = 2^0 \cdot 7, \quad 8 = 2^3 \cdot 1, \quad 9 = 2^0 \cdot 9.$$

Luego, tenemos los impares: $5, 3, 7, 1, 9$, que son efectivamente los impares desde 1 hasta $2 \cdot 4 + 1 = 9$.

[12] Ver 2.0.1 y secciones 46 a 49 del Capítulo V de [41]

Llamaremos acorde *de tipo simple* al de la forma:

$$n + 1 < n + 2 < ... < 2n + 1.$$

Propiedad II: *Todo acorde de tipo simple es asonante.*

Supongamos ahora que A **es un acorde menor que una octava.** Entonces, valen las siguientes propiedades:

Propiedad III: *Si en A están representados todos los impares $1, 3, ..., 2n+1$ y cada uno una sola vez, entonces puede reducirse mediante inversiones y cambios de octava a un acorde de tipo simple.*

Propiedad IV: *Si A es asonante, entonces se puede reducir al tipo simple.*

Propiedad V: *Si A es asonant,e entonces están representados en A todos los armónicos impares una sola vez desde 1 hasta un impar y sólo ellos y se puede reducir al tipo simple. Recíprocamente, si en un acorde A están representados todos los armónicos impares una sola vez desde 1 hasta un impar y sólo ellos y es de tipo simple, entonces es asonante.*

Esta última propiedad caracteriza a los acordes asonantes menores que una octava como los simples donde están representados todos los impares.

Entonces, los únicos acordes asonantes menores que una octava son:

1. Para $n = 0$, el acorde "impropio" de una sola nota 1,
2. Para $n = 1$, el acorde $2 < 3$, acorde pitagórico $do - sol$, que es **estrictamente consonante**,
3. Para $n = 2$, el acorde $3 < 4 < 5$, $sol - do - mi$, inversión del acorde mayor tolemaico **estrictamente consonante**,
4. Para $n = 3$, el acorde $4 < 5 < 6 < 7$, $do - mi - sol - te$, acorde mayor de Domínguez Berrueta **estrictamente consonante**,
5. Para $n = 4$, el acorde $5 < 6 < 7 < 8 < 9$, $mi - sol - te - do - re$ no estrictamente consonante, ...

Luego, los acordes asonantes y estrictamente consonantes son sólo los acordes mayores de las gamas de Pitágoras, de Tolomeo o de Domínguez Berrueta. Por ejemplo, el $do - sol$ en las tres gamas, el $do - mi - sol$ en las dos últimas y el $do - mi - sol - te$ en la de Domínguez Berrueta.

Lo interesante es que ello se debe a una propiedad numérica: los acordes asonantes están determinados por todos los armónicos **impares** hasta un cierto impar mientras que los estrictamente consonantes están determinados por todos armónicos **primos** hasta un primo dado. Estas dos sucesiones coinciden sólo hasta el 7, el 9 ya no es primo.

7.2.2. Bajo fundamental y consonancia

Hay otro concepto de consonancia de un acorde que podemos definir y que depende de la relación del bajo fundamental con el acorde dado. La idea es que si el bajo fundamental está **lejos** en frecuencia de las notas del acorde, eso significa que estas son armónicos elevados del bajo. Sabemos que los armónicos que realmente influyen para que el acorde sea consonante son los más bajos: el armónico 1 (unísono), el armónico 2 (octava), el 3 (octava de la quinta, que es $\frac{3}{2}$), el armónico 4 (doble octava), el 5 (doble octava de la tercera, que es $\frac{5}{4}$), el 6 (doble octava de la quinta)... Los demás suenan cada vez más disonantes.[13] Además, desde el punto de vista acústico, son cada vez de menor intensidad.

En lo que sigue a menudo tomaremos en cuenta las frecuencias absolutas, tomando como referencia la tabla de la Figura 3.3.

Vamos a considerar la altura de un acorde al "promedio" de frecuencia de sus notas. ¿Qué entendemos por promedio? Como se trata de frecuencias, habrá que tomar el promedio multiplicativo o *media geométrica* de sus frecuencias.[14] Si es $\mathbf{b}$ el bajo fundamental del acorde, cada frecuencia de este será de la forma $\mathbf{b}f$. Luego la media geométrica, que llamaremos *altura absoluta* del acorde, será:

$$L = \sqrt[m]{\mathbf{b}f_1 \cdot \mathbf{b}f_2 ... \cdot \mathbf{b}f_m}.$$

Definimos la *altura relativa* l del acorde como la relación de su altura absoluta con el bajo $\mathbf{b}$:

$$l = \frac{\sqrt[m]{\mathbf{b}f_1 \cdot \mathbf{b}f_2 ... \cdot \mathbf{b}f_m}}{\mathbf{b}} = \sqrt[m]{f_1 \cdot f_2 ... \cdot f_m} = \frac{L}{\mathbf{b}}.$$

La altura absoluta sobre la relativa nos da $\mathbf{b}$, que es una medida de la consonancia del acorde.

[13]Ver 3.1.2.

[14]Ver media geométrica en el Capítulo 2.

Llamaremos *consonancia relativa* del acorde a

$$K = \log_2(\mathbf{b}).$$

También podemos tener una medida de las alturas relativa y absoluta del acorde tomando logaritmos de l y L respectivamente.

$$\lambda = \log_2 l = \frac{1}{m}(\log_2 f_1 + \log_2 f_2 + ... + \log_2 f_m),$$

$$\Lambda = \log_2 L = \frac{1}{m}(\log_2(\mathbf{b}\cdot f_1) + \log_2(\mathbf{b}\cdot f_2) + ... + \log_2(\mathbf{b}\cdot f_m)).$$

De allí resulta:

$$K = \Lambda - \lambda.$$

Apliquemos aquí lo que conocemos sobre los acordes mayores y menores.

Según vimos en 7.1.5 podemos obtener el bajo fundamental de un acorde mayor bajando la frecuencia de la tónica k octavas, según indica el denominador de $\frac{p_r}{2^k}$, siendo p_r el armónico más alto de la gama, o sea, según vimos: $k = E(\log_2 p_r) = E(\pi_r)$.

Como siempre, $\log_2 p_i = \pi_i$, $i = 1, 2$, para $p_1 = 3$, $p_2 = 5$. Supongamos que tomamos el acorde mayor de do_3 (el *do* central del piano) en la escala tolemaica (donde $p_r = 5$); la frecuencia absoluta de do_3 es aproximadamente $261, 63$ y tenemos que bajar esa frecuencia $E(\pi_2) = 2$ octavas, o sea, dividir por 4:

$$\mathbf{b} = \frac{261,63}{4} = 65,41,$$

de donde podemos calcular K_M (el K del acorde mayor):

$$K_M = \log_2(261,63) - E(\pi_2) = \log_2(65,41) = \frac{\log_{10}(65,41)}{\log_{10}(2)} = 6,03144.$$

En general, K_M será el logaritmo de la frecuencia absoluta de la tónica menos $E(\pi_r)$.

Vamos a ver la forma que adoptan λ y Λ para los acordes mayores. Lo haremos con el acorde mayor de do_3 pero en la escala de Domínguez Berrueta, donde $p_r = 7$. En este caso, también $E(\pi_r) = 2$, como cuando el primo mayor era 5 (tendríamos que incluir a 11 como armónico para tener $E(\pi_r) = 3$). El acorde mayor en la primera octava en frecuencias relativas es:

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{4}.$$

Multiplicando por $2^2 = 2^{E(\pi_3)}$ obtenemos:

$$2^2,\ 3\cdot 2^{2-1},\ 5\cdot 2^{2-2},\ 7\cdot 2^{2-2}.$$

Por lo tanto

$$\lambda_M = \frac{1}{4}(2+\pi_1+(2-1)+\pi_2+(2-2)+\pi_3+(2-2))(\bullet).$$

Como $E(\pi_1)=1$, $E(\pi_2)=E(\pi_3)=2$, se tiene:

$$\pi_1-1=F(\pi_1),\ \pi_2-2=F(\pi_2),\ \pi_3-2=F(\pi_3)(\bullet\bullet),$$

Teniendo en cuenta $(\bullet)$ y $(\bullet\bullet)$, obtenemos:

$$\lambda_M = \frac{1}{4}(8+F(\pi_1)+F(\pi_2)+F(\pi_3)) = 2+\frac{1}{4}(F(\pi_1)+F(\pi_2)+F(\pi_3)).$$

También podemos ponerlo en función de las notas coordenadas (ver 8.2):

$$\lambda_M = 2+\frac{1}{4}(\mathbf{g}_1+\mathbf{g}_2+\mathbf{g}_3).$$

Como $\Lambda_M = K_M+\lambda_M$, se tiene:

$$\Lambda_M = (\log_2(261,63)-E(\pi_3))+2+\frac{1}{4}(F(\pi_1)+F(\pi_2)+F(\pi_3))$$

$$= \log_2(261,63)+\frac{1}{4}(\mathbf{g}_1+\mathbf{g}_2+\mathbf{g}_3).$$

De manera semejante podemos obtener las alturas relativa y absoluta y la consonancia de los acordes menores.

Calculemos K_m del acorde menor tolemaico de *do*, donde, en este caso, tomamos do_4 (que es la nota más alta), cuya frecuencia es $523,26$. Obtenemos $\mathbf{b}$ dividiendo ese valor por el producto de los factores de los armónicos de la gama, que en este caso es $15=3\cdot 5$:

$$\mathbf{b} = \frac{523,26}{15} = 34,884,$$

de donde

$$K_m = \log_2(523,26)-\log_2(3\cdot 5) = \log_2(34,884) = \frac{\log_{10}(34,884)}{\log_{10}(2)} = 5,1245.$$

En general, K_m será el logaritmo de la frecuencia absoluta de la tónica menos el logaritmo del producto de todos los factores primos $p_1, ..., p_r$ de la gama.

Tomemos para ejemplificar también la escala de Domínguez Berrueta. El acorde menor de *do* (en la octava $[2^{-1}, 1]$) será de la forma :

$$\frac{2}{3}, \ \frac{4}{5}, \ \frac{4}{7}, \ 1.$$

Multiplicando por los denominadores obtenemos:

$$2 \cdot 5 \cdot 7 = 70, \ \ 4 \cdot 3 \cdot 7 = 84, \ \ 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60, \ \ 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105.$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\lambda_m &= \frac{1}{4}(\log_2 70 + \log_2 84 + \log_2 60 + \log_2 105) \\
&= \frac{1}{4}((1 + \pi_2 + \pi_3) + (2 + \pi_1 + \pi_3) + (2 + \pi_1 + \pi_2) + (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)) \\
&= \frac{1}{4}(1 + 2 + 2 + 3(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)) \\
&= \frac{1}{4}(1 + 2 + 2 + 4(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) - (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)) \\
&= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 - \frac{1}{4}(F(\pi_1) + F(\pi_2) + F(\pi_3)),
\end{aligned}$$

esto último por (••). Sabemos que $\mathbf{b} = \frac{261{,}63}{3 \cdot 5 \cdot 7}$ y por lo tanto:

$$K_m = \log_2(261, 63) - (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3).$$

$$\Lambda_m = K_m + \lambda_m = \log_2(261, 63) - \frac{1}{4}(F(\pi_1) + F(\pi_2) + F(\pi_3)).$$

En función de las notas:

$$\lambda_m = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 - \frac{1}{4}(\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3).$$

$$\Lambda_m = K_m + \lambda_m = \log_2(261, 63) - \frac{1}{4}(\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3).$$

Usando todas estas expresiones se calculan los valores de la tabla de la Figura 7.6.[15]

[15] Ver sección 52 de [41].

Acorde	Escala	f_k	λ	A	K
do$_3$	cualquiera	1	0,00000	8,02790	8,02790
do$_3$-sol$_3$	prim. ó Pit.	2 , 3	1,29248	8,32038	7,02790
do$_3$-mi$_3$-sol$_3$	Tol. ó Tol. cr.	4 , 5 , 6	2,30230	8,33020	6,02790
do$_3$-mi$_3$ sol$_3$-te$_3$	D. B.	4 , 5 , 6 , 7	2,42856	8,45646	6,02790
do$_3$-mi$_3$-fa$\#_3$(?)-sol$_3$-te$_3$	$\Gamma^{3,5,7,11}$	8 , 10 , 11 , 12 , 14	3,43473	8,26263	5,02790
do$_3$-mi$_3$-fa$\#_3$(?)-sol$_3$-la$\flat_3$(?)-te$_3$	$\Gamma^{3,5,7,11,13}$	8 , 10 , 11 , 12 , 13 , 14	3,47902	8,50692	5,02790
do$_4$-fa$_3$	prim. ó Pit.	3 , 2	1,29248	8,73542	7,44294
do$_4$-la$\flat_3$-fa$_3$	Tol. ó Tol. cr.	15 , 12 , 10	3,60459	8,72560	5,12101
mi$_4$-do$_4$-la$_3$-sol$\flat_3$	D. B.	105 , 84 , 70 , 60	6,28568	8,92127	2,63559

Figura 7.6: Consonancia de acordes mayores y menores

Detallamos las abreviaturas que aparecen: "prim." es la gama pentatónica o primitiva, "Tol." es la de Tolomeo-Zarlino diatónica y "Tol.cr." idem cromática y "D.B." es la de Domínguez Berrueta. En la primera columna vemos primero acordes (impropios) de una sola nota, luego acordes mayores y en tercer lugar acordes menores. Las notas que presentan el signo ? indica que no tienen equivalente exacto en las escalas actuales. Observemos que la consonancia disminuye al aumentar los generadores de la escala. En los acordes menores se toma do_4 como tónica, salvo en el de Domínguez Berrueta en que se toma el mi_4. La consonancia de los acordes menores es más baja que la de los mayores.

7.2.3. Niveles de consonancia

Vamos a estudiar más a fondo el comportamiento de K, la consonancia relativa de los acordes.

La mayoría de los acordes que consideramos en las distintas gamas son compuestos, es decir, se superponen dos (o más) acordes. Por ejemplo, los acordes mayores normalmente están compuestos de una tercera mayor y una quinta. [16] Vamos a ver que para estudiar la consonancia podemos descomponerlos en acordes más sencillos y estudiar estos.

Puede probarse (ver sección 53 de [41]) que si se tiene un acorde A compuesto por los acordes A_1 y A_2, cuyos bajos son $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ respectivamente, entonces el bajo fundamental $\mathbf{b}$ de A es el bajo del acorde $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$. Esta

[16] Ver 1.3 en el Capítulo 1.

propiedad nos permite reducirnos a estudiar la consonancia relativa de los acordes de dos notas.

Acordes de dos notas

Supongamos, para fijar ideas, que estamos en la gama tolemaica cromática. Los razonamientos valen en general para cualquier gama. [17]

Tomaremos como tónica el *do*, ya sabemos que lo expuesto puede aplicarse mediante traslaciones a cualquier otra nota.

Tomemos el acorde de dos notas $do_3 - c$, donde do_3 suponemos que tiene frecuencia 1 y c es una nota de la tercer octava (entre do_3 y do_4). La frecuencia de c se puede expresar en la forma:

$$\frac{2^{n_0} \cdot 3^{n_1} \cdot 5^{n_2}}{2^{m_0} \cdot 3^{m_1} \cdot 5^{m_2}},$$

donde suponemos que ya se ha simplificado la fracción, lo que quiere decir que quedará un factor que sea una potencia positiva de 2 (respectivamente de 3, de 5) en el numerador o en el denominador pero no en ambos.

Como

$$1 \leq \frac{2^{n_0} \cdot 3^{n_1} \cdot 5^{n_2}}{2^{m_0} \cdot 3^{m_1} \cdot 5^{m_2}} < 2 \ \ (\mathbf{0}),$$

multiplicando $(\mathbf{0})$ por $2^{m_0} \cdot 3^{m_1} \cdot 5^{m_2}$ obtenemos:

$$2^{m_0} \cdot 3^{m_1} \cdot 5^{m_2} \leq 2^{n_0} \cdot 3^{n_1} \cdot 5^{n_2} < 2 \cdot (2^{m_0} \cdot 3^{m_1} \cdot 5^{m_2}) = 2^{m_0+1} \cdot 3^{m_1} \cdot 5^{m_2} \ \ (\mathbf{1}).$$

Luego, do_3 y c quedan representadas, respectivamente, por los números naturales $\mathbf{m} = 2^{m_0} \cdot 3^{m_1} \cdot 5^{m_2}$ y $\mathbf{n} = 2^{n_0} \cdot 3^{n_1} \cdot 5^{n_2}$, que no tienen factores comunes, por lo que su máximo común divisor es 1.

Dividiendo por $\mathbf{m}$ para volver a do_3 y c con las frecuencias relativas iniciales y multiplicando por la frecuencia absoluta de do_3, que convenimos en aproximar a 262, nos queda:

$$\mathbf{b} = \frac{262}{\mathbf{m}} \ \ (\mathbf{2}).$$

Tomando logaritmos en $(\mathbf{1})$ tenemos:

$$m_0 + m_1\pi_1 + m_2\pi_2 \leq n_0 + n_1\pi_1 + n_2\pi_2 < (m_0 + 1) + m_1\pi_1 + m_2\pi_2.$$

[17] Los detalles de las demostraciones están en la sección 55 de [41].

Si llamamos

$$\mathbf{l\,m} = m_0 + m_1\pi_1 + m_2\pi_2,$$

$$\mathbf{l\,n} = n_0 + n_1\pi_1 + n_2\pi_2,$$

la desigualdad anterior queda:

$$\mathbf{l\,m} \leq \mathbf{l\,n} < \mathbf{l\,m} + 1.$$

Tomando logaritmos en (**2**) obtenemos:

$$K = \log_2 \mathbf{b} = \log_2(262) - \mathbf{l\,m}.$$

Vamos a calcular de mayor a menor los valores posibles de K, que serán llamados *niveles de consonancia*, y las notas c en cada nivel.

El máximo valor de K será para $\mathbf{l\,m} = 0$ (mínimo de $\mathbf{l\,m}$), lo que implica que $m_0 = m_1 = m_2 = 0$, $\mathbf{m} = 1$. Por **(0)**:

$$1 \leq \frac{2^{n_0} \cdot 3^{n_1} \cdot 5^{n_2}}{\mathbf{m}} < 2,$$

o sea:

$$1 \leq 2^{n_0} \cdot 3^{n_1} \cdot 5^{n_2} < 2,$$

por lo que el único valor posible es: $n_0 = n_1 = n_2 = 0$, o sea $c = do_3$. Luego el acorde $do_3 - c$ se transforma en el unísono, que es realmente la consonancia más perfecta, si bien es un caso trivial.

Puede verse que el valor siguiente de K es para $\mathbf{l\,m} = 1$, o sea $m_0 = 1$, $m_1 = m_2 = 0$, $\mathbf{m} = 2$, es decir que, por **(0)**:

$$1 \leq \frac{3^{n_1} \cdot 5^{n_2}}{2} < 2.$$

Suprimimos el factor 2^{n_0} en el numerador de c porque supusimos que no hay factores comunes entre $\mathbf{m}$ y $\mathbf{n}$. De nuevo hay una sola posibilidad: $c = \frac{3}{2}$, o sea que c es sol_3. Esta consonancia es la del acorde de quinta, considerado desde Pitágoras el más consonante después del unísono y la octava (la octava no la estamos considerando aquí entre las notas c propuestas).

Luego, debemos tomar $m_0 = 0, m_1 = 1, m_2 = 0$, o sea $\mathbf{m} = 3$, con lo cual resulta $\mathbf{l\,m} = \pi_1$ y $K = \log_2(262) - \pi_1$. De nuevo reemplazando en **(0)** tendremos

$$1 \leq \frac{2^{n_0} \cdot 5^{n_2}}{3} < 2.$$

En este caso hay dos valores posibles para c, que son $\frac{4}{3}$ y $\frac{5}{3}$ que se obtienen para $n_0 = 2$, $n_1 = n_2 = 0$ y para $n_2 = 1$ y $n_0 = n_1 = 0$. Ellos corresponden a fa_3 y la_3 respectivamente.

El siguiente valor sería para $m_0 = m_1 = 0$, $m_2 = 1$, es decir $\mathbf{m} = 5$, con lo cual resulta $\mathbf{l}\,\mathbf{m} = \pi_2$ y $K = \log_2(262) - \pi_2$.

Como en los casos anteriores, se tiene:

$$1 \leq \frac{2^{n_0} \cdot 3^{n_1}}{5} < 2.$$

Hay varios valores posibles: $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{5}$ y $\frac{9}{5}$, con lo que c resulta, respectivamente, $mi\flat_3$, $la\flat_3$, y $si\flat_3$.

Podríamos seguir calculando...

De esta manera vemos que surgen *niveles de consonancia*, determinados por cada valor de K, y observamos que puede haber varias notas en cada nivel (que dan la misma consonancia con do_3). El nivel 0 es el unísono, $c = do_3$. El nivel 1 es la quinta, y así siguiendo. Diremos que do_3 es *dominante de nivel* 0, sol_3 es *dominante de nivel* 1, fa_3 y la_3 son *dominantes de nivel* 2, $mi\flat_3$, $la\flat_3$, y $si\flat_3$ son *dominantes de nivel* 3, y así siguiendo.

En general, dada una tónica, que determina la *tonalidad* (valga la redundancia), serán notas *dominantes* de la tonalidad las de todos los niveles.

Acordes dominantes

Ahora volvamos a los acordes, especialmente a los considerados en esta teoría como estrictamente consonantes, que son los mayores y los menores. Vamos a encontrar los que llamaremos acordes de primera, segunda,...dominante de los acordes mayores y menores.

Dada una nota t (la tónica), consideremos el acorde mayor de t (o t mayor). Sabemos que su bajo fundamental $\mathbf{b}$ está situado k octavas más abajo de t, siendo k la parte entera del logaritmo π_r del armónico máximo p_r de la gama.

Esto nos permite que, dado un bajo fundamental cualquiera, podamos encontrar, inversamente, cuál es el acorde mayor al que corresponde ese bajo, subiendo las octavas correspondientes hasta encontrar la tónica.

Dado entonces el acorde de tónica t y bajo fundamental $\mathbf{b}$, tomemos $\mathbf{b}$ como nota fija y busquemos las dominantes primera, segunda,... de $\mathbf{b}$ de la manera que lo hicimos antes. Para cada una de ellas calculemos la tónica (subiendo las k octavas) y su acorde mayor correspondiente que tiene como bajo fundamental esas dominantes. Estos acordes serán, por definición, los *acordes de primera, segunda,...dominante* del acorde mayor de t.

Para un acorde menor, análogamente, tomamos su bajo fundamental, las notas dominantes de este y los acordes menores que tienen esas notas como bajos. Calculamos sus tónicas, recordando que en el caso de un acorde menor el bajo fundamental se obtiene dividiendo la nota fundamental o tónica por el producto de los factores primos correspondientes a todos los armónicos de la gama. Una vez obtenidos los acordes menores de las tónicas, estos serán los *acordes de primera, segunda,...dominante* del acorde menor original.

Llamaremos dominantes *principales* a aquellas que son también dominantes en todas las gamas "contenidas" en la de referencia. Por ejemplo, consideramos

$$\mathbf{G}^3 \subset \mathbf{G}^{3,5} \subset \mathbf{G}^{3,5,7}.$$

Para cada tonalidad, las notas que están en el acorde de tónica y en los acordes dominantes constituyen las notas que llamaremos *diatónicas* de la tonalidad. Las demás notas de la gama temperada serán llamadas *cromáticas.* Una melodía en una tonalidad (mayor o menor) formada por notas diatónicas podrá ser armonizada entonces usando el acorde de tónica y sus dominantes.

Podemos observar que al calcular dominantes, pueden aparecer notas que no estaban en la atemperación. Por ejemplo, si tomamos como tónica el re de la escala tolemaica, cuya frecuencia relativa es $\frac{9}{8}$, su dominante primera sería su quinta, de frecuencia $\frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$, que no está en la atemperación $\mathbf{G}_T^{3,5}$ ni tampoco en la cromática $\mathbf{G}_{ABGH}^{3,5}$. Sin embargo, su error es una coma sintónica y podemos tomar esa aproximación.

Ejemplos: En $\mathbf{G}^3$, en la tonalidad de *do*, la dominante primera es $\frac{3}{2}$ (sol), la segunda $\frac{4}{3}$ (fa), no existen dominantes del tercer y cuarto nivel, la dominante del quinto nivel es $\frac{9}{8}$ (re) y así siguiendo.

En $\mathbf{G}^{3,5}$ con la atemperación tolemaica cromática, tendremos según lo que vimos en 7.2.3, los siguientes acordes mayores dominantes en la tonalidad de do:

de do: $do - mi - sol$, (nivel (0))
de sol: $sol - si - re$, (nivel (1)),
de fa: $fa - la - do$, (nivel (2)),
de la: $la - do\sharp - mi$, (nivel (2)),
de $mi\flat$: $mi\flat - sol - si\flat$, (nivel (3)),
de $la\flat$: $la\flat - do - mi\flat$, (nivel (3)),
de $si\flat$: $si\flat - re - fa$, (nivel (3)).

La dominante *sol* es principal, porque es de nivel 1 en la gama pitagórica y en la tolemaica y fa es principal, porque es de nivel 2 en ambas gamas. La dominante *la* **no** es principal, porque no es dominante en la gama pitagórica. Generalmente se llama *dominante* a *sol* y *subdominante* a fa.

Si consideramos sólo una dominante, tendríamos las siguientes notas diatónicas:

$$do - re - mi - sol - si.$$

Con una dominante primera y una segunda:

$$do - re - mi - fa - sol - la - si,$$

(las que habitualmente llamamos notas diatónicas) y con una dominante primera y dos segundas:

$$do - do\sharp - re - mi - fa - sol - la - si.$$

En la misma gama y atemperación, tomemos ahora el acorde menor de la tonalidad *sol*: $sol - mi\flat - do$. Si el *sol* es de frecuencia 1, tenemos que $mi\flat$ es $\frac{4}{5}$ y el do $\frac{4}{3}$. La primera dominante es re (principal), las segundas do (principal) y mi (no principal).

Tenemos entonces en la tonalidad *sol* menor los siguientes acordes menores:

de sol: $sol - mi\flat - do$, (nivel (0)),
de re: $re - si\flat - sol$, (nivel (1)),
de do: $do - la\flat - fa$, (nivel (2)),
de mi: $mi - do - la$, (nivel (2)).

Si consideramos una dominante, tendríamos las siguientes notas (en el orden en que aparecen). Diatónicas:

$$sol - mi\flat - re - do - si\flat.$$

Con una dominante primera y una segunda:

$$sol - fa - mi\flat - re - do - si\flat - la\flat,$$

con una dominante primera y dos segundas:

$$sol - fa - mi - mi\flat - re - do - si\flat - la\flat...$$

Cadencias y modulaciones

En cada tonalidad, el acorde de la nota que la define es como el eje alrededor del cual giran la melodía y la armonía. Una *cadencia* es considerada en teoría musical como una serie de acordes que culminan en el acorde de tónica, que es como el punto de reposo. Los esquemas más simples son:

dominante - tónica o bien *subdominante - tónica.*

Las dominantes aquí definidas generalizan ese concepto admitiendo cadencias a partir de varios niveles de acordes dominantes.

Una *modulación* significa un cambio de tonalidad, lo que se hace de acuerdo a ciertas reglas de estabilidad. En el caso de la armonía que se define aquí al pasar de una tonalidad a otra puede variar el orden de los intervalos entre notas próximas, pero puede considerarse esto como un cambio de "modo" de la pieza musical en cuestión.

Por ejemplo: veamos qué pasa al cambiar de la tonalidad de *do* mayor (con su acorde básico $do - mi - sol$) a la de re mayor. Tomemos como dominantes de *do* sólo el *sol* (con su acorde $sol - si - re$) y el fa (con su acorde $fa - la - do$). Luego las notas diatónicas son, como dijimos:

$$do - re - mi - fa - sol - la - si.$$

Tenemos entonces en la tonalidad de *do* los intervalos: de quinta $(do - sol)$, de tercera $(do - mi)$, de séptima $(do - si)$, de segunda $(do - re)$, de cuarta $(do-fa)$ y de sexta $(do-la)$. Si formamos estos mismos intervalos a partir del re, podemos ver que en la atemperación están el *sol* (la cuarta de re) y el si (la sexta de re), pero no están las demás. En rigor, entonces, las notas diatónicas serían sólo re, *sol* y si. Sin embargo, podemos sustituir (como hicimos en los acordes imperfectos) por las notas más próximas a las que corresponderían a la quinta, tercera, séptima y segunda por, respectivamente, la, $fa\sharp$, $do\sharp$ y mi. No se introducen aquí armónicos nuevos, por lo que no se altera el carácter de la gama. Tendríamos a nuestra disposición entonces las notas diatónicas:

$$do - re - mi - fa\sharp - sol - la - si - do\sharp.$$

Ejemplos de armonías naturales en obras musicales conocidas [18]

En el prólogo de "El oro del Rhin", de Richard Wagner, podemos apreciar una melodía que describe la naturaleza despertando poco a poco. En primer

[18] Ver sección 59 de [41].

lugar, un $mi\flat_1$ largo y profundo al que se agregan: un $mi\flat_2$ (su octava), un $si\flat_2$ (quinta de la segunda nota), $mi\flat_3$ (doble octava de la primera nota), y sol_3 (tercera de esta última). Como vemos, están actuando aquí los armónicos segundo, tercero, cuarto y quinto. Luego siguen variaciones de este acorde mayor extendido que se oye durante 136 compases, que sugiere vívidamente un movimiento acuático que nos prepara a la acción, que ocurre en el fondo de un río.

El acorde $do - mi\flat - sol - la$, que podemos reconocer como el acorde $sol - mi\flat - do - la$ de sol menor en la atemperación de Domínguez Berrueta, aparece en la conocida "Danza del fuego" de Manuel de Falla perteneciente a su obra "El amor brujo".

Figura 7.7: "La catedral sumergida"

El armónico séptimo también aparece en la música, ya desde el siglo XVI con Monteverdi en el acorde de séptima dominante, por ejemplo:
$do - mi - sol - si\flat$, que podemos ver como un acorde imperfecto, con la nota $si\flat$ sustituyendo al te de Domínguez Berrueta. Es interesante también ver en la partitura cómo imitó Claude Debussy el sonido de campanas en su obra "La catedral sumergida" por medio de disonancias donde hay séptimas: un do y un re juntos en dos octavas simultáneamente, como se ve en la Figura 7.7. Actualmente se usan disonancias en la música de jazz o en la bossa nova.

Capítulo 8

Matemática de las gamas

En este último capítulo estudiaremos algunas propiedades interesantes de las gamas desde el punto de vista matemático. Trataremos formalmente las operaciones $\oplus$ y $\ominus$ en el intervalo $[0, 1)$, demostrando algunas propiedades que fueron enunciadas en 6.3. Como dijimos, los conjuntos $\mathbf{G}^{p_1 \cdots p_r}$ "heredan" estas propiedades de las operaciones, porque cualesquiera que sean los primos $p_1, ..., p_r$ se cumple que: $\mathbf{G}^{p_1 \cdots p_r} \subset [0, 1)$. Ya aplicamos en el Capítulo 6 esos resultados para trabajar con las gamas y sus atemperaciones, lo que nos ayudó a entender mejor su significado y simplificó los cálculos con las notas.

En primer lugar, mostraremos la estructura algebraica de $[0, 1)$ munido de la suma $\oplus$ con su elemento neutro 0, para luego restringirnos a los conjuntos de la forma $\mathbf{G}^{p_1 \cdots p_r}$, a los que podemos dotar, además, de una operación de opuesto para la suma; probaremos que con estas operaciones queda definido un grupo y que ese grupo puede considerarse "identificado" con otros.

Luego seguiremos los pasos de la demostración de un teorema que muestra una importante propiedad de las gamas con respecto al intervalo $[0, 1]$: podemos aproximarnos a cualquier punto de este intervalo por notas de una gama con la precisión que queramos, si tomamos suficiente número de notas. Esto se expresa también diciendo que "cualquier gama es un conjunto denso en $[0, 1]$".

8.1. Operaciones en $[0, 1)$

Vamos a trabajar ahora en el intervalo $[0, 1)$ con la suma y diferencia truncadas $\oplus$ y $\ominus$ que definimos en la Sección 6.3.

La única estructura algebraica que hemos visto es la de grupo (ver la Sección 2.0.2). Como la suma $\oplus$ con su elemento neutro 0 no alcanza para determinar un grupo en $[0, 1)$ (porque no podemos definir un opuesto para cada elemento), tendremos en lugar de grupo lo que se llama un *monoide*. Esta estructura será heredada por las gamas, pero veremos luego, como dijimos, que en ellas sí puede definirse una estructura de grupo.

Un *monoide* es un conjunto dotado de una operación asociativa $+$ y un elemento neutro 0 para esta. Un monoide sobre un conjunto M se indica $\langle M, +, 0\rangle$. Si $+$ es conmutativa, se dice que M es un monoide conmutativo. Análogamente, un grupo H se denota $\langle H, +, -, 0\rangle$, siendo $-$ la operación de opuesto.

Para trabajar con las operaciones $\oplus$ y $\ominus$ necesitamos previamente conocer un poco más de la función parte fraccionaria definida en la Sección 2.0.5.

8.1.1. La función parte fraccionaria

Como recordamos, dado un número real cualquiera r, podemos tomar su parte entera $E(r)$ y su parte fraccionaria $F(r)$, que verifican:

$$r = E(r) + F(r).$$

En lo que sigue estudiaremos las propiedades de la función F, que asigna a cada número real su parte fraccionaria.

Lema 6. *Dado un número real r, la función F parte fraccionaria de r tiene las siguientes propiedades:*

1. *Vale la siguiente equivalencia:*

   El número z es entero si y sólo si $F(z) = 0$.

2. *Para todo número real r, $F(F(r)) = F(r)$.*

3. *Si z es un número entero y r un número real, entonces $F(r+z) = F(r)$.*

4. *Si r y s son números reales, entonces $F(r + s) = F(F(r) + F(s))$.*

5. *Si r y s son números reales, entonces $F(r + F(s)) = F(r + s)$.*

6. *Si r y s son números reales, las condiciones (a), (b) y (c) son equivalentes:*

   (a) $F(r)+F(s) < 1$, *(b)* $F(r+s) = F(r)+F(s)$, *(c)* $F(r+s)-F(r) \geq 0$.

7. *Para todo número real r: si r es entero, $F(-r) = F(1 - F(r))$, si r no es entero: $F(-r) = 1 - F(r)$,*

8. *Para dos números reales cualesquiera r y s:*

   $r - s$ es un número entero es equivalente a que $F(r) = F(s)$.

Demostración. La demostración de los dos primeros items es inmediata. Veamos el tercero.

Sea z un entero, r un real. Sea n la parte entera de r: $n = E(r)$, (ver 2.0.5), o sea que:

$$n \leq r < n + 1.$$

Sumando z se tiene:

$$n + z \leq r + z < n + z + 1.$$

Luego, $n + z$ es $E(r + z)$, por lo que

$$F(r + z) = r + z - (n + z) = r - n = F(r).$$

Usaremos esto para probar el cuarto item.

En efecto, dados r y s reales, sean n y m respectivamente las partes enteras de r y s. Luego, por definición y sumando se tiene:

$$\begin{aligned} r &= n + F(r), \\ s &= m + F(s), \\ r + s &= (n + m) + F(r) + F(s). \end{aligned}$$

Observemos ahora que $F(r) + F(s)$ más el entero $n + m$ me da $r + s$. Luego la parte fraccionaria de $(n + m) + F(r) + F(s) = r + s$ debe ser igual a la de $F(r) + F(s)$, por lo anterior, o sea:

$$F(r + s) = F(F(r) + F(s)).$$

El quinto item sale del 2 y el 4.

Demostremos el sexto “circularmente”.

(a) implica (b)

Si $F(r) + F(s) < 1$, entonces, como es también mayor que 0, $F(F(r) + F(s)) = F(r) + F(s)$. Luego, por el item 4, $F(r + s) = F(r) + F(s)$.

(b) implica (c)

Si $F(r + s) = F(r) + F(s)$, se tiene que $F(r + s) - F(s) = F(r) \geq 0$.

(c) implica (a)

Si $F(r+s) - F(s) \geq 0$ y suponemos que $F(r) + F(s) \geq 1$, como sabemos que $0 \leq F(r) + F(s) < 2$, se tiene que $F(F(r) + F(s)) = F(r) + F(s) - 1$. Luego, $F(r + s) = F(r) + F(s) - 1$ y entonces $F(r + s) - F(s) = F(r) - 1 < 0$, absurdo. Luego, $F(r) + F(s) < 1$.

El séptimo item se prueba como sigue. Si r es entero, $F(r) = 0 = F(-r)$ y se cumple: $F(-r) = F(1 - F(r))$. Supongamos r no entero. Por item 1, $F(r + (-r)) = 0$. Además, por item 4, $F(r + (-r)) = F(F(r) + F(-r))$. Luego, $F(r) + F(-r)$ es un entero. Como r no es entero, $0 < F(r) < 1$ y $0 < F(-r) < 1$, Luego $F(r) + F(-r) \neq 0$ y $F(r) + F(-r) \neq 2$, luego: $F(r) + F(-r) = 1$, de donde $F(-r) = 1 - F(r)$.

Probemos la equivalencia dada en el último item.

Supongamos que $r - s = z$ es un entero. Como $r = s + z$, por el tercer item: $F(r) = F(s)$.

Recíprocamente, supongamos que $F(r) = F(s)$. Si descomponemos r y s en sus partes entera y fraccionaria nos queda:

$$r = n + F(r),\ s = m + F(s),$$

siendo n y m las partes enteras. Podemos escribir:

$$r = (n - m) + m + F(r) = (n - m) + (m + F(s)) = (n - m) + s,$$

luego r y s difieren en el entero $n - m$. $\square$

Observación 7. En 2.2.1 vimos el siguiente ejemplo de relación de equivalencia en los números reales: r relacionado con s, si y sólo si $r - s$ es un número entero. En la demostración del último item del Lema 6 probamos que $r - s$ es entero si y sólo si $F(r) = F(s)$. Usaremos esto más adelante.

Definición:

Para $a, b \in [0,1]$, sean $\oplus$ y $\ominus$:

$$a \oplus b = F(a+b), \quad a \ominus b = F(a-b).$$

Lema 8. *Las operaciones $\oplus$ y $\ominus$ verifican las siguientes igualdades para a, b y c en $[0,1)$, $a \neq b$:*

1. $a \ominus b = 1 - (b \ominus a)$,
2. $b \oplus (a \ominus b) = a$,
3. $(a \oplus b) \ominus (c \oplus b) = a \ominus c$.

Demostración. 1. Si $a < b$, entonces:

$$a \ominus b = a - b + 1 = 1 - (b - a) = 1 - (b \ominus a).$$

Si $b < a$, entonces

$$a \ominus b = a - b = 1 - 1 + a - b = 1 - (b - a + 1) = 1 - (b \ominus a).$$

2. Si $a < b$, entonces $a \ominus b = a - b + 1$, por lo que $b \oplus (a - b + 1) = F(b + (a - b + 1)) = F(a+1) = F(a) = a$, usando el Lema 6. Luego, en este caso:

$$b \oplus (a \ominus b) = a.$$

Si $b < a$, entonces $a \ominus b = a - b$, por lo que $b \oplus (a-b) = F(b+a-b) = F(a) = a$. Luego, también aquí es:

$$b \oplus (a \ominus b) = a.$$

3. Vamos a considerar aquí cuatro casos.

Caso 1. $a + b < 1$, $c + b < 1$. Luego: $a \oplus b = a + b$, $c \oplus b = c + b$ y por lo tanto $F(a + b - (c + b)) = F(a - c) = a \ominus c$. Entonces, en este caso vale:

$$(a \oplus b) \ominus (c \oplus b) = a \ominus c.$$

Caso 2. $a + b < 1$, $c + b \geq 1$. Luego: $a \oplus b = a + b$, $c \oplus b = c + b - 1$, de donde $F(a + b - (c + b - 1)) = F(a - c + 1) = F(a - c) = a \ominus c$. Vale también:

$$(a \oplus b) \ominus (c \oplus b) = a \ominus c.$$

Caso 3. $a+b \geq 1$, $c+b < 1$. Luego: $a \oplus b = a+b-1$, $c \oplus b = c+b$, de donde $F(a+b-1-(c+b)) = F(a-c-1) = F(a-c) = a \ominus c$. Vale también aquí:

$$(a \oplus b) \ominus (c \oplus b) = a \ominus c.$$

Caso 4. $a+b \geq 1$, $c+b \geq 1$. Luego: $a \oplus b = a+b-1$, $c \oplus b = c+b-1$, de donde $F(a+b-1-(c+b-1)) = F(a-c) = a \ominus c$. Vale también en este último caso:

$$(a \oplus b) \ominus (c \oplus b) = a \ominus c.$$

□

Teorema 9. *La operación $\oplus$ es asociativa, conmutativa y tiene como elemento neutro el* 0*. Por lo tanto, $\langle [0,1), \oplus, 0 \rangle$ es un monoide conmutativo.*

Demostración. La conmutatividad sale de la definición. Probemos la asociatividad, usando la asociatividad de la suma ordinaria en los reales y el item 5 del Lema 6.

$$a \oplus (b \oplus c) = F(a + (b \oplus c)) = F(a + F(b+c)) =$$

$$F(a+(b+c)) = F((a+b)+c) = F(F(a+b)+c) = F((a \oplus b)+c) = (a \oplus b) \oplus c.$$

Además, por ser $0 \leq a < 1$, se tiene que

$$a \oplus 0 = F(a+0) = F(a) = a.$$

□

Veamos ahora que este monoide puede vincularse con el cociente $\mathbb{R}/\sim_{\mathbb{Z}}$ que vimos en la sección 2.2.1. En primer lugar, recordemos que la relación $\sim_{\mathbb{Z}}$ vincula un número real con todos los que difieren de él en un entero (ver Figura 2.14 en **??**). Vimos en la Observación 7 que esto es equivalente a decir que un número r está vinculado con otro s por $\sim_{\mathbb{Z}}$ si y sólo si $F(r) = F(s)$. Es decir que la clase de equivalencia de un número r, que indicaremos con $\widetilde{r}$, es el conjunto de los s tales que $F(r) = F(s)$, o bien el conjunto de todos los s tales que $r-s$ es entero.

Vamos a definir ahora una estructura de monoide en el conjunto $\mathbb{R}/\sim_{\mathbb{Z}}$ y probar que la función

$$\gamma : \mathbb{R}/\sim_{\mathbb{Z}} \longrightarrow [0,1) \text{ definida por } \gamma(\widetilde{r}) = F(r)$$

es biyectiva y más aún, que esa biyección "conserva las operaciones"; esto significa que obtenemos el mismo resultado efectuando operaciones en el dominio y aplicando luego la función γ o bien aplicando primero la función y luego operando con las imágenes por γ en el codominio.

Una biyección que conserva las operaciones es llamada un *isomorfismo* entre las dos estructuras.

Definimos entonces el 0 como la clase $\widetilde{0}$ (que será el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros) y la suma:

$$\widetilde{r} + \widetilde{s} = \widetilde{r+s}.$$

Teorema 10. *La operación + es asociativa, conmutativa y tiene como elemento neutro $\widetilde{0}$. Por lo tanto, $\langle \mathbb{R}/\sim_{\mathbb{Z}}, +, \widetilde{0}\rangle$ es un monoide conmutativo.*

Demostración. Debemos ver, en primer lugar, que la suma está bien definida, es decir, que no depende de los elementos de la clase que elijamos.

En efecto, tomemos $r' \sim_{\mathbb{Z}} r$, $s' \sim_{\mathbb{Z}} s$ y probemos que $r' + s' \sim_{\mathbb{Z}} r + s$. Como cada real está relacionado con su parte fraccionaria (pues difieren en su parte entera) y aplicando el item 4 del Lema 6, tenemos que:

$$r + s \sim_{\mathbb{Z}} F(r+s) = F(F(r) + F(s)) \sim_{\mathbb{Z}} F(r) + F(s),$$

y lo mismo vale reemplazando r por r' y s por s':

$$r' + s' \sim_{\mathbb{Z}} F(r') + F(s').$$

Pero $F(r) = F(r')$, $F(s) = F(s')$ (por estar relacionados), luego

$$r + s \sim_{\mathbb{Z}} F(r') + F(s'),$$

de donde

$$r + s \sim_{\mathbb{Z}} r' + s'.$$

La asociatividad, conmutatividad y propiedad del neutro salen de las propiedades de la suma en $\mathbb{R}$. □

Teorema 11. *La función γ es un isomorfismo entre $\langle \mathbb{R}/\sim_{\mathbb{Z}}, +, \widetilde{0}\rangle$ y $\langle [0,1), \oplus, 0\rangle$.*

Demostración. En primer lugar, γ está bien definida porque si $r' \sim_{\mathbb{Z}} r$, se tiene $F(r') = F(r)$. Ahora veamos que γ es una biyección.

En efecto, si $\gamma(\widetilde{r}) = \gamma(\widetilde{s})$, es, por definición de γ, $F(r) = F(s)$. Pero eso implica $r \sim_{\mathbb{Z}} s$, o sea, $\widetilde{r} = \widetilde{s}$, por lo que γ es inyectiva.

Sea $a \in [0, 1)$. Entonces $a = F(a)$ (pues su parte entera es 0). Luego, será

$$a = F(a) = \gamma(\widetilde{a}),$$

de donde resulta γ suryectiva.

Veamos que conserva las operaciones.
Conserva el neutro, es decir:

$$\gamma(\widetilde{0}) = F(0) = 0.$$

Para la suma, debemos probar que $\gamma(\widetilde{r} + \widetilde{s}) = \gamma(\widetilde{r}) \oplus \gamma(\widetilde{s})$.
Desarrollando el primer miembro:

$$\gamma(\widetilde{r} + \widetilde{s}) = \gamma(\widetilde{r + s}) = F(r + s) = F(F(r) + F(s)),$$

por definición de suma y por item 4 del Lema 6. Por otra parte:

$$\gamma(\widetilde{r}) \oplus \gamma(\widetilde{s}) = F(r) \oplus F(s) = F(F(r) + F(s)).$$

□

8.2. Álgebra de las gamas

Aplicaremos ahora las propiedades demostradas a las gamas musicales definidas en el Capítulo 6. Estudiaremos el significado de las operaciones $\oplus$ y $\ominus$ y sus propiedades, lo que nos dará como consecuencia una “aritmética de las notas”.

Cuando mencionemos frecuencias en relación a notas lo haremos en general sin considerar en ellas las potencias de 2, ya que eso no influye en las notas que las representan.

Usaremos los símbolos $\sum$ y $\prod$, que vimos en 2.0.5.

Abreviaremos, para $n_1, ..., n_r \in \mathbb{Z}$, $p_1, ..., p_r$ primos mayores que 2:

$$(n_1, ..., n_r) = N, \;\; \log_2 p_i = \pi_i, \;\; \mathbf{g}^{p_1,...,p_r}_{n_1,...,n_r} = \mathbf{g}_N = F(\sum_{i=1}^{r} n_i \pi_i).$$

Omitiremos los sub y supra índices de las sumatorias cuando no sean necesarios.

En primer lugar, veamos que las notas están determinadas por las r-uplas $N = (n_1, ..., n_r)$.

Lema 12. *En la gama* $\mathbf{G}^{p_1,\ldots,p_r}$ *los valores de las notas están unívocamente determinados:* $\mathbf{g}_N = \mathbf{g}_{N'}$ *si y sólo si* $N = N'$.

Demostración. Sea $\mathbf{g}_N = \mathbf{g}_{N'}$. Luego, por definición,

$$F(\sum_{i=1}^{r} n_i \pi_i) = F(\sum_{i=1}^{r} n'_i \pi_i).$$

Por el item 7 del Lema 6:

$$\sum n_i \pi_i - \sum n'_i \pi_i = z,$$

con z entero. El primer miembro es:

$$\sum (n_i - n'_i) \log_2 p_i = \log_2 (\prod p_i^{n_i - n'_i}).$$

El segundo miembro, z, lo podemos escribir como:

$$z = \log_2 2^z.$$

Luego, como los logaritmos coinciden, y como sabemos (ver 2.2.4) que la función logarítmica es biyectiva, se tiene que

$$\prod p_i^{n_i - n'_i} = 2^z.$$

Pero en el primer miembro hay un producto de números primos todos distintos de 2. La única forma en que la igualdad se cumpla es que sea $n_i = n'_i$ para todo $i = 1, ..., r$ y $z = 0$, o sea, que ambos miembros sean 1. Luego, $N = N'$. □

Veamos ahora más en detalle (ya tratamos esto en la sección 6.3) cuales son las notas más simples y cómo las demás dependen de ellas.

Recordemos que las *notas básicas* [1] son las que tienen una única componente distinta de cero, o sea que son las de la forma $\mathbf{g}_{0,0,\ldots,u,\ldots,0}$, con $u \in \mathbb{Z}$ en el lugar k-ésimo, para $k = 1, ..., r$. Corresponden a las frecuencias de la forma: $f = p_k^u$, por lo que:

$$\mathbf{g}_{0,0,\ldots,u,\ldots,0} = F(u\ \pi_k).$$

La siguiente propiedad facilita los cálculos de las notas.

[1] Ver 6.3.

Lema 13. *Toda nota* $\mathbf{g}_N \in \mathbf{G}^{p_1,p_2,...,p_r}$ *tiene una descomposición como suma de notas básicas.*

Demostración. Sea $N = (n_1, n_2, ..., n_r)$. Se tiene (por Lema 6):

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_N &= F(n_1\pi_1 + ... + n_r\pi_r) \\ &= F(F(n_1\pi_1) + ... + F(n_r\pi_r)) \\ &= F(\mathbf{g}_{n_1,0,0,...,0} + ... + \mathbf{g}_{0,0,...,n_r}) \\ &= \mathbf{g}_{n_1,0,0,...,0} \oplus ... \oplus \mathbf{g}_{0,0,...,n_r}. \end{aligned}$$

□

En particular, interesan las *notas coordenadas*, que indicaremos con $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, ...,$\mathbf{g}_r$, (notas básicas cuya única componente no nula es 1). Corresponden a las frecuencias de la forma $f = p_k$, o sea, a las de los armónicos de la gama. Se tiene que

$$\mathbf{g}_k = F(\pi_k).$$

Veamos ahora que las operaciones están bien definidas o "son cerradas" dentro de cada gama, es decir, que el resultado de aplicar $\oplus$ y $\ominus$ a dos notas de una gama es también una nota de la gama.

Lema 14. *Sean* $p_1, ..., p_r$ *números primos mayores que* 2. *Sean las notas:*

$$\mathbf{g}_M = F(m_1\pi_1 + ... + m_r\pi_r) = F(\sum m_i\pi_i),$$

$$\mathbf{g}_N = F(n_1\pi_1 + ... + n_r\pi_r) = F(\sum n_i\pi_i)$$

de la gama

$$\mathbf{G}^{p_1,...,p_r} = \{\mathbf{g}_N, N = (n_1, ..., n_r) \in \mathbb{Z}^r\}.$$

Se tiene que:

$$\mathbf{g}_M \oplus \mathbf{g}_N = \mathbf{g}_{M+N}, \quad \mathbf{g}_N \ominus \mathbf{g}_M = \mathbf{g}_{N-M}.$$

Demostración. En primer lugar,

$$\mathbf{g}_M \oplus \mathbf{g}_N = F(\mathbf{g}_M + \mathbf{g}_N) = F(F(\sum m_i\pi_i) + F(\sum n_i\pi_i)) =$$

$$F(\sum m_i\pi_i + \sum n_i\pi_i) = F(\sum (m_i + n_i)\pi_i) = \mathbf{g}_{M+N}$$

Veamos la diferencia. Se tiene

$$F(\mathbf{g}_N - \mathbf{g}_M) = F(F(\sum n_i\pi_i) - F(\sum m_i\pi_i)) =$$

$$F(F(\sum n_i\pi_i) + F(\sum(-m_i)\pi_i) - 1),$$

teniendo en cuenta la propiedad de F dada en el item 7 del Lema 6. Asimismo, por el item 7, tenemos que:

$$F(F(\sum n_i\pi_i) + F(\sum(-m_i)\pi_i) - 1) =$$

$$F(F(\sum n_i\pi_i) + F(\sum(-m_i)\pi_i)) = F(\mathbf{g}_N + \mathbf{g}_{-M}),$$

donde llamamos: $\mathbf{g}_{-M} = F(\sum(-m_i)\pi_i)$. Por la definición de suma truncada y por la primera parte de la demostración de este lema:

$$F(\mathbf{g}_N + \mathbf{g}_{-M}) = \mathbf{g}_N \oplus \mathbf{g}_{-M} = \mathbf{g}_{N-M}.$$

□

Como anticipamos, diremos que una operación es *cerrada* en un conjunto, si todos los resultados de la operación pertenecen al conjunto.

Corolario 15. *Las operaciones* $\oplus$ *y* $\ominus$ *son cerradas en* $\mathbf{G}^{p_1,\ldots,p_r}$.

Demostración. Es inmediata, pues $\mathbf{g}_{M+N}$ y $\mathbf{g}_{N-M}$ están en $\mathbf{G}^{p_1,\ldots,p_r}$. □

En el siguiente Corolario probamos que la suma $\oplus$ de notas $\mathbf{g}_M \oplus \mathbf{g}_N$, que corresponde a multiplicar la frecuencia correspondiente a $\mathbf{g}_M$ por la de $\mathbf{g}_N$, traslada la nota $\mathbf{g}_M$ un intervalo $[\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_N]$.

La resta de notas $\mathbf{g}_N \ominus \mathbf{g}_M$ es la longitud del intervalo $[\mathbf{g}_M, \mathbf{g}_N]$, que corresponde al cociente de sus respectivas frecuencias.

Corolario 16. *Sean las frecuencias*

$$f = p_1^{m_1} \cdot ...p_r^{m_r} \quad y \quad g = p_1^{n_1} \cdot ...p_r^{n_r},$$

cuyas notas correspondientes son

$$\mathbf{g}_{m_1,\ldots,m_r} = \mathbf{g}_M \quad y \quad \mathbf{g}_{n_1,\ldots,n_r} = \mathbf{g}_N.$$

Las notas

$$\mathbf{g}_{M+N} \quad y \quad \mathbf{g}_{N-M}$$

corresponden, respectivamente, a

$$f \cdot g \quad y \quad \frac{g}{f}.$$

Demostración. La nota que corresponde a $f \cdot g$ está definida por $F(\log_2(f \cdot g))$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} F(\log_2(f \cdot g)) &= F(\log_2 f + \log_2 g) = \\ F(F(\log_2 f) + F(\log_2 g)) &= F(\log_2 f) \oplus F(\log_2(g) = \\ \mathbf{g}_M \oplus \mathbf{g}_N &= \mathbf{g}_{M+N}. \end{aligned}$$

Las igualdades se deducen: de las propiedades del logaritmo (ver 2.2.4) y de la función parte fraccionaria, la definición de $\oplus$ y el lema anterior. Análogamente, a la frecuencia $\frac{g}{f}$ corresponde la nota $\mathbf{g}_{N-M}$, como se puede ver por las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} F(\log_2(\frac{g}{f})) &= F(\log_2 g - \log_2 f) = \\ F(\log_2 g + (-\log_2 f)) &= F(F(\log_2 g) + F(-\log_2 f)) = \\ F(F(\log_2 g) + 1 - F(\log_2 f)) &= F(F(\log_2 g) - F(\log_2 f)) = \\ F(\log_2 g) \ominus F(\log_2 f) &= \mathbf{g}_N \ominus \mathbf{g}_M = \mathbf{g}_{N-M}. \end{aligned}$$

□

Una propiedad importante para calcular los acordes propios (mayores y menores) de una gama es la siguiente

Lema 17. *La nota que representa el armónico k-ésimo de* $\mathbf{g}_N \in \mathbf{G}^{p_1,p_2,\ldots,p_r}$ *es:*

$$\mathbf{g}_N \oplus \mathbf{g}_k.$$

Análogamente, $\mathbf{g}_N$ *representa el armónico k-ésimo de la nota*

$$\mathbf{g}_N \ominus \mathbf{g}_k.$$

Demostración. Si $\mathbf{g}_N$ está asociado a la frecuencia $f = p_1^{n_1} \cdot ... p_r^{n_r}$, el armónico p_k de f es (ver 3.1.1)

$$p_k \cdot f = p_1^{n_1} \cdot ... p_k^{n_k+1} ... p_r^{n_r}.$$

Además, la nota que corresponde a la frecuencia p_k es (por definición)

$$F(\pi_k) = \mathbf{g}_k.$$

Luego, por el corolario 16 tenemos que la nota correspondiente al producto $p_k \cdot f$ es

$$\mathbf{g}_N \oplus \mathbf{g}_k.$$

Por otra parte, busquemos el armónico k-ésimo de $\mathbf{g}_N \ominus \mathbf{g}_k$, que es, según demostramos,

$$(\mathbf{g}_N \ominus \mathbf{g}_k) \oplus \mathbf{g}_k.$$

Por el lema 8 tenemos que

$$(\mathbf{g}_N \ominus \mathbf{g}_k) \oplus \mathbf{g}_k = \mathbf{g}_N,$$

como queríamos probar. □

Podemos demostrar también las siguientes propiedades.

Corolario 18. *En una gama $\mathbf{G}^{p_1,p_2,...,p_r}$, dados $\mathbf{g}_M = \mathbf{g}_{m_1,...,m_r}$, $\mathbf{g}_N = \mathbf{g}_{n_1,...,n_r}$ la longitud de un intervalo $[\mathbf{g}_M, \mathbf{g}_N]$ se conserva por traslación, es decir que para $K = (k_1, ..., k_r)$ se tiene que la longitud de $[\mathbf{g}_M, \mathbf{g}_N]$ es igual a la de $[\mathbf{g}_{M+K}, \mathbf{g}_{N+K}]$.*

Demostración. Debemos probar entonces que

$$\mathbf{g}_N \ominus \mathbf{g}_M = \mathbf{g}_{N+K} \ominus \mathbf{g}_{M+K}.$$

En efecto, por el Lema 14 tenemos que:

$$\mathbf{g}_{N+K} \ominus \mathbf{g}_{M+K} = \mathbf{g}_{N+K-(M+K)} = \mathbf{g}_{N-M} = \mathbf{g}_N \ominus \mathbf{g}_M.$$

□

Veremos ahora que cada gama $\mathbf{G}^{p_1,\dots,p_r}$ es un monoide con las operaciones de $[0,1)$. Para eso basta probar que las operaciones son cerradas en cada $\mathbf{G}^{p_1,\dots,p_r}$, es decir que el neutro 0 está en $\mathbf{G}^{p_1,\dots,p_r}$ y que si sumamos con $\oplus$ dos elementos de $\mathbf{G}^{p_1,\dots,p_r}$, obtenemos un elemento de $\mathbf{G}^{p_1,\dots,p_r}$. Más aún, para cada elemento $\mathbf{g}_N$ de $\mathbf{G}^{p_1,\dots,p_r}$ existe su *opuesto*, es decir, un elemento $\mathbf{g}_M$ tal que $\mathbf{g}_N \oplus \mathbf{g}_M = \mathbf{g}_0$. Con esto mostraremos que $\mathbf{G}^{p_1,\dots,p_r}$ con esas operaciones es un grupo. Supondremos, como lo venimos haciendo al hablar de notas, que $p_1, ..., p_r$ son primos mayores que 2.

Teorema 19. *Definimos para $\mathbf{g}_N \in \mathbf{G}^{p_1,\dots,p_r}$ su opuesto por $-\mathbf{g}_N = \mathbf{g}_{-N}$, donde denotamos $-N = (-n_1, ..., -n_r)$. Entonces $\mathbf{G}^{p_1,\dots,p_r}$ con las operaciones $\oplus$, opuesto $-$ y neutro 0 es un grupo conmutativo.*

Demostración. Por el Corolario 15 se prueba que $\langle \mathbf{G}^{p_1,\dots,p_r}, \oplus, 0\rangle$ es un monoide conmutativo. Probemos ahora que cada elemento tiene su opuesto.

Pero eso es inmediato:

$$\mathbf{g}_N \oplus \mathbf{g}_{-N} = \mathbf{g}_{N-N} = \mathbf{g}_0 = 0.$$

□

Observación 20. Veamos la relación de $\mathbf{g}_N$ y $\mathbf{g}_{-N}$. Tenemos:

$$\mathbf{g}_{-N} = F(\sum(-n_i)\ \pi_i) = F(-\sum n_i\ \pi_i) = F(-\mathbf{g}_N).$$

Por el item 3 del Lema 6, tenemos que $F(-\mathbf{g}_N) = F(1-\mathbf{g}_N)$.

Si $\mathbf{g}_N = 0 = \mathbf{g}_0$, es $N = -N = 0$ y entonces $\mathbf{g}_{-N} = 0$. Si $\mathbf{g}_N \neq 0$, tenemos que $0 < \mathbf{g}_N < 1$, lo que implica $-1 < -\mathbf{g}_N < 0$, de donde $0 < 1 - \mathbf{g}_N < 1$. De esta última expresión deducimos que $F(1-\mathbf{g}_N) = 1-\mathbf{g}_N$, o sea que, para $\mathbf{g}_{-N} \neq 0$,

$$\mathbf{g}_{-N} = 1 - \mathbf{g}_N.$$

Vamos a ver ahora una propiedad que relaciona las r-uplas de números enteros con la gama $\mathbf{G}^{p_1,\dots,p_r}$.

La siguiente es una propiedad conocida, que mencionamos en **??**.

Teorema 21. *El conjunto $\mathbb{Z}^r$ de r-uplas $N = (n_1, ..., n_r)$ de números enteros con la suma componente a componente, el opuesto dado por $-N = (-n_1, ..., -n_r)$ y elemento neutro $0 = (0, ..., 0)$ es un grupo.*

Fijados $p_1, ..., p_r$, tenemos ahora dos grupos:

$\langle \mathbb{Z}^r, +, -, 0\rangle$ y $\langle \mathbf{G}^{p_1,...,p_r}, \oplus, -, 0\rangle$.

Vamos a probar que hay una biyección h de entre ellos. Más aún, vamos a probar que esa biyección es en realidad un *isomorfismo* entre $\langle \mathbb{Z}^r, +, -, 0\rangle$ y $\langle \mathbf{G}^{p_1,...,p_r}, \oplus, -, 0\rangle$ (ver 8.1). Formalmente:

$$h(M+N) = h(M) \oplus h(N), \quad h(-Z) = -h(Z), \quad h(0) = 0.$$

Denotaremos entonces

$$\langle \mathbb{Z}^r, +, -, 0\rangle \approx \langle \mathbf{G}^{p_1,...,p_r}, \oplus, -, 0\rangle$$

y podremos considerar "identificados" a estos dos grupos.

Teorema 22. *La función* $h : \mathbf{G}^{p_1,...,p_r} \longrightarrow \mathbb{Z}^r$ *definida por* $h(\mathbf{g}_{n_1,...,n_r}) = (n_1, ..., n_r)$ *es un isomorfismo.*

Demostración. Veamos en primer lugar que la función h es una biyección.

Es suryectiva porque para cada $N = (n_1, ..., n_r) \in \mathbb{Z}^r$, $N = h(\mathbf{g}_{n_1,...,n_r})$.

La inyectividad es trivial: si $h(\mathbf{g}_N) = h(\mathbf{g}_M)$, es $N = M$ y entonces $\mathbf{g}_N = \mathbf{g}_M$.

Es claro que $h(\mathbf{g}_{0,...,0}) = (0, ..., 0)$.

Además, hemos visto en el Lema 8.2 que $\mathbf{g}_M \oplus \mathbf{g}_N = \mathbf{g}_{M+N}$. Luego, tenemos que

$$h(\mathbf{g}_M \oplus \mathbf{g}_N) = h(\mathbf{g}_{M+N}) = M + N = h(\mathbf{g}_M) + h(\mathbf{g}_N),$$

luego, h conserva la suma.

Veamos ahora que h preserva el opuesto. En efecto:

$$h(-\mathbf{g}_N) = h(\mathbf{g}_{-N}) = -N = -h(\mathbf{g}_N).$$

$\square$

Observación 23. Con respecto a las notas de una gama, podemos pensar que las vemos en tres niveles:

- como frecuencias f en general, en la forma

  $$f = 2^z \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot ...p_r^{n_r},$$

  que denotaremos abreviadamente: $f = f_{z,N}$,

- como logaritmos de frecuencias:

$$\log_2 f = z + \sum n_i \pi_i,$$

  que denotaremos abreviadamente: $l = \log_2 f = l_{z,N}$,

- como parte fraccionaria del logaritmo:

$$\mathbf{g}_N = F(\sum n_i \pi_i).$$

Miremos ahora esos tres niveles como conjuntos de números. Llamemos

$$\mathcal{F} = \{f_{z,N},\ z \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{Z}^r\},$$

$$\mathcal{L} = \{l_{z,N},\ z \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{Z}^r\}.$$

Entonces se tiene que

$$\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^+ - \{0\},$$

$$\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R},$$

donde hemos indicado con $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ al conjunto de los números reales positivos no nulos.

Consideremos ahora el grupo multiplicativo de los reales positivos no nulos, que indicaremos $\langle \mathbb{R}^+ - \{0\}, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$, y el grupo aditivo de los reales, que indicaremos $\langle \mathbb{R}, +, -, 0\rangle$ (ver 2.0.5). Probaremos que $\mathcal{F}$ con las operaciones heredadas de las definidas en $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ y $\mathcal{L}$ con las operaciones heredadas de las definidas en $\mathbb{R}$ son también grupos:

$$\langle \mathcal{F}, \cdot, ^{-1}, 1\rangle \text{ y } \langle \mathcal{L}, +, -, 0\rangle,$$

que son isomorfos. El isomorfismo será la función $\log_2 : \mathbb{R}^+ - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ restringida al dominio $\mathcal{F}$ y codominio $\mathcal{L}$.

Lema 24. *Las operaciones producto, inverso y neutro* 1 *de los reales no nulos restringidas al conjunto $\mathcal{F}$ determinan el grupo $\langle \mathcal{F}, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$.*

Demostración. En primer lugar, debemos ver que las operaciones $\cdot$, $^{-1}$ y neutro 1 de los reales son cerradas en el conjunto $\mathcal{F}$.

En efecto, para $f_{z,N},\ f_{z',N'} \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} f_{z,N} \cdot f_{z',N'} &= (2^z \cdot p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}) \cdot (2^{z'} \cdot p_1^{n'_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n'_r}) \\ &= 2^{z+z'} \cdot p_1^{n_1+n'_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r+n'_r} \\ &= f_{(z+z'),N+N'} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Para $f_{z,N} \in \mathcal{F}$,

$$(f_{z,N})^{-1} = \frac{1}{2^z \cdot p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}} = 2^{-z} \cdot p_1^{-n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{-n_r} \in \mathcal{F}.$$

También se tiene que

$$f_{0,(0,\ldots,0)} = 1 \in \mathcal{F}.$$

Luego, las operaciones son cerradas en $\mathcal{F}$ y por ser los reales no nulos un grupo multiplicativo con estas operaciones, heredan las propiedades que permiten definir una estructura de grupo en el conjunto $\mathcal{F}$. □

Lema 25. *Las operaciones suma, opuesto y neutro* 0 *de los reales restringidas al conjunto* $\mathcal{L}$ *determinan el grupo* $\langle \mathcal{L}, +, -, 0 \rangle$.

Demostración. En primer lugar, veamos que las operaciones suma, opuesto y neutro 0 de los reales son cerradas en el conjunto $\mathcal{L}$. En efecto, para $l_{z,N},\ l_{z',N'} \in \mathcal{L}$ se tiene:

$$l_{z,N} + l_{z',N'} = (z + \sum n_i \pi_i) + (z' + \sum n'_i \pi_i)$$

$$= (z + z') + \sum (n_i + n'_i)\pi_i = l_{(z+z'),(N+N')} \in \mathcal{L}.$$

El opuesto $-l_{z,N}$ a $l_{z,N}$ es:

$$-z - \sum n_i \pi_i = (-z) + \sum (-n_i)\pi_i = l_{-z,-N} \in \mathcal{L}.$$

También el 0 está en $\mathcal{L}$, pues:

$$0 = l_{0,(0,\ldots,0)}.$$

Luego, restringiendo las operaciones de los reales a $\mathcal{L}$ obtenemos el grupo $\langle \mathcal{L}, +, -, 0 \rangle$. □

El siguiente teorema es un resultado conocido, que vale para la función logaritmo de cualquier base. Veremos la demostración para $\log_2$.

Teorema 26. *La función* $\log_2 : \mathbb{R}^+ - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es un isomorfismo del grupo* $\langle \mathbb{R}^+ - \{0\}, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ *sobre el grupo* $\langle \mathbb{R}, +, -, 0\rangle$.

Demostración. La función $\log_2$ es una biyección de los reales positivos no nulos sobre los reales. En efecto, si $\log_2 r = \log_2 s$, entonces $r = 2^{\log_2 r} = 2^{\log_2 s} = s$; luego, $\log_2$ es inyectiva. Además, para cualquier real a, existe $b = 2^a$ tal que $a = \log_2 b$, pues $\log_2(2^a) = a$; por lo tanto, $\log_2$ es suryectiva.

Además, por las propiedades de la función logaritmo que vimos en 2.2.4, tenemos que:

$$\log_2(r \cdot s) = \log_2 r + \log_2 s,$$

$$\log_2(\frac{1}{r}) = -\log_2 r,$$

$$\log_2(1) = 0.$$

Esto nos dice que las operaciones se conservan a través de la función $\log_2$, o sea, hemos probado que $\log_2$ es un isomorfismo. $\square$

Teorema 27. *Sea*

$$u : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{L}$$

definida por: $u(f) = \log_2 f$. *Entonces,* u *es un isomorfismo del grupo* $\langle \mathcal{F}, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ *sobre el grupo* $\langle \mathcal{L}, +, -, 0\rangle$.

Demostración. La inyectividad de $\log_2$ ya fue probada, por lo que u es inyectiva. Debemos ver que u es suryectiva como función $u : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{L}$.

Sea $l_{z,N} \in \mathcal{L}$. Entonces, es de la forma: $l_{z,N} = z + \sum n_i \pi_i$. Tomando $f_{z,N} = 2^{l_{z,N}} = 2^z \cdot \prod p_i^{n_i}$ se tiene que $\log_2 f_{z,N} = l_{z,N}$. Esto prueba la suryectividad de u.

Como ya vimos que las operaciones se conservan por $\log_2$, también se conservan por u, que es la restricción de la función $\log_2$ a $\mathcal{F}$.

Luego, u es efectivamente un isomorfismo. $\square$

Veamos ahora cuál es la relación de estos dos grupos con el grupo $\langle \mathbf{G}^{p_1,\ldots,p_r}, \oplus, -, 0\rangle$.

Vimos en los Teoremas 10 y 11 de este capítulo que $\gamma : \mathbb{R}/\sim_{\mathbb{Z}} \longrightarrow [0,1)$ definida por $\gamma(\widetilde{r}) = F(r)$ es un isomorfismo de monoides.
Restringiremos ahora la relación $\sim_{\mathbb{Z}}$ a $\mathcal{L}$ y estudiaremos el cociente $\mathcal{L}/\sim_{\mathbb{Z}}$.

Observemos que $l_{z,N} \sim_{\mathbb{Z}} l_{w,M}$ si y sólo si $F(l_{z,N}) = F(l_{w,M})$.

Como $l_{z,M} = z + \sum m_i\pi_i$ y $l_{w,N} = w + \sum n_i\pi_i$ y por el item 3 del Lema 6, se tiene que $l_{z,M} \sim_{\mathbb{Z}} l_{w,N}$ si y sólo si $F(\sum m_i\pi_i) = F(\sum n_i\pi_i)$, o sea, si $\mathbf{g}_M = \mathbf{g}_N$. Pero ya hemos visto en el Lema 12 de este capítulo que esto ocurre si y sólo si $M = N$. Luego, las clases **sólo dependen de** N. Entonces, podemos tomar $l_{0,N}$ como elemento de referencia de cada clase $\widetilde{l_{z,N}}$ y considerar que

$$\mathcal{L}/\sim_{\mathbb{Z}} = \{\widetilde{l_{0,N}},\ N \in \mathbb{Z}^r\}.$$

Definimos las siguientes operaciones en el conjunto $\mathcal{L}/\sim_{\mathbb{Z}}$:

$$\widetilde{l_{0,M}} + \widetilde{l_{0,N}} = \widetilde{l_{0,(M+N)}},$$

que es la suma heredada de la de $\mathbb{R}/\sim_{\mathbb{Z}}$, pues $l_{0,M+N} = l_{0,M} + l_{0,N}$.

$$-\widetilde{l_{0,N}} = \widetilde{l_{0,-N}},$$

$$0 = \widetilde{l_{0,(0,\ldots,0)}},$$

también el cero heredado del de $\mathbb{R}/\sim_{\mathbb{Z}}$.

Con todo esto en mente ya podemos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 28. *El conjunto $\mathcal{L}/\sim_{\mathbb{Z}}$ munido de las operaciones de suma, opuesto y 0 constituye un grupo $\langle\mathcal{L}/\sim_{\mathbb{Z}}, +, -, 0\rangle$, que es isomorfo al grupo $\langle\mathbf{G}^{p_1,\ldots,p_r}, \oplus, -, 0\rangle$.*

Demostración. El elemento neutro $\widetilde{l_{0,(0,\ldots,0)}} = \widetilde{0}$ está en $\mathcal{L}/\sim_{\mathbb{Z}}$. La suma definida es cerrada en $\mathcal{L}/\sim_{\mathbb{Z}}$, ya que $\widetilde{l_{0,(M+N)}}$ está en el conjunto. Luego, $\langle\mathcal{L}/\sim_{\mathbb{Z}}, +, 0\rangle$, por heredar las propiedades de $\langle\mathbb{R}/\sim_{\mathbb{Z}}, +, -, 0\rangle$, es un monoide conmutativo. Además, comprobamos que:

$$\widetilde{l_{0,N}} + \widetilde{l_{0,-N}} = \widetilde{l_{0,(0,\ldots,0)}},$$

o sea, que $\widetilde{l_{0,-N}}$ es el opuesto de $\widetilde{l_{0,N}}$.

Luego, $\langle\mathcal{L}/\sim_{\mathbb{Z}}, +, -, 0\rangle$ es un grupo.

Definimos la función $g : \mathcal{L}/\sim_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbf{G}^{p_1,\ldots,p_r}$ como la restricción de γ a $\mathcal{L}/\sim_{\mathbb{Z}}$, o sea que:

$$g(\widetilde{l_{0,N}}) = F(l_{0,N}).$$

Entonces, se ve que las imágenes por g están en $\mathbf{G}^{p_1,\ldots,p_r}$ y que g es inyectiva por serlo γ. Veamos que es suryectiva.

Dada $\mathbf{g}_N \in \mathbf{G}^{p_1,\ldots,p_r}$, se tiene por la definición de las notas que:

$$\mathbf{g}_N = F(\sum n_i\pi_i) = F(l_{0,N}) = g(\widetilde{l_{0,N}}).$$

Luego, g es suryectiva.

Por ser restricción de γ, sabemos que g conserva las operaciones de suma y neutro. Veamos el opuesto, o sea, debemos probar que:

$$g(-\widetilde{l_{0,N}}) = -g(\widetilde{l_{0,N}}).$$

Por definición de opuesto en $\mathcal{L}/\sim_{\mathbb{Z}}$ y de la función g:

$$g(-\widetilde{l_{0,N}}) = g(\widetilde{l_{0,-N}}) = F(l_{0,-N}) = \mathbf{g}_{-N}.$$

Por otra parte,

$$-g(\widetilde{l_{0,N}}) = -F(l_{0,N}) = -\mathbf{g}_N = \mathbf{g}_{-N},$$

por definición de g y de opuesto en $\mathbf{G}^{p_1,\ldots,p_r}$. Así, queda probado que g conserva el opuesto.

Hemos probado entonces que g resulta un isomorfismo de grupos. $\square$

Como conclusión de esta sección podemos observar que queda demostrado que hay tres grupos que son isomorfos:

$$\langle \mathcal{L}/\sim_{\mathbb{Z}}, +, -, 0\rangle \approx \langle \mathbf{G}^{p_1,\ldots,p_r}, \oplus, -, 0\rangle \approx \langle \mathbb{Z}^r, +, -, 0\rangle.$$

8.3. Densidad de una gama en $[0,1]$

Además de las propiedades algebraicas que ya mencionamos, una característica importante de cada gama $\mathbf{G}^{p_1,\ldots,p_r}$ como conjunto de números contenido en los reales, más específicamente en el intervalo $[0,1]$, es que es un conjunto *denso*. Mencionamos este resultado en el Capítulo 6, porque se usa para probar que aumentando el número de notas es posible aproximarse cuanto se quiera al 0 (o al 1) para poder cerrar aproximadamente un ciclo.

En primer lugar entonces, vamos a definir el concepto de *densidad* de un conjunto de números contenido en los reales.

La idea es que dado un conjunto $T \subset \mathbb{R}$, T es *denso en* $\mathbb{R}$ si hay elementos de T "tan cerca como queramos" de cualquier número real, esto es, a una distancia arbitrariamente pequeña de él. Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{Z}$ de los

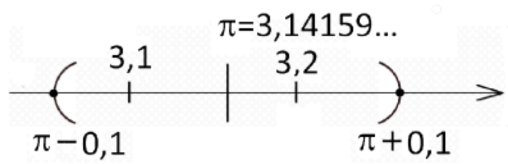


Figura 8.1: Dos racionales cerca de π

números enteros **no es** denso en $\mathbb{R}$, porque, por ejemplo, no hay ningún entero a distancia $0,1$ (o menor) del número real -5.

En cambio los racionales **sí** son densos en los reales. Veamos en un ejemplo cómo se prueba.

Para el número π, tenemos los racionales $3,1$ y $3,2$ a distancia menor que $\frac{1}{10}$ de él (o a la distancia que queramos), como vemos en la Figura 8.1. Al decir números "a distancia $\frac{1}{10}$" de un número r queremos decir que dichos números están en el intervalo $(r - \frac{1}{10}, r + \frac{1}{10})$. En general, dado un real r, queremos ver que "cerca" de r (con una precisión de un número ε tan pequeño como se quiera) hay algún racional. Siempre podemos tomar racionales con un número finito de decimales mayores o menores que r que se aproximen a él con precisión ε.

Si el conjunto T está contenido en un intervalo I, consideramos que es *denso en* I, si la condición de que los elementos de T estén "arbitrariamente cerca" de cada número real se cumple sólo para los números reales contenidos en I.

La demostración del siguiente teorema (que puede verse completa en [41], sección 16 y siguientes) requiere de numerosos cálculos engorrosos. Daremos los pasos a seguir demostrando pequeñas propiedades y daremos algunas ejemplos calculando elementos en la gama $\mathbf{G}^5$. Es muy ilustrativo seguir los pasos porque da una clara idea de cómo se comportan las notas y las funciones asociadas a ellas en la gama.

Teorema 29. *Fijados los números primos $p_1, ..., p_r$ mayores que 2, el conjunto $\mathbf{G}^{p_1,\dots,p_r}$ es denso en el intervalo real* $[0, 1]$.

Observación 30. Es suficiente reducirnos al caso de sólo un número primo $p_1 > 2$. En efecto, podemos considerar que $\mathbf{G}^{p_1} \subset \mathbf{G}^{p_1,p_2\dots,p_r}$, identificando cada elemento $\mathbf{g}^{p_1}_{n_1}$ de $\mathbf{G}^{p_1}$ con el elemento $\mathbf{g}^{p_1,p_2,\dots,p_r}_{n_1,0,\dots,0}$ de $\mathbf{G}^{p_1,p_2\dots,p_r}$. Si demostramos que $\mathbf{G}^{p_1}$ es denso en $[0, 1]$, con mayor razón lo será $\mathbf{G}^{p_1,\dots,p_r}$ que lo contiene.

Consideramos entonces una gama $\mathbf{G}^p$ con un solo primo $p > 2$ y sean sus notas $\mathbf{g}_n = F(n\,\pi)$ (suprimiendo el supraíndice p y llamando $\pi = \log_2(p)$). Consideramos las notas $\mathbf{g}_n$ con n natural, porque esto basta para demostrar la densidad.

Demostraremos el siguiente teorema, que implica la densidad de $\mathbf{G}^p$ en $[0,1]$.

Teorema 31. *En cada subintervalo de* $[0,1]$ *arbitrariamente pequeño hay infinitas notas* $\mathbf{g}_n = F(n\,\pi)$.

Demostración. **(1) Las funciones ψ y $\overline{\psi}$**

Llamaremos:

$$\psi(n) = \mathbf{g}_n, \qquad \overline{\psi}(n) = 1 - \mathbf{g}_n.^2 \tag{8.1}$$

Mostremos ahora las propiedades de ψ y $\overline{\psi}$.

(I) Ambas funciones tienen como dominio los números naturales (incluído el 0),

(II) Ambas funciones tienen como codominio los números reales irracionales. Esto último es cierto porque $\log_2(p)$ es irracional,(ver 2.2.4, último item de las propiedades de la función logaritmo) luego todo múltiplo de él también lo es y su parte fraccionaria igualmente.

(III) Los valores de ambas funciones están en el intervalo $[0,1]$.

(IV) Ambas funciones son inyectivas. Que ψ es inyectiva sale del Corolario 12 y de allí se deduce que $\overline{\psi}$ también lo es.

(V) Las diferencias $\Delta_n\psi$ y $\Delta_n\overline{\psi}$ definidas por:

$$\Delta_n\psi = \psi(n+1) - \psi(n), \quad \Delta_n\overline{\psi} = \overline{\psi}(n+1) - \overline{\psi}(n) \tag{8.2}$$

tienen la siguiente forma, para $\delta = \psi(1)$ y $\overline{\delta} = 1 - \psi(1)$:

$$\Delta_n\psi = \delta - \theta(n), \quad \Delta_n\overline{\psi} = \overline{\delta} - \overline{\theta}(n), \tag{8.3}$$

siendo

$$\theta(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } \Delta_n\psi > 0 \\ 1, & \text{si } \Delta_n\psi < 0 \end{cases} \tag{8.4}$$

[2] Por la Observación 20 tenemos que si $N \neq 0$, es $\mathbf{g}_{-N} = 1 - \mathbf{g}_N$. Luego, podemos ver que

$$\psi(n) = \mathbf{g}_n, \ \ \overline{\psi}(n) = \mathbf{g}_{-n}.$$

$$\overline{\theta}(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } \Delta_n\overline{\psi} > 0 \\ 1, & \text{si } \Delta_n\overline{\psi} < 0 \end{cases} \tag{8.5}$$

Estas igualdades se justifican en base al Lema 6, item 6. En efecto, tomando $r = \pi$, $s = n\,\pi$:

$$\psi(n+1) - \psi(n) = F(n\,\pi + \pi) - F(n\,\pi) > 0 \text{ implica}$$

$$F(n\,\pi + \pi) = F(n\,\pi) + F(\pi) = \psi(n) + \delta,$$

de donde

$$F(n\,\pi + \pi) - F(n\,\pi) = \psi(n+1) - \psi(n) = \delta.$$

Si la diferencia es menor que 0, quiere decir que $F(n\,\pi+\pi) = F(n\,\pi)+F(\pi)-1$, o sea:

$$\psi(n+1) - \psi(n) = \delta - 1.$$

Análogamente se prueba para el caso dual de $\overline{\psi}$.

Observamos que $\theta(n) = 0$ si y sólo si $\overline{\theta}(n) = 1$, hecho que usaremos más tarde.

(VI) Los valores para 0 y 1 son:
$\psi(0) = 0$, $\psi(1) > 0$, $\overline{\psi}(0) = 1$, $\overline{\psi}(1) < 1$.

n	$\psi(n)$	Δ_n	$\theta(n)$
0	0	0,33985	0
1	0,33985	0,33985	0
2	0,6797	-0,66015	1
3	0,01955	0,33985	0
4	0,3594	0,33985	0
5	0,69925	-0,66015	1
6	0,0391	0,33985	0
7	0,37895	0,33985	0
8	0,7188	-0,66015	1
9	0,0585		

n	$\overline{\psi}(n)$	$\overline{\Delta}_n$	$\overline{\theta}(n)$
0	1	-0,33985	1
1	0,66015	-0,339850,	1
2	0,3203	0,66015	0
3	0,98045	-0,33985	1
4	0,6406	-0,33985	1
5	0,30075	0,66015	0
6	0,9609	-0,33985	1
7	0,62105	-0,33985	1
8	0,2812	0,66015	0
9	0,9415		

Figura 8.2: Ejemplificación en $\mathbf{G}^5$

(2) Las constantes δ y $\overline{\delta}$

Se tiene

$$\Delta_1 = \psi(2) - \psi(1) = \psi(1) - \theta(1).$$

Si $\Delta_1 > 0$, es $\theta(1) = 0$. Tenemos entonces que $\psi(2) = 2\,\delta$. Luego, por ser un valor de ψ, será $0 \leq 2\,\delta \leq 1$, de donde: $\delta \leq \frac{1}{2}$. En realidad, es $\delta < \frac{1}{2}$, pues δ es irracional.

De haber sido $\theta(1) = 1$, sería $\overline{\theta}(1) = 0$ y hubiéramos trabajado con $\overline{\psi}$ llegando a que $\overline{\delta} \leq \frac{1}{2}$.

En el ejemplo de la Figura 8.2, donde $\pi = \log_2 5$, es $\Delta_1 > 0$ y $\delta = 0,33985 < \frac{1}{2}$.

Si hubiéramos tomado el caso de $\mathbf{G}^3$, o sea, $\pi = \log_2(3)$, tendríamos $\Delta_1 = -0,41504 < 0$ y $\delta = 0,58496 > \frac{1}{2}$.

(3) Los u_i

Puede probarse la siguiente propiedad (no daremos los detalles):

si $\theta(m) = 1$, *entonces* $\theta(m+1) = 0$.

En forma dual, se prueba que

si $\overline{\theta}(m) = 0$, *entonces* $\overline{\theta}(m+1) = 1$.

Supongamos que $\theta(1) = 0$, como en nuestro caso. Podemos encontrar el mínimo n tal que $\theta(n) = 1$. Lo llamaremos u_1. Sabemos por lo anterior que $\theta(u_1 + 1) = 0$. Podemos buscar el próximo número u_2 tal que $\theta(u_2) = 1$. Y así siguiendo.

En nuestro ejemplo, $u_1 = 2$, $u_2 = 5$, $u_3 = 8$,... como puede verse en las tablas de la Figura 8.2.

Usaremos esta propiedad para expresar $\psi(n)$ en función de δ.

En lo que sigue, para simplificar, pondremos ψn en lugar de $\psi(n)$ y θn en lugar de $\theta(n)$.

Veremos ahora cómo los u_i intervienen en los valores de ψ, para lo cual calcularemos como motivación los valores de la función ψ en nuestro caso, en el que $\pi = \log_2(5)$.

Teniendo en cuenta que, como $u_1 = 2$, es $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$, y como $u_2 = 5$, es $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0$, $\Delta_5 < 0$,... obtenemos entonces

$$\begin{aligned}
\psi 1 &= \delta, \\
\psi 2 &= (\psi 2 - \psi 1) + \delta \\
&= \delta + \delta \\
&= 2\delta, \\
\psi 3 &= (\psi 3 - \psi 2) + 2\delta \\
&= (\delta - 1) + 2\delta \\
&= 3\delta - 1, \\
\psi 4 &= (\psi 4 - \psi 3) + 3\delta - 1 \\
&= \delta + 3\delta - 1 \\
&= 4\delta - 1, \\
\psi 5 &= (\psi 5 - \psi 4) + 4\delta - 1 \\
&= \delta + 4\delta - 1 \\
&= 5\delta - 1, \\
\psi 6 &= (\psi 6 - \psi 5) + 5\delta - 1 \\
&= (\delta - 1) + 5\delta - 1 \\
&= 6\delta - 2, \ldots
\end{aligned}$$

Análogamente, para $u_2 < h \leq u_3 = 8$, es decir, para $h = 6, 7, 8$:

$$\psi h = h\,\delta - 2.$$

En general, se prueba entonces que:

$$\psi h = h\delta, \text{ para } h \leq u_1, \tag{8.6}$$

$$\psi h = h\,\delta - (p-1), \text{ para } u_{p-1} < h \leq u_p. \tag{8.7}$$

Haciendo los cálculos, podríamos obtener también

$$\overline{\psi} h = p - h(1 - \overline{\delta}), \text{ para } u_{p-1} < h \leq u_p. \tag{8.8}$$

(4) Las diferencias $u_{s+1} - u_s$

Trabajando algebraicamente, vamos a calcular ahora u_1 y las diferencias $u_{s+1} - u_s$ en función de δ y esto nos servirá para probar que en subintervalos de longitud δ de $[0, 1]$ hay infinitos valores de ψ.

Teniendo en cuenta que los valores de ψ y de $\overline{\psi}$ están en $[0,1]$ y usando (8.7) y (8.8), para $u_{p-1} < h \leq u_p$ se tiene que:

$$0 \leq h\delta - (p-1) \leq 1, \quad 0 \leq p - h(1-\overline{\delta}) \leq 1,$$

de donde:

$$\frac{p-1}{\delta} \leq h \leq \frac{p}{\delta}.$$

Análogamente, podríamos obtener la expresión en función de $\overline{\delta}$. Seguiremos con las deducciones usando la expresión con δ (que también se pueden dualizar).

Para el valor $h = u_{p-1} + 1$ se tiene:

$$\frac{p-1}{\delta} - 1 \leq u_{p-1} \leq \frac{p}{\delta} - 1. \tag{8.9}$$

Para $h = u_p$:

$$\frac{p-1}{\delta} \leq u_p \leq \frac{p}{\delta}. \tag{8.10}$$

Las desigualdades (8.9) y (8.10) valen para todo $p \geq 1$, luego podemos usar la parte izquierda de la (8.9) y la parte derecha de (8.10) y nos queda:

$$\frac{s}{\delta} - 1 \leq u_s \leq \frac{s}{\delta} \tag{8.11}$$

y de (8.11) podemos deducir:

$$u_s \leq \frac{s}{\delta} \leq u_s + 1. \tag{8.12}$$

A su vez podemos observar de (8.12) que:

$$u_s = E(\frac{s}{\delta}) = \frac{s}{\delta} - F(\frac{s}{\delta}) \tag{8.13}$$

y en particular

$$u_1 = E(\frac{1}{\delta}). \tag{8.14}$$

Calculemos ahora la diferencia $u_{s+1} - u_s$.

Se tiene

$$\begin{aligned} u_{s+1} - u_s &= \frac{s+1}{\delta} - F(\frac{s+1}{\delta}) - \frac{s}{\delta} + F(\frac{s}{\delta}) \\ &= \frac{1}{\delta} - (F(\frac{s+1}{\delta}) - F(\frac{s}{\delta})) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las mismas consideraciones que para calcular $\theta(n)$ y $\overline{\theta}(n)$, vemos que

$$F(\frac{s+1}{\delta}) - F(\frac{s}{\delta}) = \begin{cases} F(\frac{1}{\delta}), & \text{si } \Delta(F) > 0 \\ \\ F(\frac{1}{\delta}) - 1, & \text{si } \Delta(F) < 0 \end{cases}$$

Luego,

$$u_{s+1} - u_s = \begin{cases} \frac{1}{\delta} - F(\frac{1}{\delta}) = u_1, & \text{si } \Delta(F) > 0 \\ \\ \frac{1}{\delta} - F(\frac{1}{\delta}) + 1 = u_1 + 1, & \text{si } \Delta(F) < 0 \end{cases} \tag{8.15}$$

(5) Las funciones $\psi(h)$ y $\overline{\psi}(h)$ para $u_{p-1} + 1 \leq h \leq u_p$

Vamos a probar ahora que estas funciones toman infinitos valores en intervalos de longitud δ.

Pongamos $h = u_{p-1} + m$ para $m = 1, ..., u_p - u_{p-1}$.

Luego, como habíamos visto en (8.7) y (8.8):

$$\psi(h) = \psi(u_{p-1} + m) = (u_{p-1} + m)\,\delta - (p-1), \tag{8.16}$$

$$\overline{\psi}(h) = \overline{\psi}(u_{p-1} + m) = p - (u_{p-1} + m)(1 - \overline{\delta}). \tag{8.17}$$

Trabajando a partir de (8.11) obtenemos, usando (8.16):

$$(m-1)\delta < \psi(u_{p-1} + m) < m\,\delta, \tag{8.18}$$

Luego:

$$\begin{aligned} 0 \;&<\; \psi(u_{p-1} + 1) < \delta, \text{ para } m = 1, \\ \delta \;&<\; \psi(u_{p-1} + 2) < 2\,\delta, \text{ para } m = 2, ..., \text{ en general:} \\ (m-1)\,\delta \;&<\; \psi(u_{p-1} + m) < m\,\delta \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene, recordando que $\delta = 1 - \overline{\delta}$:

$$1 - m\,\delta < \overline{\psi}(u_{p-1} + m) < 1 - (m-1)\delta. \tag{8.19}$$

En ambos casos, los extremos de las desigualdades difieren en δ y **no dependen de** p. Esto significa que en intervalos de longitud δ las funciones ψ y $\overline{\psi}$ toman infinitos valores. Recordemos que asumimos (como en nuestro ejemplo) $\delta < \frac{1}{2}$. Análogos razonamientos podían haberse hecho en el caso dual en el que $\overline{\delta} < \frac{1}{2}$.

Nos falta demostrar que en un intervalo **arbitrariamente pequeño** hay infinitos valores de la función ψ (o de su dual $\overline{\psi}$).

(6) Las funciones $\psi_1(p)$ y $\overline{\psi}_1(p)$

Tomamos $1 \leq m < u_1$. Luego, por (8.6),

$$\psi m = m\delta. \tag{8.20}$$

Teniendo en cuenta (8.15) se puede ver que:

$$u_p = u_1 + u_{p-1}, \quad \text{o bien} \quad u_p = u_1 + u_{p-1} + 1.$$

Luego:

$$1 + u_{p-1} \leq m + u_{p-1} < u_1 + u_{p-1} \leq u_p,$$

de donde

$$u_{p-1} < m + u_{p-1} < u_p,$$

y entonces estamos en las condiciones de (8.7) por lo que:

$$\psi(m + u_{p-1}) = (m + u_{p-1})\delta - (p-1). \tag{8.21}$$

De (8.21) y (8.20) deducimos que:

$$\psi(m + u_{p-1}) - \psi(m) = u_{p-1}\,\delta - (p-1), \tag{8.22}$$

donde observamos que el segundo miembro **no depende de** m. Esto quiere decir que lo que ocurra en un intervalo $[0, \delta]$ se repetirá en los siguientes $[\delta, 2\,\delta]$, $[2\,\delta, 3\,\delta,]$,... por lo tanto, bastará con estudiar uno cualquiera de esos intervalos, por ejemplo, para $m = 1$, donde tenemos $0 < \psi(u_{p-1} + 1) < \delta$.

Definimos entonces otras dos funciones duales que tendrán las mismas carácterísticas que las anteriores ψ y $\overline{\psi}$. Sean

$$\overline{\psi}_1(p) = \frac{\psi(u_p + 1)}{\delta}, \quad \psi_1(p) = 1 - \overline{\psi}_1(p) \tag{8.23}$$

Veamos que cumplen las condiciones (I) hasta (VI) que vimos en (1).

La (I) y la (II) son evidentes.

Por (8.16), $\psi(u_p+1) = (u_p+1)\delta - p$, luego, por (8.11), $p-\delta \leq u_p\,\delta \leq p$, de donde

$$0 \leq u_p\,\delta + \delta - p \leq \delta,$$

por lo tanto

$$0 \leq \frac{\psi(u_p+1)}{\delta} \leq 1 \tag{8.24}$$

Es inmediato ahora ver que tanto $\overline{\psi}_1$ como ψ_1 cumplen (III).

Por la inyectividad de ψ se ve que $\overline{\psi}_1$ (y por lo tanto ψ_1) es inyectiva, luego vale (IV).

Calculemos ahora $\Delta\overline{\psi}_1 = \overline{\psi}_1(n+1) - \overline{\psi}_1(n)$, usando (8.17).

$$\begin{aligned}
\Delta\overline{\psi}_1 &= \frac{1}{\delta}(\psi(u_{n+1}+1) - \psi(u_n+1)) \\
&= \frac{1}{\delta}(((u_{n+1}+1)\delta - (n+1)) - ((u_n+1)\delta - n)) \\
&= (u_{n+1} - u_n) - \frac{1}{\delta}
\end{aligned}$$

Llamando $\overline{\delta}_1 = 1 - F(\frac{1}{\delta})$, y $\overline{\theta}_1(n)$ un número que puede ser 0 o 1, por (8.15), de esta última expresión resulta

$$\Delta\overline{\psi}_1 = \overline{\delta}_1 - \overline{\theta}_1(n) \tag{8.25}$$

La condición dual también vale, como es claro, por lo que se cumple (V). Por último, como es inmediato que $\overline{\psi}_1(0) = 1$, $\psi_1(0) = 0$, probemos: $\overline{\psi}_1(1) < 1$ (de ahí saldrá su dual $\psi_1(1) > 0$).

Tenemos:

$$\overline{\psi}_1(1) = \frac{\psi(u_1+1)}{\delta} = \frac{1}{\delta}((u_1+1)\delta - 1).$$

Como $u_1 = E(\frac{1}{\delta})$, es $u_1 < \frac{1}{\delta}$, luego

$$\psi(u_1+1) = u_1\delta + \delta - 1 < 1 + \delta - 1 = \delta,$$

de donde resulta

$$\overline{\psi}_1(1) < 1.$$

Por lo tanto, a las funciones $\overline{\psi}_1$ y ψ_1 se le pueden aplicar todos los razonamientos hechos para las inicialmente tratadas ψ y $\overline{\psi}$. En particular, ambas funciones admiten infinitos valores en cada intervalo de longitud $\overline{\delta}_1$ o bien

δ_1, el que sea menor que $\frac{1}{2}$. En nuestro ejemplo, como $\delta = 0,33985$ resulta $F(\frac{1}{\delta}) = 0,94247$ y por lo tanto $\overline{\delta}_1 = 0,05753 < \frac{1}{2}$. Como

$$\psi(u_p + 1) = \delta\,\overline{\psi}_1(p),$$

al intervalo de longitud $\overline{\delta}_1 < \frac{1}{2}$ para $\overline{\psi}_1$ corresponde un intervalo de longitud $\overline{\delta}_1\,\delta < (\frac{1}{2})^2$ para la función ψ, en el cual habrá infinitos valores de esta.

Se puede continuar el proceso, probando con esto que la función ψ admite infinitos valores en intervalos arbitrariamente pequeños de longitud menor que $(\frac{1}{2})^k$. □

Corolario 32. *El conjunto de las notas de una gama* $\mathbf{G}^{p_1,\ldots,p_r}$ *es denso en* $[0,1]$.

Demostración. Dado un elemento $r \in [0,1]$, podemos probar que a una distancia arbitraria ε hay una nota $\mathbf{g}_n = \psi(n)$.[3] En efecto, podemos tomar un intervalo $(r - (\frac{1}{2})^k, r + (\frac{1}{2})^k)$, para k elegido tal que $(\frac{1}{2})^k < \varepsilon$. En ese intervalo hay infinitas notas, según probamos, que estarán a una distancia de r menor que ε. □

Observación 33. Si, en lugar de considerar π irracional, tomamos una fracción irreducible $\frac{p}{q}$, podemos probar que

$$\{F(n\,\frac{p}{q}),\ n \in \mathbb{Z}\}$$

no sólo no es denso en $[0,1]$ sino que es finito.

En efecto, usando propiedades de los números enteros, puede probarse que:

Dada una fracción irreducible $\frac{p}{q}$, *se verifica*

$$\{F(n\,\frac{p}{q}),\ n \in \mathbb{Z}\} = \{0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \cdots \frac{q-1}{q}\}.$$

[3]Análogamente, si elegimos la función $\overline{\psi}$, ya que $\overline{\psi}(n) = \mathbf{g}_{-n}$.

Capítulo 9

Epílogo

En vista de algunos comentarios, decidí agregar estas líneas para resumir informalmente, como si fuera en una charla de café, las ideas principales que quise transmitir en este libro. Me doy cuenta de que la mayoría de las personas que no han tenido que ver profesionalmente con la matemática tienen una cultura general "desbalanceada"; a lo largo de sus vidas han enriquecido su saber en muchas áreas, excepto en lo que respecta a la matemática; se han quedado con los conocimientos del secundario, a veces aprendidos de memoria y posteriormente olvidados. Tal vez esto cambie en las generaciones venideras. Es por eso que conceptos de un nivel bastante básico que si pertenecieran a otras áreas se entenderían, en el área matemática parecen oscuros e impenetrables.

La música que escuchamos, ya sea "académica" o popular, en general tiene una melodía y un acompañamiento. Cuando alguien canta acompañado de una guitarra, la voz es la que hace la melodía y el acompañamiento que completa la armonía lo hacen los acordes de la guitarra. Pero la melodía y la armonía no están dispuestas al azar, sino que hay reglas para componer música. Y en esas reglas, subrepticiamente, se inmiscuye la matemática.

En general, ¿Cómo se forman los acordes? ¿Cuáles suenan bien?

Pitágoras descubrió que las quintas (y, naturalmente, las octavas) suenan bien juntas. Además, produciendo quintas sucesivas:

fa - do - sol - re - la - mi - si

se crean sonidos que, "reducidos a una octava" y ordenados por sus alturas nos dan la escala diatónica de las siete notas básicas:

do - re - mi - fa - sol - la - si

En realidad, sabemos que al calcular la quinta de *si* no se obtiene exactamente el fa, sino una nota ligeramente más alta que llamamos $fa\sharp$. Si seguimos generando notas, obtendremos $do\sharp$, $sol\sharp$,... hasta volver, aproximadamente, al fa. Reduciendo a una octava obtenemos las doce notas de la escala cromática pitagórica. En realidad, el proceso de generar notas podría seguir indefinidamente, pero sabemos que hay métodos para "obligar" a que se cierre el ciclo con un número razonable de notas.

Por otra parte, tenemos una cuestión física. Cada nota es un sonido que tiene una cierta frecuencia, que es la que determina su altura. Si una nota tiene una frecuencia f y multiplicamos f por 3 sucesivas veces, obtenemos una serie de notas que, reducidas a una octava, nos dan justamente las notas del ciclo de quintas. De esta manera, el acorde de quinta se vincula con el número 3 y sus potencias.

A lo largo de la historia de la música surgió luego de la escala pitagórica de las quintas otra escala (la de justa entonación en sus diversas versiones) que esencialmente agregaba al acorde de quinta el de tercera, que también se consideraba que "sonaba bien". En esta escala las frecuencias se modifican un poco, considerando algunas generadas por terceras. Las frecuencias se obtienen multiplicando por 5 y reduciendo a la octava; "subir por terceras" corresponde a multiplicar por 5, si dejamos de lado en qué octava caemos. Por lo tanto, las terceras se relacionan con el número 5 y sus potencias.

Siguiendo en el tiempo, los compositores e intérpretes de la música necesitaron también una "armonía disonante" dada por el acorde de séptima. Un acorde de séptima da un clima de tensión, que busca el descanso o que "resuelve" en otro acorde (mayor o menor). Aquí se observa que las frecuencias asociadas a las séptimas se obtienen, aproximadamente, multiplicando por 7.

Hasta aquí vemos que para tener una tonalidad o armonía a partir de una nota (cuya frecuencia podemos suponer que es 1) necesitamos por lo menos frecuencias que sean potencias de 3, 5, 7, o combinaciones de estas. Aquí aparecen entonces naturalmente los números primos, que tienen gran cantidad de propiedades básicas de la matemática.

Pero, ¿dónde quedó la física?

Está en la vinculación entre estas escalas generadas por números primos con el fenómeno acústico de los armónicos.

Los sonidos, en general, no son *puros*. ¿Qué significa esto? Que un sonido de frecuencia f va acompañado siempre por (teóricamente) **todos** los sonidos cuyas frecuencias son múltiplos de f, que son sus armónicos. Pero las intensidades decrecen al aumentar la frecuencia, de modo que las frecuencias más altas aportan muy poco al sonido compuesto emitido. O sea que junto con la frecuencia f que oímos, oímos también las $2\,f$, $2^2\,f$, $2^3\,f$,...(que dan las octavas), $3\,f$, $3^2\,f$, $3^3\,f$,... (vinculadas a las quintas), las de frecuencias $5\,f$, $5^2\,f$, ... (vinculadas a las terceras), las de frecuencias $7\,f$, $7^2\,f$,... (vinculadas a las séptimas),... y así las que son múltiplos primos de f (las que no son múltiplos primos aparecen también, como combinación de las que ya hemos mencionado).

Veamos la Figura 9.1.

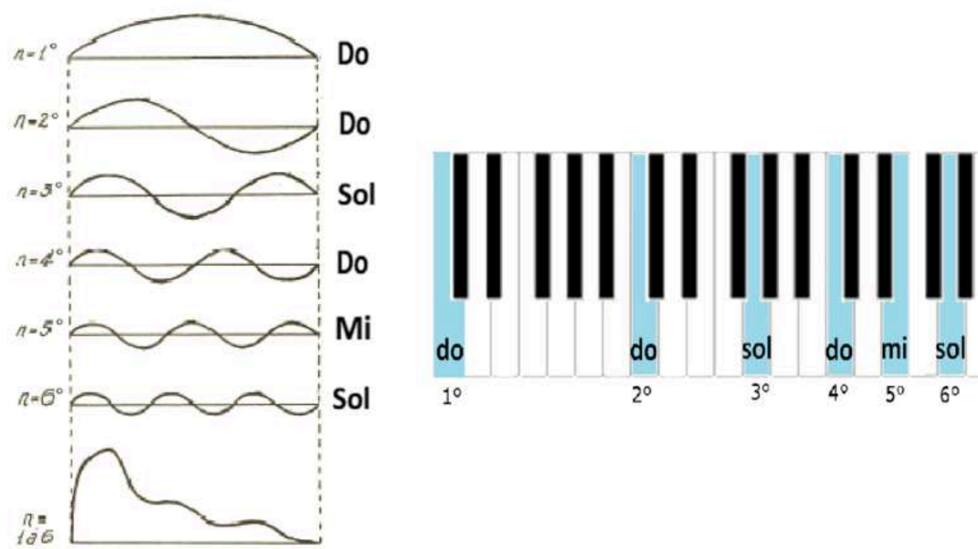


Figura 9.1: Do y sus armónicos

Cuando tocamos el *do* central del piano (representado en el armónico 1), suenan también, con menos intensidad, el *do* de la segunda octava (su segundo armónico), el *sol* de la segunda octava (su tercer armónico), el *do* de la tercera octava (su cuarto armónico) el *mi* de la tercera octava (su quinto armónico) y el *sol* de la tercera octava (su sexto armónico) y suponemos que hasta allí podemos percibir los sonidos. Es decir, en la nota *do* aparecen como armónicos, además de sus octavas, dos notas *sol* y una *mi*. Es lógico entonces que si tocamos junto con el *do* su quinta, que es *sol* en la primer octava, "suenen bien" juntas, ya que el *sol* es una "componente" fuerte (hay dos) del sonido del *do*. También el acorde de tercera $do - mi$ suena bien, porque *mi* también es “parte” del sonido de *do*.

Descubrimos así que una nota suena bien con otra, si la segunda tiene una frecuencia que es armónico de la dada.

Entonces, resulta evidente que la armonía “verdadera” es la dada por las escalas naturales que son respaldadas por la física y sus armónicos junto con la matemática y sus números primos.

Sin embargo, las dificultades surgen para los músicos a la hora de cambiar de tono una melodía: las escalas naturales no conservan los intervalos entre notas al cambiar de tono. La solución también viene de la mano de la matemática; la escala temperada o de temperamento igual (que es la que actualmente usamos) considera a la octava compuesta de “partes iguales”, que son los intervalos de longitud $\sqrt[12]{2}$, llamados semitonos. Con esto se pueden trasladar libremente melodías y armonías, pero a costa de que ninguno de los acordes que “sonaban bien” en las otras escalas (quintas, terceras,..) sean realmente consonantes en la escala temperada. Esta escala era conocidadesde mucho antes de que se generalizara su uso, pero no se adoptaba por dificultades en la afinación de instrumentos.

Otra cuestión interesante es la que fue señalada en 6.4.5 respecto de la gama $\mathbf{G}^3$. [1] Si consideramos el ciclo de quintas de Pitágoras (que es teóricamente infinito) limitado a un número finito de notas, vemos que hay dos maneras de ordenar las notas: por su orden de generación y por su orden de frecuencias, suponiendo que las notas están todas en una octava. Gráficamente, como se ve en la Figura 6.11, se disponen las notas sobre un círculo en el orden de generación y las unimos por segmentos según el orden de sus frecuencias. Hay una propiedad de simetría que se da, por ejemplo, para 5 notas, 7 notas, 12 notas, que curiosamente coincide con las gamas pitagóricas más usadas: pentatónica, diatónica y cromática. De alguna manera son las más “armónicas”. Esa propiedad de simetría se caracteriza matemáticamente por una propiedad de la permutación entre los dos órdenes mencionados. Esto nos dice que la armonía que se traduce gráficamente en simetría se origina en realidad en una propiedad matemática.

Podemos pensar entonces que en el fondo de toda armonía hay una “armonía” matemática que puede descubrirse...

[1] Me pregunto si esta propiedad se puede generalizar a gamas con más armónicos.

En los Capítulos 6 y 7 hemos expuesto la teoría formal de estas escalas naturales del libro "Fundamentos Matemáticos de la Música" ([41]) en adelante) con una notación y lenguaje más actuales en matemática. En [41] se representan las frecuencias, que son siempre producto de potencias de primos, en dos niveles: uno, por sus logaritmos en base 2 para lograr la regularidad de las octavas y el segundo (el que se usa casi siempre) por la parte fraccionaria de tales logaritmos, para reducir todo a una octava. Dentro de esa teoría se definen conceptos análogos a los conocidos en la teoría musical clásica como acordes mayores y menores, alterados, consonancia, bajo fundamental, etc. y se demuestran ciertas propiedades.

El resultado más valioso desde el punto de vista matemático de [41] es el teorema sobre la densidad de una gama $\mathbf{G}$ en el intervalo $[0, 1]$. Esto significa que tan cerca como se quiera de cualquier número real r que esté entre 0 y 1 habrá un elemento de $\mathbf{G}$.

En el Capítulo 8 me di el gusto de jugar un poco con el álgebra de las gamas y demostrar pequeños resultados.

Finalmente espero que, además de mi hermano Ricardo, haya algún intrépido capaz de leer mi libro.

Bibliografía

[1] Agustín de Hipona, *De Musica* Traducción de Alfonso Ortega, (https://www.augustinus.it/spagnolo/musica/index2.htm)

[2] Al-Majdalawi Álvarez, A., *Acústica musical* (https://www.lpi.tel.uva.es/ñacho/docencia/ing_ond_1/trabajos_05_06/io2/public_html)

[3] Amster, P., *La matemática como una de las bellas artes*, Siglo XXI editores, Buenos Aires, 2011.

[4] Amster, P., *¡Matemática, maestro! Un concierto para números y orquesta*, Siglo XXI editores, Buenos Aires, 2013.

[5] Aristóteles, *Problemas*, Traducción de Ester Sánchez Millán, Biblioteca Clásica Gredos - 320. (https://josefranciscoescribanomaenza.files.wordpress.com/2017/03/problemas-aristoteles.pdf)

[6] Ball, P. *El instinto musical, Escuchar, pensar y vivir la música*, Turner Publicaciones S.L., Madrid, 2012.

[7] Benson, D., *Music: A Mathematical Offering*, Department of Mathematics, Meston Building, University of Aberdeen, Aberdeen AB24 3UE, Scotland, UK, 2008.

[8] Bergua, J., *Pitágoras*, Ediciones Ibéricas, 1970.

[9] Boido, G., Kastíka, E., *La ciencia de la música entre los siglos XVI y XVIII: de los sonidos que no se oyen a los orígenes de la acústica.* (https://rdu.unc.edu.ar/)

[10] Carey, N., Clampitt, D., *Aspects of Well-Formed Scales*, Music Theory Spectrum, Vol. 11, No. 2, 1989, pp. 187-206. (https://www.researchgate.net/publication/215646485)

[11] Castrillón, M. y Domínguez, M., *Un encuentro entre las matemáticas y la teoría de escalas musicales: Escalas bien formadas*, La Gaceta de la RSME, Vol. 16 (2013), Núm. 1, Págs. 87-106. (http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1130)

[12] Cova, Jorge, *Jean-Philippe Rameau. Su pensamiento* (https://studylib.es/doc/6893479/jean-philippe-rameau-su-pensamiento)

[13] Di Véroli, C., *El temperamento musical ayer y hoy*, Collegium Musicum, Departamento de Música Antigua, Buenos Aires, 1966. (https://www.academia.edu/23378080/El_Temperamento_Musical_Ayer_y_Hoy_Spanish_1996)

[14] Domínguez Berrueta,J., *Teoría Física de la Música*, Tomo V de la segunda serie de las Memorias de la Real Academa de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 1927. (https://core.ac.uk/download/pdf/71525489.pdf)

[15] Duffin, R.W., *How equal temperament ruined harmony (and why you should care)*, New York, W.W. Norton and Company, 2007. ISBN 978-0-393-06227-4

[16] Durán, R., Mesz, B., *¿Porqué usamos 12 notas?*, *Q.e.d. Ciencias duras en palabras blandas*, UBA, Julio 2010, Año 2, N° 4, ISSN 1852-5091. (https://es.slideshare.net/agusrela/qed4)

[17] Euler, L., *Léttres à une Princesse d'Allemagne sur divers sujets de Physique et de Philosophie*, Paris, 1843. (https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/343/)

[18] Fauvel, J., Flood, R., Wilson, W. (editors) *Music and Mathematics, from Pythagoras to fractals*, Oxford University Press, 2006.

[19] García Pérez, A., *El concepto de consonancia en la teoría musical, de la escuela pitagórica a la revolución científica*, Publicaciones Universidad Pontificia de Salamanca, 2006.

[20] García Pérez, A., *Francisco de Salinas y la música popular renacentista*, en *De Musica libri septem de Francisco de Salinas*, García Pérez y García Bernaldt, editores, Universidad de Salamanca, 2013, p. 42-92.

[21] García, V. M., *Las relaciones entre la música y las matemáticas* (https://www.lpi.tel.uva.es/ nacho/docencia/ing_ond_1/ trabajos_06_07/io5/public_html/)

[22] Garmendia Rodríguez, M.J., Navarro González, J.A., *Mathematical theory of musical scales* Extracta mathematicae, ISSN-e 0213-8743, Vol. 11, Nº 2, 1996, págs. 369-374.

[23] Girón González-Torre, F. J., *Matemáticas y Música*, Boletín de la Academia Malagueña de Ciencias, ISSN 1885-1495, Nº. 21, 2019, págs. 45-57. (https://documat.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7235472)

[24] González-Dávila, J.C., *Sobre la contribución de las Matemáticas a la Teoría del Sonido* (http://imarrero.webs.ull.es/sctm04/modulo1/3/carmelo.pdf)

[25] González Urbaneja, P.M. *Historia de las matemáticas: Pitágoras, s.VI A.C.* (https://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/ pitagoras-2.asp.htm)

[26] Hoyos H., D.L., *La matemática de la música*, Matemáticas: Enseñanza Universitaria, vol. XX, núm. 1, 2012, pp. 29-48, Escuela Regional de Matemáticas Cali, Colombia.

[27] Jámblico, *Vida pitagórica*, traducción de M. Periago Lorente, Ed. Gredos, Madrid, 2003. (https://josefranciscoescribanomaenza.files.wordpress.com/ 2018/05/jamblico-vida-pitagorica-protreptico-gredos.pdf)

[28] Lehman, B. *Bach's Extraordinary Temperament: Our Rosetta Stone: 1.* Early Music, vol. 33, no. 1, 2005, pp. 3–23. (www.jstor.org/stable/3519512, http://larips.com/)

[29] Lendvai, E., *Bela Bartok. Un análisis de su música*,Cátedra de Lenguaje Musical Tonal III, Facultad de Bellas Artes, UNLP (http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/73505)

[30] Liem, V., *Afinación*, DivulgaMat, Real Sociedad Matemática española, 2004.
(http://www.divulgamat.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=8747:1-2004-2005-afinaci&catid=67:ma-y-matemcas&directory=400001)

[31] Liern Carrión, V., Queralt Llopis, T., *Música y Matemáticas: la armonía de los números*
(https://www.fespm.es/IMG/pdf/dem2008_-_musica_y_matematicas.pdf)

[32] Liern Carrión, V., *Euler y su interés por la música*, SUMA, Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, n. 70, p. 93-98, (2012).

[33] Liern Carrión, V., *El eco de la música de las esferas*, Collecció Reial Acadèmia De Doctors – Fundación Universitaria Eserp, ISBN: 978-84-616-9929-2, Barcelona, 2014.
(https://raed.academy/wp-content/uploads/2015/02/Discurso-Dr.-Liern.pdf)

[34] López Rodríguez, J.M., *Breve historia de la Música*, Ediciones Nowtilus, Madrid, 2011.

[35] Miyara, F., *La música de las esferas: de Pitágoras a Xenakis... y más acá*
(https://www.academia.edu/34580332)

[36] Olson, H.F., *Music, Physics and Engineering*, Dover Publications, 1967.

[37] Plomp,R., Levelt, W. M., *Total Consonance and Critical Bandwidth*, Institute for Perception TVO-TNO, Soeslerberg, Nethrlands (1965).
(https://www.mpi.nl/world/materials/publications/levelt/Plomp_Levelt_Tonal_1965.pdf)

[38] Rodríguez Alvira, J., *2.500 años de temperamentos musicales - Diálogo entre el ser humano y la naturaleza*
(http://www.teoria.com/es/articulos/temperamentos/index.php)

[39] Romero Redondo, R., *Música y Matemáticas*
(https://es.scribd.com/document/96039050/Musica-y-Matematicas)

[40] Russell, B., *Historia de la filosofía occidental*, Editorial Austral, 2012.

[41] Sagastume Berra, A. E., *Fundamentos matemáticos de la música*, Anales de la Soc. Cient. Argentina, 1937, Tomo CXXIII y Tomo CXXIV. (http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/109919.)

[42] Saura, J., *La teoría modal, los temperamentos y los sistemas enarmónicos en España* (https://joaquinsaura.wordpress.com/libros-2/teoria-modal-temperamentos-y-sistemas-enarmonicos/)

[43] Sethares, W.,*Adaptive tunnings for musical scales* (https://sethares.engr.wisc.edu/paperspdf/adaptun.pdf)

[44] Stolik,D., *El aporte de los físicos al desarrollo de la música*, Revista Cubana de Física, Vol. 22, No. 2, 2005.

[45] Tomasini, M. Cecilia, *El concepto de armonía en el pensamiento pitagórico y su ilustración en la matemática subyacente a la escala musical*, Terceras jornadas sobre el Mundo Clásico, Morón, 2006.

[46] Tomasini, M. Cecilia, *El fundamento matemático de la escala musical y sus raíces pitagóricas*, Revista CyT, Fac. de Ingeniería, Univ. de Palermo, Número 6, 2007.

[47] Toussaint, G.T.,*The Euclidean algorithm generates traditional musical rhythms*, Proceedings of BRIDGES: Mathematical Connections in Art, Music, and Science, Banff, Alberta, Canada, July 31 to August 3, 2005, pp. 47–56.

[48] Turchetta, E., *Los comienzos del renacimiento medieval: San Severino Boecio y el tratado* DE INSTITUTIONE MUSICA, Revista "Dios y el hombre", Vol 2, 59-70, 2018. (http//revistas.unlp.edu.ar/DyH.)

[49] White, H., White, D., *Physics and Music*, Dover, 2014.

[50] Whitehead, A., *Science and the modern world*, New York, Mc Millan Co., 1925.

[51] Wright, D., *Mathematics and Music*, American Mathematical Society, Volume 28 serie "Mathematical World", 2009.
(https://www.math.wustl.edu/ wright/Math109/00Book.pdf)

Videos

[52] Altozano, J.,*¿Por qué tenemos 12 notas musicales? Música y matemáticas*
https://www.youtube.com/watch?vP̄7iC-fbdKmQ

[53] Altozano, J. *El círculo de quintas*
https://www.youtube.com/watch?v=BRBTCIK_9_g&t=495s

[54] Altozano, J. *Los modos*
https://www.youtube.com/watch?v=e9ay6zMICw8

[55] Berstein, L. *Los armónicos*
https://www.youtube.com/watch?v=ujI9M7Xv1pw&ab_channel=JaviAlea

[56] Du Sautoy,M., *La música escondida de las matemáticas*
https://www.youtube.com/watch?v=gNaWva8mCO4

[57] Sáenz de Cabezón, E., *Ritmos Euclidianos*
https://www.youtube.com/watch?v=qxRW5pDT2o4&t=311s&ab_channel=Derivando