

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
PUBLICACIONES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS
DELEGADO INTERVENTOR: ING. CARLOS PASCALI

SERIE TERCERA
35
PUBLICACIONES ESPECIALES

FÍSICA GENERAL

POR EL

Dr. RAMON G. LOYARTE

EX-PRESIDENTE DE LA UNIVERSIDAD
DIRECTOR DEL INSTITUTO DE FÍSICA Y PROFESOR TITULAR DE FÍS. GENERAL Y DE FÍS. MATEMÁTICA -
MIEMBRO TITULAR DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS - ACADÉMICO CORRESPONDIENTE DE
LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS DE LIMA - PRIMER PREMIO NACIONAL EN CIENCIAS, AÑO 1935



TOMO II

ESTATICA DE LOS FLUIDOS - HIDRODINAMICA -
DINAMICA DE LA ELASTICIDAD - ACUSTICA.

CUARTA EDICION



LA PLATA (REP. ARGENTINA)
FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS
NOVIEMBRE 1946

Precio: \$ 18.— m/n

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Interventor en la Universidad: Dr. Orestes E. Adorni

Secretario G. de la Intervención: Dr. Diego J. J. Martínez

FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS

Delegado-Interventor: Ing. Carlos Pascali

Secretario General: Ingeniero Juan B. Cendagorta

SERIE TERCERA

35

PUBLICACIONES ESPECIALES

FISICA GENERAL

TOMO II

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

PUBLICACIONES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS
DELEGADO INTERVENTOR: ING. CARLOS PASCALI

SERIE TERCERA
35
PUBLICACIONES ESPECIALES

FÍSICA GENERAL

POR EL

Dr. RAMON G. LOYARTE

EX-PRESIDENTE DE LA UNIVERSIDAD

DIRECTOR DEL INSTITUTO DE FÍSICA Y PROFESOR TITULAR DE FÍS. GENERAL Y DE FÍS. MATEMÁTICA -
MIEMBRO TITULAR DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS - ACADÉMICO CORRESPONDIENTE DE
LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS DE LIMA - PRIMER PREMIO NACIONAL EN CIENCIAS, AÑO 1935



TOMO II

ESTÁTICA DE LOS FLUIDOS - HIDRODINÁMICA -
DINÁMICA DE LA ELASTICIDAD - ACÚSTICA.

CUARTA EDICION



LA PLATA (REP. ARGENTINA)
FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS
NOVIEMBRE 1946

Precio: \$ 18.— m/n

*Es propiedad de la Facultad de
Ciencias Físicomatemáticas.*

Se ha hecho el depósito de Ley.

VOLUMENES Y EDICIONES APARECIDOS

Tomo I: Mecánica del cuerpo rígido. Gravitación. Estática de la elasticidad de los sólidos. 5ª edición: 1944.

Tomo II: El presente volumen. 4ª edición.

Tomo III: Calor. Termodinámica. 3ª edición. 1943.

Tomo IV: Electricidad y magnetismo. Electroquímica. Atonismo de la electricidad. Radioactividad. Estructura del átomo. Trasmutación artificial de los elementos. 3ª edición: 1946.

A MI MADRE

DEL PREFACIO DE LA PRIMERA EDICION

La feliz acogida que ha merecido el primer volumen y las voces de aliento que nos han llegado del país y del extranjero han hecho doblemente grata la prosecución de la tarea emprendida.

En lo que al espíritu y finalidad de la obra se refiere nada deseamos agregar en esta ocasión. Se mantiene en el presente volumen el mismo nivel y carácter que en el primero.

Se ha destinado a la hidrodinámica la atención que a nuestro juicio le corresponde, creyendo llenar así una deficiencia común en las obras de este carácter.

La acústica aparece como una mera continuación de la dinámica de la elasticidad, en la que se ha destinado también un capítulo a la sismometría.

La Plata, Julio 1° de 1923.

RAMÓN G. LOYARTE.

PREFACIO DE LA SEGUNDA EDICION

Esta edición difiere muy poco de la precedente. Es, en verdad, una reimpresión. No consideramos necesario agregar nuevos temas ni modificar la exposición de los existentes. Nos hemos limitado a mejorar el lenguaje y los fotograbados.

La primera edición se agotó hace varios años ya. Causas ajenas a nuestra voluntad demoraron la aparición de la presente.

La Plata, Septiembre 21 de 1936.

RAMÓN G. LOYARTE.

PREFACIO DE LA TERCERA EDICION

Esta edición es, simplemente, una reimpresión de la precedente. No hemos considerado necesario la introducción de cambios de ninguna especie.

La Plata, Octubre 2 de 1942.

RAMÓN G. LOYARTE.

PREFACIO DE LA CUARTA EDICION

La presente edición es una reimpresión de la precedente, dispuesta por la Comisión de Publicaciones, en su reunión de fecha 23 de agosto de 1945.

La Plata, Noviembre de 1946.

ING. CARLOS PASCALI.
Delegado-Interventor

FÍSICA GENERAL

Estática de los flúidos. Hidrodinámica. Aerodinámica. Dinámica de la elasticidad y Acústica

ESTÁTICA DE LOS FLÚIDOS

CAPITULO I

ESTÁTICA DE LOS LÍQUIDOS

1. Definición de flúido. — Tanto en lo que se refiere a las modificaciones producidas por fuerzas exteriores como con respecto a las fuerzas interiores que aquéllas determinan, los líquidos y los gases se comportan de una manera, a la vez que simple, diferente que los sólidos. En un sólido deformado, en equilibrio, las fuerzas en la superficie de separación de dos porciones pueden tener una dirección cualquiera diferente de la normal; en ellos se originan fuerzas interiores por un cambio de volumen y por un cambio de forma.

Las fuerzas que opone la materia a un cambio de forma, provienen, como se ha visto, de la resistencia al *deslizamiento* de una porción sobre otra; en una deformación semejante un estado de equilibrio resulta, únicamente, si esas fuerzas tangenciales, que nacen de la deformación, equilibran a las fuerzas exteriores.

En los líquidos y en los gases no se observa para deslizamientos ínfimamente lentos ninguna resistencia; la forma exterior es siempre la del recipiente que los contiene. Además, en los primeros son menester fuerzas considerables para producir pequeños cambios de volumen mientras que los gases ofrecen poca resistencia a una variación semejante.

Como consecuencia inmediata de la ausencia de fuerzas que se opongan a un deslizamiento, no pueden existir, en el interior de un líquido o de un gas en equilibrio, fuerzas tangenciales en la superfi-

cie de separación de dos porciones cualesquiera. Consideremos, en efecto, una masa líquida en equilibrio sometida a un estado de tensión, obtenido, por ejemplo, por una compresión en un recipiente cilíndrico, y aislemos, con el pensamiento, una porción cúbica; las tensiones que actúan sobre sus caras se transmiten a través del líquido que la rodea y son, con respecto a ellas, fuerzas exteriores. Si estas fuerzas admiten componentes tangenciales a las caras y no existiendo la posibilidad de que fuerzas interiores las equilibren, desplazarían continuamente el líquido, en contra de lo supuesto. De aquí la siguiente definición: *Se dice que una materia es un fluido cuando las partes contiguas actúan unas sobre otras con fuerzas normales a la superficie que las separa.*

Si se considera en el interior de una porción flúida una superficie S

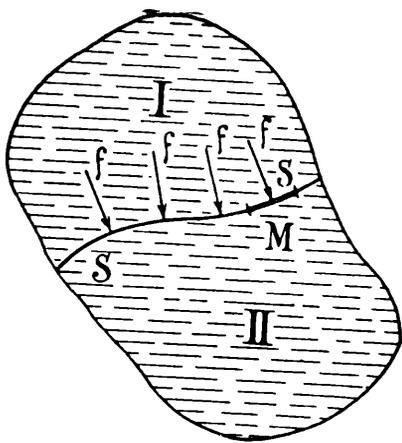


Fig. 1.

(fig. 1) que separa las porciones I y II, la acción que la parte I, por ejemplo, ejerce sobre la II consiste en la existencia de las fuerzas normales f . Como en el caso más general los valores de las fuerzas que actúan sobre elementos iguales de superficies, serán diferentes, conviene considerar, en cada lugar, el cociente de dividir la fuerza por la extensión de la superficie sobre la que se aplica, cociente que recibe el nombre de *presión*. A fin de representar la realidad de la mejor

manera será menester dividir la superficie en elementos infinitamente pequeños y establecer el valor de la presión para cada uno de ellos.

La presión que indicaremos con p , en un punto M de una superficie S , será el cociente de dividir la fuerza f que actúa sobre un elemento s de superficie, infinitamente pequeño, que lo contiene, por el área de éste, es decir.

$$p = \frac{f}{s} . \quad [1]$$

La dimensión de una presión es, según su definición:

$$[p] = M L^{-1} T^{-2}$$

o, en el sistema $C G S$,

$$[p] = \mathbf{cm}^{-1} \mathbf{gr} \mathbf{seg}^{-2}.$$

Volviendo nuevamente sobre las acciones entre las porciones I y II de la figura 1 es claro que la porción II aplica a su vez sobre la porción I fuerzas iguales y opuestas a las que la I ejerce sobre ella; de cuál de estos sistemas de fuerzas debemos ocuparnos, depende exclusivamente de la porción de líquido sobre el que hemos fijado nuestra atención; si de la II, son fuerzas exteriores las aplicadas sobre la superficie S provenientes de la porción I, y viceversa si nos ocupamos, no de la porción II, sino de la I.

Continuaremos ocupándonos de los líquidos en equilibrio, capítulo que se designa con el nombre de *hidrostática* por ser el agua el más común de todos ellos.

2. Teorema: La presión en un punto dado de un líquido es la misma en todas direcciones. — Consecuencia inmediata de la

definición de flúido es que cualquiera sea la superficie que pasa por un punto, como el M (fig. 2), la acción de una de las partes sobre la otra, en el punto M , será la misma, es decir, la presión en M no dependerá de la orientación del elemento infinitamente pequeño s de superficie que se considere.

Sean, en efecto MN_1 y MN_2 las secciones con el plano del dibujo de dos elementos rectangulares de superficie, idénticos, pero de diferente orientación, y que pasan por el punto M ; sean P y Q las fuerzas normales que actúan sobre ellos provenientes del resto del líquido y que suponemos aplicadas en sus respectivos puntos medios.

Si se imagina un prisma líquido de caras MN_1 , MN_2 y N_1N_2 en el centro de esta última cara el líquido debe aplicar una fuerza normal R que equilibre a las otras dos fuerzas P y Q . Como por la igualdad de MN_1 y MN_2 el triángulo MN_1N_2 es isósceles, se sigue que R debe formar el mismo ángulo con P y con Q , y, puesto que existe equilibrio, la resultante de P y Q , opuesta e igual a R , debe estar simétricamente colocada con respecto a sus componentes y esto sólo es posible si P y Q son iguales. Como los elementos de superficie sobre los que se aplican tienen la misma extensión, resulta que las presiones sobre ellos tienen el mismo valor, con lo que queda demostrado el teorema.

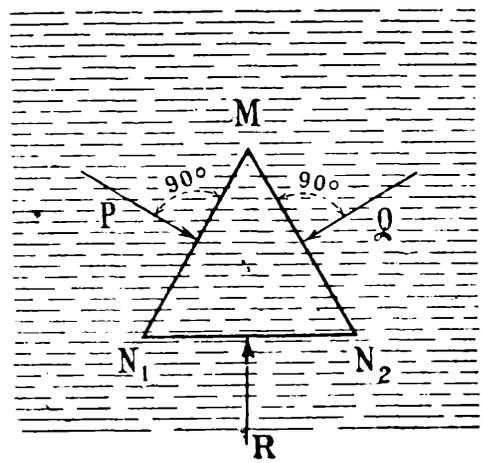


Fig. 2.

3. Equilibrio de una masa flúida. El teorema general de la hidrostática. — En la página 62 del primer tomo nos hemos ocupado ya de las reglas del equilibrio de fuerzas aplicadas a cuerpos de forma

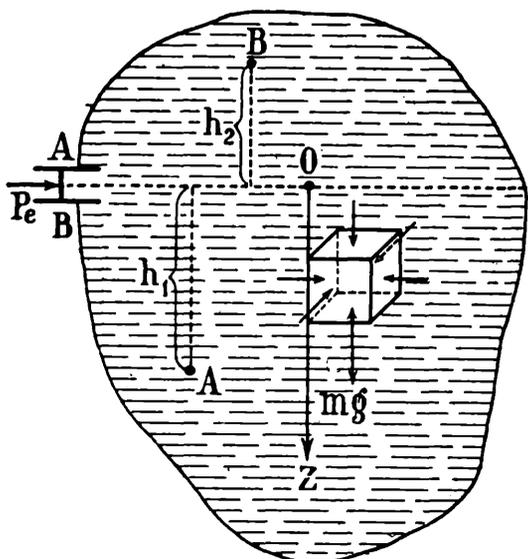


Fig. 3 a.

variable. Vimos entonces que si una porción de un cuerpo semejante se encontraba en equilibrio bajo la acción de fuerzas exteriores, se le podía considerar, en ese estado, rígido, y aplicar los principios generales de la estática. Son fuerzas exteriores, como se ha hecho notar muchas veces, las que le transmite directamente el resto del líquido que la rodea y otras como la gravitación, atracciones magnéticas, etc. Nos limitaremos en lo sucesivo a los casos en que de estas últimas fuer-

zas actúa, como ocurre generalmente, solamente la gravitación.

Supongamos (fig. 3 a) que se tiene un líquido cualquiera en un recipiente y que por medio de un pistoncito ejercemos en un punto cierta presión p_e ; puesto que suponemos que existe equilibrio, el líquido debe aplicar en el mismo punto una presión igual y de sentido contrario.

Sobre una porción elemental cualquiera, como por ejemplo, la cúbica dibujada, actúan como fuerzas exteriores las fuerzas normales a sus caras que le transmite el resto del líquido y su peso, que indicamos con mg ; el equilibrio de ese elemento proviene del equilibrio de esas fuerzas.

A fin de establecer analíticamente las condiciones de equilibrio consideremos un sistema de coordenadas rectangulares cuyo origen coincide con cierto punto O del líquido y cuyo eje z es vertical (fig. 3 b). Sean dx , dy , dz las aristas del cubo elemental y p_1 , p_2 , p_3 las presiones que ejerce el líquido sobre

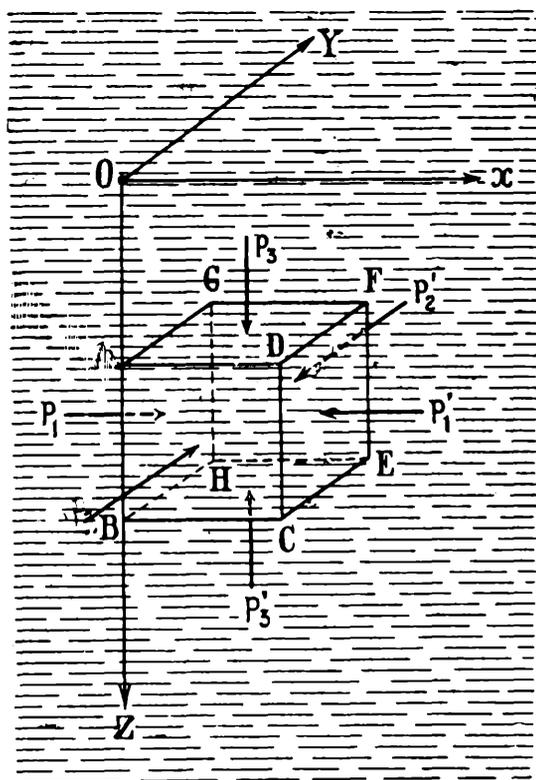


Fig. 3 b.

las caras $ABGH$; $ACDF$ y $ADFG$, respectivamente, y p_1' , p_2' , p_3' las presiones en las caras opuestas correspondientes.

Para que el paralelepípedo no sufra un desplazamiento en ninguna de las tres direcciones x , y , z , la suma de las fuerzas relativas a cada una de ellas debe ser nula.

Las fuerzas que actúan en dirección de las x e y son, solamente, las fuerzas normales, de modo que se tiene:

$$p_1 dy dz - p_1' dy dz = 0 \quad [2]$$

como condición de equilibrio en la dirección x , y .

$$p_2 dx dz - p_2' dx dz = 0 \quad [3]$$

como condición de equilibrio en la dirección y .

De ella resulta que son:

$$p_1 = p_1' \quad ; \quad p_2 = p_2' \quad [4]$$

y puesto que la ubicación del paralelepípedo puede ser cualquiera se sigue que la presión no varía en las direcciones x e y .

En la dirección de las z actúan las fuerzas

$$p_3 dx dy \quad \text{y} \quad mg,$$

en la dirección positiva, y

$$p_3' dx dy$$

en la dirección negativa, de modo que la condición de equilibrio será

$$p_3 dx dy + mg - p_3' dx dy = 0 \quad [5]$$

o

$$(p_3' - p_3) dx dy = mg. \quad [6]$$

Si se indica con ρ el peso de la unidad de volumen del líquido o *peso específico*, se tiene,

$$mg = \rho dx dy dz, \quad [7]$$

puesto que $dx dy dz$ es el volumen del elemento.

Introduciendo la [7] en la [6] y dividiendo por $dx dy dz$, se obtiene

$$p_3' - p_3 = \rho dz. \quad [8]$$

Pero $p_3' - p_3$ es la diferencia entre las presiones de dos puntos infinitamente próximos separados por la distancia dz , es decir, es el diferencial dp de la presión en el lugar considerado, en dirección de las z , de modo que se puede escribir:

$$p_3' - p_3 = dp = \rho dz. \quad [9]$$

Por la [9] se ve que la presión varía solamente con z , manteniéndose, por lo tanto, constante su valor en cada uno de los planos normales a z , esto es, en los planos horizontales, como resultó también de las relaciones [4].

Si se integra la [9] se obtiene:

$$p = \rho z + c, \quad [10]$$

donde c es la constante de integración; su valor se obtiene si se conoce la presión para un plano horizontal cualquiera. Si es, por ejemplo, p_0 el valor de la presión en el plano horizontal que pasa por O , esto es, para el plano $z = 0$, resulta $c = p_0$, y por consiguiente:

$$p = p_0 + \rho z, \quad [11]$$

donde z debe figurar con su signo. Así, por ejemplo, la presión en el punto A (fig. 3 a) cuya coordenada z tiene el valor $+h_1$ es:

$$p_A = p_0 + \rho h_1,$$

mientras que la presión en el punto B , cuya coordenada z tiene el valor $-h_2$, es:

$$p_B = p_0 - \rho h_2.$$

La relación [11] constituye el teorema general de la hidrostática. Se ve por él que la diferencia de presión entre dos puntos A y B separados por la distancia vertical $h = h_1 + h_2$ está dada por la expresión:

$$p_A - p_B = \rho h,$$

es decir, por el producto del peso específico del líquido por la distancia vertical entre los puntos.

Este teorema es aplicable siempre que se pueda pasar de un punto a otro sin salir nunca del seno del líquido. Así, por ejemplo, la diferencia de presión entre dos puntos *A* y *B* (fig. 4) sería la misma si imaginamos que la superficie ideal *SS* punteada fuese una superficie material rígida, pues si el sistema está en equilibrio, como suponemos, no se modifican las condiciones en lo más mínimo, según ya se ha mencionado en más de una oportunidad.

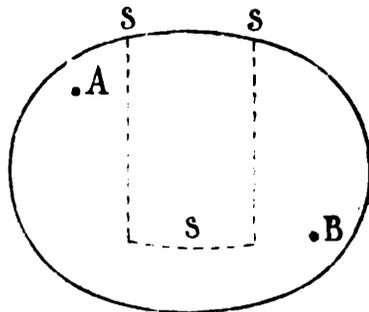


Fig. 4.

4. Consecuencias inmediatas del teorema general de la hidrostática. — A. EL PRINCIPIO DE PASCAL: LA PRESION EJERCIDA EN UN PUNTO DE UN LÍQUIDO SE TRANSMITE ÍNTEGRAMENTE EN TODO SENTIDO. — Se ha visto que la presión tiene el mismo valor en todos los puntos de un mismo plano horizontal. Si el plano horizontal que pasa por *O* (fig. 3 *a*) contiene a la vez el punto donde se hace con el embolito *AB* la presión exterior p_e , es claro que $p_0 = p_e$ y el teorema general toma la forma:

$$p = p_e + \rho z, \quad [12]$$

es decir, la presión en un punto cualquiera, resulta de la superposición de la presión p_e que se ejerce en cierto punto del líquido desde el exterior y de la presión proveniente del peso del líquido. La presión exterior se transmite entonces íntegramente en todo sentido. Si por una abstracción prescindimos del peso del líquido, la presión tendría en todas partes el mismo valor p_e que se ejerce desde afuera.

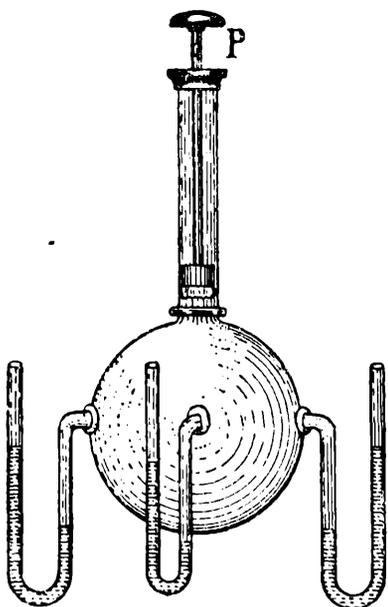


Fig. 5.

Como se ve, este principio resulta de la definición de fluido; no es menester, para establecerlo, como se dice en algunos libros, suponer al fluido incompresible. Hasta ahora no hemos hecho ninguna suposición en ese sentido. Experimentalmente puede comprobarse con un aparato como el indicado en la Fig. 5. Los tubos doblados son de vidrio y llevan cierta cantidad de mer-

curio; llenando el aparato de agua, por ejemplo, y haciendo una presión con el pistón P se observará que en los tubos las diferencias de niveles de las columnitas de mercurio son iguales.

B. DIFERENCIAS EN EL COMPORTAMIENTO DE SÓLIDOS Y FLÚIDOS. PRENSA HIDRÁULICA. — En lo que se refiere a la transmisión de la fuerza, los sólidos y flúidos se comportan de distinta manera.

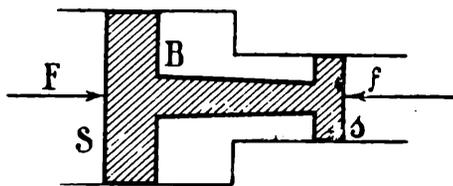


Fig. 6 a

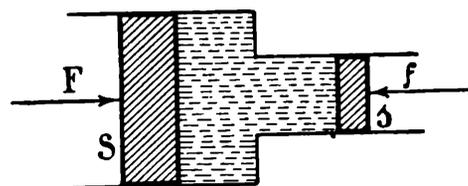


Fig. 6 b.

Tengamos, por ejemplo, una instalación como la que indica la figura 6 a, en la que dos pistones de secciones S y s están rígidamente unidos por una barra B . Si sobre uno de ellos se aplica la fuerza normal F , para mantener el equilibrio hay que aplicar sobre el otro una fuerza normal $f = F$.

En cambio, si como muestra la figura 6 b, los pistones están separados por un flúido, si actúa normalmente a S la fuerza F , debe aplicarse sobre el otro, según el principio de Pascal, una fuerza f tal que las presiones tengan el mismo valor, es decir, que:

$$\frac{f}{s} = \frac{F}{S}. \quad [13]$$

En suma, un cuerpo rígido transmite la fuerza en su misma dirección, mientras que un flúido transmite la presión en todos sentidos.

..Este comportamiento de los flúidos puede ponerse en evidencia en forma muy interesante por medio de una instalación como la que muestra la figura 7. Una bolsa de goma B que se con-

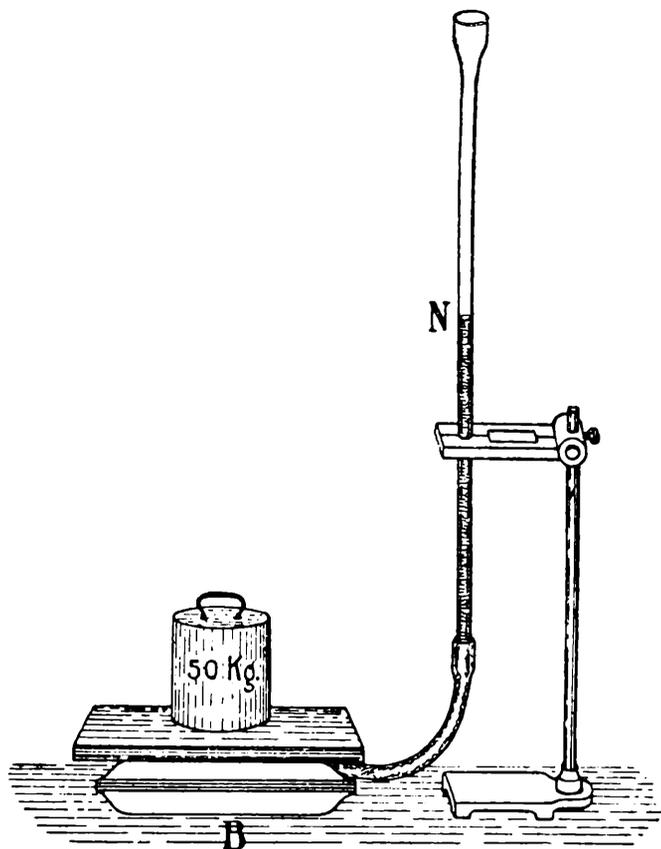


Fig. 7.

tinúa por un tubo de la misma substancia, termina en un tubo de vidrio que se mantiene vertical por medio de un soporte.

Si se llena la bolsa de agua y se la comprime con un peso elevado, mediante una tabla de madera, el nivel del líquido sube en el tubo vertical tan sólo unos decímetros, pues lo que se transmite es la presión que está dada, en este caso, por el cociente de dividir el peso aplicado por la extensión de la superficie de contacto entre la tabla y la bolsa. Supongamos que esa superficie es de 900 centímetros cuadrados ($30 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$) y la carga, como indica la figura, de 50 kilogramos. La presión será $50 \text{ kg}/900 \text{ cm}^2 = 55,5 \text{ gr}/\text{cm}^2$ y, por lo tanto, la altura de la columna de agua será de 55,5 centímetros.

Si se trata de una instalación consistente de dos vasos comunicantes (fig. 8), la condición de equilibrio está dada, como es evidente, por la relación [13] de la página anterior.

La prensa hidráulica (fig. 9), constituye un dispositivo por medio del cual es posible transmitir y mantener presiones muy elevadas.

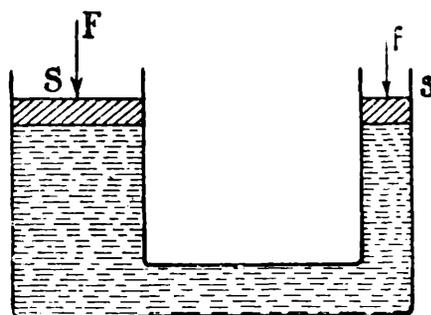


Fig. 8.

Los cuerpos de bomba, cilíndricos, verticales, de secciones muy diferentes, están en comunicación entre sí por medio de un tubo metálico; ambos están provistos de émbolos.

Supongamos que la prensa está con la carga de agua que muestra el dibujo. Si accionando el brazo $A O$, que gira alrededor del punto fijo O , se aplica una fuerza f sobre el émbolo de sección s , la presión se transmite a través de la masa flúida hasta el cuerpo de bomba mayor, previa abertura

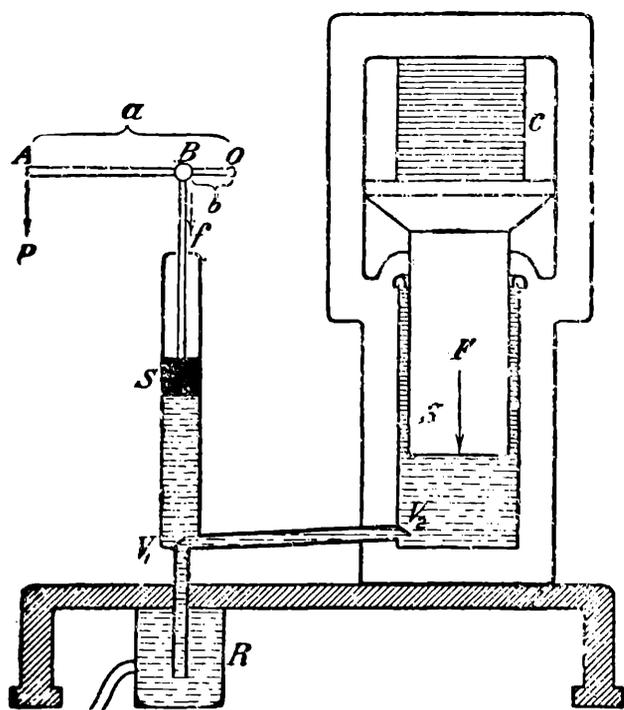


Fig. 9.

de la válvula V_2 y actuando sobre el émbolo de sección S lo desplaza. Si en la plataforma de la máquina se ha puesto un cuerpo C , para comprimirlo, la reacción que éste opone aumenta con la

compresión hasta que por fin el émbolo grande reacciona sobre el líquido con una fuerza F tal que se cumple la reacción establecida más arriba.

Si se deja de accionar el émbolo pequeño, la válvula V_2 se cierra en seguida, manteniéndose la presión alcanzada. Moviéndolo ahora hacia arriba, la válvula C_1 se abre y sube líquido del recipiente R al cuerpo de bomba. Si se acciona otra vez hacia abajo la válvula V_2 se abrirá cuando la presión que se ejerza sea un poco mayor que la existente en el flúido del cuerpo de bomba de la derecha. Penetra en éste una pequeña cantidad de líquido y el émbolo S se desplaza nuevamente, comprimiendo más el cuerpo C , hasta que se establece en todas partes la presión que se realiza en S .

A una fuerza $-f$ en dirección del vástago del émbolo pequeño, corresponde en A una fuerza P paralela y del mismo sentido cuyo valor está dado por la relación.

$$P \cdot a = f \cdot b,$$

pues los momentos de ambas fuerzas con respecto al punto O de gi-
ración deben ser iguales.

De las relaciones anteriores resulta que la presión transmitida es:

$$\frac{f}{s} = \frac{P}{s} \frac{a}{b}$$

y que la fuerza F con que reacciona el émbolo grande sobre el líquido o, lo que es lo mismo, la fuerza que comprime el cuerpo C tiene el valor:

$$F = f \frac{S}{s} = P \cdot \frac{S}{s} \frac{a}{b}.$$

Supongamos, por ejemplo, que la relación $\frac{a}{b}$ tenga el valor 5, que s sea 1 centímetro cuadrado y S de 150 centímetros cuadrados; una fuerza $P = 30$ kilogramos aplicada en A determinaría una presión de 150 kg/cm² y la fuerza F de compresión sería de 22.500 kilogramos.

Es indispensable, para producir y mantener presiones tan grandes, que no sean posibles escapes de líquido. Particular cuidado debe tenerse. para ello, en el pistón grande; el cuerpo de bomba lleva embutida, en la forma que muestra el dibujo, una pieza de cuero, la que es apretada contra el émbolo por la presión misma del agua.

C. LA SUPERFICIE LIBRE DE UN LÍQUIDO EN EQUILIBRIO ES UN PLANO HORIZONTAL. — Si se abandona a sí mismo un líquido, en el interior de una vasija, la superficie superior que separa al líquido del aire se llama *superficie libre*. Sobre ella actúa solamente la presión atmosférica, la que puede considerarse, en todo momento, para lugares muy próximos unos de otros, constante. La superficie libre es, según esto, una superficie de nivel, es decir, una superficie horizontal.

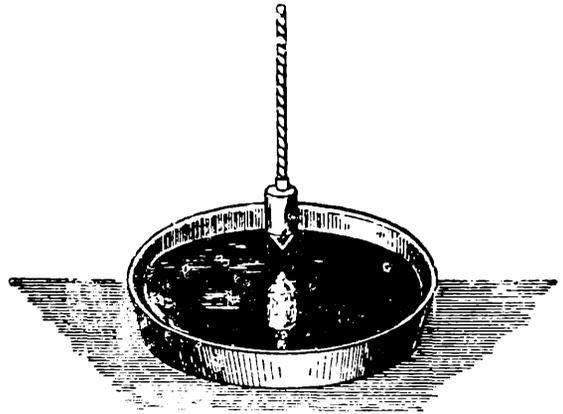


Fig. 10.

Esto puede comprobarse experimentalmente con un baño de mercurio y una plomada (fig. 10); la imagen se ve en la prolongación de la vertical de la plomada, lo que prueba que la superficie reflejante es, en todas partes, normal a esa dirección, esto es, horizontal. Conviene, en estos casos, medir la coordenada z , que indicaremos ahora con h , a partir de la superficie libre; p_0 indicará la presión sobre ella,

esto es, la presión atmosférica. La presión en un plano horizontal situado a la distancia vertical h de la superficie de nivel de un líquido (fig. 11) está dada, según el teorema general, por la relación:

$$p = p_0 + \rho h,$$

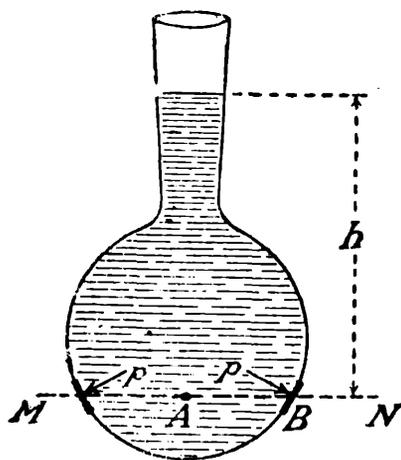


Fig. 11.

y la presión en los puntos de las paredes del vaso situados sobre ese mismo plano tiene también *ese mismo valor en todas direcciones*. Si se considera, en particular, la

superficie material del vaso, la presión que ejerce el líquido sobre ella es normal e igual al valor anterior. Las presiones en A o en B son exactamente de la misma magnitud; lo mismo para la presión normal que ejerce el líquido sobre la superficie material del vaso en B , pues esa dirección es una de las direcciones que pasan por B .

D. PRESIONES DE ABAJO HACIA ARRIBA. — Como se ha visto, la presión en un punto de un fluido no depende de la dirección; la presión hacia arriba es la que corresponde, según el teorema general de

la hidrostática. Se considera la dirección vertical hacia arriba por ser la dirección opuesta a la de la fuerza de la gravedad y permitir por este motivo algunas experiencias sencillas.

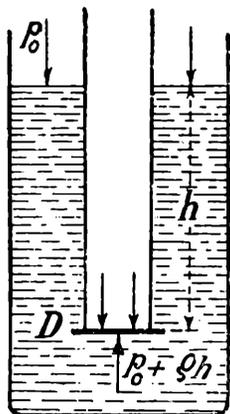


Fig. 12.

Tengamos (fig. 12) un tubo cilíndrico de vidrio, abierto en sus dos extremos por cortes normales a sus generatrices; una de estas aberturas se obtura por medio de un disco plano D , que se mantiene por la tensión de un hilo. Si se introduce en el seno de un líquido, en la forma que indica el esquema, el disco queda adherido al tubo sin necesidad de tirar de aquél.

La presión normal que ejerce el líquido, de abajo hacia arriba, sobre el disco D , debe ser igual a la que corresponde a los puntos del fluido que están en contacto con él; si, como suponemos, el disco está situado horizontalmente a la distancia vertical h de la superficie libre, la presión en uno cualquiera de sus puntos es:

$$p = p_0 + \rho h,$$

donde todas las magnitudes tienen la significación dada antes.

Sobre el lado de arriba del disco actúa solamente la presión p_0 , de modo que como presión resultante queda una presión hacia arriba igual a ρh . Que esto es efectivamente así, lo prueba el hecho de que si se vierte líquido en el interior del tubo, el disco se desprende cuando el nivel interior es igual al

de la vasija, pues así se agrega sobre el disco una presión hacia abajo igual a ρh .

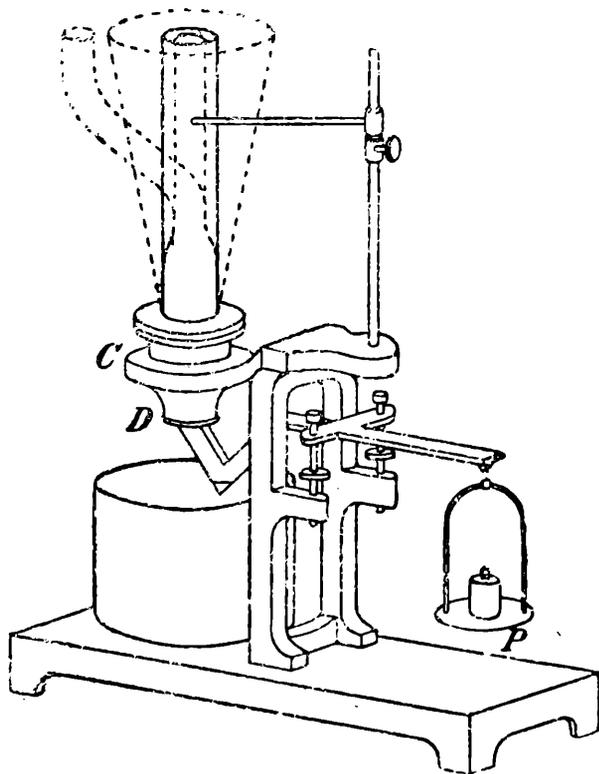


Fig. 13.

E. LA PRESIÓN QUE EJERCE UN LÍQUIDO EN UN PUNTO CUALQUIERA DEL FONDO DE LA VASIJA QUE LO CONTIENE NO DEPENDE DE LA FORMA DE ÉSTA NI LA CANTIDAD DE AQUÉL. — Por el teorema general de la hidrostática esa presión depende, para el mismo líquido, exclusi-

vamente de la distancia vertical entre el fondo y la superficie libre.

Esta consecuencia puede ser comprobada experimentalmente, con el aparato que muestra la figura 13. Cuatro recipientes, de formas muy diferentes, pueden atornillarse en la misma pieza metálica *C*, que está provista, por debajo, de una abertura circular plana. Esta abertura puede obturarse por medio de un disco metálico *D* montado en el extremo de una palanca, para lo cual es necesario colocar en el platillo del otro extremo una carga conveniente *P*.

Si se coloca uno de los recipientes y se determina la altura del líquido en el instante que, para cierto peso *P*, comienza a derramarse por debajo, se observará que con los otros vasos y para la misma carga *P* el derrame comienza exactamente a la misma altura.

Las fuerzas aplicadas sobre el mismo fondo han sido, según esto, iguales en los tres vasos y, por consiguiente, las presiones también fueron del mismo valor.

Este resultado, según el cual la fuerza total sobre el fondo de un recipiente no depende de la cantidad total del líquido, en contradicción con lo que la lógica vulgar admitiría, constituye la llamada *paradoja hidrostática*.

✓ F. VASOS COMUNICANTES. — Si en una serie de vasos comunicantes se vierte un líquido cualquiera, las superficies libres de los diferentes vasos deben estar al mismo nivel, es decir, deben formar parte del mismo plano horizontal. Esto resulta del teorema general y del hecho de que en una masa flúida en equilibrio se pueda imaginar, sin que el equilibrio se altere (fig. 14), superficies rígidas abiertas o cerradas. El nivel del líquido de la vasija está en todos sus puntos sobre un mismo plano horizontal, existan o no las superficies rígidas dibujadas por puntos, y que forman un sistema de vasos comunicantes; las superficies libres *A*, *B*, y *C* de estos vasos estarían sobre el mismo plano.

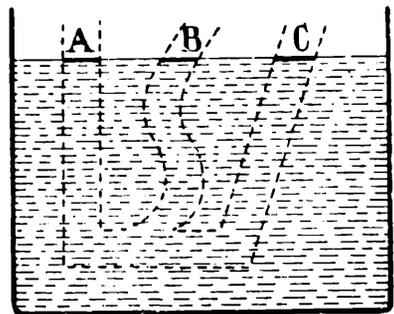


Fig. 14.

Si se vierte, en cambio, en un tubo doblado en U, dos líquidos no *mezclables*, por ejemplo, agua y mercurio, la distribución de las superficies es la que indica la figura 15 *a*; la presión debe ser, lo mismo que antes, idéntica en los diferentes puntos del mismo plano horizontal.

La diferencia de niveles h_1 y h_2 de los extremos de las dos columnas de líquido están relacionadas por una expresión muy simple. La presión sobre el plano horizontal CB , que contiene la superficie de separación de los dos líquidos, está dada en B por la relación :

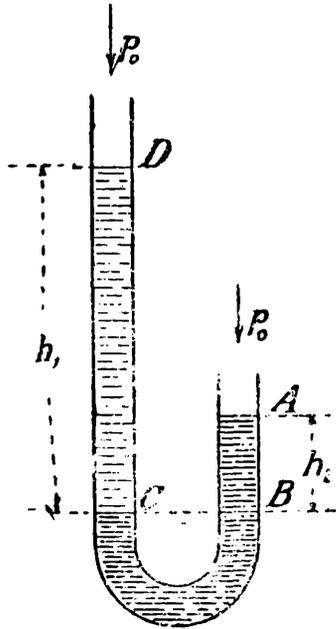


Fig. 15 a.

$$p_0 + \rho_2 h_2,$$

si ρ_2 es el peso específico del líquido existente entre A y B , y en C por el valor :

$$p_0 + \rho_1 h_1,$$

donde ρ_1 es el peso específico del líquido contenido en la rama CD .

Puesto que esas presiones deben ser iguales, resulta :

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \quad [14]$$

o

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad [15]$$

relación que nos dice que las diferencias de nivel de las columnas líquidas están entre sí como la razón inversa de los pesos específicos.

Esta relación puede ser utilizada para medir pesos específicos; las alturas h_1 y h_2 se miden exactamente con un catetómetro.

Una instalación que se conoce también con el nombre de vasos comunicantes, es la representada por la figura 15 b, que se suele utilizar para comparar, aproximadamente, el peso específico de líquidos mezclables. Generalmente, uno de los flúidos es el agua, cuyo peso específico puede tomarse como la unidad, tratándose de un método grosero como éste.

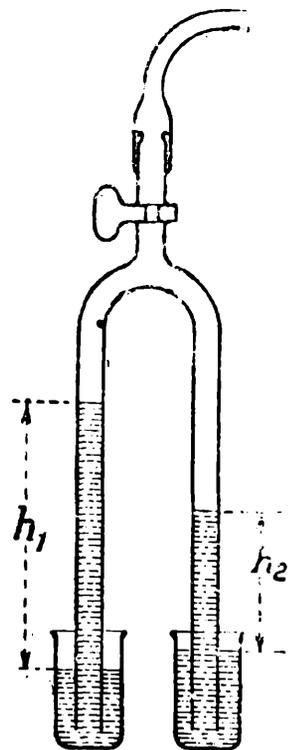


Fig. 15 b.

Aspirando aire por el tubo superior, se establece en el interior una presión p_1 menor que la presión atmosférica p_0 , lo que da lugar a que los líquidos suban hasta cierta altura en cada uno de los tubos. Indicando, como antes, con ρ_1 y ρ_2 , y h_1 y h_2 a los pesos específicos

de los dos líquidos y las alturas de las columnas correspondientes, se tiene:

$$p_0 - p_1 = \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2.$$

5. Aplicación del principio de los trabajos virtuales a la deducción del teorema general de la hidrostática.—Nosotros hemos sentado el teorema general de la hidrostática utilizando exclusivamente la definición de fluido establecido en el párrafo 1, definición a la que se ajustan, para movimientos infinitamente lentos o en el estado de reposo, los líquidos reales y los gases. Para nada se ha hecho uso de la suposición de que el fluido fuese incompresible, de tal manera que el teorema vale para todos los fluidos reales.

Este teorema puede establecerse con la sola definición de fluido, sin necesidad de la incompresibilidad, y de una manera elegante, con el auxilio del principio de los trabajos virtuales.

Supongamos que se tiene un fluido en equilibrio en una superficie cerrada (fig. 16) que podemos suponer rígida y que está provista de dos pistones de secciones S_1 y S_2 . Sobre éstos actúan las presiones p_1 y p_2 . Se trata de establecer qué relación existe entre p_1 y p_2 en condiciones dadas, o, lo que es lo mismo, para un volumen dado, pues si el volumen varía se originan nuevas fuerzas que no figuraban en el estado anterior. Al aplicar el principio de los trabajos virtuales, deben considerarse, por esto, desplazamientos virtuales tales que el volumen del fluido quede invariado; *el fluido, no obstante, puede ser compresible.*

Si imaginamos que el pistón de arriba avanza hacia adentro el camino e_1 , el de abajo debe suponerse que avanza hacia afuera un camino e_2 tal que sea:

$$s_1 e_1 = s_2 e_2.$$

Es decir, todo ocurre como si una masa líquida de volumen $s_1 e_1$ pasara del cilindro de arriba al de abajo, recorriendo el camino vertical h . El cambio de forma no requiere en los fluidos el consumo de ningún trabajo, pues no se oponen fuerzas al deslizamiento. La fuerza de gravedad gasta, por el recorrido vertical de la masa m fluida, de volumen $s_1 e_1$, el trabajo mgz . Las fuerzas $p_1 s_1$ y $p_2 s_2$ apli-

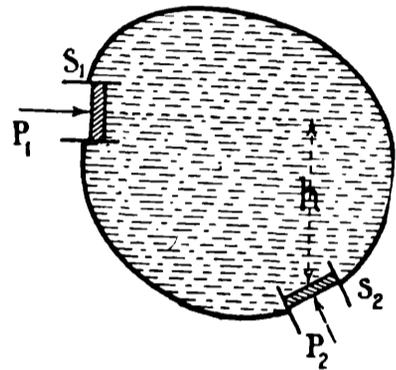


Fig. 16.

·cadas sobre los pistones han realizado los trabajos $+ p_1 s_1 e_1$ y $- p_2 s_2 e_2$, respectivamente, de modo que debe ser:

$$p_1 s_1 e_1 - p_2 s_2 e_2 + mgz = 0.$$

Si el peso específico del líquido es ρ se tiene:

$$mg = \rho s_1 e_1.$$

De esta relación y de las precedentes resulta:

$$p_2 - p_1 = \rho z, \quad [16]$$

que es la relación antes establecida.

6. Trabajo de las fuerzas en los desplazamientos reales. — CASO DE LOS FLÚIDOS INCOMPRESIBLES. — Consideremos la instala-

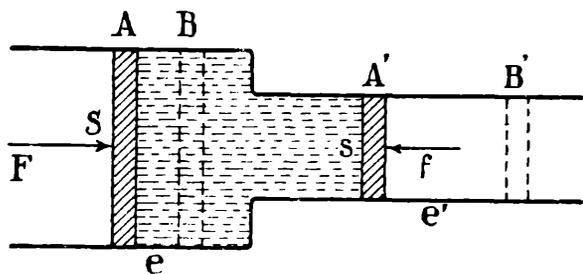


Fig. 17.

ción que indica la figura 17 y supongamos que la fuerza F provoca el desplazamiento del sistema hacia la derecha; la fuerza f se opone en todo momento al desplazamiento, que supondremos muy lento. La energía cinética podrá, en este caso, no

considerarse. La fuerza F y, por lo tanto, f , varían de una manera cualquiera con el tiempo.

Se trata de establecer las relaciones energéticas de ese desplazamiento real.

Sea AB el desplazamiento total del pistón S y $A'B'$ el de s ; el trabajo de la potencia F será:

$$\int_A^B F \cdot de$$

y el de la resistencia f :

$$\int_{A'}^{B'} f \cdot de',$$

expresiones en las que aparece el signo integral a causa de que siendo las fuerzas variables deben dividirse los desplazamientos en

elementos de y de' infinitamente pequeños, dentro de los cuales pueden considerarse aquéllas como constantes.

Por la suposición hecha al principio no se produce una variación sensible de la energía cinética. El trabajo de la potencia se ha consumido en vencer la resistencia y en comprimir el fluido.

Se tiene, de una manera completamente general, para toda clase de flúidos, sean líquidos o gases,

$$\int_A^B F de = \int_{B'}^{A'} f de' + \text{trabajo de compresión.} \quad [13]$$

Si de y de' son dos desplazamientos elementales reales que se corresponden, se tiene:

$$F \cdot de = f \cdot de' + \text{trabajo elemental de compresión.} \quad [14]$$

Como de y de' están en razón inversa de las secciones S y s únicamente si el fluido es incompresible, pues en ese caso debe ser $S \cdot de = s \cdot de'$, la relación anterior muestra que las presiones $\frac{F}{S}$ y $\frac{f}{s}$ no obedecen, durante los desplazamientos reales, en los flúidos compresibles, al principio de Pascal. Este principio vale, sin embargo, para el equilibrio, para todos los flúidos, líquidos o gases.

La experiencia muestra que los líquidos son muy poco compresibles, de modo que puede despreciarse el trabajo de compresión. Para ellos la [14] da:

$$F \cdot de = f \cdot de', \quad [15]$$

expresión que unida a la condición de incompresibilidad ($S \cdot de = s \cdot de'$) da la relación [13] de la página 8.

Es decir, en los líquidos, vale el principio de Pascal *para el estado de movimiento, siempre que las variaciones de la energía cinética no se hagan sensibles*, en cuyo caso figuraría en el segundo miembro de la [13] el aumento de su valor.

La relación [15] enseña que por un dispositivo hidráulico se puede transmitir, íntegramente — si se desprecia el roce — una suma cualquiera de trabajo. Se puede, además, lo mismo que en las máquinas simples, ganar en fuerza lo que se pierde en velocidad o recíprocamente.

Es claro que las consideraciones anteriores no dependen para nada del dispositivo; lo esencial es que el medio por el que se transmite la energía sea flúido, un líquido, en lo que se refiere a las últimas frases de este párrafo.

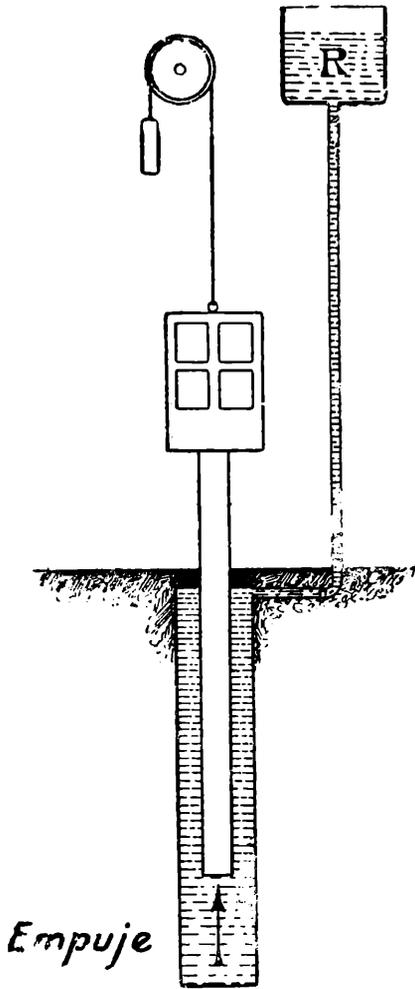


Fig. 18.

7. Ascensores hidráulicos.—La figura 18 representa, esquemáticamente, un aparato de esa clase. La cabina está rígidamente unida a un largo cilindro de acero que se desplaza coaxialmente en el interior de otro, hueco, de mayor diámetro, embutido verticalmente en el suelo. Entre ambos existe, en la extremidad superior de este último, un ajuste perfecto.

Todo el espacio libre se mantiene lleno de agua.

El peso del cilindro y de la cabina está casi equilibrado, a través de una polea, por un contrapeso.

Si se transmite al seno del líquido una presión, que en el esquema provendría del líquido que se encuentra en el recipiente *R*, el cilindro es empujado hacia arriba, desplazándose con la carga. Para descender

se cierra la comunicación con el conducto a alta presión y se da escape, por otro conducto, al líquido almacenado en el tubo.

Otra aplicación del mismo género es la de los *guinches hidráulicos*.

CAPITULO II

EQUILIBRIO RELATIVO DE SOLIDOS Y FLUIDOS DETERMINACION DE DENSIDADES

A. — EL PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

1. **El principio de Arquímedes.**—Este principio resulta en seguida de la aplicación de las leyes de la estática en la forma que se ha hecho anteriormente. El equilibrio de una porción de fluido limitada por una superficie S (fig. 19) significa, como se ha visto, que la resultante R de las presiones f que ejerce el resto del líquido sobre S es igual y de sentido contrario que el peso mg de la masa flúida considerada. La acción que el resto del líquido ejerce sobre S no puede depender de la substancia que se imagine centro de ella; en todos los casos la resultante de las presiones f será una fuerza vertical, dirigida hacia arriba, e igual al peso del líquido que contiene.

Resulta así que un cuerpo sumergido en un líquido en equilibrio debe recibir un empuje de abajo hacia arriba igual al peso del volumen del líquido desalojado. Este enunciado constituye el llamado principio de Arquímedes.

Experimentalmente puede comprobarse, de una manera muy cómoda, como sigue. Se suspende de uno de los platos de una balanza de precisión un cuerpo, un pedazo de metal por ejemplo, y se pesa una vez en el aire y otra vez sumergido en un líquido contenido en un vaso de derrame, recogiendo, en un vasito el líquido que se vierte al introducirlo. El peso aparente del cuerpo sumergido es menor que el peso del cuerpo en el aire, lo que prueba la existencia de un empuje hacia arriba; la diferencia es igual al peso del líquido recogido, peso

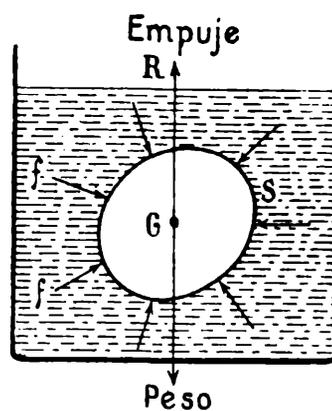


Fig. 19.

que se obtiene pesando el vasito antes y después de la experiencia.

Como experimento de curso puede hacerse la muy conocida de los

cilindros (fig. 20) uno de los cuales, el de abajo, macizo, enchufa perfectamente en otro hueco, el de arriba.

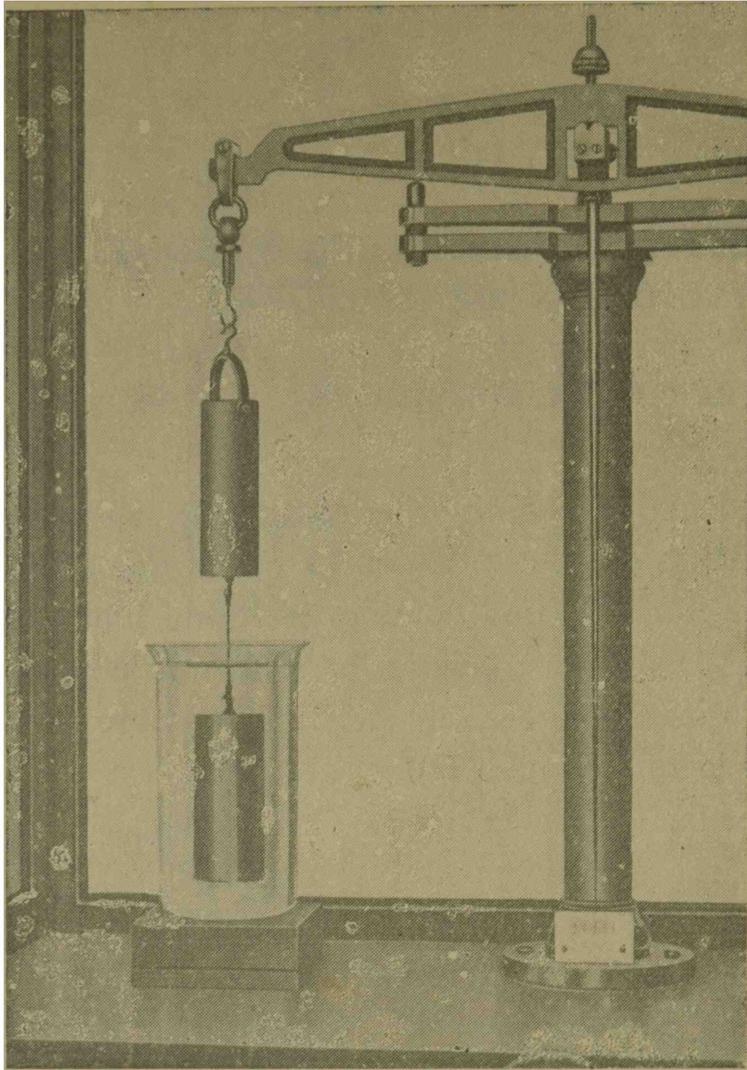


Fig. 20.

con una fuerza igual también al peso del líquido desalojado. Esto se comprueba de la manera siguiente. Colóquese en uno de los platillos de una balanza un vaso con un líquido, agua por ejemplo, y equilíbrense con una tara; introduciendo en el fluido un cuerpo que pende de un hilo o varilla se observará que es realmente empujado hacia abajo. Si se repite la experiencia utilizando el cilindro macizo del experimento anterior (fig. 21), situando el cilindro hueco en el otro platillo, llenando éste

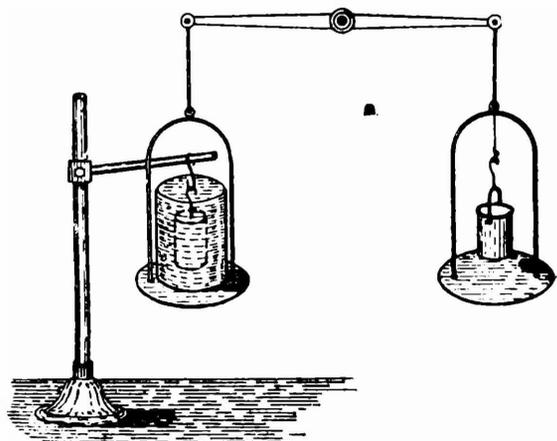


Fig. 21.

de líquido se restablece el equilibrio, lo que prueba que el empuje es compensado, como se aseveró, por el peso del líquido desalojado.

3. El principio de Arquímedes aplicado a los gases. — La experiencia enseña que el principio de Arquímedes se aplicable a los gases. Por medio del barómetro (fig. 22) se comprueba la existencia de un empuje hacia arriba. Una pequeña palanca de primer grado lleva suspendida en uno de sus extremos un globito de vidrio; el equilibrio se regula, a la presión ambiente, por medio de una masa metálica que se desplaza a torticho, sobre el otro extremo de la palanca. Situándola así sobre la platina de una máquina neumática y encerrándola en una campana, se observa, al hacer el vacío, que la palanca se inclina del lado en que pende el globo de vidrio.

Que el empuje es igual al peso del gas desalojado se comprueba suspendiendo del platillo de una balanza, por medio de un hilo largo y delgado, un balón cerrado, de tal manera que quede sumergido en la atmósfera gaseosa de un recipiente, al que se adapta una tapa provista de un agujero.

Si este recipiente contiene una vez aire y otra ácido carbónico, por ejemplo, los empujes que soporta el balón deben ser diferentes; la diferencia entre los pesos necesarios para restablecer el equilibrio en uno y otro caso debe ser igual a la diferencia entre los pesos de volúmenes de ácido carbónico y aire iguales el volumen del balón. La experiencia muestra que ello es efectivamente así.

La ascensión de los globos es debida a que el empuje hacia arriba del aire es mayor que el peso de ellos.

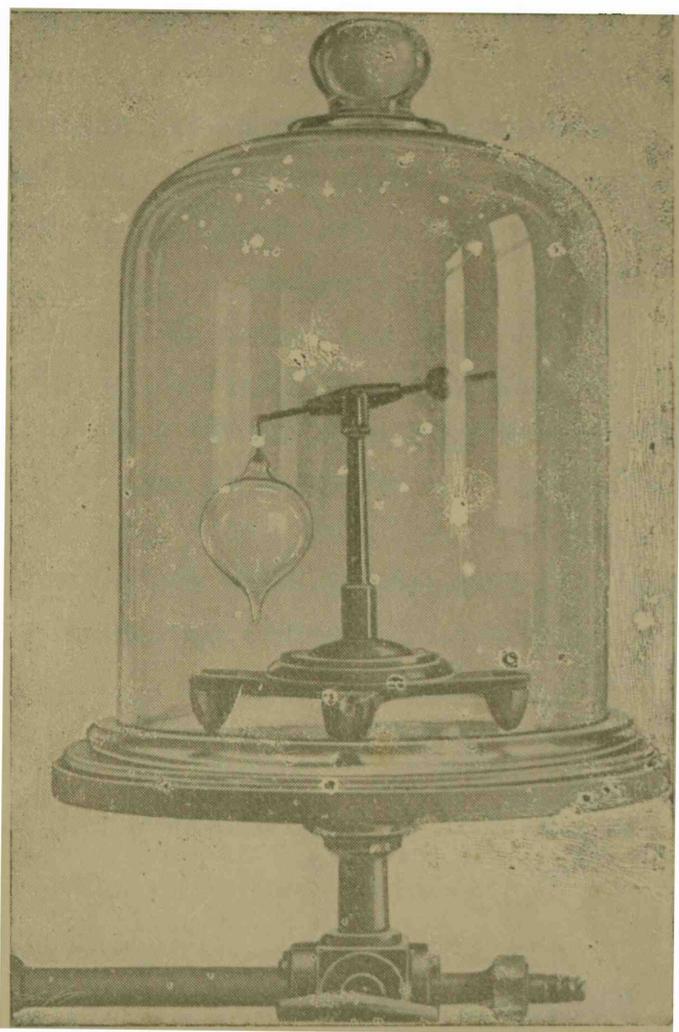


Fig. 22.

4. Reducción de una pesada al vacío.—El objeto de una pesada es, como se ha visto, la determinación del peso o de la masa de un cuerpo, por comparación con los pesos o masas de una « caja de pesas ».

La operación se hace, en general, en las condiciones atmosféricas naturales, de tal manera que tanto el cuerpo como las pesas sufren un empuje igual al peso respectivo del aire que desalojan.

Las indicaciones de las pesas corresponden al vacío. De la pesada en el aire se deduce fácilmente, como se indica a continuación, el peso en el vacío, utilizando el principio de Arquímedes.

Supondremos que todas las pesas son del mismo material y que tienen, por lo tanto, la misma densidad; esto no ocurre con las pesas que representan fracciones de gramos, lo que, en general, no da lugar a errores sensibles.

Es claro que si se trata de pesadas de muy pequeñas cantidades de sustancias, y se usan solamente las pesas, que representan las fracciones de gramo, ha de tomarse la densidad de éstas.

Sea:

P' , el peso *aparente* del cuerpo en el aire, es decir, la suma de las pesas que lo equilibran en el aire;

P , el verdadero peso del cuerpo o peso en el vacío;

λ , el peso de un centímetro cúbico de aire;

ρ , el peso de un centímetro cúbico del cuerpo; y

σ , el peso de un centímetro cúbico de la sustancia de las pesas.

El volumen del cuerpo será $\frac{P}{\rho}$ y el empuje que sufre en el aire $\frac{P}{\rho}\lambda$; el volumen de las pesas es $\frac{P'}{\sigma}$ y el empuje que reciben $\frac{P'}{\sigma}\lambda$. El equilibrio se produce cuando los pesos del cuerpo y de las pesas, disminuídos en los empujes correspondientes, son iguales. Se tiene, entonces, que:

$$P - \frac{P}{\rho}\lambda = P' - \frac{P'}{\sigma}\lambda \quad [1]$$

$$P\left(1 - \frac{\lambda}{\rho}\right) = P'\left(1 - \frac{\lambda}{\sigma}\right). \quad [1']$$

Como λ es, en general, pequeño con respecto a ρ y σ puede escribirse:

$$P = P' \left(1 + \frac{\lambda}{\rho} - \frac{\lambda}{\sigma} \right) \quad [2]$$

o todavía:

$$P = P' + P' \lambda \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\sigma} \right). \quad [2']$$

Es decir, al peso aparente P' hay que sumar un peso igual a $P' \lambda \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\sigma} \right)$; corrección ésta que aumenta con la diferencia entre ρ y σ .

B. — LA FLOTACIÓN

5. **Flotación.** — Un cuerpo abandonado en la superficie libre de un líquido en reposo se irá a fondo o flotará total o parcialmente sumergido, de acuerdo con el principio de Arquímedes, según que el peso del volumen del líquido que pueda desalojar sea menor, igual o mayor que su propio peso o, en otras palabras, según que su densidad sea mayor, igual o menor que la del líquido.

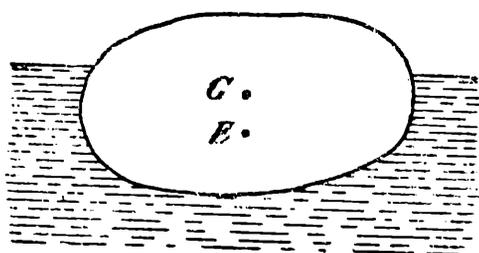


Fig. 23.

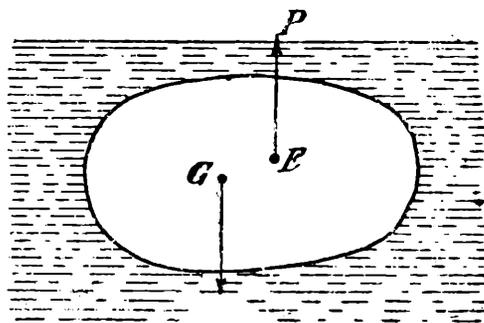


Fig. 24.

El peso del cuerpo está aplicado, como se sabe, a su centro G de gravedad (fig. 23), el empuje lo está en un punto E de él, que coincide con el centro de masa del fluido desalojado, punto que se denomina centro de *empuje* o de *flotación*.

Si un cuerpo flota totalmente sumergido (fig. 24), el centro de empuje coincide con su centro de gravedad si es homogéneo, no así si es heterogéneo.

En los dos casos de flotación, cuando el cuerpo está en equilibrio, lo que significa que ni se traslada ni gira en el seno del líquido, el peso del fluido desalojado por la parte sumergida debe ser igual al

peso del cuerpo y actuar en sentido opuesto. El centro de flotación se encontrará, por lo tanto, en la posición de equilibrio, sobre la vertical que pasa por el centro de gravedad del cuerpo.

6. Estabilidad del equilibrio; metacentro.— Dado un estado de equilibrio, para el cual los puntos G y E se hallan sobre la misma vertical, su calidad se determina produciendo o imaginando una pequeña rotación (fig. 25) con lo que el centro del empuje se desplaza

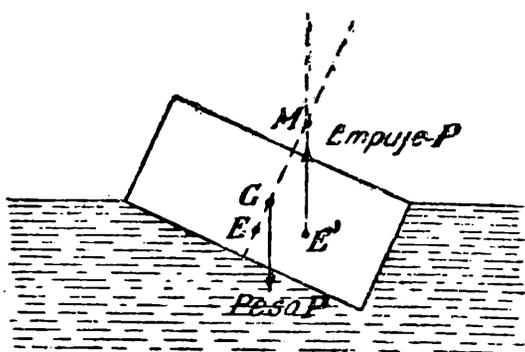


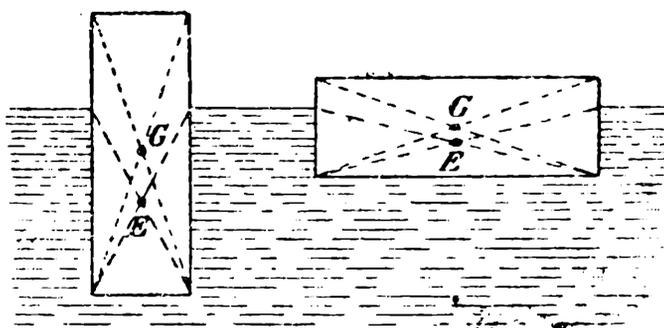
Fig. 25.

de E a E' , punto que no cae sobre la vertical que contiene a G . Actúa, por esto, sobre el cuerpo una cupla. Si su sentido es tal que movería al cuerpo en sentido contrario que la rotación producida o imaginada, restituyéndolo así a su posición inicial, el equilibrio es *estable*; en caso contrario es *inestable*. Así, por ejemplo (figs. 26 y

27) las posiciones I_a y II_a son de equilibrio inestable mientras que la I_b y II_b son de equilibrio estable.

La introducción de un punto característico permite definir de una manera *sencilla y general* la calidad del equilibrio. La vertical que pasa por el centro E' de empuje (fig. 25), que corresponde a una posición del cuerpo vecina a la del equilibrio, corta a la recta que pasa por E y G en un punto M que se denomina *metacentro*. Es claro que se puede suponer aplicado en él el empuje.

El criterio antes aplicado puede condensarse en la siguiente regla: *El equilibrio de un cuerpo flotante es estable*



I_a

Fig. 26.

I_b

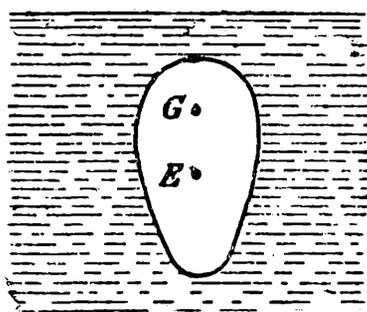
cuando los metacentros se hallan por encima de su centro de gravedad; en el caso contrario, el equilibrio es inestable.

El equilibrio será indiferente, cuando para todas las posiciones los puntos E y G coincidan, lo que sólo puede ocurrir si el cuerpo está totalmente sumergido y es homogéneo.

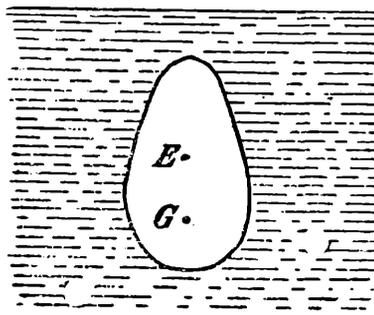
En el tomo I se ha visto que un sistema se encuentra en equilibrio estable cuando su energía potencial es mínima. Si la energía poten-

cial proviene de la gravitación, esa condición se cumple cuando el centro de gravedad alcanza la más baja posición posible.

Erróneo sería pensar que, en el caso actual, la posición de equilibrio estable corresponde a la más baja posición del centro de gravedad del cuerpo flotante, *pues el sistema está constituido aquí por el cuerpo y por el líquido*. Al cambiar la posición de aquél se desplaza al mismo tiempo el centro de gravedad del líquido desalojado.



IIa Fig. 27.



IIb Fig. 27.

El sistema se encontrará por lo tanto, en equilibrio estable, cuando el centro de gravedad del sistema constituido por el cuerpo flotante y el líquido esté lo más bajo posible.

Como en todas las posiciones el cuerpo desaloja una misma cantidad de agua, igual a su propia masa, el nivel de la vasija permanece constante, pero el centro de gravedad del fluido se desplaza. Esto es debido, exclusivamente, al desplazamiento del centro de masa del líquido desalojado.

No es difícil aplicar el principio recientemente enunciado a diferentes casos concretos de flotación, pero como este método no ofrece ninguna ventaja, a no ser la de comprobar una vez más la validez de aquél, y siendo la regla del metacentro, como ya dijimos, sencilla y general, prescindimos de hacerlo.

7. Estabilidad y altura metacéntrica de los navíos. Oscilaciones transversales. — La estabilidad de un cuerpo flotante cualquiera, y en particular de un navío, se mide por el momento que tiende a restituirlo a su posición normal (fig. 28) cuando se le gira en cierto ángulo φ . Nos referimos aquí a la estabilidad con respecto a las giraciones transversales o, lo que es lo mismo, con respecto a las giraciones alrededor de su eje longitudinal.

Ese momento se origina, como se vió, tan pronto como, por la giración del cuerpo, el centro de empuje no cae sobre la vertical que pasa por su centro de gravedad.

Como el peso del agua desplazada, es igual al peso P total del cuerpo, se designa al peso del volumen máximo de agua que desaloja un navío con carga completa, su *desplazamiento*.

La figura 28 se refiere a un corte transversal de un navío por la vertical que contiene a sus centros G y E de gravedad y empuje.

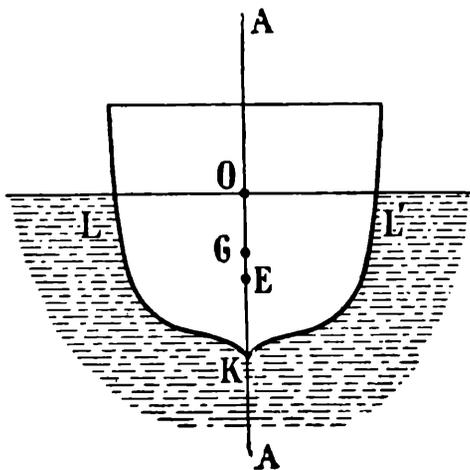


Fig. 28.

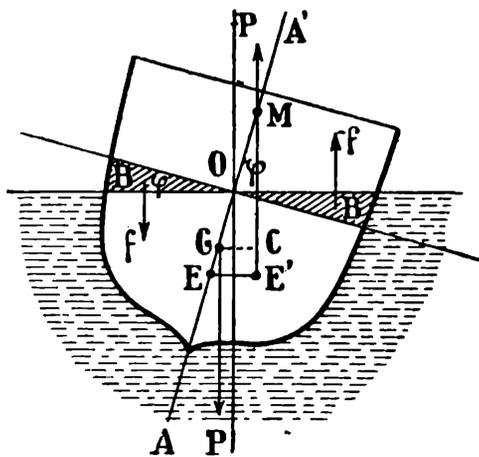


Fig. 29.

Si el barco se inclina, lo hace girando alrededor de un eje longitudinal que pasa por O ; la línea de simetría AA toma (fig. 29) la posición AA' y el centro de empuje se mueve hasta E' .

El volumen que se sumerge de un lado es igual al que emerge del otro. Ambos volúmenes han sido sombreados.

El *metacentro* que corresponde a la inclinación supuesta, que indicamos con φ , está en M . La distancia MG entre este punto y el centro de gravedad G se denomina altura metacéntrica correspondiente a la inclinación φ . La designaremos con a .

Las dos fuerzas P iguales y de sentido contrario, aplicadas en G y M , respectivamente, determinan una cupla que da la medida de la estabilidad y cuyo momento tiene el valor:

$$\mathcal{M} = P \cdot GC = P \cdot a \cdot \text{sen } \varphi, \quad [3]$$

expresión que muestra que la estabilidad es tanto mayor cuanto mayor es la altura metacéntrica,

Para ángulos pequeños puede escribirse el arco en lugar del seno, es decir,

$$\mathcal{M} = P \cdot a \cdot \varphi, \quad [4]$$

de modo que la fuerza directriz que corresponde a las pequeñas oscilaciones transversales tiene el valor :

$$D = \frac{\mathcal{M}}{\varphi} = P \cdot a . \quad [5]$$

Si se indica con I el momento de inercia del buque, con respecto a la línea longitudinal que pasa por O , el tiempo de duración de esas oscilaciones será (véase tomo I, pág. 205) :

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{I}{D}} = 2 \pi \sqrt{\frac{I}{P \cdot a}} . \quad [6]$$

Las oscilaciones serán tanto más lentas y la embarcación estará tanto más quieta cuanto menor sea la altura metacéntrica.

Cómo la estabilidad disminuye con a , el valor de esta magnitud no debe disminuir hasta ser inferior, para un ángulo dado, a cierto límite.

En los grandes transatlánticos las oscilaciones transversales son muy lentas ya para alturas metacéntricas del orden de un metro, para pequeñas inclinaciones. Todo peligro de vuelco desaparece, pues la altura metacéntrica aumenta en ellos rápidamente con la giración.

8. Determinación de la altura metacéntrica.—Su valor puede calcularse para un ángulo dado, un tanto groseramente, mediante algunas suposiciones que simplifican el problema.

El corte horizontal de un navío, a lo largo de la línea de flotación, está representado en la figura 30. Prescindamos de los extremos e indiquemos con b el ancho, y con l la longitud entre las líneas de puntos.

Si se representa con S la superficie LKL' del corte transversal (fig. 28) que queda sumergida, el volumen del agua desalojada es $S l$, producto que, con una aproximación grosera, representa el valor numérico del desplazamiento.

El momento \mathcal{M} dado por la relación [3] se origina como sigue. La parte sombreada sumergida sufre, por la giración, un empuje f en su centro B de gravedad, mientras que sobre la parte sombreada izquierda la gravedad aplica en B' también una fuerza igual a f , pues debiendo ser, en toda posición de equilibrio, iguales al peso y al empuje, el peso de las partes sombreadas del navío deben ser iguales al peso del líquido que desalojan :

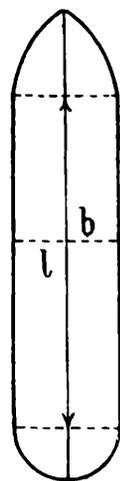


Fig. 30.

Las fuerzas f originan el momento \mathcal{M} . El valor de f está dado, aproximadamente, por el volumen de una de las partes sombreadas, luego es:

$$f = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} \right)^2 l \operatorname{sen} \varphi. \quad [7]$$

La distancia de uno cualquiera de los puntos B y B' de aplicación de las f a O es:

$$OB = \frac{2}{3} \frac{b}{2} \quad [8]$$

y por consiguiente:

$$BB' = \frac{2}{3} b. \quad [9]$$

El momento que determinan las fuerzas f tendrá, según eso, el valor:

$$\frac{1}{12} b^3 \cdot l \cdot \operatorname{sen} \varphi. \quad [10]$$

Teniendo en cuenta que este momento debe ser igual a \mathcal{M} se obtiene por comparación, para la altura metacéntrica a , la expresión:

$$a = \frac{1}{12} \frac{b^3 l}{P} = \frac{1}{12} \frac{b^3}{S} \quad [11]$$

puesto que P es el desplazamiento que está medido, aproximadamente, por el producto $S l$.

La relación [11] da tan solo un valor grosero de a , que se refiere a ángulos pequeños de inclinación.

En la práctica, el valor de a se determina experimentalmente, desplazando lateralmente sobre cubierta, en una distancia d , un peso conocido Q , y midiendo con un instrumento — péndulo con un círculo graduado fijo al navío — el ángulo φ de inclinación.

El peso Q produce el momento $Q \cdot d \cdot \cos \varphi$ momento que debe ser igual a \mathcal{M} . Por comparación se obtiene:

$$a = \frac{Qd}{P \cdot \operatorname{tang} \varphi}. \quad [12]$$

C. — PESO ESPECÍFICO; DENSIDAD. MÉTODOS DE DETERMINACIÓN

9. **Definiciones.**—Se llama peso específico de una sustancia al peso de la unidad de volumen. Si se tiene una porción homogénea de una materia y se indica con P su peso, con V su volumen y con ρ su peso específico, la definición se expresa por la relación:

$$\rho = \frac{P}{V}. \quad [13]$$

Comúnmente se indica el peso en gramos y el volumen en centímetros cúbicos, de modo que se puede decir que el peso específico de una sustancia es el peso en gramos de un centímetro cúbico.

Bajo la denominación de *densidad* o *masa específica* se comprende a la masa de la unidad de volumen. Representando con M la masa total y con μ la densidad, se tiene:

$$\mu = \frac{M}{V}. \quad [14]$$

Las magnitudes ρ y μ están ligadas por la relación:

$$\rho = \mu g,$$

si g es la aceleración de la caída libre, pues es $P = Mg$ por la ecuación de Newton.

El peso específico ρ varía de un lugar a otro de la tierra con g mientras que μ es una constante.

Las dimensiones de ρ y de μ son:

$$[\rho] = \frac{MLT^{-2}}{L^3} = ML^{-2} T^{-2} \quad ; \quad [\mu] = \frac{M}{L^3} = ML^{-3}$$

o en el sistema **CGS**:

$$[\rho] = gr \cdot cm^{-2} seg^{-2} \quad ; \quad [\mu] = gr \cdot cm^{-3}.$$

Conviene hacer notar aquí que el número que expresa la densidad en el sistema absoluto **CGS** es el mismo que expresa el peso específico en el sistema práctico.

Por la observación que antecede, puede usarse el valor de la densidad en el sistema **CGS**, a la vez, como el peso específico en el sistema práctico.

Si se quieren definir rigurosamente las magnitudes de que nos ocupamos, es preciso, a causa de la dilatación por el calor, hacer referencia a la temperatura de que se trata. Como la densidad del agua, a 4°C de temperatura, tiene el valor uno, es decir, la masa en el sistema **CGS** de un centímetro cúbico de agua a 4°C es de un gramo se puede definir también la densidad de una substancia como la relación entre la masa de cierto volumen y la masa de un volumen igual de agua a 4°C.

10. Determinación del peso específico de los sólidos. Por el principio de Arquímedes. — El principio de Arquímedes permite determinar cómodamente el peso específico de las substancias o, mejor dicho, compararlas.

Si P es el peso del aire y V el volumen de una porción de una substancia cuyo peso específico indicaremos con ρ , y P' el peso aparente que se obtiene pesándolo mientras se encuentra sumergido en un líquido cuyo peso específico es ρ_0 , que no lo disuelve ni lo ataca, se tiene, por el principio mencionado que:

$$P - P' = \rho_0 V \quad [15]$$

y por definición:

$$P = \rho V, \quad [16]$$

de donde, por una simple división, resulta:

$$\frac{P}{P - P'} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad [17]$$

cociente que relaciona el peso específico del cuerpo con el peso específico del líquido. Si éste fuese agua a 4°C de temperatura, sería $\rho_0 = 1$ y podría escribirse:

$$\frac{P}{P - P'} = \rho, \quad [18]$$

relación que da el peso específico del cuerpo a la temperatura de 4°C.

Experimentalmente las determinaciones de P y P' se hacen de una manera muy exacta utilizando una balanza de precisión provista de un puente (fig. 31) que permite el libre movimiento del platillo, sobre el que se coloca el recipiente con el líquido en el cual ha de sumergirse el cuerpo. Este, que puede ser un trozo pe-

queño, se suspende de la horquilla por medio de un hilo muy fino, lo mejor de *cocón*. Al pesarlo sumergido en el líquido es menester eliminar cuidadosamente, mediante un pincel, las burbujas de aire que quedan adheridas.

Por la relación [17] se obtiene $\frac{\rho}{\rho_0}$ y si se conoce ρ_0 a la temperatura de la experiencia se puede calcular ρ , que es el peso específico del cuerpo a la temperatura del fluido. Sobre las correcciones hablaremos más adelante.

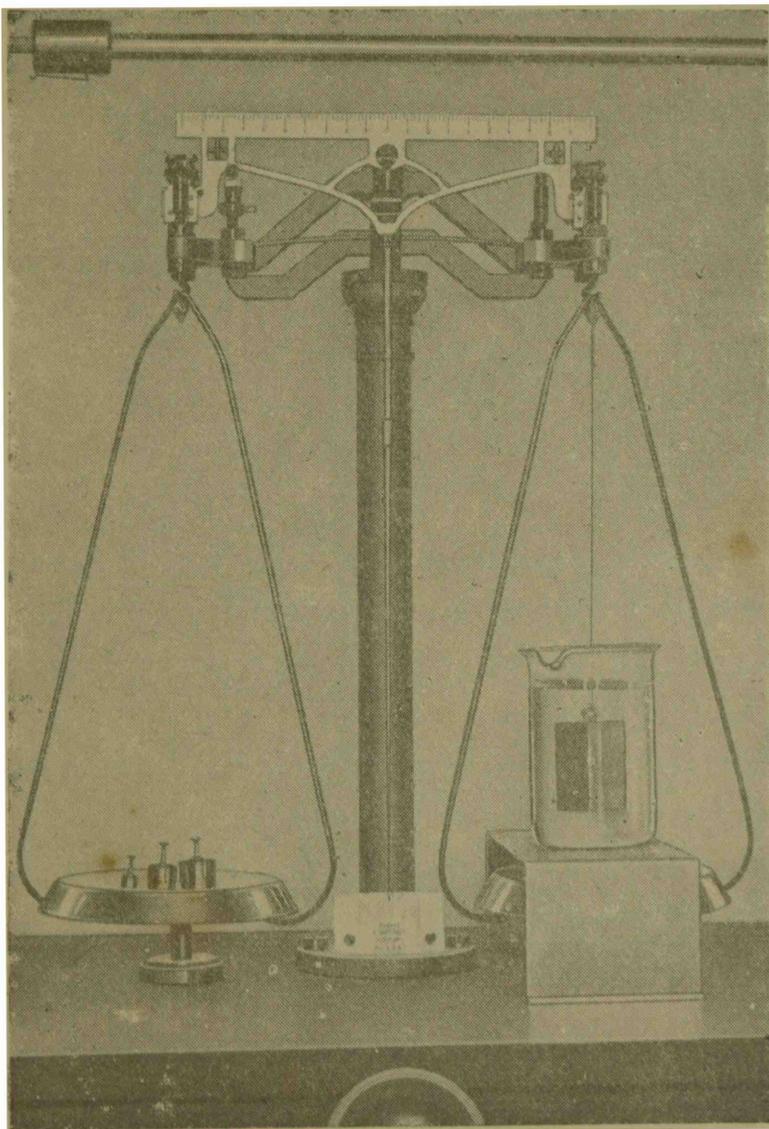


Fig. 31.

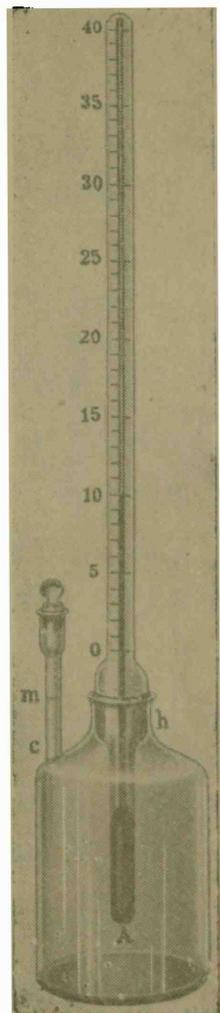


Fig. 32.

11. Determinación con el picnómetro. — El picnómetro consiste (fig. 32) en un pequeño frasco de vidrio de 10 a 15 centímetros cúbicos de capacidad, provisto, lleve o no termómetro, de una prolongación vertical constituída por un tubito delgado que tiene un trazo horizontal, circular. La adaptación de esta pieza de enrace, y

de la que lleva el termómetro, al cuerpo del frasco, se realiza por superficies cónicas finamente esmeriladas.

Para la determinación del peso específico de un cuerpo sólido es necesario determinar tres pesos: el peso P_1 del cuerpo, el peso P_2 del cuerpo más el picnómetro lleno de un líquido y, por fin, el peso P_3 del picnómetro con el cuerpo dentro y lleno del mismo líquido.

La diferencia $P_2 - P_3$ es el peso de un volumen de líquido igual al volumen del cuerpo a la temperatura de aquél. Si este volumen es V y ρ_0 es el peso específico del líquido se tiene:

$$P_2 - P_3 = \rho_0 V.$$

Es, además:

$$P_1 = \rho V,$$

si se indica con ρ el peso específico de la substancia a la temperatura del líquido. Se obtiene, como antes:

$$\frac{P_1}{P_2 - P_3} = \frac{\rho}{\rho_0}.$$

No hay que olvidar que para el cálculo de ρ hay que tomar para ρ_0 el valor que corresponde a la temperatura de la experiencia. En el caso del agua existen tablas que dan los valores de ρ_0 en función de la temperatura.

El picnómetro está *lleno* si la superficie del líquido está a la altura del trazo del tubito de enrase.

Este método requiere que durante las dos pesadas del picnómetro la temperatura haya sido la *misma*; en caso contrario debe hacerse la corrección.



Fig. 33.

12. Determinación del peso específico de los líquidos. Por el principio de Arquímedes. — Con la misma instalación indicada para la determinación del peso específico de un sólido se puede obtener, con mucha exactitud, el peso específico de un líquido. Se pesa un cuerpo primeramente en el aire, luego en el agua y por fin en el líquido de que se trata. Si son P_1 , P_2 y P_3 , respectivamente, los valores totales de las pesas correspondientes a cada una de esas determinaciones, son $P_1 - P_2$ y $P_1 - P_3$ los pesos correspondientes a volú-

menes del agua y del líquido, iguales al volumen del cuerpo sumergido y, por consiguiente:

$$\frac{P_1 - P_3}{P_1 - P_2} = \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Es claro que las temperaturas del agua y del líquido deben ser iguales.

Es cómodo usar como cuerpo o *flotador* un termómetro corto y grueso (fig. 33).

13. **Por la balanza de Mohr.** — La cruz de esta balanza (fig. 34) está dividida por incisuras prismáticas en forma *decimal*, es decir, el

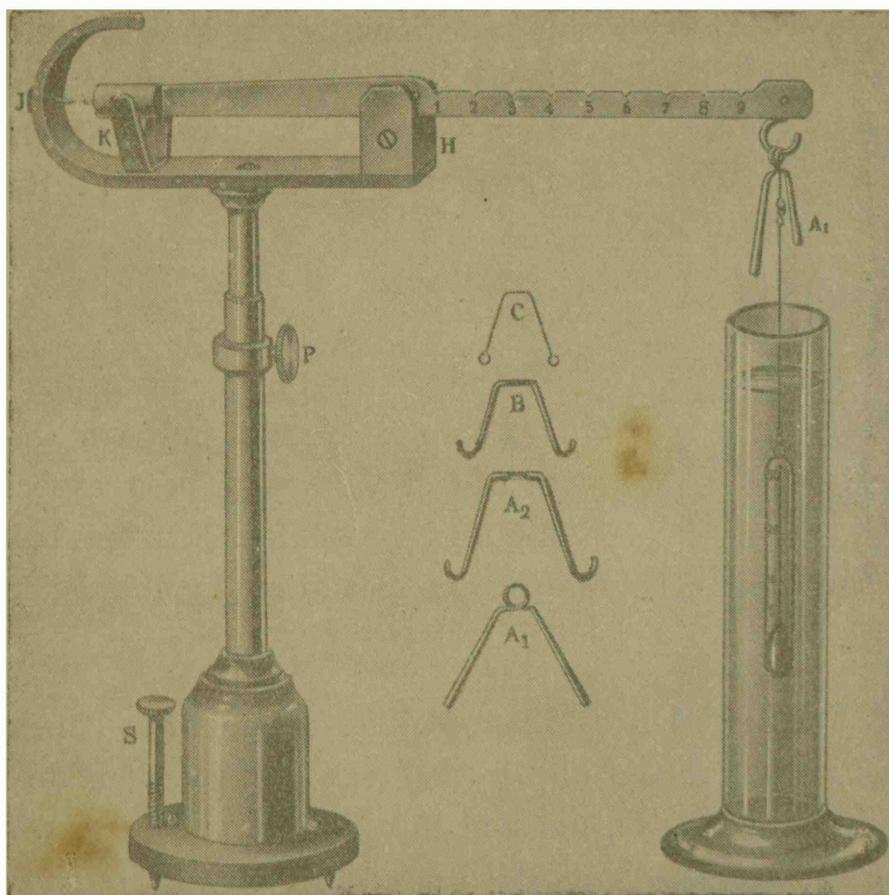


Fig. 43.

momento que cierto peso determina alrededor de la arista de *gira-*ción, supuesto aplicado en una cualquiera de las incisuras, es un número entero de décimos del momento que el mismo peso determina por su suspensión en el extremo. Si el peso está suspendido de la *incisura* 6, por ejemplo, el momento es las seis décimas partes del momento que resulta de su ubicación en el ganchito final.

Acompañan a la balanza, generalmente, cuatro caballetes, cada uno de los cuales tiene un peso igual a la décima parte del que le ante-

cede. El mayor está elegido de tal manera que, colocado en el extremo del brazo y estando el flotador en el interior de agua a 15°C, como muestra la figura, la balanza queda en equilibrio. El momento del empuje del agua sobre el flotador es igual y opuesto al momento del caballete grande. A ese momento lo elegimos como unidad. Si V es el volumen del flotador y ρ_0 el peso específico del agua a 15°C el empuje es $\rho_0 V$; empuje al que se hace corresponder el momento uno.

Si se sumerge el flotador en otro líquido, en uno más denso que el agua, por ejemplo, para establecer el equilibrio será menester utilizar varios de los caballetes, probando sucesivamente los diferentes

lugares. Resulten, por ejemplo, las posiciones que indica la figura 35; el momento tiene, según lo establecido, el valor 1,373. Si se indica con ρ el peso específico del líquido, ese momento corresponde al empuje ρV . Se obtiene

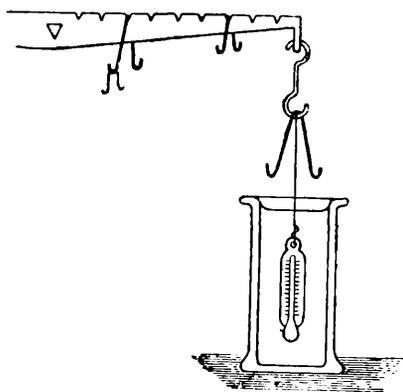


Fig. 35.

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1,373$$

por una simple proporción.

Como se ve, la balanza da directamente el valor del peso específico con algunos decimales. Existen balanzas de

este tipo, tan bien construídas, que permiten la obtención de cuatro decimales.

14. El método del picnómetro. — Este método consiste en la determinación, por medio de una balanza de precisión, de los pesos de dos volúmenes iguales, uno del líquido que se trata y el otro del agua. El picnómetro permite definir de una manera muy exacta ese volumen.

Experimentalmente, conviene proceder de la manera siguiente. Se pesa, primeramente, el frasco vacío y bien seco, luego *lleno* con el líquido, y, por fin, previos repetidos lavajes para eliminar por completo el líquido anterior, lleno de agua. Si son P_1 , P_2 y P_3 , respectivamente, los pesos encontrados, $P_2 - P_1$ es el peso del líquido y $P_3 - P_1$ el peso del mismo volumen de agua. Resulta, usando la notación de antes:

$$\frac{P_2 - P_1}{P_3 - P_1} = \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Conviene, dentro de lo posible, que las temperaturas de los dos líquidos sean iguales, a fin de que el volumen del frasco sea en ambos casos el mismo. Si esto no ocurre, es menester introducir una corrección. Para ρ_2 debe tomarse, como se ha dicho repetidas veces, el valor que corresponde a la temperatura de la experiencia.

D. — MÉTODOS PARA LA OBTENCIÓN APROXIMADA DE PESOS ESPECÍFICOS. AREÓMETROS

15. **Areómetro de Nicholson. Balanza de Jolly.**—El areómetro de Nicholson consiste en un flotador (fig. 36) provisto de dos platillos, de los cuales el superior está unido al cuerpo de aquél por una varillita cilíndrica que lleva un trazo horizontal e , que constituye la línea de enrase. Se utiliza como medio de flotación, en general, el agua.

El peso específico de un cuerpo se determina con este aparato de la siguiente manera: colocando cargas en el platillo superior se obtiene el enrase, esto es, que el nivel del agua coincida con el trazo e . Esto se realiza, una vez, colocando únicamente pesas cuya suma sea P_1 , otra vez, colocando el cuerpo y agregando pesas cuyo valor total sea P_2 , y, por fin, situando previamente al cuerpo en el platillo inferior, colocando únicamente pesas de valor P_3 .

El peso del cuerpo es $P_1 - P_2$, y el empuje que sufre en el seno del líquido y que da su volumen es $P_3 - P_2$. Resulta, procediendo como en los números anteriores:

$$\frac{P_1 - P_2}{P_3 - P_2} = \frac{\rho}{\rho_0}.$$

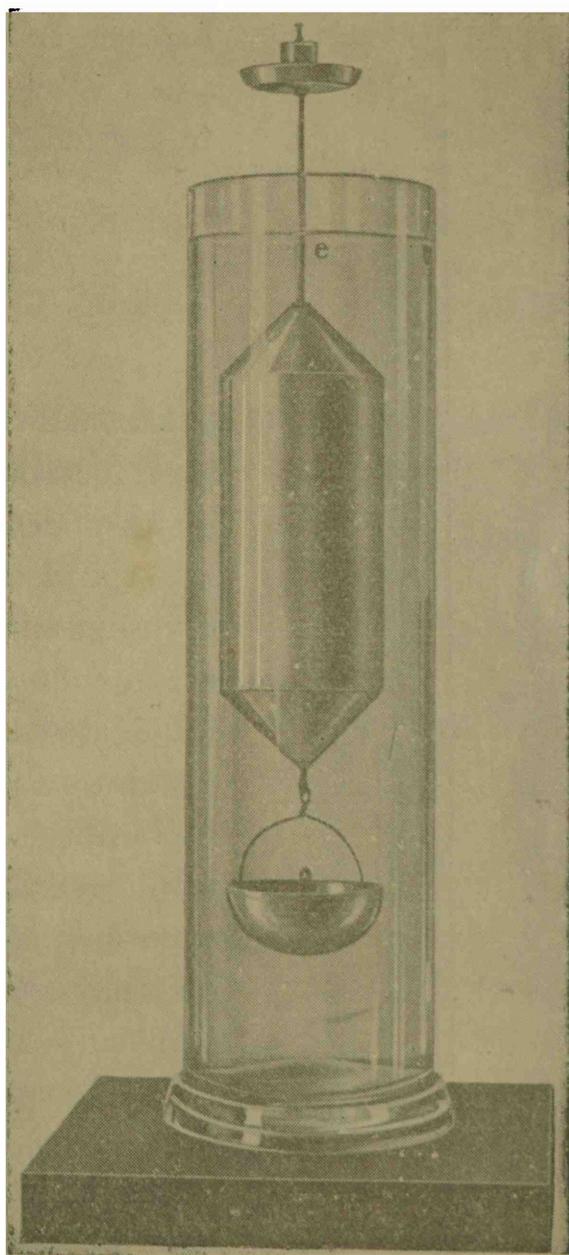


Fig. 36.

Este método, usado comúnmente en las explotaciones, sólo da valores aproximados y, por lo tanto, puede ponerse, cualquiera sea la temperatura, $\rho_0 = 1$, si se trata de agua dulce.

Este mismo instrumento puede utilizarse para comparar el peso específico de un líquido cualquiera con el del agua. Para esto es necesario conocer el peso P' del aerómetro y determinar las sobrecargas P_1 y P_2 que son necesarias para producir el enrace en el seno del agua y del líquido, respectivamente. Los volúmenes desalojados son, en ambos casos, iguales y sus respectivos pesos $P' + P_1$ y $P' + P_2$ de modo que resulta para la relación buscada:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{P' + P_2}{P' + P_1}.$$

La balanza de Jolly consiste (fig. 37) en una espiral metálica de la que penden dos platillos, uno de los cuales se mantiene siempre dentro del agua. La espiral está suspendida delante de una regla dividida en milímetros, que se mantiene vertical accionando los tornillos del trípode que la sostiene. Parte del ancho de la regla, y en toda su longitud, está recubierta por un espejo que permite leer la posición sobre aquélla, de un hilo horizontal delgado que llevan los montantes del platillo superior. Si se mira en dirección a la línea que determina el hilo y su imagen, se observa normalmente a la regla y se elimina la paralaje.

Para determinar el peso específico de un cuerpo se puede proceder exactamente como con el aerómetro de Nicholson, por medio de tres pesadas, llevando con el auxilio de pesas, a coincidencia, en todas ellas, el hilo horizontal con la misma división de la regla.

Más sencillo es proceder teniendo presente que, con mucha aproximación, el alargamiento de la espiral es proporcional al peso que la tiende.

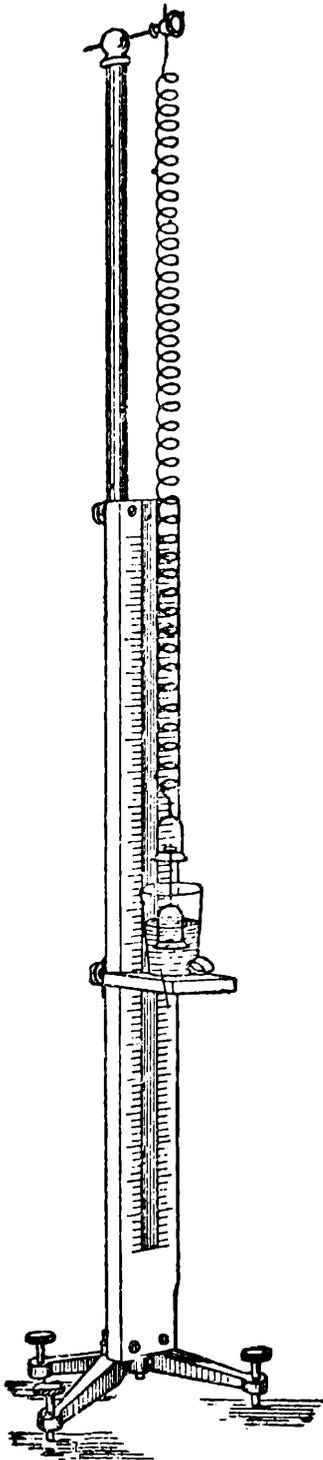


Fig. 37

Si h_1 es el alargamiento que experimenta la espiral cuando el cuerpo está en el platillo superior, puede escribirse su peso P :

$$P = c h_1, \quad [19]$$

si c es la constante de proporcionalidad entre los pesos y los alargamientos.

Si h_2 es el alargamiento que se observa situando el cuerpo en el platillo inferior, el peso aparente P' del cuerpo es:

$$P' = c h_2. \quad [20]$$

El empuje tiene el valor:

$$P - P' = c (h_1 - h_2) \quad [21]$$

y por lo tanto:

$$\frac{P}{P - P'} = \frac{h_1}{h_1 - h_2} = \frac{\rho}{\rho_0}. \quad [22]$$

16. Areómetros a escala. — Los areómetros a escala permiten determinar rápida y aproximadamente el peso específico de los líquidos.

Consisten, en general (figs. 38 *a* y *b*), en un flotador de vidrio que se prolonga hacia arriba por un tubo cilíndrico delgado. Terminan, en su parte inferior, en una ampollita que contiene una pequeña cantidad de mercurio o algunas municiones de plomo, con lo que se asegura la flotación en la posición que podemos llamar vertical.

La cantidad de lastre se regula de modo que el areómetro se sumerja hasta el nacimiento del tubo cilíndrico o hasta la proximidad de su terminación, según que esté destinado a líquidos menos o más densos que el agua.

Estos instrumentos no se fundan en la comparación de los pesos de volúmenes iguales de líquidos diferentes, sino en la comparación de los volúmenes de pesos iguales idénticos al del areómetro. La escala de que están provistos se traza, en las construcciones racionales, teniendo presente que los volúmenes de pesos iguales de diferentes sustancias están en razón inversa de sus pesos específicos, o, lo que es lo mismo, de sus densidades.

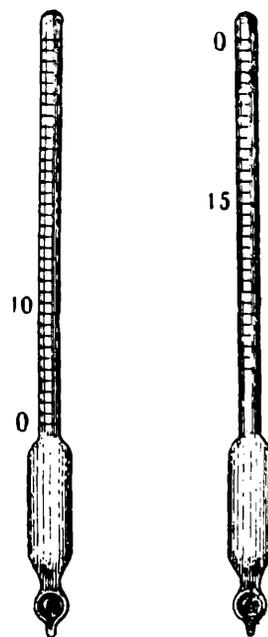


Fig. 38 *a* y *b*.

VOLUMENÓMETRO DE GAY LUSSAC.—Indiquemos con V el volumen del areómetro hasta la línea que se sumerge en agua destilada, y supongamos que el tubo cilíndrico ha sido provisto de una escala tal que dos trazos consecutivos cualesquiera limiten un mismo volumen que sea cierta fracción $\frac{1}{N}$ del volumen V . El volumen comprendido entre dos divisiones de la escala será, según eso, $\frac{V}{N}$.

Puesto a flotar en otro líquido, el areómetro se sumergirá, más o menos, según que aquél sea de menor o mayor densidad que el agua. Sea n el número de divisiones de la escala comprendida entre las líneas determinadas sobre el instrumento por los niveles del agua y del líquido. El volumen sumergido será ahora $V \pm n \frac{V}{N}$.

Como los pesos de los líquidos desalojados tienen en los dos casos el mismo valor, igual al peso del areómetro, sus volúmenes están en la relación antes expresada y, por consiguiente,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{V}{V \pm n \frac{V}{N}} = \frac{N}{N \pm n}, \quad [23]$$

donde ρ es el peso específico del líquido y ρ_0 el del agua, que puede considerarse, en estos métodos, igual a la unidad, cualquiera sea la temperatura.

Por lo común, se construyen estos volumenómetros de tal manera que el volumen comprendido entre dos trazos de la escala sea la centésima parte del volumen V , es decir, que N sea igual a 100. Se tiene así:

$$\rho = \frac{100}{100 \pm n}. \quad [24]$$

De acuerdo con esta relación, al trazo que coincide con el nivel del agua, mientras el instrumento flota en ella, no se le denomina 0 sino 100. La numeración debe crecer, además, hacia arriba y decrecer hacia abajo.

Si un areómetro para líquidos menos densos que el agua se sumerge, por ejemplo, hasta el trazo 125, el peso específico del líquido será

$$\rho = \frac{100}{125} = 0,800.$$

Si uno destinado a flúidos más pesados que el agua se sumerge en un líquido hasta la división 80, el peso específico de este último será

$$\rho = \frac{100}{80} = 1,250.$$

Veamos ahora como se traza, experimentalmente, una escala semejante.

Trátese de un areómetro para líquidos cuya densidad es mayor que uno, lo que significa que el lastre se ha regulado de tal modo que aquél se sumerge hasta una línea próxima a la extremidad superior. Se marca esa línea y se le pone el número 100.

Se prepara en seguida un líquido de peso específico 1,250, mezclando agua y ácido sulfúrico y utilizando una balanza de Mohr, por ejemplo. A la línea hasta la que se sumerge en un flúido de esa densidad le corresponde, como se ha visto, el número 80.

Se tienen, así, dos trazos de la escala. Como el tubo es de sección constante, si se divide el espacio comprendido entre aquéllos en 20 partes iguales y se continúa la división hacia abajo, se tiene la escala antes supuesta.

De idéntica manera se procede para el caso de instrumentos destinados a líquidos menos densos que el agua. Se prepara una solución de agua y alcohol de peso específico 0,800 y a la línea que determina su superficie libre sobre el tubo del areómetro se le marca con el número 125. La división se ejecuta en forma análoga a la anterior.

A continuación se da una tabla de correspondencia entre lecturas de la escala y valores del peso específico.

Lectura en el areómetro	Peso específico	Lectura en el areómetro	Peso específico
50,00	2,00	90,90	1,1
52,63	1,9	100,00	1,00
55,55	1,8	105,26	0,95
58,82	1,7	111,11	0,90
62,50	1,6	117,64	0,85
66,66	1,5	125,00	0,80
71,43	1,4	133,33	0,75
76,92	1,3	142,85	0,70
83,33	1,2		

Más cómodo es, en realidad, marcar también los valores de los pesos específicos sobre la escala del areómetro. Si tal ocurre se le

designa con el nombre de densímetro. En la figura 39 están representadas dos escalas semejantes correspondientes a los dos casos.

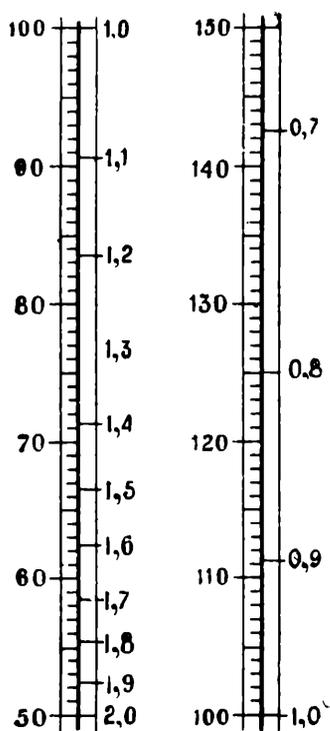


Fig. 39

17. Areómetro a escala arbitraria de Baumé. — Baumé ha dotado a sus areómetros de una escala arbitraria cuyas divisiones llevan la denominación de *grados*.

En los areómetros destinados a líquidos más livianos que el agua se fijan dos puntos de la escala como sigue.

A la línea que determina sobre la varilla del areómetro una solución de 10 partes en peso de cloruro de sodio por 90 de agua, supuesto flotando en ella, le hace corresponder la división 0° y a la línea que se obtiene de la misma manera en agua pura, la división 10°. Divide luego el intervalo en 10 partes iguales y la continúa hacia arriba hasta la división 40°.

Para los destinados a líquidos más densos que el agua fija el 0° en la línea de flotación en agua y hace corresponder los 15° a la línea de flotación en una solución de 15 partes en peso de sal común por 85 partes en peso de agua. Divide el intervalo en 15 partes iguales y continúa la división hacia abajo.

Como se ve la construcción de estos areómetros es de un grosero empirismo.

En la tabla que va a continuación se dan los valores de los pesos específicos que corresponden a los grados de Baumé:

AREÓMETROS PARA LÍQUIDOS
MÁS LIVIANOS QUE EL AGUA

Grados Baumé	Peso específico
0	—
10	1,000
20	0,933
30	0,875
40	0,824
50	0,778

AREÓMETROS PARA LÍQUIDOS
MÁS PESADOS QUE EL AGUA

Grados Baumé	Peso específico
0	1,000
10	1,077
20	1,167
30	1,273
40	1,400
50	1,555
60	1,750
70	2,000

18. Alcoholómetro de Gay Lussac. — Este areómetro (fig. 40 a) está destinado a la determinación de la riqueza alcohólica de las mezclas de alcohol y agua.

A fin de evitar confusiones, conviene establecer que como riqueza alcohólica se entiende, en las determinaciones de este alcoholómetro, el cociente entre el volumen del alcohol, supuesto alejado de la mezcla, a 15°C de temperatura y el volumen de la mezcla a la misma temperatura.

Esta aclaración es doblemente importante por cuanto la concentración puede definirse de varias maneras y porque las mezclas de alcohol y agua se contraen, es decir, tienen un volumen menor que la suma de los volúmenes de los componentes.

En la tabla adjunta se dan las proporciones en que deben mezclarse el agua y el alcohol para obtener, bajo distintas riquezas, 100 centímetros cúbicos de solución; están consignados también los pesos específicos de las mezclas así obtenidas:

Centímetros cúbicos		Peso específico
De alcohol	De agua	
100	0	0,794
90	11,94	0,834
80	22,87	0,864
70	33,14	0,891
60	43,73	0,914
50	53,745	0,935
40	63,45	0,952
30	72,72	0,966
20	81,72	0,976
10	90,72	0,987
0	100,00	1,000



Fig. 40 b. Fig. 40 a.

Pasemos ahora a la graduación del aerómetro. El peso del lastre debe ser tal que la línea de flotación en alcohol puro esté cerca del extremo superior de la varilla. A la línea así obtenida le corresponde la graduación 100.

Los puntos 90, 80, . . . , corresponden a las líneas de flotación en mezclas de riqueza 90, 80, etc., las que se obtienen determinando sus pesos específicos, con una balanza de Mohr, por ejemplo.

La distancia entre dos divisiones disminuye, como se ve en la figura 40 *b*, con la riqueza alcohólica.

Esto no obstante, se obtienen valores suficientemente aproximados subdividiendo cada intervalo en 10 partes iguales, con lo que se tiene un areómetro centesimal.

Con este instrumento puede determinarse, también, indirectamente, la riqueza alcohólica de un vino.

Las indicaciones se refieren a 15°C pero Gay Lussac ha elaborado una tabla de correcciones para corregir las determinaciones efectuadas a otras temperaturas.

E. — CORRECCIONES A LA MEDIDA DE PESOS ESPECÍFICOS

19. Reducción de las determinaciones al vacío.—En todos los métodos que anteceden, se refieran a sólidos o a líquidos, es necesario introducir una corrección debida al empuje del aire.

La llamada reducción a agua a 4°C de temperatura ya ha sido introducida al tomar para ρ_0 no el valor uno, sino el que corresponde a la temperatura de la experiencia.

Esos métodos han consistido, en todos los casos, en la comparación del peso del cuerpo con un peso de un volumen igual de agua. En la determinación de estas magnitudes es menester efectuar la corrección del empuje. *Es completamente innecesario considerar, en estos casos, el empuje sobre las pesas, pues se elimina al formar el cociente $\frac{\rho}{\rho_0}$ de los pesos específicos.*

Sea:

P , el peso aparente del cuerpo, esto es, el que se obtiene por su pesada en el aire;

V , su volumen;

P_0 , el peso aparente de un volumen igual de agua;

ρ_0 , el peso específico del agua a la temperatura de la experiencia;

λ , el peso específico del aire.

Al peso P obtenido en el aire hay que agregarle el empuje λV , con lo que resulta como peso el valor $P + \lambda V$, prescindiendo, por lo que se dijo más arriba, del empuje que experimentan las pesas. La misma cantidad λV hay que sumar a P_0 , pues si se determina su valor, como ocurre para el caso de los sólidos, por diferencia de dos pesadas, una

en el aire y otra sumergido en el agua, la pesada en el aire, y por lo tanto P_0 , debe aumentarse en λV ; lo mismo si se utiliza un picnómetro, sea en el método de los sólidos o en el de los líquidos.

Si se mide por el método de Arquímedes el peso específico de un líquido hay que sumar también a los empujes que experimenta el flotador el empuje del aire, pues sus valores se obtienen por dos pesadas una de las cuales se realiza en la atmósfera.

En todos los casos es:

$$\frac{P + \lambda V}{P_0 + \lambda V} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad [25]$$

o

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{P + \lambda V}{P_0 + \lambda V} \quad [26]$$

Además, se tiene:

$$\frac{P_0 + \lambda V}{\rho_0} = V, \quad [27]$$

puesto que $P_0 + \lambda V$ es el peso de un volumen de agua igual al volumen del cuerpo y la división por su densidad da su volumen.

De esta última relación resulta:

$$V = \frac{P_0}{\rho_0 - \lambda}, \quad [28]$$

expresión que sustituida en la [26] da, después de algunas transformaciones elementales, la fórmula:

$$\rho = \frac{P}{P_0} (\rho_0 - \lambda) + \lambda, \quad [29]$$

que permite efectuar la corrección enunciada.

En el caso de la determinación del peso específico de un líquido con el picnómetro es necesario introducir una corrección a causa de la dilatación, si las temperaturas de los líquidos — uno de los cuales es el agua — no han sido iguales. No la calculamos, puesto que es fácil, en los laboratorios, obtener las mismas temperaturas, o, lo que es más cómodo, producir el enrase a la misma temperatura y luego pesar sin preocuparse del nivel.

20. Reducción de los pesos específicos a la temperatura normal. — La fórmula [29] da el peso específico exacto del cuerpo a la temperatura de la experiencia. El valor correspondiente a otra temperatura cualquiera se obtiene teniendo presente que, en general, para intervalos no muy grandes de la temperatura, el volumen de los cuerpos varía, aproximadamente, en forma lineal con la temperatura. Por lo tanto, si el peso específico de una substancia a la temperatura t es ϱ , el peso específico ϱ' a la temperatura t' será:

$$\varrho' = \frac{\varrho}{1 + \beta (t - t')}, \quad [30]$$

donde β es el coeficiente de dilatación cúbica.

En el caso de los líquidos, particularmente, es menester, para intervalos algo grandes de la temperatura, deducir el coeficiente de dilatación cúbica de fórmulas empíricas o de tablas.

CAPITULO III

COMPRESIBILIDAD DE LOS LIQUIDOS. TRACCIONES QUE PUEDEN SOPORTAR. DEFINICION DE FLUIDO IDEAL. TENSION SUPERFICIAL Y CAPILARIDAD

A. — COMPRESIÓN Y TRACCIÓN DE LÍQUIDOS

1. **Módulo de compresión.** — La experiencia enseña que los líquidos disminuyen de volumen si se aumenta la presión que se ejerce sobre ellos.

La medida de la compresibilidad de una substancia cualquiera, sólida o líquida, está dada por la constante de proporcionalidad entre la presión uniforme que se ejerce sobre ella y la deformación producida.

Se tiene (véase tomo I, 3ª ed., pág. 355):

$$\text{Tensión} = C \cdot \text{deformación},$$

siendo la tensión, en el caso actual, la presión P uniforme ⁽¹⁾ que se ejerce sobre el líquido. La deformación se mide por la relación entre la disminución v del volumen y el volumen V inicial de la masa flúida. Se tiene, por lo tanto,

$$p = C \frac{v}{V}, \quad [1]$$

donde C es el *módulo de compresión*.

La determinación de la variación de volumen que experimenta una masa líquida por un aumento de presión ofrece una dificultad que proviene de la variación del volumen del recipiente que lo contiene.

(1) Si se prescinde del peso líquido, la presión tiene en todas partes el mismo valor. Eso puede hacerse cuando, como en este caso, las presiones son elevadas.

Para determinar con exactitud el módulo de compresión, es necesario idear una instalación en la que la deformación del recipiente sea pequeña y fácilmente determinable o nula. Esto último es lo que se consigue con el *piezómetro* (fig. 41 a). El recipiente *V* que lleva el líquido cuya compresibilidad ha de medirse, se prolonga hacia abajo en un tubo capilar que se sumerge en un baño de mercurio. El tubo *M* es un manómetro a aire comprimido.

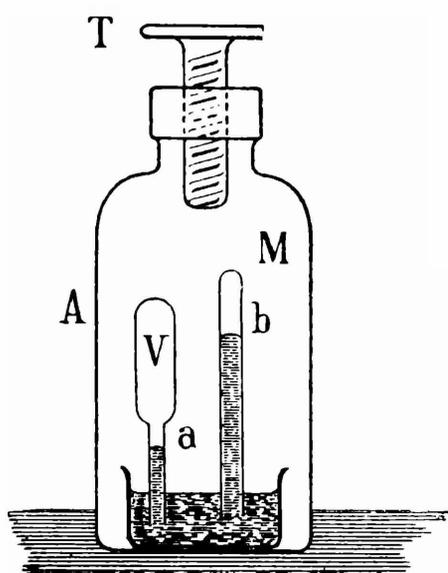


Fig. 41 a.

El recipiente *A* se llena totalmente de agua y la presión se aumenta por medio del tornillo *T*. Como la presión debe tener el mismo valor en todas partes, si se aumenta la presión en el agua del recipiente *R* aumenta también en el interior de los tubos *V* y *M* y, puesto que sus volúmenes permanecen invariados, dado que las presiones interior y exterior tienen siempre el mismo valor, debe disminuir el volumen de los flúidos que contienen, lo que se manifiesta en un ascenso de los niveles *a* y *b* del mercurio. Se ve, así, que calibrando previamente el recipiente *V* y el manómetro, se puede determinar la variación del volumen y de la presión y calcular, por lo tanto, a *C*.

Al valor inverso $\frac{1}{C}$ del módulo de compresión se le denomina *compresibilidad*.

En la figura 41 b está representado el piezómetro usado por Oersted en sus medidas. El recipiente *B* lleva el líquido cuya compresibilidad ha de determinarse; la presión se transmite por medio de una bomba *D*.

En la tabla adjunta se dan los valores de la compresibilidad de algunos líquidos en $\text{kg/cm}^2 \cdot 10^6$ para presiones comprendidas entre

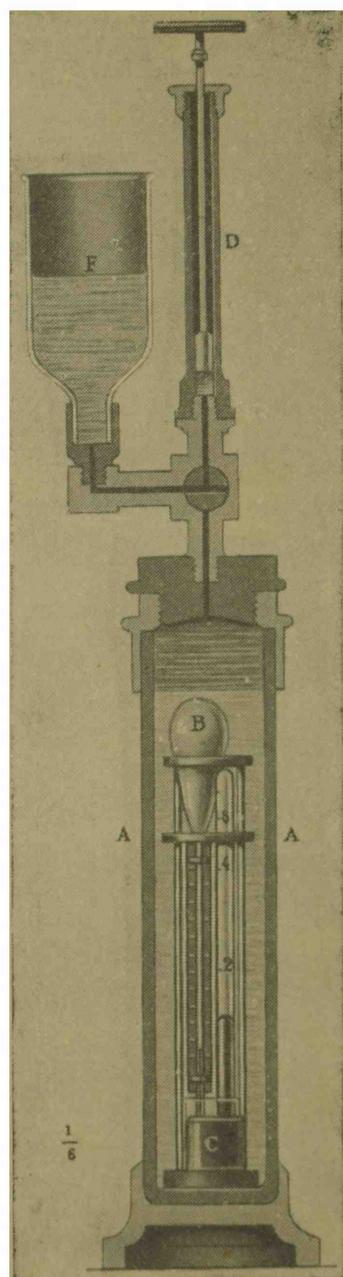


Fig. 41 b.

1 y 50 atmósferas, y a la temperatura de 18°C, pues su valor depende de la presión y de la temperatura:

Mercurio	3,9
Agua	49,0
Alcohol etílico	120,0
Alcohol metílico	12,0
Bencina	92,0
Petróleo	70 a 100
Glicerina	25,0

Si se comparan las compresibilidades de los metales con las de los líquidos, se observa que éstos son más compresibles que aquéllos. Si se aumenta la presión que soporta una masa de agua, en una atmósfera, su volumen se reduce, en números redondos en la cincuenta millonésima parte, mientras que si se trata de mercurio, la reducción es tan solo de la cuatro millonésima parte.

2. Definición de fluido ideal. — Muchas sustancias cumplen la definición de fluido, establecida anteriormente, cuando se encuentran en reposo, pero no existe ninguna que lo cumpla estando en movimiento. En este caso, se pone de manifiesto la existencia de fuerzas de roce que se oponen al deslizamiento de unas partículas sobre otras, es decir, fuerzas que se oponen a los cambios de forma. Estas fuerzas tangenciales destruyen la ortogonalidad de las fuerzas que se aplican en las superficies de separación de las masas.

Un líquido cuya compresibilidad fuese nula y en el cual no apareciesen fuerzas de roce, las cuales se oponen al deslizamiento, sería un *fluido ideal*.

En su oportunidad nos ocuparemos de la definición de la fuerza de viscosidad y de su medida.

3. Tracciones que puede soportar un líquido. — Es interesante preguntar ahora si un líquido puede soportar tracciones sin que cese la continuidad de la materia. De entre los diversos experimentos realizados con ese propósito mencionaremos solamente dos.

Si un tubo como el de la figura 42 se llena completamente de mercurio bien privado de aire la columna mercurial puede alcanzar valores bastante superiores a la que corresponde a la presión atmosférica.

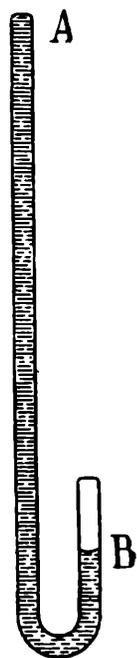


Fig. 42.

La masa de mercurio queda adherida a las paredes del tubo y, a pesar de la tracción longitudinal a que se encuentra sometida, no cesa su continuidad en ninguna parte. Si esto ocurre en algún punto, se podrá comprobar la presencia de burbujas de aire.

El profesor inglés Reynolds ha medido la tensión que puede soportar el agua, de la manera siguiente: Un tubo doblado *ACE* cerrado (fig. 43) que contiene líquido y vapor privados completamente de aire, se hace girar alrededor de un punto *O*, fijándolo previamente a una planchuela provista de un eje de rotación normal a su superficie.

Si *BD* es un arco de círculo de centro *O*, la columna líquida *ED* está sometida a una tracción proveniente de la fuerza centrífuga, que puede calcularse, si se mide, además de la distancia *OD*, la velocidad angular. El resultado es que el agua puede soportar, sin que cese su continuidad, alrededor de 5 kilogramos por centímetro cuadrado. Otro investigador, utilizando el mismo procedimiento, ha encontrado que el alcohol puede soportar alrededor de 8 kilogramos por centímetro cuadrado.

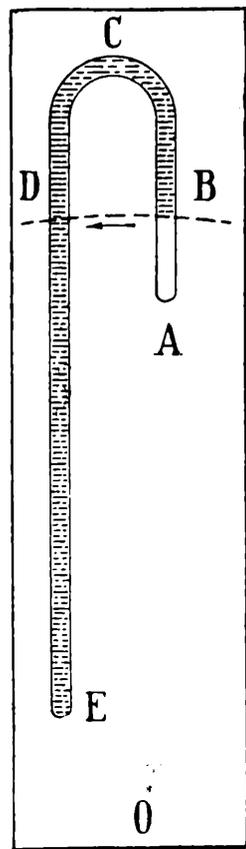


Fig. 43.

B. — TENSIÓN SUPERFICIAL. CAPILARIDAD

4. La tensión superficial. — La experiencia enseña que la superficie de los líquidos se encuentra en un estado de tensión semejante al de las membranas elásticas ordinarias extendidas. En la superficie libre de un líquido, agua, por ejemplo, se pueden hacer sobrenadar cuerpos de masa pequeña, de densidad mucho mayor que la del fluido, tales como agujas, anillos metálicos muy livianos, etc. Estos cuerpos son mantenidos por la superficie del líquido de la misma manera que una membrana elástica tendida sostiene pesos de consideración; la membrana cede en los lugares en que se apoyan aquéllos; pero su tensión los mantiene.

Debido a este mismo fenómeno algunos insectos pueden descansar (fig. 44) sobre un líquido sin sumergirse. Sus patas deforman la capa superficial que se mantiene, esto no obstante, intacta.

Una pompa de jabón (fig. 45) se contrae expulsando el aire de su interior de la misma manera que lo hace un globito de goma.

La analogía indicada puede ponerse de manifiesto de una manera muy interesante mostrando que la forma que adquiere una membrana delgada de goma tendida en un marco circular (fig. 46), bajo la acción

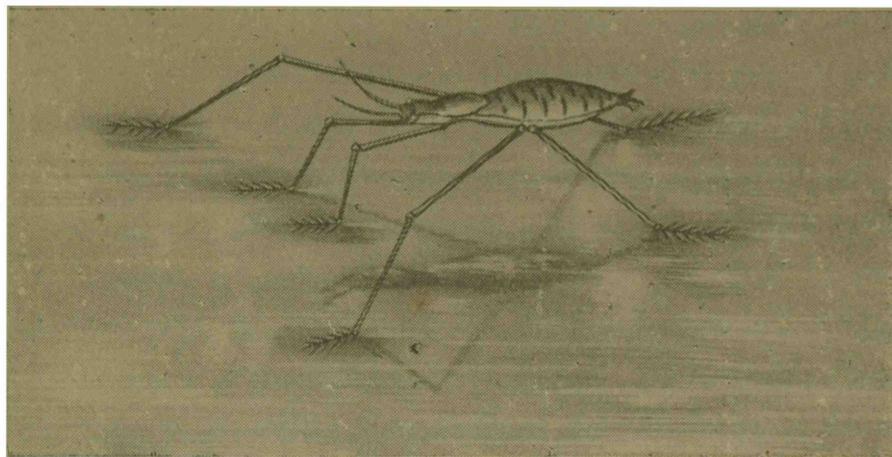


Fig. 44.

de una carga líquida, agua, por ejemplo, que se va agregando paulatinamente, es exactamente igual a la de una gota que pende de un tubo circular del mismo diámetro que el del marco antes mencionado.

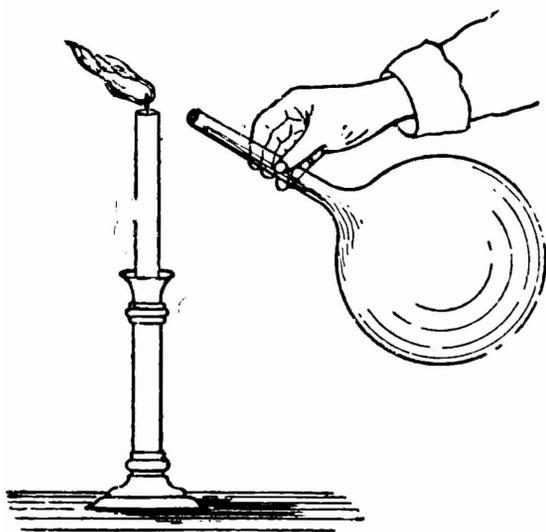


Fig. 45.

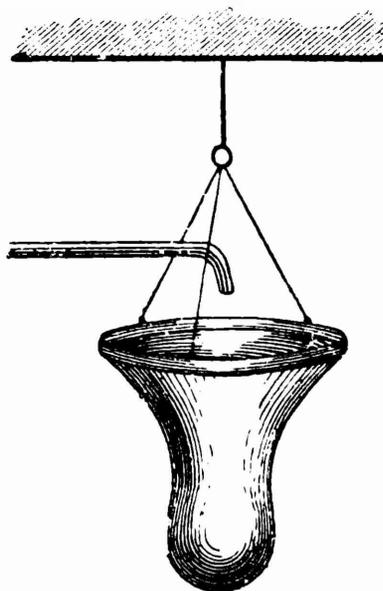


Fig. 46.

5. Definición de la tensión superficial. Diferencia entre la tensión superficial de un líquido y la de una membrana elástica ordinaria. — Supongamos que se tiene un armazón rectangular metálico *abcd* (fig. 47), formado por dobladuras sucesivas de un alambre. Lleve, además, un trozo rectilíneo *ef*, movable, del mismo material, provisto de un resorte que lo vincula al rectángulo, en la forma que muestra la figura.

Sumergiéndolo en una solución de agua y jabón ⁽¹⁾, se recubre de una delgada lámina líquida. Si se destruye ésta en la región rectangular $efcd$, se observa que el tramo movable ef se desplaza hacia arriba, lo que prueba que la lámina líquida ejerce una tracción en ese sentido, que proviene de la existencia de la tensión superficial.

Esa tensión, que representaremos con la letra T , tiene según enseña la experiencia, el mismo valor en todas las direcciones; la tracción sobre el cilindro metálico ef proviene de las tensiones que le aplica la membrana flúida de uno y otro lado.

La posición de equilibrio se alcanza cuando la tensión F del resorte es igual y de sentido contrario que la suma de las tensiones T aplicadas sobre ef . Si se indica con l la longitud de este trozo movable, se tiene:

$$F = 2 T \cdot l, \quad [2]$$

pues $2 T$ es la fuerza total aplicada sobre cada unidad de longitud.

Una diferencia esencial entre las láminas líquidas y las membranas elásticas ordinarias es que, mientras en éstas la tensión aumenta a medida que se extienden, en aquéllas queda invariada. Si la lámina $abef$ fuese de goma — y estuviese libre lateralmente — habría que aumentar continuamente el valor de F para incrementar su extensión. En cambio, si se trata, como en el dibujo, de una membrana flúida, se observa que si se substituye — por comodidad experimental — el resorte por un peso p (fig. 48) que sea la medida de la tracción F , cualquiera sea la posición de ef sobre el marco rectangular, el sistema permanece en equilibrio lo que prueba que la tensión de la lámina flúida tiene siempre el mismo valor.

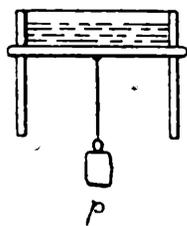


Fig. 48.

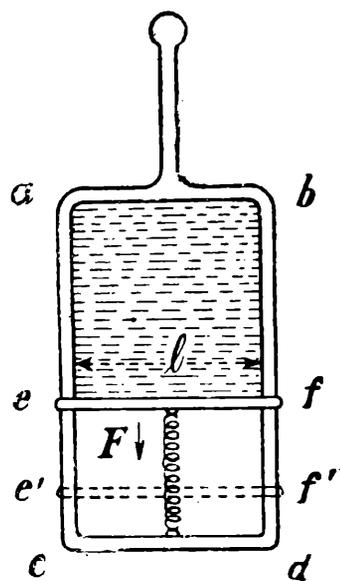


Fig. 47.

Estos hechos se pueden enunciar también diciendo que la tensión de una membrana elástica ordinaria aumenta a medida que su espe-

(1) Conviene usar la solución de Plateau, que se compone mezclando dos volúmenes de glicerina y tres volúmenes de una solución de jabón de Marsella en 40 veces su peso de agua destilada.

sor disminuye, mientras que en una membrana líquida la tensión es independiente del espesor. Esto se pone de manifiesto, de una manera categórica, como sigue: si se forma una membrana líquida en un aro plano, por ejemplo, y se sitúa de modo que su superficie quede vertical, el líquido corre hacia abajo; la membrana se hace más gruesa abajo que arriba y, no obstante, se mantiene en equilibrio, lo que prueba que la tensión tiene el mismo valor en todas partes.

La diferencia de los espesores de los lugares mencionados se pone de manifiesto por la aparición, en regiones de muy pequeño espesor, de franjas de interferencia.

La independencia de la tensión con el espesor se verifica dentro de grandes límites y hasta espesores que no sean inferiores a la diez millonésima parte de un centímetro.

La dimensión de la tensión T es la de una fuerza sobre una longitud y, por consiguiente, su dimensión es:

$$[T] = MT^{-2}$$

o en el sistema $C G S$,

$$[T] = gr \cdot seg^{-2} .$$

6. Energía potencial proveniente de la existencia de la tensión superficial. — Si se desplaza el alambre movable hasta la posición ef' , el trabajo \mathcal{T} gastado por la fuerza exterior, es $F \cdot ee'$. La tensión superficial hace un trabajo igual y de sentido contrario, expresado por el producto $2 T \cdot l \cdot ee'$, o, en otras palabras, aquel trabajo es igual al que es menester para aumentar la extensión de la superficie de la lámina flúida y queda almacenada en ésta en forma de energía potencial.

Se tiene, por lo que antecede:

$$\mathcal{T} = F \cdot ee' = 2 T \cdot l \cdot ee' . \quad [3]$$

Como $2l \cdot ee'$ es el aumento de superficie, puesto que hay que sumar los incrementos correspondientes a las dos caras, resulta que la tensión superficial T es igual al aumento que experimenta la energía potencial de la lámina cuando su superficie aumenta su extensión en una unidad, o dado que la tensión tiene el mismo valor en todas partes, *la tensión superficial es igual a la energía potencial de cada unidad de superficie.*

7. Consecuencias que se deducen por el principio del mínimo de la energía potencial para la posición de equilibrio. Figuras de equilibrio. — Gauss, a quien se deben las consideraciones y el resultado del número precedente, ha sido el primero en deducir, de la condición de mínimo de la energía potencial para el caso de equilibrio, la forma de la superficie de masas flúidas.

Si la masa líquida es tan pequeña que se pueda despreciar la energía potencial debida a la gravitación, su forma debe ser tal que la energía de superficie o, lo que es lo mismo, que la extensión de ésta sea la menor posible.

Si en una membrana líquida, mantenida por un marco de alambre, por ejemplo (fig. 49), se sitúa un pequeño lazo de hilo delgado de coser, quedará en la posición inicial, mientras la lámina líquida se

continúe en su interior. Si se destruye, en cambio, en la región encerrada por el lazo, éste toma la forma que corresponde al área máxima (fig. 50), es decir, se convierte en un círculo, pues así el área restante, que es la de la película, tiene el menor valor posible. Esta experiencia prueba lo que ya dijimos más arriba: de que la tensión tiene el mismo valor en todas las direcciones.

De la misma manera puede explicarse también por qué, gotas líquidas muy pequeñas situadas sobre superficies que no mojan, toman forma esférica, mientras que gotas grandes adquieren una forma achatada.

En el primer caso, la energía de gravitación puede despreciarse con respecto a la energía de superficie. La forma de equilibrio será aquella para la cual la superficie tenga el valor mínimo, esto es, la esférica.

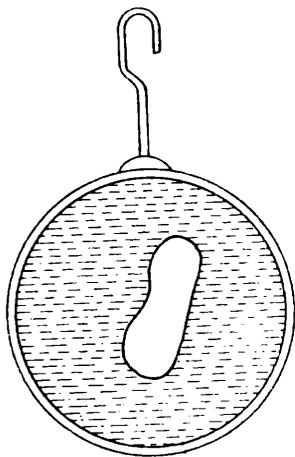


Fig. 49.

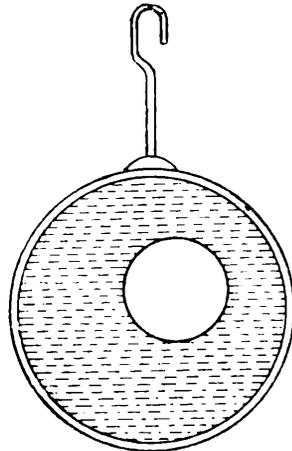


Fig. 50.

continúe en su interior. Si se destruye, en cambio, en la región encerrada por el lazo, éste toma la forma que corresponde al área máxima (fig. 50), es decir, se convierte en un círculo, pues así el área restante, que es la de la película, tiene el menor valor posible. Esta experiencia prueba lo que ya dijimos más arriba: de que la tensión tiene el mismo valor en todas las direcciones.

De la misma manera puede explicarse también por qué, gotas líquidas muy pequeñas situadas sobre superficies que no mojan, toman forma esférica, mientras que gotas grandes adquieren una forma achatada.

En el primer caso, la energía de gravitación puede despreciarse con respecto a la energía de superficie. La forma de equilibrio será aquella para la cual la superficie tenga el valor mínimo, esto es, la esférica.

Si se supone a la masa flúida formando una esfera de radio r , la energía de superficie es:

$$4 \pi r^2 T ,$$

mientras que la energía potencial de gravitación es, midiéndola a partir desde la superficie de apoyo,

$$\frac{2}{3} \pi r^3 \rho ,$$

si ρ es el peso específico del líquido.

La energía de gravitación es despreciable respecto a la de superficie, si la última expresión es muy pequeña con respecto a la primera, es decir, si r es muy pequeño en relación a $\frac{T}{\rho}$.

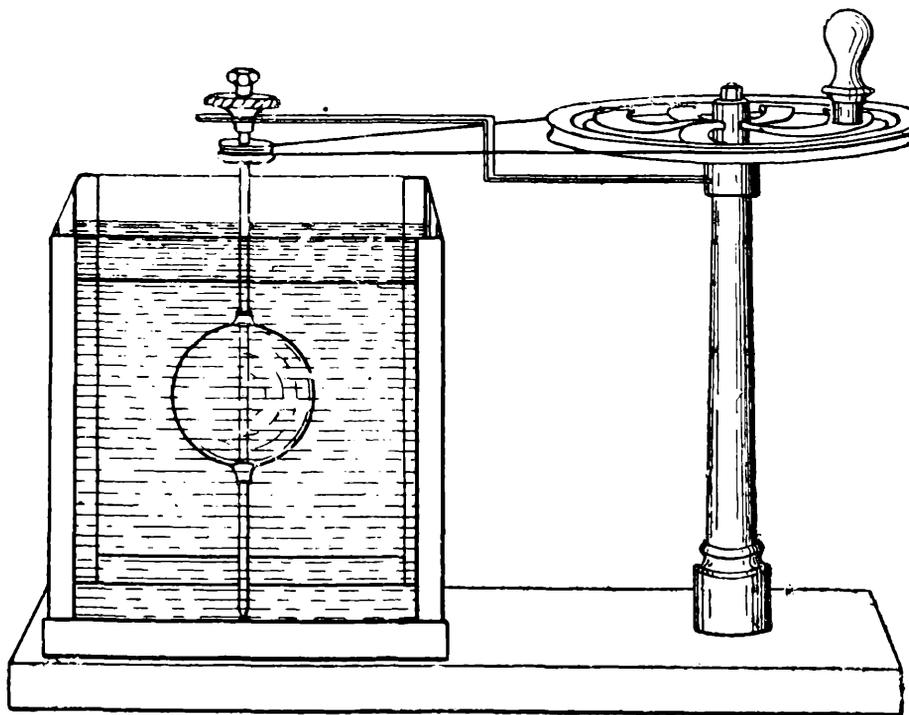


Fig. 51.

Si ocurre el caso contrario, la energía de superficie es pequeña con respecto a la de gravitación y, por lo tanto, la figura de la masa flúida debe ser tal que el centro de gravedad está más bajo que lo que estaría supuesta la forma esférica. Es decir, la masa se achata aun cuando esto significa un aumento de la energía potencial de superficie.

Particularmente interesante es la experiencia de Plateau. Una masa de aceite situada en el seno de una mezcla de alcohol y agua de su misma densidad, no está sometida a fuerzas exteriores, pues el

empuje que recibe hacia arriba es igual a su peso. A un desplazamiento vertical no corresponde, según eso, ningún trabajo y, por lo tanto, ninguna variación de energía potencial. El cambio de su energía puede consistir, únicamente, en una variación de su energía de superficie. La figura de equilibrio será aquella para la cual esa energía sea mínima o, lo que es lo mismo, la forma a la que corresponde la menor superficie, que es la esférica.

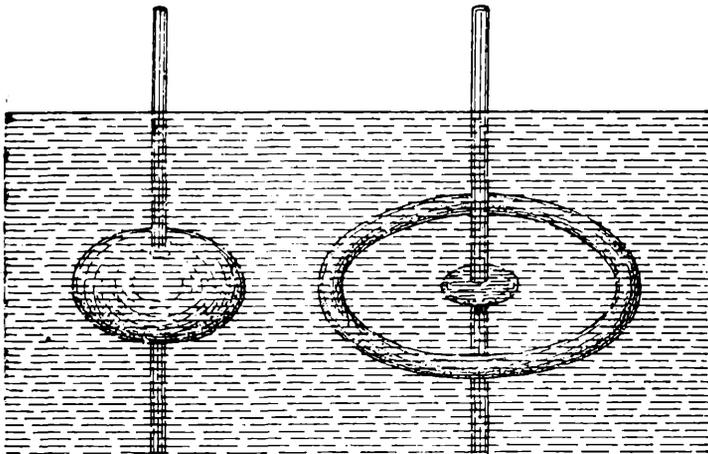


Fig. 52.

Si se dota a la masa esférica de aceite de un eje de rotación (fig. 51), la gota se convierte en un elipsoide achatado de revolución. Por la gi- ración se entrega la ener- gía necesaria al aumen- to de su superficie.

Si se aumenta conti- nuamente la velocidad angular, el elipsoide se achata más y más, hasta que la masa de aceite se desprende, constituyendo (fig. 52) un anillo cuyo eje de simetría y de giro es el eje primitivo de rotación. Si se aumenta más la velocidad, se disgrega en pequeñas gotas.

Este experimento se utiliza para explicar el achatamiento de los cuerpos celestes y la formación de los anillos de Saturno.

Si se aumenta conti- nuamente la velocidad angular, el elipsoide se achata más y más, hasta que la masa de aceite se desprende, constituyendo (fig. 52) un anillo cuyo eje de simetría y de giro es el eje primitivo de rotación. Si se aumenta más la velocidad, se disgrega en pequeñas gotas.

8. Extensión de un líquido sobre la superficie de otro. — Si

se vierte una pequeña cantidad de un líquido sobre la superficie libre de otro, ocurre, generalmente, que se extiende sobre ella, como sucede, por ejemplo, con petróleo o aceite sobre agua.

Se trata en realidad del problema de la concurrencia de tres flúidos — pues el aire debe computarse, — mejor dicho, de tres superficies de separación.

Consideremos el caso de tres flúidos cualesquiera representados en la figura 53 por las zonas marcadas con las letras *a*, *b* y *c*.

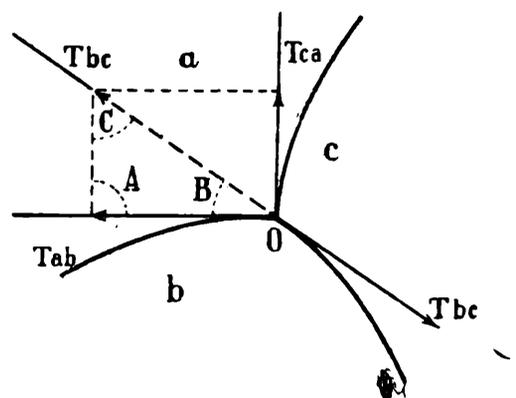


Fig. 53.

Estudiemos el equilibrio en el corte que representa el dibujo; las líneas llenas rectas son las tangentes trazadas a las superficies de contacto por el punto O de concurrencia. Las tensiones superficiales, que indicaremos con T_{ab} , T_{bc} y T_{ca} , tienen en ese punto, esas mismas direcciones.

De acuerdo con la regla del paralelogramo, si esas tres superficies de separación, concurrentes en un punto, están en equilibrio, una cualesquiera de las tensiones debe ser igual y opuesta a la diagonal del paralelogramo construido sobre las otras dos.

Los ángulos comprendidos entre las superficies quedan definidos por las tensiones, pues se tiene:

$$\frac{T_{ab}}{\text{sen } C} = \frac{T_{bc}}{\text{sen } A} = \frac{T_{ca}}{\text{sen } B}, \quad [4]$$

donde A , B , y C son los ángulos suplementarios de aquéllos.

Es claro que la concurrencia de los tres flúidos en un punto es siempre posible si cada una de las tres tensiones es menor que la suma de las otras dos, pues existirán en ese caso tres ángulos A , B , C tales que sean los vértices de un triángulo cuyos lados son las tensiones T_{ab} , T_{bc} y T_{ca} . Los líquidos se moverán hasta que las superficies de contacto formen los ángulos suplementarios de A , B y C .

Si, en cambio, una cualquiera de las tensiones es mayor que la suma de las otras dos, la construcción de un triángulo semejante no es posible. Esto significa que los tres flúidos no pueden concurrir en un punto; uno de ellos se extenderá sobre el otro.

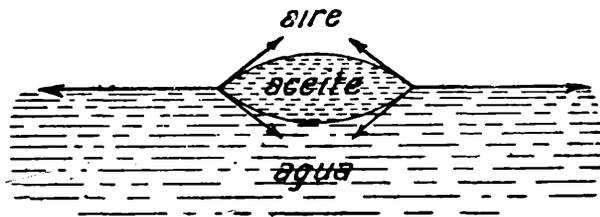


Fig. 54.

Esto sucede, como ya se dijo, en el caso de aceite sobre agua (fig. 54), pues la tensión del agua con respecto al aire es mayor que la suma de las tensiones del aceite con respecto al aire y del agua con respecto al primero.

9. Tensión de la superficie de separación de un flúido y de un sólido. Ángulo de contacto. — La experiencia muestra la existencia de una tensión en la superficie de un flúido en contacto con un sólido. Si un líquido está en contacto con una pared sólida, su nivel, en las proximidades de aquélla, no es horizontal, sino que adquiere

re curvaturas que dependen de la naturaleza de los cuerpos, ofreciendo aspectos tales como los representados en las figuras 55 y 56.

Las tensiones en las superficies de separación de los tres cuerpos: aire (puede muy bien ser el vacío), líquido y sólido, tienen en los cortes representados en las figuras, las direcciones de las tangentes

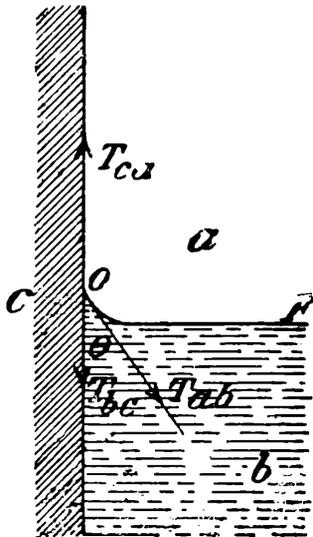


Fig. 55.

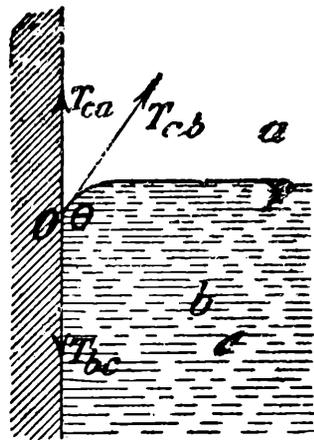


Fig. 56.

trazadas desde el punto *O de concurrencia*. Los ángulos comprendidos entre esas direcciones quedan definidos, lo mismo que en el caso de los tres flúidos, por las magnitudes de las tensiones. En particular el ángulo Θ , que forma la tangente al líquido con la pared, queda, también, unívocamente determinado por las tres tensiones; se le denomina *ángulo de contacto*.

En la posición de equilibrio debe ser, por la regla del paralelogramo,

$$T_{ca} = T_{bc} + T_{ab} \cdot \cos \theta, \quad [5]$$

fórmula que vale para los dos casos representados gráficamente, pues en el primero $\cos \theta$ es negativo y en el segundo positivo.

De la [5] resulta:

$$\cos \theta = \frac{T_{ca} - T_{bc}}{T_{ab}}, \quad [6]$$

donde se ve que si T_{ca} es mayor que T_{bc} , $\cos \theta$ es positivo y, por lo tanto, $\theta < 90^\circ$; si $T_{ca} < T_{bc}$, $\cos \theta$ es negativo y $\theta > 90^\circ$.

Un ejemplo del primer tipo lo ofrece el agua, cuyo ángulo de contacto es muy pequeño —alrededor de 3° ,— y del segundo, el mercurio, cuyo ángulo de contacto es de 140° más o menos.

Cuando $T_{ca} - T_{bc} = T_{ab}$ es $\cos \theta = 1$ y $\theta = 0^\circ$; si $T_{ca} - T_{bc} > T_{ab}$ no existe ninguna posición de equilibrio pues el valor límite de $\cos \theta$ es la unidad; el líquido asciende por la pared mojándola.

10. Ascensión de los flúidos en los tubos capilares. — Si se sumerge un tubo capilar en un líquido se observa que éste asciende o desciende en el interior de aquél, adquiriendo un nivel mayor o menor que el de la superficie libre (figs. 57 *a* y *b*).

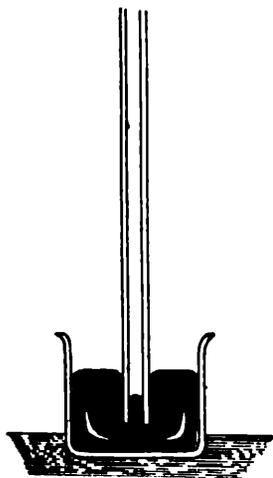


Fig. 57 *a*.

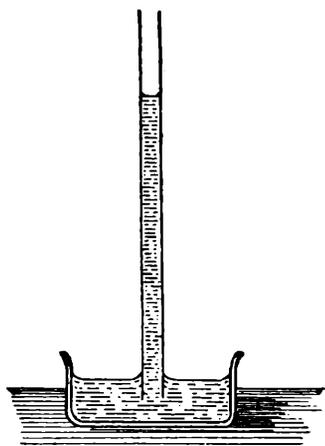


Fig. 57 *b*.

Utilizando el principio de los trabajos virtuales deduciremos la relación existente entre la altura h de la columna líquida, las tensiones superficiales T_{ba} , T_{bc} y T_{ca} y el radio r del tubo. La posición de equilibrio se caracteriza por el hecho de que para un desplazamiento virtual la energía potencial del sistema no se modifica, puesto que es un mínimo. Sea z el desplazamiento virtual producido en el sentido que muestra la figura 58.

La superficie de contacto entre el líquido y el tubo aumenta, por el desplazamiento, en la cantidad $2\pi r z$, y en esa misma cantidad disminuye la superficie de contacto con el aire. La energía potencial varía así en el importe

$$2\pi r z (T_{bc} - T_{ca}).$$

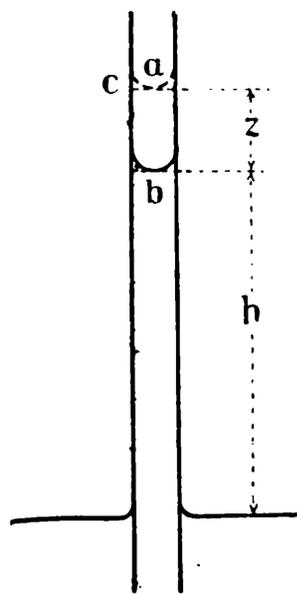


Fig. 58.

Por el ascenso del líquido, cuya densidad sea ρ , la energía de gravitación ha variado en una cantidad igual al trabajo necesario para levantar a la altura h la masa líquida $\rho \pi r^2 z$ más el trabajo

requerido para desplazar verticalmente en el camino z a la masa líquida del menisco, cuyo volumen indicaremos con v , trabajo que es igual a $\rho v z$.

Si la posición es, como suponemos, de equilibrio, la suma de esas variaciones, tomada cada una con su signo, debe ser cero. Se tiene, por lo tanto:

$$2 \pi r z (T_{ca} - T_{bc}) = \rho \pi r^2 h + \rho v z, \quad [7]$$

de donde resulta:

$$h = \frac{2 (T_{ca} - T_{bc})}{\rho r} - \frac{v}{\pi r^2}. \quad [8]$$

Si θ es el ángulo de contacto se tiene, además,

$$T_{ca} - T_{bc} = T_{ab} \cos \theta,$$

y, por consiguiente,

$$h = \frac{2 T_{ab} \cos \theta}{\rho r} - \frac{v}{\pi r^2}. \quad [9]$$

Si el menisco es pequeño puede calcularse el segundo término del segundo miembro, aproximadamente, suponiendo a su superficie de forma esférica. Su volumen será igual a la diferencia entre los volúmenes de una semiesfera y de un cilindro circular recto cuyo radio y cuya altura fuese igual al radio de aquélla. Se tiene así

$$v = \pi r^3 - \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{\pi r^3}{3}, \quad [10]$$

con lo que la [9] se convierte en:

$$h = \frac{2 T_{ab} \cos \theta}{\rho r} - \frac{r}{3}. \quad [11]$$

El último término de la derecha es, para tubos capilares, despreciable en comparación con el otro término.

Según que $\cos \theta$ sea positivo o negativo, es decir, según que sea $T_{ca} - T_{bc}$ mayor o menor que cero, el valor de h será positivo o negativo, o lo que es lo mismo, el líquido ascenderá o descenderá en el tubo con respecto a la superficie libre del líquido de la vasija. La relación [11] contiene la llamada ley de Jurín, que dice que las ascensiones o depresiones de un mismo líquido en tubos de

diferentes secciones circulares, pero pequeñas, están entre sí como la razón inversa de los radios de estas últimas."

Por el mismo procedimiento que se acaba de aplicar se deduce la altura h a que asciende o desciende un líquido entre dos láminas situadas paralelamente a la distancia d . Se obtiene, indicando con v el volumen del menisco y con l el ancho de la placas:

$$h = \frac{2 T_{ab} \cos \theta}{\rho d} - \frac{v}{d \cdot l} \quad [12]$$

Si la distancia d es pequeña puede considerarse a la superficie del menisco cilíndrica y de diámetro d . Resulta, análogamente al caso anterior:

$$v = \frac{1}{2} d^2 l - \frac{\pi}{8} d^2 l = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \right) d^2 l \quad [13]$$

y, por consiguiente:

$$\frac{v}{d \cdot l} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \right) d, \quad [14]$$

lo que muestra que el último término de la [12] puede despreciarse si d es muy pequeño.

Los desplazamientos que ejecutan pequeñas masas líquidas en el interior de tubos de secciones cónicas se realizan en el sentido en

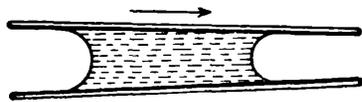


Fig. 59.

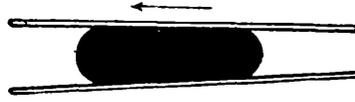


Fig. 60.

que la energía potencial de superficie disminuye, si suponemos que la energía de gravitación no se modifica, como ocurre si el eje del tubo se mantiene horizontal.

En el caso de la figura 59 el líquido se mueve hacia la derecha y en el de la figura 60 hacia la izquierda.

11. Relación entre la presión y la curvatura de las superficies de contacto. — Supongamos primeramente que se tiene una pompa de jabón de radio r y sea S su superficie y T la tensión superficial del fluido. La presión en el interior debe ser, en el estado de equilibrio, mayor que la presión exterior. Representamos con p la diferencia.

Si imaginamos un desplazamiento virtual tal que la pompa adquiriera (fig. 61) el radio $r + \Delta r$, donde Δr es una magnitud muy pequeña, la sobrepresión p hace un trabajo igual a $p.S.\Delta r$. Ese trabajo debe ser igual al incremento $4 S \frac{\Delta r}{r} . T$ de la energía que corresponde al aumento $4 S \frac{\Delta r}{r}$ de la extensión de la superficie de la capa líquida, la que, no hay que olvidarlo, tiene dos caras, de modo que hay que multiplicar por dos el incremento de una.

Se tiene, según eso,

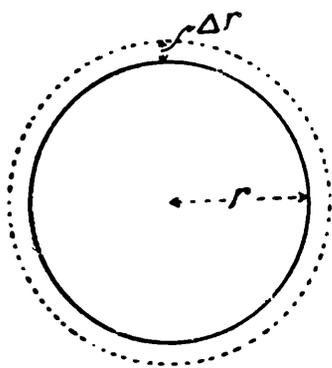


Fig. 61.

$$p \cdot S \cdot \Delta r = 4 S \frac{\Delta r}{r} T \quad [15]$$

$$p = 4 \frac{T}{r} , \quad [16]$$

relación que muestra que la sobrepresión es tanto mayor cuanto menor es el radio.

Este resultado puede comprobarse experimentalmente por medio de un dispositivo como el de la figura 62.

Estando las llaves A abierta y B cerrada se forman dos pompas de distinto radio; cerrando luego las A y abriendo la B la pompa menor se contrae y la otra se dilata más y más.

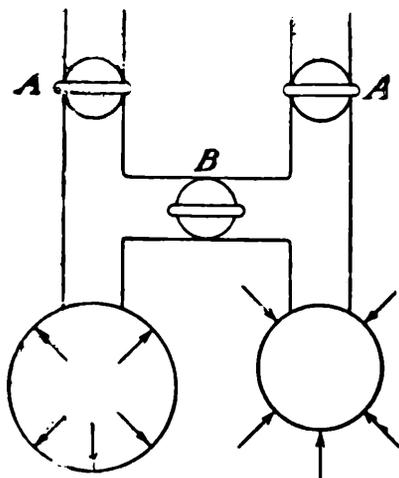


Fig. 62.

De manera semejante puede resolverse el problema en el caso en que la capa líquida tenga una forma cualquiera.

Sea (figs. 63 y 64) $ABCD$ un elemento rectangular de extensión S muy pequeña de una membrana líquida. Por la teoría de las superficies se sabe que por un punto P cualquiera se pueden hacer pasar dos líneas aa y bb ortogonales entre sí tales que las normales a las superficies en a se corten en un punto O y las normales en b en un punto O' . Las líneas aa y bb se dicen principales y a los segmentos Oa y $O'b$ de recta se los designa con el nombre de radios r_1 y r_2 de las curvaturas principales de la superficie. Los centros O y O' de las curvaturas principales pueden encontrarse del mismo lado de la superficie o uno a cada lado, como lo enseñan las anteriores figuras.

Si se imagina un desplazamiento virtual de la membrana, tal como el $z = AA' = BB'$, etc., muy pequeño, el elemento de superficie pasará de la magnitud $AB \cdot BC = S$ a la magnitud $A'B' \cdot B'C' = S'$. El

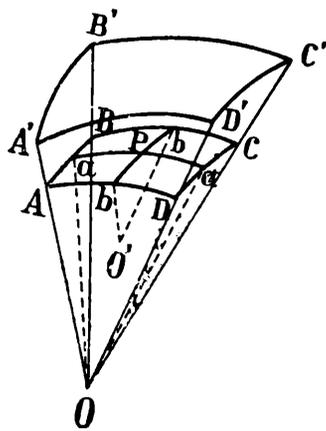


Fig. 63.

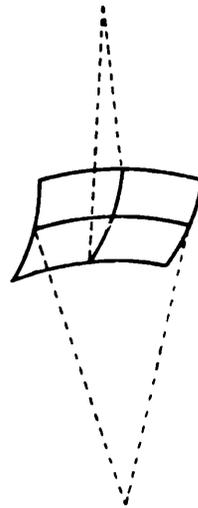


Fig. 64.

aumento $S' - S$ de la superficie puede calcularse fácilmente. En efecto, por semejanza de triángulos, teniendo presente que $OA = Oa$ es lo que llamamos r_1 , se tiene:

$$A' B' = AB \cdot \frac{OA'}{OA} = AB \frac{OA + z}{OA} = AB \left(1 + \frac{z}{r_1} \right) \quad [17]$$

y análogamente:

$$B' C' = BC \left(1 + \frac{z}{r_2} \right). \quad [18]$$

De estas relaciones resulta:

$$S' = S \left(1 + \frac{z}{r_1} \right) \left(1 + \frac{z}{r_2} \right) \quad [19]$$

o

$$S' = S \left[1 + z \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \right], \quad [20]$$

si, como suponemos, z es muy pequeño con respecto a r_1 y r_2 , en cuyo caso se puede despreciar el producto $\frac{z^2}{r_1 r_2}$.

El aumento de superficie es, por lo tanto:

$$2 Sz \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad [21]$$

pues la capa líquida tiene dos caras. El aumento de energía de superficie correspondiente a este incremento será:

$$2 S T z \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad [22]$$

aumento que debe ser igual al trabajo $p S z$ gastado por la sobre-presión p durante el desplazamiento z .

Resulta así:

$$p = 2 T \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad [23]$$

Para el caso de la figura 64 se obtiene por el mismo procedimiento

$$p = 2 T \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad [24]$$

Si la presión es igual de ambos lados debe ser:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 0 \quad [25]$$

lo que es posible cuando la lámina es plana, en cuyo caso, $r_1 = r_2 = \infty$, o en general, cuando $r_1 = -r_2$. La membrana líquida que se obtiene por un dispositivo como el de la figura 65 tiene, según esto, curvaturas principales de la misma magnitud, pero de sentido contrario.

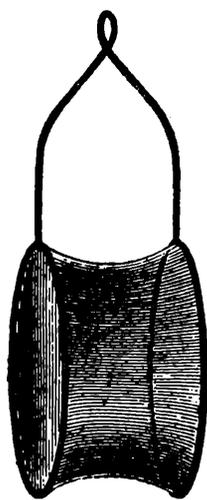


Fig. 65.

Es claro que las relaciones [23] y [24] valen también para la capa líquida que limita una porción flúida cualquiera, en cuyo caso desaparece el factor dos, pues la capa tiene una sola cara.

12. Fenómenos de atracción y de repulsión. — La tensión superficial de los líquidos da lugar a fenómenos de atracción y de repulsión entre cuerpos livianos que flotan sobre ellos, o entre cuerpos suspendidos.

Investiguemos las causas del fenómeno en ~~un~~ caso concreto. Sean (fig. 66) *A* y *B* dos láminas planas parcialmente sumergidas en un líquido, situadas paralelamente y enfrente una de la otra, a una pequeña distancia.

La placa *B* sea fija y la *A*, suspendida de dos hilos, fácilmente movable.

El líquido sube por capilaridad entre ellas hasta cierta altura h . La presión sobre la superficie libre del líquido es la atmosférica, que indicaremos con p_0 , presión que se ejerce también sobre las placas y sobre el menisco. Del lado interior de éste, en el punto P , por ejemplo, la presión es menor que p_0 , de acuerdo con el número anterior, por la existencia de una capa superficial curva, cuyas curvaturas principales son una finita y otra infinita.

Como de acuerdo con el teorema general de la hidrostática, en toda superficie horizontal de un líquido en equilibrio la presión tiene el mismo valor, sobre la línea punteada CD la presión tiene el valor p_0 de la presión atmosférica; sobre el plano horizontal EF , situado a la altura z , la presión tiene el valor $p_0 - \rho z$ si ρ es el peso específico del líquido.

La placa movable es, según eso, presionada por fuera, en todas partes, con la presión p_0 , mientras que desde adentro recibe una presión menor; la

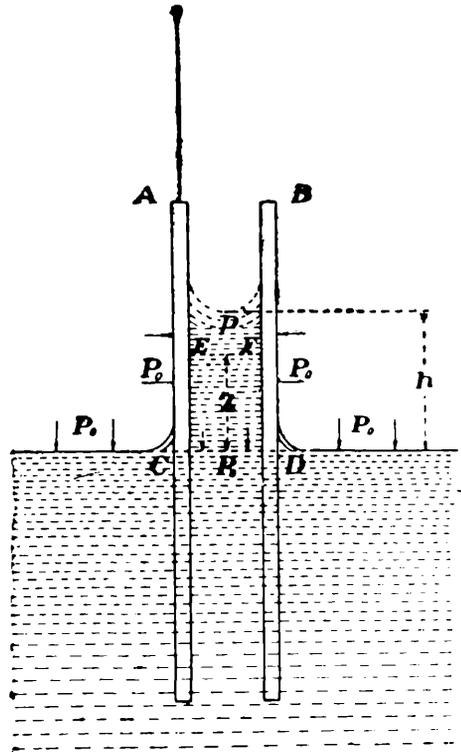


Fig. 66.

diferencia entre las presiones exterior e interior a la altura z es ρz . Si l es el ancho de las láminas, la placa A es empujada hacia la B con una fuerza:

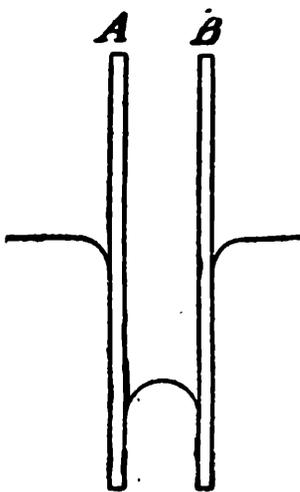


Fig. 67.

$$F = l \rho \int_0^h z dz = \frac{l \rho h^2}{2}. \quad [26]$$

Los meniscos mismos no originan ninguna fuerza que tienda a acercar o alejar entre sí a las placas, como es fácil poner en evidencia discutiendo sus condiciones de equilibrio. En forma idéntica se explica la atracción en el caso representado por la figura 67.

13. Determinación experimental de la tensión superficial y del ángulo de contacto. — A. POR LOS TUBOS CAPILARES. — Midiendo el diámetro y la altura que asciende el líquido en el interior de un tubo capilar, se puede calcular por la fórmula [9] el producto

$T \cos \theta$, donde T es la tensión de la superficie del líquido con respecto al aire, y θ el ángulo de contacto.

Si el líquido moja ⁽¹⁾ al tubo, es $\theta = 0$ y $\cos \theta = 1$; si esto no ocurre, es menester determinar experimentalmente a θ . Esto

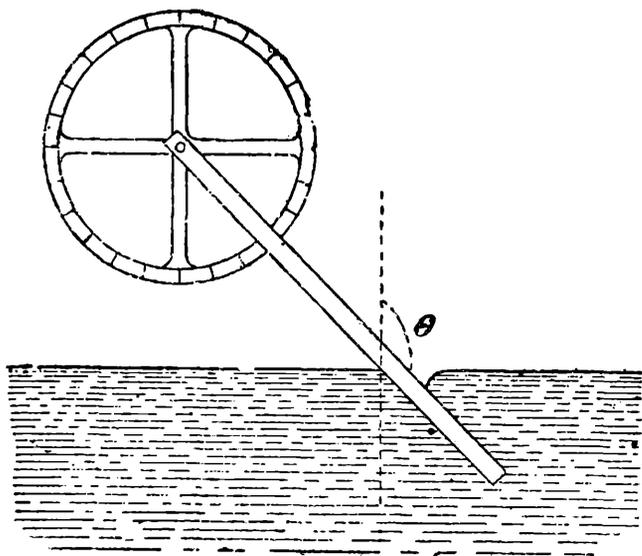


Fig. 68.

es experimentalmente a θ . Esto puede hacerse de varias maneras, de las que mencionaremos aquí la siguiente. Si se gira una placa de vidrio (fig. 68) en el seno de un líquido, el nivel de éste permanecerá horizontal hasta la inmediata proximidad de aquélla, cuando el ángulo θ que forma la placa con la vertical, sea igual al ángulo de contacto. Esto puede ob-

servarse con el auxilio de un sistema óptico o por proyección. La lectura del ángulo se realiza, cómodamente, fijando la placa a una regla que gira en el centro de un limbo.

B. POR EL PESO DE LAS GOTAS. — En el momento en que se desprende una gota (fig. 69), puede suponerse en equilibrio la tensión superficial y la presión atmosférica, dirigidas hacia arriba, con el peso de la gota y la presión en el líquido sobre la sección AB , fuerzas éstas, dirigidas hacia abajo.

Si r es el radio del tubo y T la tensión superficial, la tracción hacia arriba que ésta origina es $2 \pi r T$. La diferencia entre la presión exterior y la presión interior sobre la sección AB se puede calcular, aproximadamente, suponiendo que, en el instante en que cae, la gota es en la cercanía de la boca del tubo, cilíndrica. La diferencia bus-

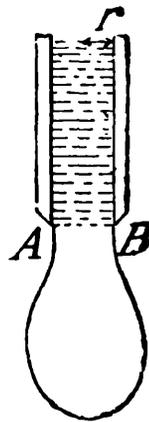


Fig. 69.

cada será, por la [23], $\frac{T}{r}$, y la fuerza que actúa, debido a esto, hacia arriba:

$$\pi r^2 \frac{T}{r} = \pi r T .$$

(1) Cuando decimos moja, significamos que el líquido asciende por la pared continuamente. En la literatura común, se entiende, con frecuencia, erróneamente, el caso del menisco cóncavo.

Si mg es el peso de la gota se tendrá, de acuerdo con lo que antecede,

$$2 \pi r T = mg + \pi r T \quad [27]$$

o

$$T = \frac{mg}{\pi r} . \quad [28]$$

Es claro que por tratarse de un proceso dinámico la fórmula anterior es tan sólo aproximada.

En las determinaciones experimentales hay que observar la manera cómo pende la gota antes de desprenderse. En el caso de la figura 70, debe tomarse el radio interior y en el de la figura 71 el exterior; los de las figuras 72 y 73 deben desecharse en las mediciones.

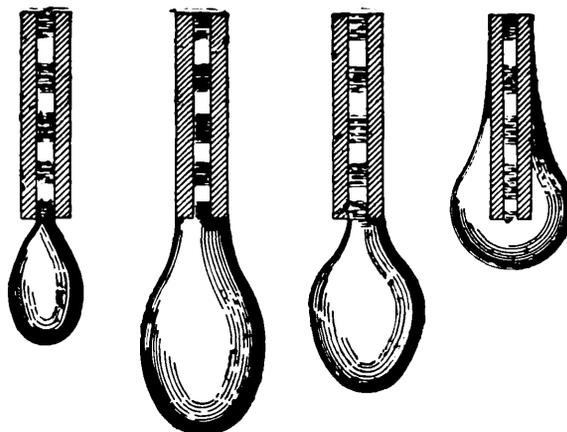


Fig. 70. Fig. 71. Fig. 72. Fig. 73.

C. POR LA MEDICIÓN DE ALTURAS EN LAS GOTAS Y BURBUJAS (QUINCKE). — La teoría de este método, debido a Quincke, es el siguiente. Supongamos que se tiene (fig. 74) una gota líquida sobre una superficie horizontal de vidrio, lo suficientemente grande como para que los radios de curvatura de las secciones horizontales sean muy grandes con respecto a los radios de curvatura de las secciones verticales, en las proximidades de los vértices EE .

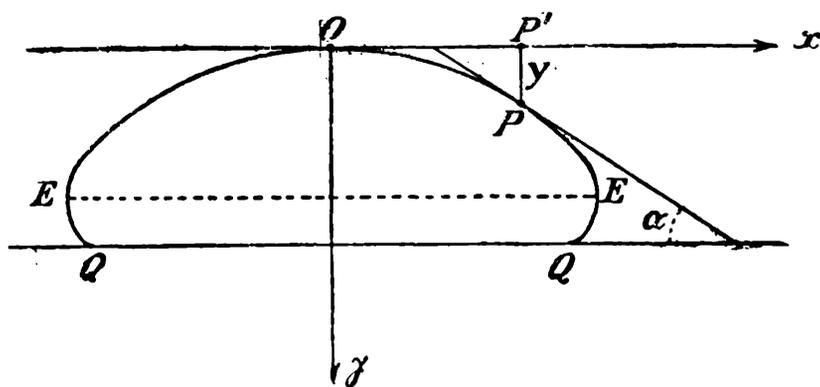


Fig. 74.

Sean Ox y Oy un sistema de ejes rectangulares de coordenadas.

La diferencia de presión entre un punto P de la superficie de la gota de ordenada y y el punto O es, según el teorema general de la hidrostática, $y \cdot \rho$, si ρ es el peso específico del líquido.

Además, la diferencia de presión entre el interior y exterior de la superficie en P , es igual a $T\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$, de acuerdo con la fórmula [23], donde r_1 y r_2 son los radios de curvatura de las secciones principales, que son, en este caso, la sección horizontal y la vertical de la gota. Si r_2 corresponde a la sección horizontal d , $\frac{1}{r_2}$ es despreciable con respecto a $\frac{1}{r_1}$ en las proximidades de los vértices, de acuerdo con lo supuesto.

Como, por otra parte, la presión exterior en P es igual a la presión en O — donde tanto en el exterior como en el interior tiene el mismo valor, por ser allí muy grandes los radios de curvatura — se tiene:

$$y \rho = \frac{T}{r_1}, \quad [29]$$

donde, repitamos, r_1 es el radio de curvatura de la sección vertical. Se lo elimina de la fórmula teniendo presente que si α es el ángulo que forma la tangente a la superficie de la gota con el eje de las x , y ds el elemento de línea de la sección $O P Q$ se tiene:

$$ds = r_1 \cdot d\alpha \quad [30]$$

por la definición de curvatura, y

$$\frac{dy}{ds} = \text{sen } \alpha. \quad [31]$$

De la [30] y [31], resulta:

$$r_1 = \frac{dy}{\text{sen } \alpha \cdot d\alpha}, \quad [32]$$

y por la [29]:

$$\rho y \cdot dy = T \cdot \text{sen } \alpha \cdot d\alpha. \quad [33]$$

Integrando esta relación y determinando la constante de integración por la condición de que para $y = 0$ es $\alpha = 0$, se obtiene:

$$y^2 = \frac{2 T}{\rho} (1 - \cos \alpha), \quad [34]$$

relación que vale únicamente en las cercanías de E .

Para los vértices EE es $\alpha = 90^\circ$, $\cos \alpha = 0$. Si se indica con h el valor de la ordenada que le corresponde, se tiene, por consiguiente:

$$h^2 = \frac{2 T}{\rho} \quad [35]$$

o

$$T = \frac{1}{2} \rho h^2, \quad [36]$$

relación con la que midiendo h se calcula en seguida la tensión T .

Para los puntos Q el ángulo α es el ángulo θ de contacto, de modo que si se indica con H la altura de la gota, se tiene:

$$H^2 = \frac{2 T}{\rho} (1 - \cos \theta) \quad [37]$$

o

$$H^2 = h^2 (1 - \cos \theta) \quad [38]$$

de donde:

$$\cos \theta = 1 - \frac{H^2}{h^2}. \quad [39]$$

Por la medida de h y H se puede calcular a T y θ .

Las mismas relaciones valen si en lugar de tener una gota sobre un vidrio horizontal, se mantiene una burbuja (fig. 75) en contacto con un líquido, situándola debajo de una lámina de vidrio en contacto con la superficie libre de aquél.

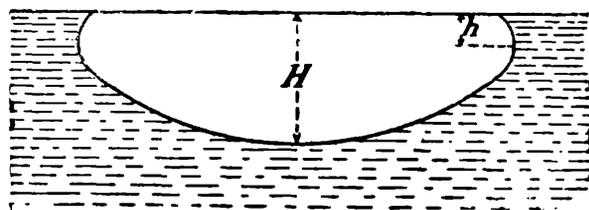


Fig. 75.

Quincke ha medido también directamente el ángulo de contacto del mercurio por el siguiente procedimiento: Colocó sobre una gota de mercurio (fig. 76) una lámina de vidrio de caras planas y paralelas, e hizo incidir, en las proximidades de la línea de contacto, un haz muy delgado FI de rayos paralelos. Parte del haz se refleja sobre la cara PP tomando la dirección IR y parte sobre la región curva de la superficie de la gota vecina a I . Este segundo haz de rayos, de intensidad muy débil, lo hacía reflejar sobre un pequeño espejito E , y, por giración conveniente de éste, hacía que el haz $E I'$ incidiese sobre la superficie PP de tal manera que se reflejara sobre ésta en la dirección $I' R'$

paralela a la IR . El ángulo θ que forma en ese momento el plano del espejo con el plano horizontal, es el ángulo de contacto.

Es claro que hay que cerciorarse si el plano del espejo es paralelo a los elementos de la superficie de la gota muy próximos a I , pues sólo así la determinación será correcta.

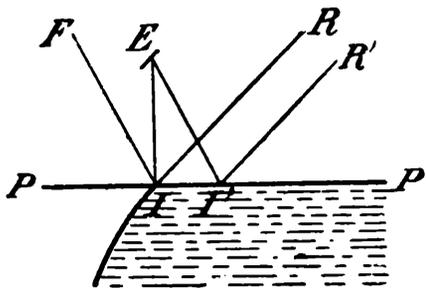


Fig. 76.

Esa comprobación es muy fácil, por cuanto el débil haz reflejado tres veces permanece visible si se gira el espejo en el sentido contrario a las agujas de un reloj, mientras que desaparece si se le gira en el otro sentido. En la posición del espejo más cercana a la desaparición del haz se cumple aquella condición.

Según medidas recientes de Palacios, el ángulo de contacto del mercurio se modifica con el tiempo, hasta alcanzar por fin un valor límite constante.

D. POR LAS ONDAS SUPERFICIALES. — La velocidad con que se propagan las ondas líquidas superficiales depende no solamente de la gravedad, sino también de la tensión superficial del líquido. Para ondas de gran amplitud predomina la acción de la gravedad; para ondas de muy pequeña amplitud desempeña, en cambio, el papel preponderante la tensión superficial.

Si se aplican en la superficie de un líquido impulsos periódicos muy débiles, se observa la aparición de ondas cortas de muy pequeña amplitud; son las ondas que corresponden a la tensión superficial.

Si se indica con λ el largo de la onda, con n el número de impulsos por segundo que se aplican, con ρ el peso específico del líquido y con T la tensión superficial, la teoría muestra que vale la relación:

$$\lambda^3 = \frac{2 \pi T}{\rho n^2}, \quad [40]$$

fórmula con la que se calcula T midiendo ρ , n y λ .

Los impulsos se producen con un diapason provisto en sus extremos de puntas muy finas. Se excita, además, la superficie del líquido no en un punto sino en dos, aprovechando las dos ramas del diapason; se forma así un sistema de ondas estacionarias que constituyen dos sistemas de hipérbolas. La recta que pasa por los dos centros de

perturbación corta esas curvas en puntos que equidistan entre sí la distancia λ .

Este método ha sido utilizado por lord Rayleigh, Matthiessen, Dorsey y Grunmach.

14. Resultados experimentales. Influencia de la temperatura. — Con los métodos que acabamos de describir y con otros de los que no nos hemos ocupado, se han determinado experimentalmente las tensiones superficiales de gran número de substancias. Damos a continuación algunos de esos valores en gramos peso por centímetro y los ángulos de contacto respectivos con el vidrio.

Substancia (en contacto con el aire)	T	θ
Mercurio	0,550	138° a 149°
Agua	0,075	Muy pequeño
Cloroformo	0,031	Cero
Benzol	0,031	—
Alcohol	0,025	—
Eter	0,018	16°

La tensión superficial disminuye si aumenta la temperatura alrededor de uno por mil por grado. Los valores anteriores se refieren a la temperatura de 15°C más o menos.

La tensión superficial guarda ciertas relaciones con el peso molecular, relaciones que mencionaremos en su oportunidad.

15. Explicación molecular de fenómenos observados en sólidos y líquidos. — La experiencia ha puesto en evidencia que la materia no llena el espacio que ocupa de una manera continua sino que está constituida por partículas muy pequeñas, a las que se las designa con el nombre de moléculas.

De la pregunta si existe un límite de divisibilidad de la materia nació la primera idea de la constitución molecular de los cuerpos. La sencillez con que se explicaron con su auxilio muchos fenómenos físicos y químicos dió lugar a que tal hipótesis fuese considerada como representando la realidad, mucho antes que se conocieran un conjunto de fenómenos, de los que nos ocuparemos en su oportunidad, y que constituyen, en esencia, pruebas objetivas de su exactitud.

La teoría aparece en la antigüedad con Demócrito, quien consideraba al átomo como el último elemento de la realidad, con cuyo conocimiento se resolverían todos los problemas de la naturaleza. Sus especulaciones eran de un orden exclusivamente metafísico.

Tampoco podía ser de otro modo, a pesar de su clara visión de las cosas, dados los datos experimentales de la época.

Para nosotros, esa metafísica que nace de la intuición y crece por la obra del razonamiento puro es la madre suprema de todos los conocimientos, como que es la fuerza interior que arrastra al hombre, tanto o más que las necesidades materiales, a investigar y descubrir los secretos de los fenómenos.

Hecha esta brevísima digresión volvamos a nuestro asunto.

La hipótesis molecular trae consigo la suposición de la existencia de *fuerzas moleculares* diferentes que las de gravitación, que mantienen la continuidad aparente de la materia.

Para explicar el comportamiento elástico de los sólidos es menester admitir que las moléculas están vinculadas unas a otras por fuerzas que se ejercitan en uno u otro sentido — atracción o repulsión —, según que una fuerza exterior aumente o disminuya la distancia entre ellas. Sin esta suposición no se podría explicar el hecho de que un sólido oponga una resistencia a ser dilatado o comprimido.

Podemos representar, groseramente, un cuerpo sólido, por un conjunto de esferas ligadas entre sí por resortes metálicos. Abandonado este sistema a sí mismo, no actuarán entre las esferas fuerzas ni de atracción ni de repulsión. Si se ejerce sobre él una tracción aparecen en seguida fuerzas de atracción; si se le comprime nacen fuerzas de repulsión.

Si la deformación no ha sido demasiado grande y se abandona el sistema a sí mismo retorna nuevamente a su configuración primitiva.

Exactamente lo mismo ocurre en un sólido cuando la deformación cae dentro de los límites de la elasticidad perfecta.

Las fuerzas que se ejercen entre moléculas de una misma sustancia se denominan de *cohesión* y las que ejercen entre las moléculas de sustancias diferentes se llaman *fuerzas de adhesión*.

Estas fuerzas se ponen de manifiesto únicamente si las moléculas están a distancias infinitamente pequeñas. En efecto, si se corta un cuerpo sólido y se ponen las partes en contacto de la mejor manera posible, no se mantienen unidas a pesar de la pequeña distancia entre los límites de uno y otro pedazo. En algunos cuerpos plásticos como manteca, cera, etc., la unión se produce presionando las por-

ciones entre sí; con el plomo ocurre lo mismo pero es menester una gran presión.

En cambio, si los cortes son de tal naturaleza que se adaptan perfectamente uno a otro, lo que significa identidad de las superficies — que para ser consideradas como tales deben estar extremadamente pulidas —, aparecen en seguida las fuerza de cohesión. Esto ocurre, por ejemplo, con los conocidos discos de vidrio bien pulidos.

Por esos motivos, repitamos, se admite que las moléculas actúan entre sí sólo a muy pequeña distancia. El límite dentro del cual es sensible la fuerza proveniente de una molécula se supone esférico y se le denomina *esfera de influencia molecular*.

En los líquidos existen también fuerzas moleculares semejantes, pues ellas resisten, como se ha visto, tanto a la compresión como a la tracción.

La diferencia esencial entre sólidos y líquidos, sobre lo que insistimos en su oportunidad, consistente en que éstos últimos no resisten como los primeros a un cambio de forma, se manifiesta molecularmente en lo siguiente: las moléculas de los sólidos tienen posiciones fijas de equilibrio estable hacia las cuales están solicitadas por fuerzas elásticas, mientras que las moléculas líquidas no poseen posiciones fijas de equilibrio; las moléculas sólidas estarán cumpliendo, en general, movimientos oscilatorios alrededor de sus posiciones de equilibrio; las de los líquidos, en cambio, ejecutan movimientos irregulares desplazándose lentamente en el seno de la masa flúida.

No continuamos con el desarrollo de estas ideas por no ser éste el momento más apropiado.

La existencia de una energía de superficie o, lo que es lo mismo, de una tensión superficial, se explica fácilmente por las fuerzas de atracción entre las moléculas.

Una molécula situada en el seno de un líquido está sometida a las fuerzas de atracción provenientes de todas las moléculas que se encuentran dentro de su esfera de influencia molecular. Si esta se encuentra, como en el caso de las moléculas *A* y *B* (fig. 77), totalmente en el interior del líquido, esas fuerzas se neutralizan unas con otras; si, en cambio, como ocurre con las moléculas *C* y *D*, la esfera de influencia corta la superficie libre, es claro que las fuerzas de atracción que ejercen sobre *C* y *D* las moléculas comprendidas dentro de la zona sombreada — de igual extensión que la zona que queda fuera del líquido y situada en posición opuesta — no son compensadas. La resultante de esas fuerzas de atracción es una

fuerza dirigida según la normal a la superficie y hacia el interior del fluido. La presión que así resulta se denomina *presión molecular*. Esta explicación se debe a Laplace.

Dentro de una capa comprendida entre la superficie libre del líquido y un plano paralelo a ella situado a una distancia igual al diámetro de la esfera de acción molecular son sensibles las fuerzas moleculares. Esa capa recibe el nombre de *capa de pasaje*.

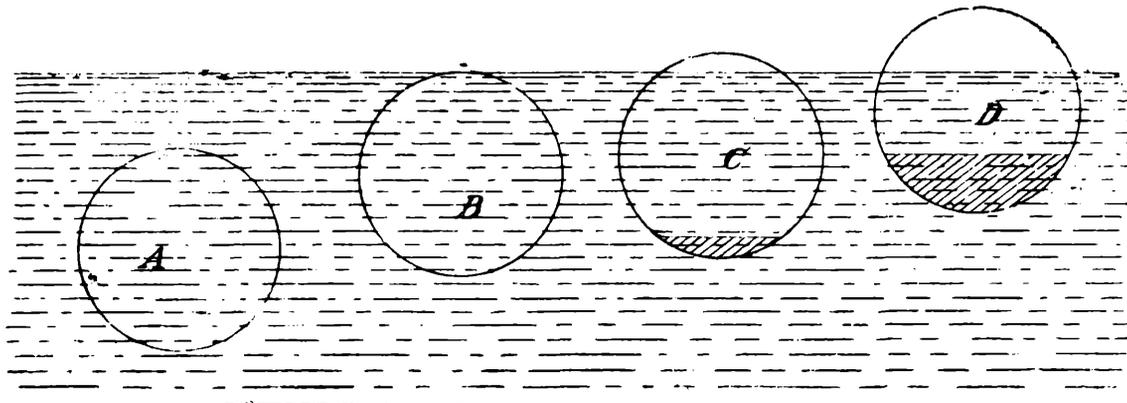


Fig. 77.

Si la superficie de un líquido aumenta, aumenta la extensión de su capa de pasaje. Moléculas que se encontraban antes en el seno del líquido, fuera de la capa, han sido trasladadas hasta distintos puntos de ella, para lo cual ha sido menester gastar un trabajo en contra de la presión molecular. Este trabajo queda almacenado en forma de energía potencial de superficie. De la existencia de esta energía resulta la existencia de una tensión superficial.

De esta explicación fluye también, en seguida, porqué la tensión de una lámina líquida no depende, dentro de grandes límites, de su espesor. Mientras éste sea mayor que el doble del diámetro de influencia molecular, es claro que el trabajo necesario para llevar una molécula desde el interior a la superficie tendrá el mismo valor; la energía potencial correspondiente a cada unidad de área tendrá un valor constante independiente del espesor y lo mismo sucederá con la tensión superficial.

Eso ha sido comprobado por Plateau midiendo la sobrepresión de pompas de jabón.

Plateau determinó también el espesor de la capa de pasaje, determinando el límite de los espesores, a partir del cual la tensión disminuye.

Además de Plateau, Reynolds, Rucker, Quincke, Lord Rayleigh y otros se han ocupado de determinar, por diferentes métodos, el espesor de la capa de pasaje o, lo que es lo mismo, el diámetro de la esfera de influencia. Su orden de magnitud resulta ser de más o menos 100 μ .

CAPITULO IV

ESTATICA DE LOS GASES

1. **Los gases son pesados. Peso específico del aire.** — En el capítulo II se ha mostrado que el principio de Arquímedes vale también en el caso de los gases, lo que constituye una prueba de que éstos son pesados.

Parece una redundancia ocuparse de esa comprobación, por cuanto todo el mundo une el concepto de materialidad al de peso, y recíprocamente. La materialidad — en el sentido común o vulgar — del aire, resulta de la observación de hechos ordinarios de la vida diaria, tales como la resistencia que opone al desplazamiento de un cuerpo y las acciones que ejerce si se encuentra en movimiento.

La idea de que los gases son pesados se remonta hasta una época lejana. Aristóteles, por ejemplo, no sólo consideraba el aire como un cuerpo pesado, sino que hasta intentó determinar experimentalmente su densidad.

Galileo, en sus *Diálogos de la nueva ciencia*, lo establece como una verdad experimental, por el hecho comprobado de que un recipiente en el cual se ha comprimido aire se hace más pesado.

En nuestros días, esa comprobación se realiza a la inversa. Se toma un balón de vidrio (fig. 78) de regulares dimensiones y se le pesa en una balanza de precisión, primeramente lleno de aire y luego de haber efectuado en él, con una bomba neumática, un vacío elevado.

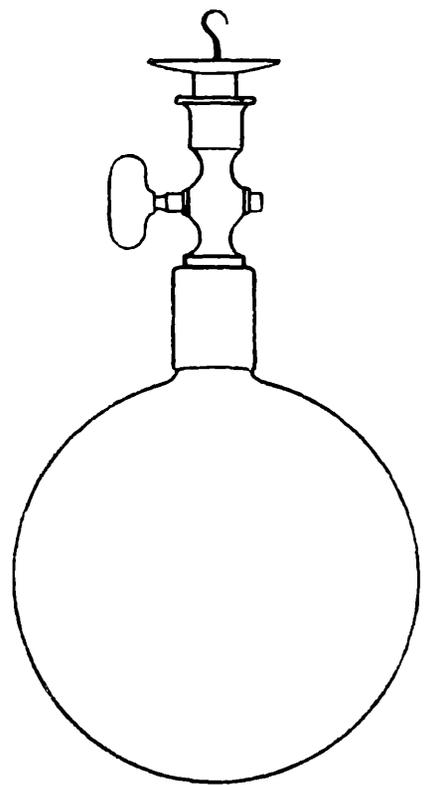


Fig. 78.

Se observa entre las dos pesadas una diferencia de peso que es igual al peso del aire extraído del recipiente. El volumen de esta masa de aire, a la presión y temperatura ambiente, se determina sumergiendo el balón en un recipiente con agua y abriendo en el seno de ésta el robinete. El agua ocupará en el interior del balón el lugar que ocupaba el aire extraído.

Por la diferencia entre el peso del balón con el agua absorbida y el peso que tiene vacío, se deduce el volumen buscado. Con esos datos se calcula en seguida el peso de un litro de aire a la presión y temperatura de la experiencia. En el método que acabamos de esbozar la acción del empuje del aire sobre el balón y las pesas queda eliminado, puesto que se miden diferencias de peso de un cuerpo cuyo volumen exterior permanece invariado.

Como puede muy bien suceder que mientras se realizan las determinaciones varíe la presión — lo que ocasionaría un cambio de la densidad del aire atmosférico y con ello una variación del empuje — se recurre, en las determinaciones de precisión, a equilibrar el balón con otro de un volumen exterior igual o aproximado al suyo. Se elimina, así, casi completamente, todo error que pudiese provenir de la variación del empuje.

De las determinaciones experimentales resulta que un litro de aire a la presión de 760 milímetros de mercurio y a la temperatura de 0°C, pesa 1,293 gramos.

2. El experimento de Torricelli. — Si el aire se comporta como un fluido, por el hecho de que es una substancia pesada, cabe esperar que en la masa de aire que circunda a la tierra se observe, como en un líquido, una presión aerostática que llamaremos, por razones de generalidad, hidrostática.

La existencia de una presión semejante se pone en evidencia por la experiencia de Torricelli (año 1624). Se toma un tubo de vidrio de unos ochenta centímetros de largo, cerrado en uno de sus extremos, y llenándolo de mercurio se lo invierte, sumergiendo el extremo abierto en un baño de mercurio (fig. 79 *a*). Este baja en el interior del tubo hasta que su nivel se encuentra más o menos a 76 centímetros por encima del nivel existente en la cubeta; lo que prueba que la atmósfera aplica sobre el mercurio de aquélla una presión igual a la que ejerce una columna de mercurio de la altura mencionada.

De importancia capital es, también, el hecho de que en la región superior del tubo queda un espacio en el que no existe ninguna substancia conocida, que puede suponerse, por lo tanto, vacío.

En la época de Torricelli se explicaba el funcionamiento de las bombas hidráulicas diciendo que la naturaleza tenía horror al vacío. Se había hecho, además, la observación — comunicada, por ejemplo, por un constructor de fuentes de Florencia a Galileo — de que no era posible, con bombas u otros aparatos, elevar el agua, por aspiración, a una altura mayor de 10 metros, más o menos.

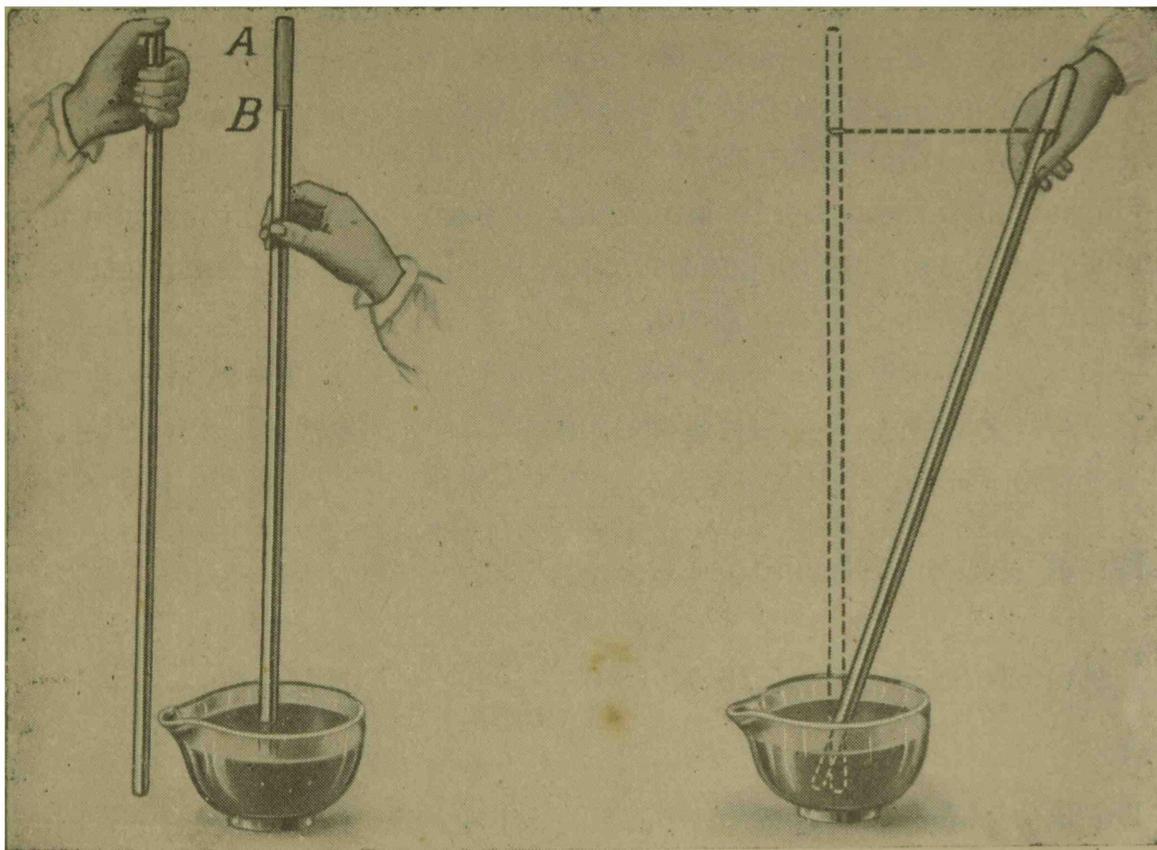


Fig. 79 a.

Fig. 79 b.

Galileo dedujo de este hecho, atribuyendo una fuerza al vacío, que lo mismo sucedería con otros líquidos, tales como mercurio, vino, aceite. Estos subirían a mayor o menor altura, las que estarían en razón inversa de sus pesos específicos. Esta consecuencia es exacta, aun cuando proviene de una hipótesis falsa.

Sus escritos sirvieron, sin embargo, de guía a su discípulo Torricelli, el cual, poco después de realizar su experimento, en fecha 11 de junio de 1644, escribía a un amigo; « no solamente se puede producir así fácilmente un vacío, sino que se tiene además un instrumento que puede indicar las oscilaciones del aire, el cual tan pronto es más pesado y denso, como más liviano y raro ».

La altura de la columna mercurial debe medirse verticalmente, como resulta del teorema general de la hidrostática, pues la presión

atmosférica está medida por la diferencia de presión entre los extremos de la columna mercurial, que está dada por el producto del peso específico del mercurio por la *distancia vertical* entre sus niveles en la cubeta y en el tubo. Esto puede comprobarse, aunque no es necesario, inclinando (fig. 79 *b*) este último. Se observa que el espacio vacío disminuye, lo que prueba que entra mercurio de la cubeta; la altura vertical permanece, sin embargo, constante.

Se denomina *presión normal* o *una atmósfera*, a la presión que corresponde a una columna de mercurio de 76 centímetros de altura; es, aproximadamente, la presión media que se observa en la tierra al nivel del mar.

Una atmósfera es, según eso, igual al peso de una columna de mercurio de un centímetro cuadrado de sección por 76 centímetros de altura. Se tiene, por lo tanto,

$$1 \text{ atmósfera} = 76 \times 13,6 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^2} = 1033 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^2} .$$

En el sistema absoluto **CGS** es:

$$1 \text{ atmósfera} = 981 \times 76 \times 13,6 \frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2} = 1,014 \cdot 10^6 \frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2} .$$

En la técnica se expresan las presiones, con frecuencia, en libras por pulgada cuadrada. Como:

$$1 \text{ libra} = 453,6 \text{ gr y } 1 \text{ pulgada cuadrada} = 6,452 \text{ cm}^2,$$

resulta:

$$1 \text{ atmósfera} = 14,69 \text{ libras por pulgada cuadrada.}$$

3. El principio de Pascal en los gases. — La experiencia enseña que en un punto cualquiera de un gas la presión tiene el mismo valor en todas direcciones y que es válido el principio de Pascal. Esto no es sino consecuencia inmediata del hecho de que los gases satisfacen, en el estado de equilibrio, o para movimientos infinitamente lentos, lo mismo que los líquidos, la definición del fluido establecida en el capítulo I. El principio de Pascal puede ponerse en evidencia con un aparato semejante al de la figura 5, utilizado para el mismo objeto en el caso de los líquidos.

Puede mostrarse ese mismo efecto con el aparato de la figura 7, llenando la bolsa de goma con aire en lugar de agua, y substituyendo el tubo vertical por un tubo doblado en U, en el que se vierte mercurio. Si se comprime la bolsa con una carga de la misma magnitud que la indicada en el párrafo 4 del capítulo I, se producirá una diferencia en los niveles del mercurio — si primitivamente eran iguales — que no alcanzará a 5 centímetros.

En los gases vale, en suma, el teorema general de la hidrostática. Si en la instalación de la figura 3 *a* se tuviese en equilibrio bajo las mismas condiciones, en lugar de un líquido un gas, las presiones estarían distribuídas exactamente en la misma forma. Estarían dadas por la relación :

$$p = p_0 + \varrho z ,$$

donde ϱ es ahora el peso específico del gas y z es positivo o negativo, según que el punto se encuentre por debajo o por encima del plano horizontal para el cual la presión es p_0 . La diferencia de presión entre dos puntos cuya distancia vertical es h será :

$$p - p_0 = \varrho h .$$

Como el peso específico de los gases es muy pequeño, se puede despreciar, para pequeños valores de h , en comparación con presiones exteriores p relativamente pequeñas, la presión ϱh que proviene del peso de la masa gaseosa. En ese caso, la presión tiene el mismo valor en todas partes.

4. Algunos experimentos ilustrativos. Los hemisferios de Magdebourg. — La existencia de la presión atmosférica y sus efectos pueden ponerse en evidencia por medio de algunos experimentos muy interesantes.

A fin de facilitar su comprensión conviene hacer resaltar, una vez más, las condiciones de equilibrio de porciones limitadas de una masa flúida, gaseosa en este caso. Consideremos, para referirnos al caso que nos interesa, una masa de aire perteneciente a la atmósfera, limitada por la superficie cerrada virtual S (fig. 80).

La atmósfera actúa sobre esa masa gaseosa aplicando normalmente a su superficie S fuerzas f , cuyo valor por centímetro cuadrado es el que corresponde a la presión. Si la masa se encuentra, como suponemos, en equilibrio; ella reacciona en todo punto de la superficie, apli-

cando fuerzas $-f$, exactamente iguales y opuestas a las que le aplica la atmósfera.

La diferencia de presión entre los puntos A y B , situados a la distancia h , es ρh , si ρ es el peso específico del gas, y es despreciable con respecto a la presión proveniente del peso de todo el resto de la atmósfera.

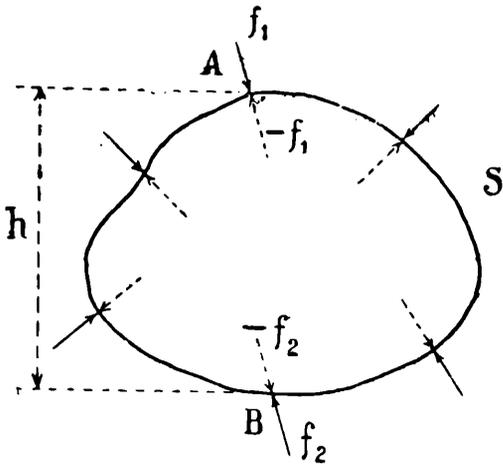


Fig. 80.

Las fuerzas f y $-f$ tienen, según esto, el mismo valor en todas las partes de la superficie S , o, en otras palabras, la masa gaseosa considerada está sometida por la atmósfera a una compresión uniforme y reacciona con presiones iguales y contrarias. Además, en todo su interior, la presión tiene, por el principio de Pascal, ese mismo valor en todas partes.

Se comprende así que si se forma en la atmósfera un recinto limitado por una superficie real, formada por piezas rígidas yuxtapuestas, o tales que una de sus partes sea flexible, la presión que ejerce la atmósfera sobre la superficie exterior se revelará en toda su magnitud y mantendrá a aquéllas unidas, o deformará la parte flexible, únicamente si se hace desaparecer la presión interna o, en otras palabras, si se extrae el aire interior.

Que la presión existente en el interior de un recipiente cerrado lleno de gas, aire, por ejemplo, disminuye a medida que se extrae a éste último, se puede poner de manifiesto por una instalación como la de la figura 81. Poniendo en comunicación primeramente el re-

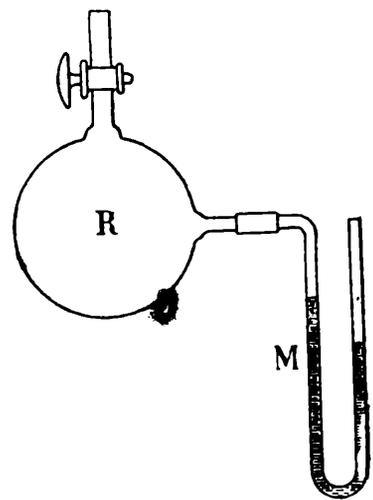


Fig. 81.

cipiente R con la atmósfera, los niveles del mercurio en las dos ramas del tubo en U, alcanzarán la misma altura, por ser iguales las presiones que se ejercen sobre ellas. Si se comienza a extraer el aire del recipiente, el nivel del mercurio sube en la rama que está en comunicación con él y baja en la otra. La diferencia de nivel existente en un instante dado es igual a la diferencia entre la presión atmosférica y la que reina en el interior de R .

De entre los experimentos a que nos hemos referido en el comienzo de este párrafo merece el primer lugar el llamado de los hemisferios

de Magdebourg, ideado por el inventor de la máquina neumática, Otto Guericke.

Dos hemisferios metálicos, huecos (fig. 82), se adaptan por sus bordes, perfectamente, limitando un espacio esférico. Uno de los hemisferios está provisto de una prolongación tubular que lleva una llave y que termina en un tornillo cuyo paso corresponde al de la

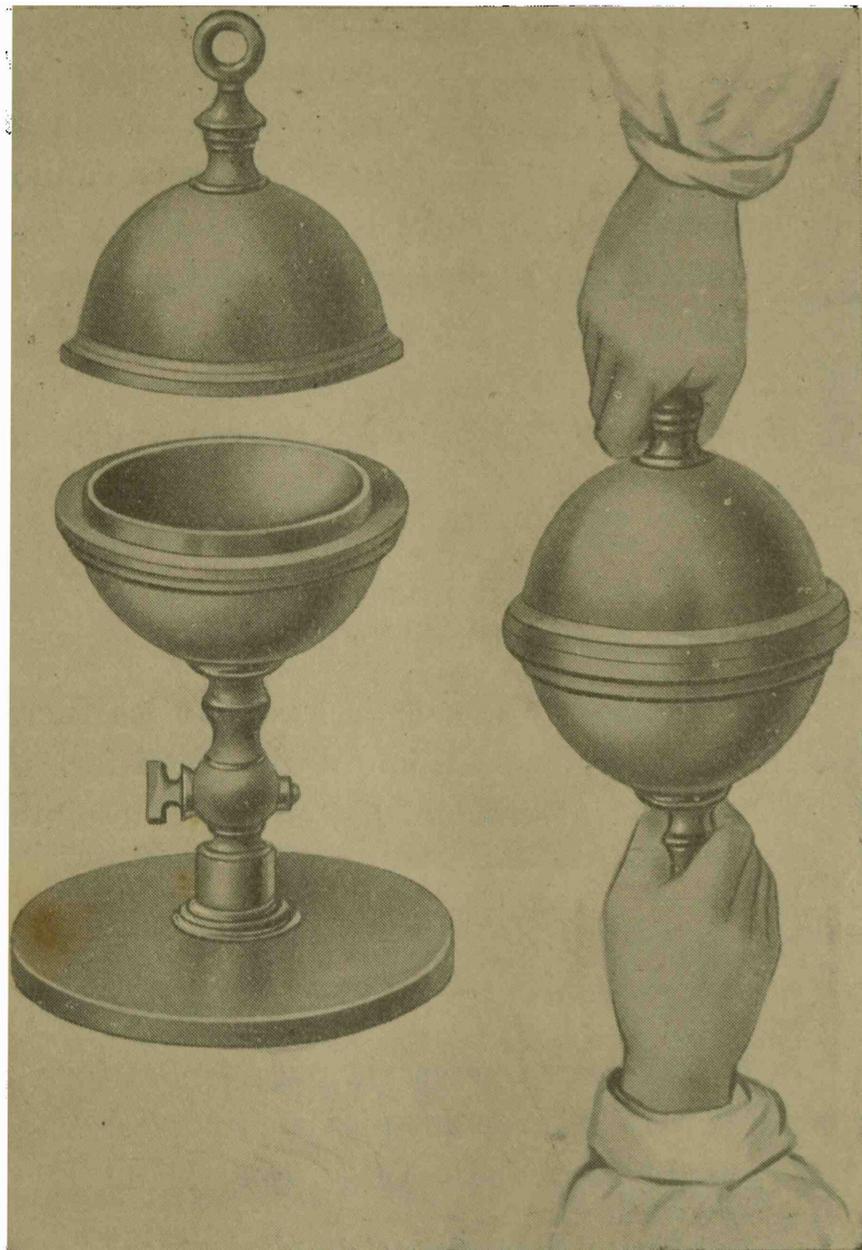


Fig. 82.

rosca de que está dotado el orificio de la platina de la máquina neumática. Esto hace posible fijar en la platina a los hemisferios, extraer el aire y, luego, cerrando la llave, retirarlos. Si se unen los hemisferios dejando el aire contenido en su interior, no costará ningún esfuerzos separarlos, pues tanto en el interior como en el exterior, la presión del gas es la misma.

Si se extrae el aire, se requieren fuerzas enormes para lograrlo. Sobre cada centímetro cuadrado, actúa normalmente a la superficie,

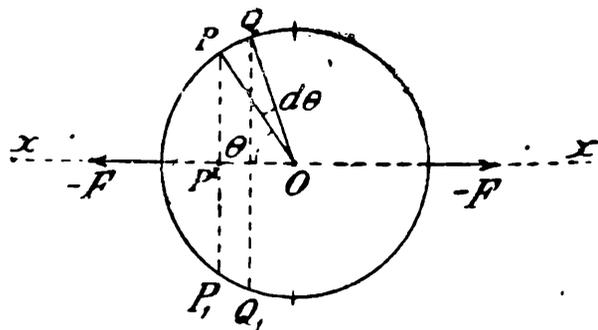


Fig. 83.

esto es, en la dirección del radio de la esfera que forman, una presión de 1033 gramos. La fuerza necesaria para separarlos se calcula (fig. 83) formando la suma de las proyecciones de todas esas presiones sobre la dirección xx . La fuerza f total de compresión aplicada sobre

el sector esférico comprendido entre los planos PP_1 y QQ_1 , perpendiculares a la dirección xx , se obtiene multiplicando su área por la presión atmosférica.

Resulta:

$$f = 2 \pi PP' . PQ . p_0 = 2 \pi r^2 p_0 \text{ sen } \theta . d\theta. \quad [1]$$

La proyección f' de esta fuerza sobre el eje de las x , es, en valor, absoluto:

$$f' = 2 \pi r^2 p_0 \text{ sen } \theta . \cos \theta . d\theta. \quad [2]$$

La fuerza total buscada F se calcula sumando las fuerzas f' provenientes de todos los sectores de uno de los hemisferios, lo que se obtiene por una simple integración. Es, en valor absoluto:

$$F = 2\pi r^2 p_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } \theta . \cos \theta . d\theta = \pi r^2 p_0 ; \quad [3]$$

lo que muestra que la fuerza necesaria para separarlos es la misma que sería menester para separar dos piezas cilíndricas como las dibujadas en la figura 84 cuyo radio fuese igual al de los hemisferios.

Si se trata de hemisferios de 8 centímetros de radio, por ejemplo, sería menester una fuerza F igual a 207,63 kilogramos.

Grabados de la época de Guericke, representan el acto de la realización de esta prueba en presencia de gente del pueblo de Magdebourg, que observan atónitos que eran necesarios varios animales para separar, por tracción, dos hemisferios semejantes.

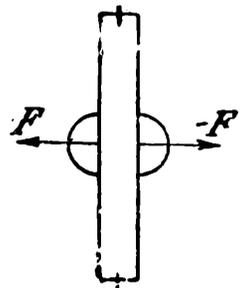


Fig. 84.

Una experiencia de la misma naturaleza es la que consiste en situar sobre la platina de la máquina neumática un cilindro de vidrio, cerrado en su base superior por una membrana elástica, de goma. Haciendo el vacío, se observa que la goma se extiende hacia abajo, adquiriendo una concavidad dirigida hacia arriba, es decir, es *absorbida* por el tubo.

En lugar de la membrana elástica puede usarse un trozo de vejiga de buey, en cuyo caso se produce su ruptura.

Como la presión en un punto de la masa flúida, no depende de la dirección, estos mismos fenómenos se observan si se invierte la platina de modo que las membranas queden abajo.

Citemos, también, la conocida experiencia de la inversión de un vaso lleno de agua (fig. 85) tapado con un pedazo de papel, que se adapta a su borde y a la superficie del líquido. Si queda aire a la presión atmosférica, el papel se separa y el agua cae.

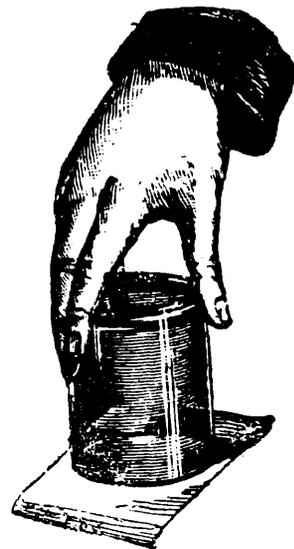


Fig. 85.

Si esto no ha ocurrido, el líquido no se derrama, pues la presión que soporta la hoja de papel hacia abajo, es la que corresponde a una columna de agua de una altura igual a la profundidad del vaso, mientras que la presión que le aplica la atmósfera hacia arriba, equivale a una columna de agua de diez metros de altura, más o menos.

5. Acción de la presión atmosférica sobre el cuerpo humano.

— La fuerza total que la atmósfera aplica sobre la superficie exterior del cuerpo humano, cuya extensión es, en el adulto, mayor que un metro cuadrado, equivale a un peso que oscila entre 15.000 y 20.000 kilogramos.

Expuesto sin análisis este resultado, sorprendería no solamente a las personas poco instruídas, sino también a gentes provistas de cultura e instintivamente dudarían de su exactitud.

Expliquemos, por esto, por qué el hombre no sufre ningún daño bajo la acción de fuerzas tan grandes. En su cuerpo se encuentran regiones en cuyo interior no actúa la atmósfera, tales como las piernas y los brazos, y otras, como las regiones torácica y abdominal, en comunicación, que podemos calificar de directa, con aquélla.

Ahora bien, los huesos pueden resistir presiones muy superiores a la presión atmosférica, cuyo valor es de 1033 gramos por centímetro

cuadrado, y lo mismo ocurre con el resto de los tejidos, en los que el agua, prácticamente incompresible, forma el 60 por ciento. Una ruptura por distensión no es posible, pues la presión es uniforme.

Se entiende así por qué las regiones de la primera categoría no sufren en lo más mínimo.

En lo que a las segundas se refiere, no existe ningún peligro de aplastamiento, por cuanto la presión interior es igual a la exterior.

La experiencia enseña, sin embargo, que el organismo humano es sensible a los cambios de presión y que cuando éstos pasan de ciertos límites, se producen trastornos funcionales, de entre los cuales consideraremos, muy someramente, tan sólo aquellos cuya explicación no requiere los conocimientos del médico.

Muchas pequeñas cavidades están en comunicación con la atmósfera a través de los poros de los tejidos que los circundan; el equilibrio entre la presión interior

y el de la atmósfera se realiza, por eso, de una manera lenta.

Si la presión exterior se modifica rápidamente, como ocurre en las ascensiones aeronáuticas a gran altura, la presión interior será, por algún tiempo, mayor que la exterior. Esto origina malestar, hemorragias y otras alteraciones fisiológicas.

Un papel interesante desempeña la presión atmosférica en el mantenimiento de la pierna

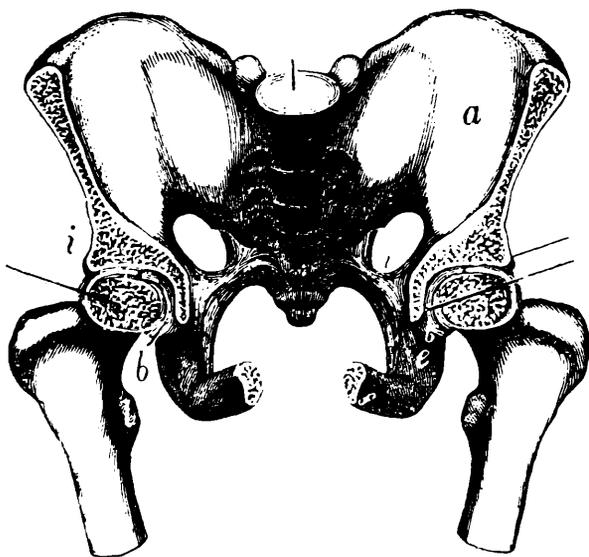


Fig. 86.

en la cadera (fig. 86). Cortados en un cadáver todos los músculos aquélla no cae; permanece en posición aún cuando se corte la membrana que liga la cabeza del fémur a la cavidad.

Si se hace, en cambio, un pequeño orificio en el hueso, de modo que actúe la presión atmosférica sobre la superficie de separación, la pierna cae inmediatamente. Este experimento prueba que en la región existe el vacío y que la presión atmosférica contribuye a mantener la articulación de la pierna con el tronco.

6. Barómetros. Barómetro de cubeta. — El conocimiento de la presión atmosférica es indispensable en muchísimas determinaciones físicas, químicas y meteorológicas. Por la influencia que tiene sobre

el funcionamiento de los órganos de los seres vivos su medida es también de importancia en la biología.

Los instrumentos destinados a medirla se denominan *barómetros*.

La mayoría de ellos, especialmente los mejores, no son sino dispositivos cómodos de la instalación de Torricelli. El más simple de todos los barómetros está representado por la figura 87. Para determinar la altura barométrica se hace coincidir la punta inferior del tornillo *T*, de longitud conocida, con la superficie libre del mercurio de la cubeta y se mide con un catetómetro la distancia vertical entre la extremidad superior del tornillo y el nivel del mercurio en el interior del tubo. Por una simple suma se obtiene la presión o altura buscada.

Este dispositivo es difícilmente transportable a distancias grandes, siendo necesario prepararlo en cada uno de los lugares en que ha de usarse.

La preparación de un barómetro no es tan sencilla como parece a primera vista. La cámara barométrica debe estar exenta por completo de aire, lo que exige que el tubo sea llenado, antes de invertirlo, con mercurio puro, libre en absoluto de gases, lo que requiere operaciones largas y cuidadosas, según se verá.

Por ese motivo se han ideado otros dispositivos que carecen de ese grave inconveniente, de los que nos ocupamos a continuación.

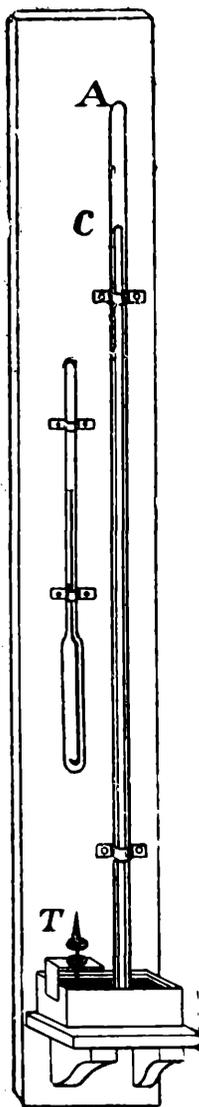


Fig. 87.

7. Barómetro de sifón. — En lugar de la cubeta usada por Torricelli es claro que puede utilizarse un tubo en U, como indica la figura 88. Sobre la superficie libre del mercurio de sus dos ramas actúa la presión atmosférica; la altura barométrica es la distancia vertical indicada con *h*.

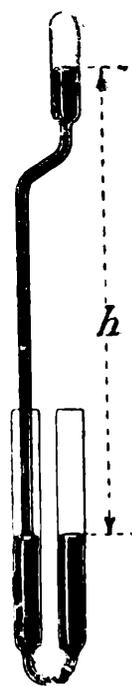


Fig. 88.

Mucho más cómodo y simple resulta tomar un único tubo doblado (fig. 89 a). Por el teorema general de la hidrostática, la presión que ejerce la atmósfera sobre el nivel *A* debe ser igual a la que ejerce sobre el nivel *B*, situado sobre el mismo plano horizontal, la columna mercurial comprendida entre *B* y *C*.

La altura barométrica es, por lo tanto, la distancia vertical entre los niveles *A* y *C*. Por una dobladura conveniente del tubo las

dos ramas extremas de éste se encuentran sobre la misma recta, lo que permite, por la utilización de una regla milimetrada, leer cómodamente aquella distancia.

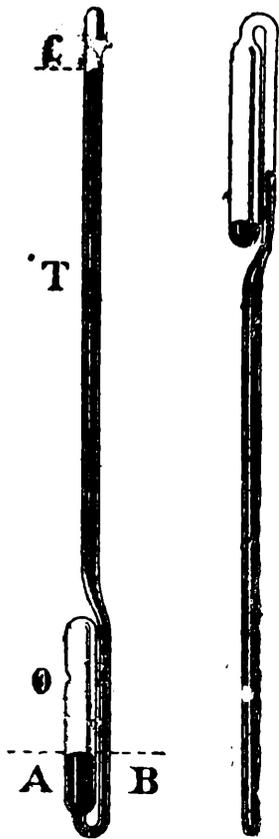


Fig. 89 a. Fig. 89 b.

A fin de hacer el aparato más seguro, Gay Lussac ideó cerrar la rama corta del tubo dejándola en comunicación con la atmósfera por un pequeño orificio *O*, a través del cual el mercurio no puede derramarse, y unir los dos tubos cilíndricos extremos por un tubo capilar con el objeto de impedir la entrada de aire a la cámara barométrica.

Para el transporte se le invierte (fig. 89 *b*) a fin de llenar completamente la rama larga y el tubo capilar; el mercurio restante cae en la rama corta. Todo peligro de ruptura, por choques de la masa de mercurio contra los extremos del tubo, desaparece así completamente.

La operación debe hacerse lentamente, inclinando poco a poco el aparato, para evitar un posible arrastre de aire.

Para utilizarlo se le invierte nuevamente. El mercurio se mueve en el tubo capilar en sentido contrario al que, por razones de densidad, seguiría una burbuja, lo que hace difícil la entrada de aire.

Para impedir que alguna burbuja interrumpa la columna, Bunsen prolonga la rama larga (fig. 90) en un tubo capilar que termina en una punta y la suelda a la otra rama de modo que aquella extremidad quede circundada por un espacio libre *E*. Si al invertirlo es arrastrada una burbuja, el mercurio que sale por la punta impide que la más mínima parte de ella penetre por ésta; el aire de aquélla ocupará, necesariamente, la región *E*. La existencia de una masa gaseosa en esa parte no influye para nada en la diferencia de nivel del mercurio en las ramas extremas.

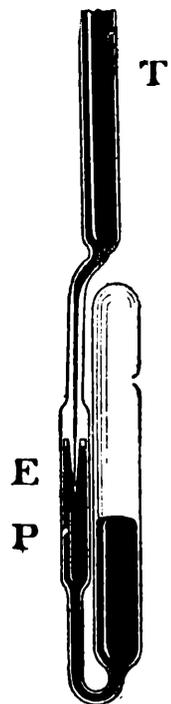


Fig. 90.

Los barómetros de sifón llevan una escala sobre el vidrio mismo, o están provistos de una escala milimétrica sobre la tabla de madera en que se los fija ordinariamente.

En el primer caso el cero de la escala se encuentra en la rama

corta, por debajo de los niveles posibles; las divisiones se continúan en parte en ella y se interrumpen luego para continuarse en la otra rama, en la que se trazan algunas alrededor de la que corresponde a 76 centímetros; la altura barométrica se obtiene haciendo las lecturas que corresponden a los dos niveles y restándolas. Si llevan una escala milimétrica se desplaza ésta por un tornillo de que están provistas, hasta que su punto cero coincida con el nivel inferior del mercurio. Leyendo la altura del nivel superior se tiene la altura barométrica.

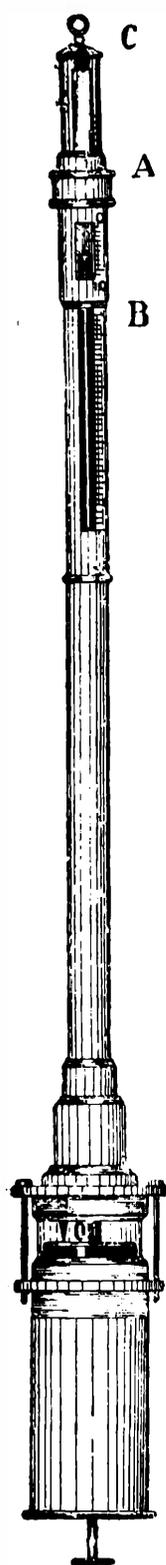


Fig. 91.

8. Barómetro de Fortín. — Este barómetro, de cuya construcción ilustran las figuras 91, 92 y 93 es menos frágil, más seguro para el transporte y permite leer la altura barométrica con más exactitud que los de sifón. El tubo termina en punta para impedir la entrada de aire; cerca de ella se encuentra un estrechamiento al que se ata un trozo de badana, que está unida a la pieza de madera que constituye la tapa superior interna de la cubeta. Esta está constituida exteriormente por

un armazón metálico cilíndrico que consta de una parte inferior vinculada por tornillos a la parte superior. La tracción que éstos ejercen mantiene fijos a la pieza superior interna de madera, al cilindro de cristal y a otra pieza inferior de madera, elementos éstos que quedan

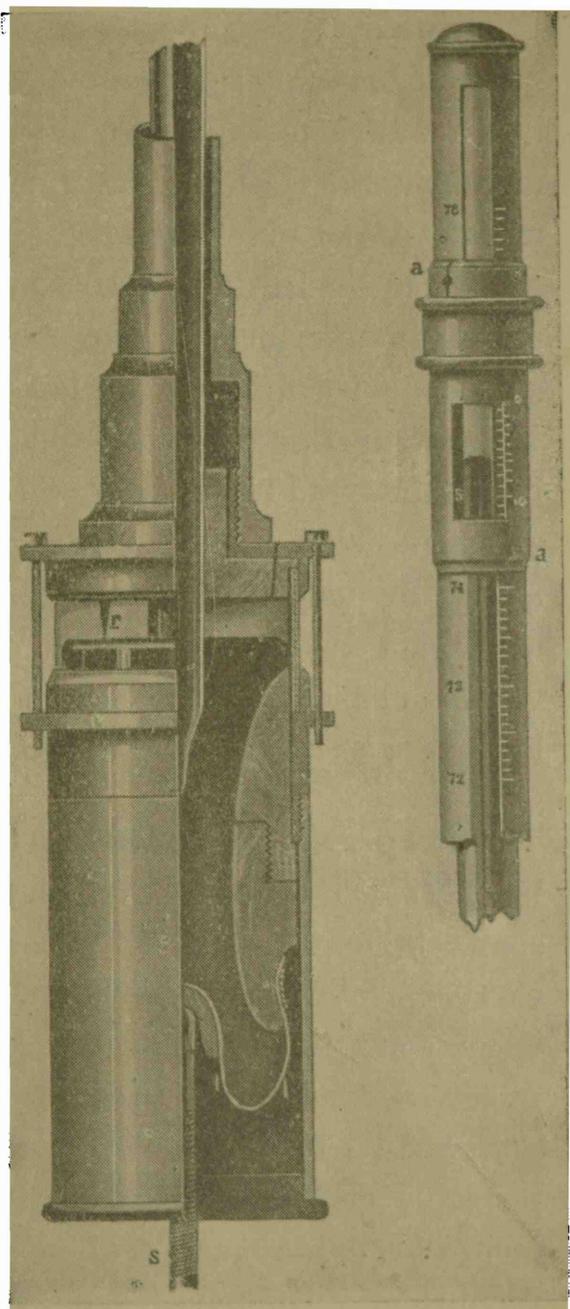


Fig. 92.

Fig. 93.

perfectamente adaptados. Esta armadura se continúa hacia arriba en una camisa también metálica que envuelve al tubo, estando provista de una ranura longitudinal, a fin de hacer visible el nivel interior del mercurio. Sobre sus bordes están trazadas las divisiones de la escala, cuyo cero se encuentra en la punta de un pequeño cono de marfil, *r*, fijo a la pared superior interna de la cubeta. Sirve al mismo tiempo de guía a un nonio, que se desplaza accionando un tornillo que mueve a una cremallera.

El fondo de la cubeta está constituido por un trozo de badana II que puede desplazarse por la acción del tornillo *s* fijo a la base de la armadura metálica. Se puede así mover a voluntad el nivel del mercurio que contiene. Para medir una presión se hace coincidir primeramente el nivel inferior del mercurio con la punta de marfil, se enraza luego la línea del cero del nonio con el vértice del menisco del nivel superior y se hace la lectura, que da, salvo algunas correcciones de las que nos ocuparemos, la altura barométrica.

La verticalidad de la columna, indispensable en este caso, se asegura suspendiendo el aparato del anillo superior *C*. Conviene fijar luego esa posición, lo que se logra aprisionándolo en su parte inferior por medio de cuatro tornillos que se enroscan en una pieza circular fija a la tabla delante de la cual pende, generalmente, este instrumento.

Para el transporte se llenan completamente de mercurio el tubo y la cubeta accionando el tornillo inferior.

9. Preparación de un barómetro. — La parte más delicada de la operación consiste en llenar el tubo de mercurio. Este debe ser completamente puro, lo que se obtiene por destilación reiterada. Conviene eliminar la primera cantidad destilada, en la que suelen estar contenidas impurezas muy volátiles. La importancia de la pureza del mercurio proviene no solamente de que así queda bien definida su densidad para cualquier temperatura, lo que es indispensable en estas medidas, sino porque las impurezas, particularmente los óxidos metálicos, se depositan encima del menisco interno, recubriendo las paredes de vidrio, al que a veces atacan, con lo que, además de disminuir la visibilidad del polo de la calota del menisco, hacen variar arbitrariamente las tensiones en las superficies de contacto, haciendo indeterminada la depresión capilar, corrección ésta que debe introducirse.

Purificado el mercurio se instala el tubo barométrico — que debe limpiarse cuidadosamente — que suponemos sea el de un barómetro

de Fortín, en la forma que indica la figura 94. Por medio de un tubo de goma de pared gruesa se une a un tubo *T* provisto de una llave en dos de las ramas, una de las cuales se pone en comunicación con una bomba neumática, y la otra se prolonga por un tubo delgado de goma que se sumerge en el mercurio situado en una cubeta. Se puede así llenar muy fácilmente el tubo de mercurio puro, sin óxido, eliminando al mismo tiempo, por completo, el aire y la humedad.

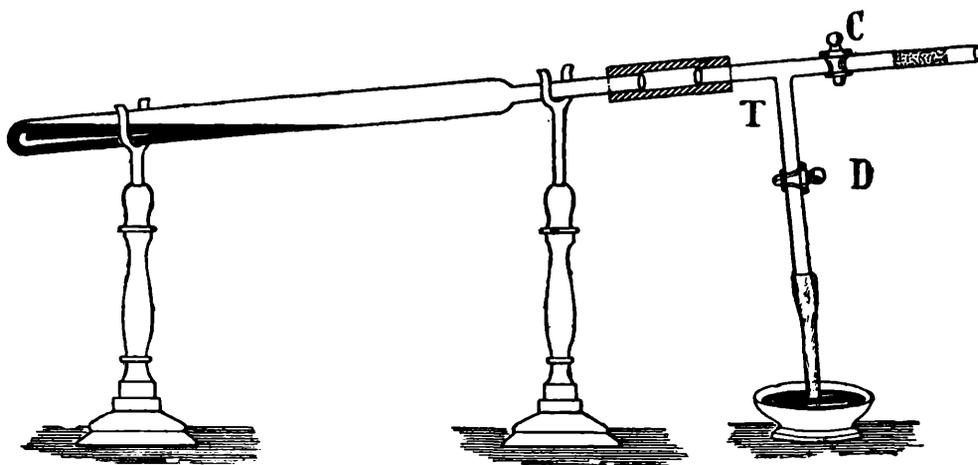


Fig. 94.

Para ello se abre la llave *C*, se cierra la *D* y se pone en acción la bomba, que continuará funcionando hasta finalizar la operación. A fin de producir un gran enrarecimiento y para secar el tubo más rápidamente y eliminar el aire ocluido en las paredes, conviene calentarlo en toda su extensión con la llama de un mechero de Bunsen.

Logrado un alto vacío se abre la llave *D*. El mercurio se precipita hacia el interior del tubo; se deja entrar una pequeña cantidad y se cierra la llave. Se calienta luego el mercurio que ha penetrado al tubo hasta la ebullición, que se produce en el vacío a la temperatura de 180° más o menos, temperatura baja que disminuye el peligro de la ruptura del vidrio. Se elimina así hasta el último resto de aire que pudiese quedar aprisionado en el mercurio o en el interior del tubo por el arrastre que determinan los vapores producidos que se condensan en las cercanías de *C*. Un buen tapón de algodón, de unos centímetros de largo, impide el pasaje de los vapores hacia la bomba.

Se deja enfriar un poco el tubo y se hace entrar luego otra pequeña cantidad de mercurio, repitiendo las operaciones indicadas; y así sucesivamente hasta llenarlo.

A pesar del calentamiento no se produce óxido de mercurio por la ausencia del aire y, por lo tanto, de oxígeno.

La inversión del tubo en la cubeta y el montaje total del aparato no requieren, a nuestro entender, explicación alguna.

10 .Prueba de un barómetro. — La primera condición que debe llenar un barómetro es que su *cámara* se encuentre completamente exenta de aire y, sobre todo, de vapor de agua. Si esto no sucede, las lecturas estarán afectadas de un error en menos, igual a la tensión de esas substancias a la temperatura de las observaciones.

Aun cuando, si se procede como se ha indicado, es difícil que el barómetro adolezca de tal defecto, es conveniente comprobarlo experimentalmente.

Un método sencillo consiste en inclinar el tubo, aguzando los oídos para percibir lo mejor posible el golpe. Si éste es metálico y agudo no existe aire; si es ligeramente sordo, ocurre lo contrario. La presencia de una pequeña cantidad de aire puede • comprobarse, por otra parte, con una lente de aumento, observando por proyección, por ejemplo, la extremidad superior de la columna barométrica, lateralmente y arriba, después de haber llenado el tubo con todo el mercurio posible. Este procedimiento no es difícil aplicarlo aún en el caso del barómetro de Fortín, en el que la extremidad del tubo es, mientras está armado, invisible, pues puede retirarse momentáneamente, para la realización de esta prueba, la camisa metálica cilíndrica.

Se podrá juzgar así, un tanto groseramente, de la cantidad de aire encerrado.

Un procedimiento seguro, y sin peligro si se procede con cuidado, consiste en no llenar el tubo completamente de mercurio, y en calentar su extremidad con agua a 50°, por ejemplo, con una instalación como la de figura 95. El nivel del mercurio bajará, en general; el desplazamiento puede medirse exactamente con un catetómetro. Como se conoce la fuerza elástica de los vapores de mercurio en función de la temperatura se sabrá en seguida si esa disminución procede de su presencia, o de la existencia de aire o vapor de agua, cuyas tensiones aumentan con la temperatura muchísimo más que la del vapor de mercurio.

, Si se comprueba la presencia de un gas lo mejor es proceder a vaciar el tubo y a llenarlo nuevamente, aun cuando es posible de-

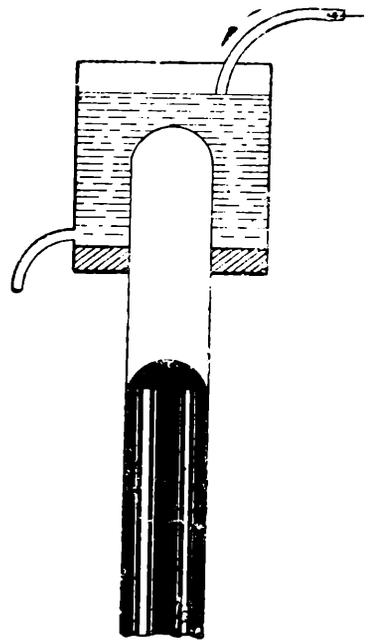


Fig. 95.

terminar, por el llamado método de Arago, el importe de esta corrección, por lo menos en los barómetros de sifón.

11. Correcciones. — A. REDUCCION A CERO. — Se entiende como altura barométrica, la altura de una columna de mercurio a 0°C que mantiene en equilibrio la presión atmosférica.

En los buenos barómetros, la escala, cuyas indicaciones se refieren a 0°, está trazada con exactitud — lo que por otra parte, puede comprobarse con un catetómetro o con un comparador — de modo que su uso no acarrea inexactitudes en las medidas.

Como éstas no se realizan a la temperatura de 0°C, las alturas leídas deben ser corregidas, para obtener la altura barométrica, de los errores provenientes de las dilataciones de la escala y del mercurio. La primera hace aparecer a la columna más corta de lo que es, mientras que la segunda la alarga. Estos dos errores actúan, como se ve, en sentido contrario, y, por lo tanto, uno debe sumarse y el otro restarse de la altura obtenida.

Es necesario, además, introducir una corrección a causa de la depresión capilar del mercurio en el tubo.

Deduzcamos, primeramente, las magnitudes de los errores debidos a la dilatación. Aun cuando no nos hemos ocupado todavía de sus leyes éstas son conocidas por todos los lectores.

Si se indica con l la longitud en milímetros, leída en la escala a la temperatura t , la longitud h de la columna mercurial a la misma temperatura es, si se indica con α_1 , el coeficiente de dilatación de la substancia de la escala:

$$h = l (1 + \alpha_1 t). \quad [4]$$

Si el mercurio hubiese estado a la temperatura de 0°C, en lugar de la altura h se hubiese encontrado una altura menor h_0 . Estas alturas están, como se sabe, en razón inversa de las densidades, que representaremos con ρ y ρ_0 , respectivamente. Se tiene, por lo tanto:

$$\frac{h_0}{h} = \frac{\rho}{\rho_0}. \quad [5]$$

Es, por otra parte (véase pág. 44 de este tomo):

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{1 + \alpha_2 t}, \quad [6]$$

donde $\alpha_2 = 0,000182$ es el coeficiente de dilatación del mercurio, y por consiguiente:

$$h_0 = \frac{h}{1 + \alpha_2 t}. \quad [7]$$

Esta es la altura que se habría observado si el mercurio y la escala hubiesen estado a cero grado.

De las relaciones [4] y [7] resulta:

$$h_0 = l \frac{1 + \alpha_1 t}{1 + \alpha_2 t}, \quad [8]$$

o, efectuando la división, tomando en cuenta solamente hasta los términos del primer grado en α :

$$h_0 = l (1 + \alpha_1 t - \alpha_2 t) = l - l (\alpha_2 - \alpha_1) t. \quad [9]$$

La reducción a cero grado se realiza, entonces, por una única corrección, que consiste en restar el producto $l (\alpha_2 - \alpha_1) t$ de la altura l observada directamente.

Para una escala de latón es $\alpha_1 = 0,000019$ y para una de vidrio $\alpha_2 = 0,000008$.

B. CORRECCIÓN DE CAPILARIDAD. — La existencia de la tensión superficial determina en el mercurio del tubo un *descenso* o *depresión*, llamado capilar. Esa depresión es proporcional, según se ha visto en la pág. 58, al producto del coseno del ángulo de contacto por la tensión del mercurio con respecto al aire, e inversamente proporcional al radio del tubo.



Fig. 96.

El ángulo de contacto del mercurio varía continuamente y de una manera caprichosa al menor movimiento. Lo mismo ocurrirá con la depresión capilar, lo que hace dificultosa la corrección de que nos ocupamos.

Existen dos caminos para realizarla y son: medir cada vez el ángulo de contacto, lo que sería sumamente molesto, o determinar experimentalmente, una vez por todas, con una instalación adecuada, la correspondencia entre las alturas a (fig. 96) del menisco y las depresiones capilares, en tubos de distinto diámetro.

Se tendrá así una tabla por medio de la cual se determina la corrección a introducir, midiendo, lo que es muy fácil, la altura del me-

nisco. El valor de esta depresión debe sumarse a la altura barométrica medida.

Una labor semejante ha sido realizada por Mendelejeff y Gutkowski.

Damos a continuación la tabla que, sobre la base de esas medidas, ha formado F. Kohlrausch por interpolación, en la que todas las magnitudes están expresadas en milímetros.

Diámetro	Altura del menisco							
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
4	0,83	1,22	1,54	1,98	2,37			
5	0,47	0,66	0,86	1,19	1,45	1,80		
6	0,27	0,41	0,56	0,78	0,98	1,21	1,43	
7	0,18	0,28	0,40	0,53	0,67	0,82	0,97	1,13
8		0,20	0,29	0,38	0,46	0,56	0,65	0,77
9		0,15	0,21	0,28	0,33	0,40	0,46	0,52
10			0,15	0,20	0,25	0,29	0,33	0,37
11			0,10	0,14	0,18	0,21	0,24	0,27
12			0,08	0,10	0,13	0,15	0,18	0,19
13			0,04	0,07	0,10	0,12	0,13	0,14

Conviene, a pesar de la posibilidad de determinar con suficiente aproximación este error, utilizar barómetros cuyos tubos tengan un diámetro grande.

En el barómetro de sifón esta causa de error tampoco desaparece, porque la depresión es distinta en el vacío (rama superior) que en contacto con el aire, y por la inestabilidad del equilibrio del mercurio en contacto con el vidrio. Compensación total no existe, por lo tanto, como a primera vista parece.

C. LA ACCIÓN DEL VAPOR DEL MERCURIO. — El error debido a la presencia de vapor de mercurio en la cámara barométrica es despreciable a causa de la pequeñez de su fuerza elástica.

Esta tensión equivale, por ejemplo, a 20°C, una altura de 0,0011 milímetros de mercurio, a 40°C, a 0,006 milímetros y a 60°C a 0,025 milímetros.

12. Reducción a 45° de latitud. — Como la acción de la gravedad varía con la latitud, resulta que presiones atmosféricas del mismo valor estarán representadas, en lugares diferentes, por alturas barométricas desiguales.

Para poder comparar las presiones que se refieren a latitudes diversas se ha convenido, por eso, en *reducirlas* a la latitud de 45° , lo que significa determinar los valores que tendrían las alturas respectivas, si el mercurio pesase lo que pesa a esa latitud sobre el nivel del mar.

Esa corrección se lleva a cabo, como es fácil demostrar, multiplicando la altura barométrica corregida por

$$1 - 0,0026 \cos 2 \varphi - 0,0000002 H ,$$

donde φ representa la latitud y H la altura del lugar sobre el nivel del mar.

Sobre la variación de la presión atmosférica con la altura y de la nivelación barométrica véase el capítulo siguiente.

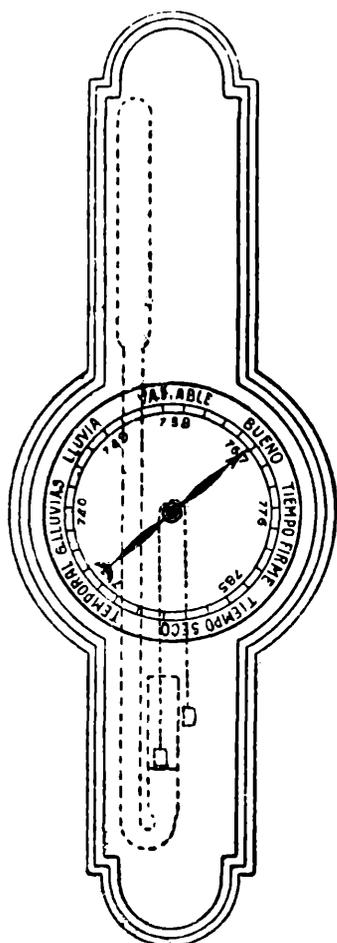


Fig. 97.

13. Otros dispositivos barométricos. Barómetros metálicos indicadores y registradores. — El dispositivo representado en la figura 97 es de uso frecuente en las casas particulares y en muchos otros lugares, tales como fábricas, buques, etc. Está destinado a determinaciones groseras de la presión y a servir de base a los pronósticos meteorológicos de los profanos.

La aguja indicadora está rígidamente unida a una polea de muy pequeño diámetro, girable alrededor de un eje horizontal. Por la garganta de ésta pasa un hilo, de cuyos extremos penden dos pesos, de los cuales, el mayor, descansa sobre la superficie libre del mercurio de la rama de un barómetro de sifón.

Si este nivel varía, determina un movimiento del sistema constituido por el hilo y los dos pesos, haciendo girar la polea y la aguja, por consiguiente.

A fin de eliminar la acción del roce, conviene, antes de hacer lecturas, dar unos golpecitos sobre el vidrio que recubre la parte central del aparato.

Los barómetros metálicos consisten, esencialmente, en una pieza metálica flexible que limita un recinto en el que se hace un vacío elevado. Si varía la presión exterior, aquélla se deforma, y el mo-

vimiento de que va acompañada la deformación se transmite a una aguja por una combinación apropiada de palancas y de resortes.

En el dispositivo de Bourdon (fig. 98) la pieza metálica flexible consiste en un sector circular, un poco menor que 360° , de un tubo metálico hueco, de sección elíptica, construído con una hoja delgada de latón.

Si aumenta la presión, por ejemplo, el tubo metálico se arquea más; los puntos extremos *A* y *C* se acercan, lo que ocasiona, por la acción de la palanca *ED* y del engranaje *ik*, una giración de la aguja en el sentido en que se mueven las agujas de un reloj.

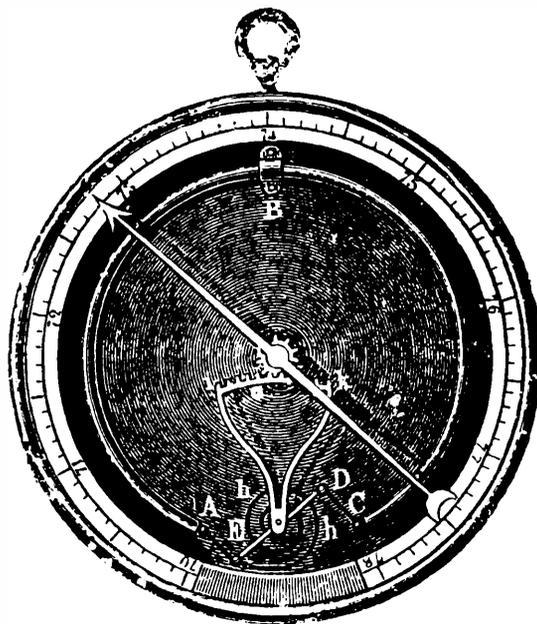


Fig. 98.

En el barómetro de Vidi (fig. 99) el recinto deformable consiste

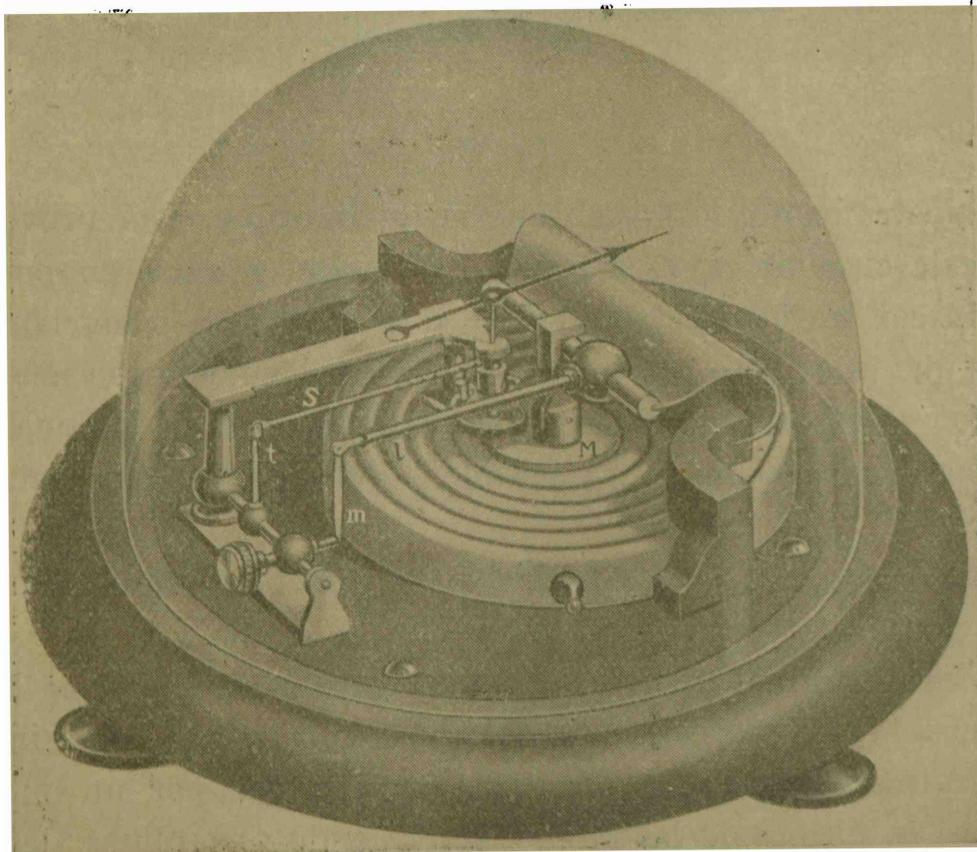


Fig. 99.

en una caja metálica cilíndrica cuya cara superior está provista de canaladuras circulares, concéntricas, a fin de hacerla más flexible. El

centro de esta cara está ligado a un resorte compensador, que por medio de una combinación de palancas, trasunta la deformación de aquélla en una giración de la aguja indicadora. Si la presión aumenta, por ejemplo, la tapa superior de la caja metálica se desplaza hacia abajo, y lo mismo ocurre con el resorte compensador; la extremidad de la palanca l desciende y hace girar hacia la derecha, por medio de la palanquita m , el pequeño árbol horizontal que se ve en la figura; la extremidad de t se desplaza hacia la derecha, disminuyendo la tensión del cordel flexible s . Finalmente, un resorte en espiral, que equilibra la tensión de este último, hace girar la aguja.

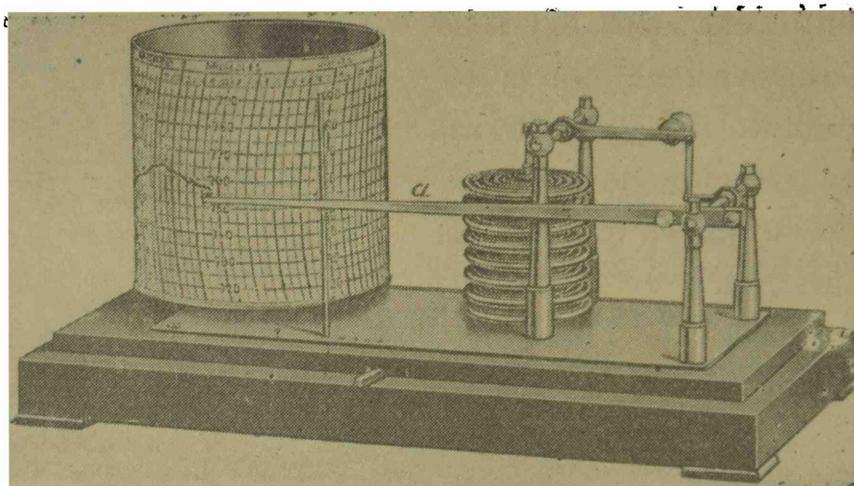


Fig. 100.

Este instrumento, lo mismo que el de Bourdon, está provisto de una escala circular cuyas divisiones se trazan y numeran por comparación con un barómetro de sifón o de Fortín. Son mucho menos exactos que éstos pero prestan útiles servicios, cuando son necesarios tan sólo valores aproximados y en circunstancias en las que, como en la aeronavegación, no es posible el uso de los barómetros de mercurio.

El barómetro registrador Richard (fig. 100) no requiere mayores explicaciones.

La pieza deformable es de una construcción especial, que lo hace muy sensible; los resortes antagonistas se encuentran en su interior. Sus desplazamientos se transmiten amplificados por un juego de palancas, la última de las cuales, provista de una pluma de forma especial, escribe sobre un faja de papel arrollada en un tambor cilíndrico, que gira accionado por un movimiento de relojería, un trazo continuo, que permite determinar hora a hora y día a día la marcha de la presión.

El dispositivo empleado en el barómetro indicador de la figura 97 se utiliza también, con mucho éxito, en la construcción de barómetros registradores.

El desplazamiento del mercurio en la rama corta de un barómetro de sifón de tubo de gran diámetro acciona un sistema de palancas, una de las cuales inscribe un trazo continuo sobre un hoja de papel, exactamente en la misma forma que en el caso anterior.

CAPITULO V

COMPRESIBILIDAD DE LOS GASES. LEY DE BOYLE MARIOTTE. MANOMETROS. BOMBAS HIDRAULICAS

A. — COMPRESIBILIDAD DE LOS GASES

1. **Consideraciones generales.** — Una propiedad característica de los flúidos es la de llenar todo el espacio que se les brinda. En los líquidos este proceso va acompañado de un cambio de estado. Por el fenómeno de la evaporación sus moléculas ocupan todo el espacio situado encima de su superficie libre. En los gases, en cambio, su naturaleza física no sufre, en general, durante la expansión ninguna modificación aparente.

Su expansibilidad se pone de manifiesto por la experiencia de Mariotte fundada en otra semejante de Pascal ⁽¹⁾. Un globo de goma, cerrado, conteniendo a la presión atmosférica una pequeña cantidad de aire (figs. 101 *a* y 101 *b*) se coloca en el interior de la campana de una máquina neumática. Haciendo el vacío lentamente, el volumen del globo aumenta poco a poco, adquiriendo al fin una forma esférica.

Esta experiencia prueba que la presión existente en una masa gaseosa a una misma temperatura, es tanto menor cuanto mayor es el volumen. En efecto, mientras las fuerzas elásticas de la membrana no se hacen sentir, la presión del gas en el interior del globo debe ser igual a la presión en el resto del espacio limitado por la campana, y ella disminuye continuamente por la extracción del aire.

Con este resultado no habrá espíritu que se dé por satisfecho.

La pregunta en que caerá primero el pensamiento será: ¿cuál es el mecanismo íntimo del proceso que origina ese aumento de volumen de la masa gaseosa?

⁽¹⁾ Pascal había observado que ascendiendo a una montaña un globo de goma conteniendo un poco de aire se inflaba.

Aun cuando no sea éste el momento oportuno de ocuparnos de la respuesta, diremos, sin embargo, solamente, que ese y otros hechos de la experiencia se explican de una manera satisfactoria suponiendo que los gases están constituídos por moléculas que se mueven en línea recta con gran rapidez.

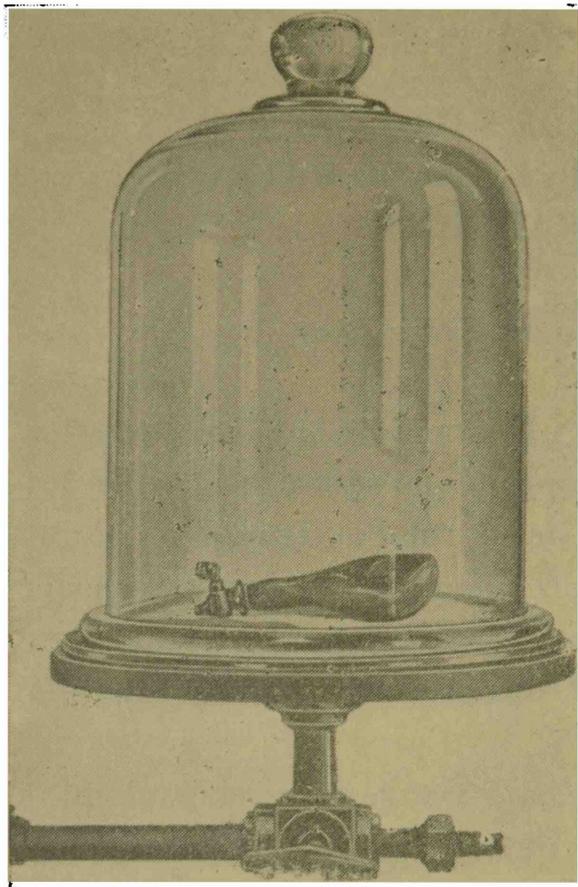


Fig. 101 a.

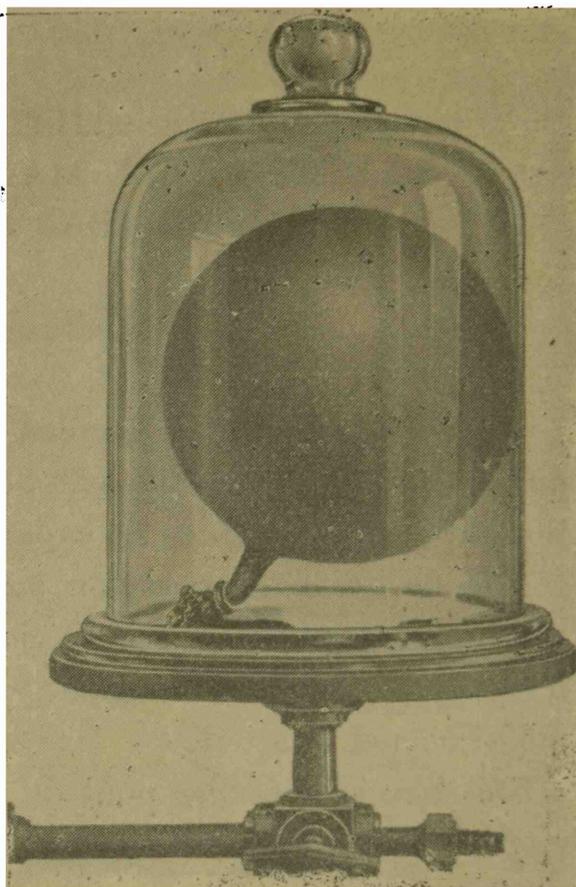


Fig. 101 b.

La magnitud y dirección de la velocidad de cada una individualmente se modificaría por choque con alguna de las restantes; la presión en las paredes del recipiente provendría de los choques de las moléculas sobre las mismas. El volumen de la masa gaseosa aumentaría tan pronto como la pared no pudiese resistir la variación de los impulsos de esos choques.

2. **La ley de Boyle-Mariotte.** — Hemos puesto en evidencia, cualitativamente, la relación de dependencia entre la presión y el volumen de una masa gaseosa.

Ocupémosnos ahora de las relaciones cuantitativas. Una ley que representa aproximadamente los hechos, a presiones no muy elevadas, es la denominada de Boyle-Mariotte, que se enuncia así: *A una misma temperatura los volúmenes ocupados por una masa gaseosa están en razón inversa de las presiones que soporta.*

Tal ley aparece formulada, con otras palabras por primera vez, en una memoria en la que Boyle da cuenta a la *Royal Society*, en el año 1661, de sus investigaciones relativas a la compresibilidad del aire.

La enunciación de más arriba es la dada por el abate Mariotte, en una publicación que hiciera en París en el año 1676, donde expone sus investigaciones sobre la naturaleza del aire. Parece ser que no conocía los trabajos de Boyle.

Según esa ley, si la presión que soporta una masa gaseosa se hace doble, triple, etc., el volumen se reduce a la mitad, a la tercera parte, etc.

Si se indican con p_1, v_1 y p_2, v_2 las presiones y volúmenes correspondientes a cierta masa gaseosa, a la misma temperatura, se tiene:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{p_2}{p_1} \quad [1]$$

o

$$p_1 v_1 = p_2 v_2, \quad [2]$$

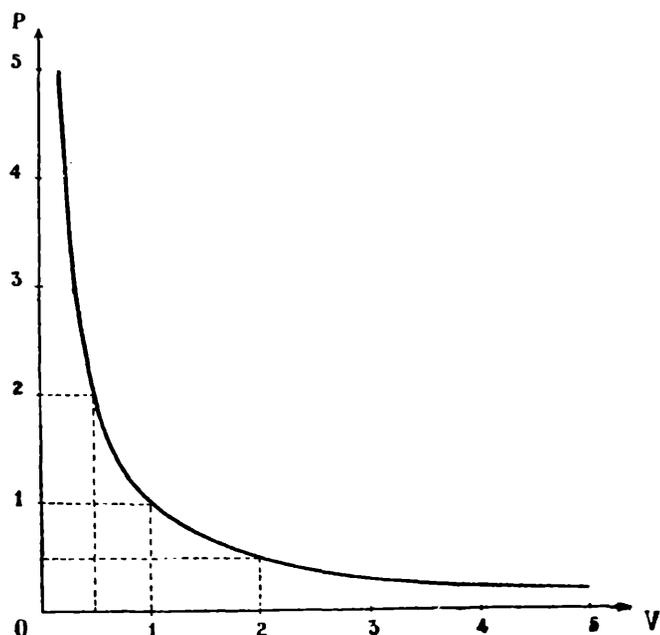


Fig. 102.

y puesto que las presiones y volúmenes que indicaremos con p y v pueden ser cualesquiera, resulta la siguiente formulación general:

$$pv = \text{const.} \quad [3]$$

El valor de la constante depende de la masa del gas y de la temperatura.

La representación gráfica de la [3] es la línea gruesa de la figura 102; se trata de una hipérbola equilátera.

Es claro que la ley de Mariotte puede enunciarse también diciendo que la densidad de un gas es, a temperatura constante, proporcional a la presión.

3. Las comprobaciones experimentales de Boyle y de Mariotte. — Boyle y Mariotte han empleado en sus investigaciones aparatos idénticos. Dispositivos semejantes son muy usados hoy, todavía, en las comprobaciones de los cursos ordinarios experimentales.

Un tubo doblado de ramas paralelas (fig. 103), una de las cuales

es larga y abierta en el extremo y la otra corta y cerrada, está montada sobre un brete de madera provisto en su base de tornillos que permiten situar verticalmente los tubos.

Vertiendo mercurio por la rama larga queda aprisionada en la rama corta cierta cantidad de aire. Esta operación debe realizarse de tal modo que el gas quede exento, por completo, de vapor de agua.

La presión que soporta es igual a la suma de la presión atmosférica — que debe leerse en un barómetro en el momento de la experiencia — más la presión a que equivale la diferencia h entre las alturas de los niveles A y B del mercurio. Si el tubo es, en la rama corta, de sección constante, el volumen del gas puede suponerse proporcional a la longitud AC .

Las observaciones se hacen agregando cada vez más mercurio y esperando un momento, antes de hacer las lecturas, a fin de que el fluido, calentado por la compresión, adquiriera nuevamente la temperatura ambiente. Resultará, con bastante aproximación, que las presiones estarán en razón inversa de los volúmenes o, lo que es lo mismo, en razón inversa de las longitudes AC . Para presiones menores que la atmosférica aquellos experimentadores usaron un barómetro de cubeta profunda.

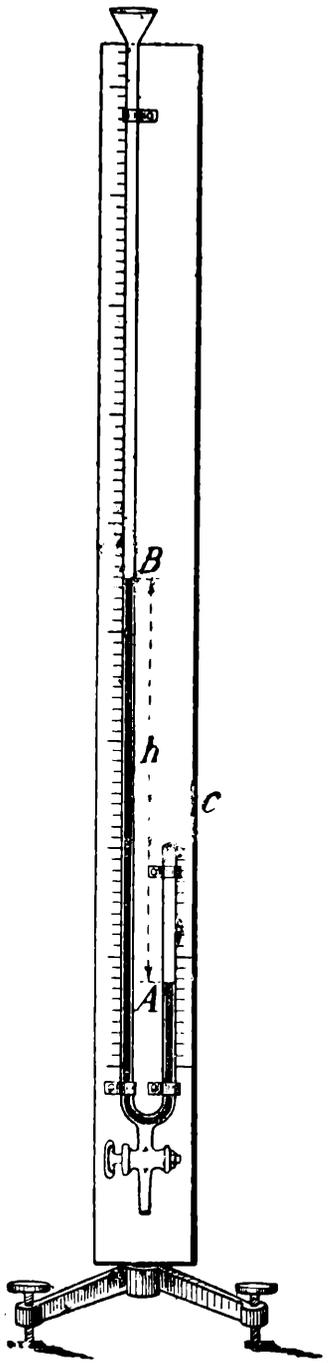


Fig. 103.

La instalación representada en la figura 104 permite comprobar la ley, de una manera muy cómoda, para presiones mayores y menores que la de la atmósfera. La rama corta consiste en dos tubos de igual diámetro (para eliminar en parte, por lo menos, los errores de capilaridad); uno de ellos cerrado, graduado en centímetros cúbicos; el otro más largo y abierto. Se comunican entre sí por un tubo de goma reforzado exteriormente por un tejido.

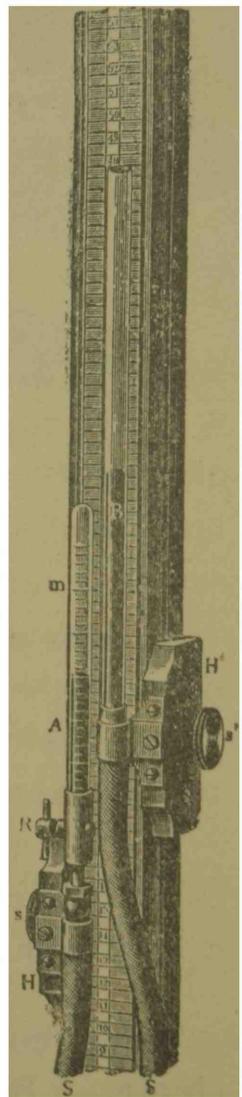


Fig. 104.

Están montados en un soporte vertical de madera, de dos metros más o menos de longitud, provisto de una regla milimetrada, de tal manera que es posible desplazarlo sobre él y fijarlos a cualquier altura por medio de tornillos de presión.

Se puede variar así, a voluntad, dentro de ciertos límites, la presión del gas que ocupa el espacio m , y que se introduce por la llave R a tres vías.

Para presiones mayores que la atmósfera se fija la rama corta lo más bajo que sea posible; las observaciones se hacen situando la otra rama a alturas cada vez mayores. Para presiones menores que aquella se fija el tubo que contiene el gas a la mayor altura posible y se desplaza el otro hacia abajo. En éste el nivel de mercurio estará a menor altura; la presión del gas será la presión atmosférica menos la presión a que equivale la diferencia entre los dos niveles del mercurio.

*** 4. Las determinaciones exactas de la compresibilidad de los gases. Los trabajos de Dulong, Pcuillet, Regnault, Amagat y otros. Influencia de la temperatura. Aproximación de la ley de Boyle-Mariotte.** — En el año 1826 Oersted y Swendsen estudian la compresibilidad del aire hasta presiones de sesenta atmósferas. Hasta ocho atmósferas utilizaron un tubo de Mariotte y entre ocho y sesenta midieron la presión calculando la fuerza necesaria para abrir una válvula a palanca de seguridad. De sus observaciones dedujeron que la ley de Boyle representaba la realidad.

Despretz fué el primero en demostrar, por una ingeniosa experiencia cualitativa, en el año 1826, que esa ley no podía ser válida para todos los gases, dejando abierta la pregunta de su exactitud para el aire. Invirtió en un baño de mercurio dos tubos llenos de la misma substancia e introdujo luego en uno aire y en el otro, sucesivamente, distintos gases.

Situado todo el dispositivo en el interior de un piezómetro como el de la figura 41 *b*, podía transmitir a las masas gaseosas la misma presión. Observó que partiendo de volúmenes iguales, con excepción del hidrógeno, todos los demás gases, al aumentar la presión ocupaban menor espacio que el aire.

En el año 1823, debiendo Dulong estudiar, por encargo de la Academia de Ciencias de París, la fuerza elástica del vapor de agua en función de la temperatura, decidió utilizar en su medida un manómetro a aire comprimido, y aprovechó la oportunidad que le brindaba su calibración para estudiar la compresibilidad de este fluido.

Utilizó un tubo de Mariotte cuya rama mayor, de 26 metros de longitud, estaba constituida por la unión de 13 tubos de 2 metros de largo, 5 milímetros de diámetro interior y 5 milímetros de espesor.

De sus medidas, que consisten de tres series de 39 observaciones cada una, a pesar de la existencia de apartamientos sistemáticos en el mismo sentido, dedujo que la compresibilidad del aire obedecía a la ley de Boyle hasta presiones de 27 atmósferas.

En el año 1837, Pouillet compara, en un intervalo comprendido entre una y cien atmósferas, las compresibilidades de diferentes gases en comparación con la del aire.

El aparato usado por él está representado en la figura 105. Dos tubos de paredes gruesas (3 mm) y de un diámetro de 2 a 3 milímetros, cuidadosamente calibrados, están en comunicación con un recipiente rígido, lleno de mercurio y aceite. Por introducción del tornillo *T* se puede hacer variar la presión dentro de grandes límites.

Los tubos se llenan uno de aire y el otro de gas a comparar, bien secos, por las extremidades superiores, que se cierran luego a la lámpara.

Pouillet dedujo de sus observaciones que hasta 100 atmósferas los gases oxígeno, nitrógeno, hidrógeno y óxido de carbono seguían la misma

ley de compresibilidad que el aire, mientras que el amoníaco, peróxido de nitrógeno y ácido carbónico eran más compresibles.

Las primeras medidas verdaderamente exactas de la compresibilidad de los gases son debidas a Regnault. En todas las mediciones anteriores, la exactitud disminuye con el aumento de la presión, puesto que el volumen de gas a medirse se hace cada vez menor.

Regnault ideó un método que no adolece de este inconveniente. El dispositivo, las medidas y las correcciones ponen, una vez más, en evidencia su ingenio y habilidad.

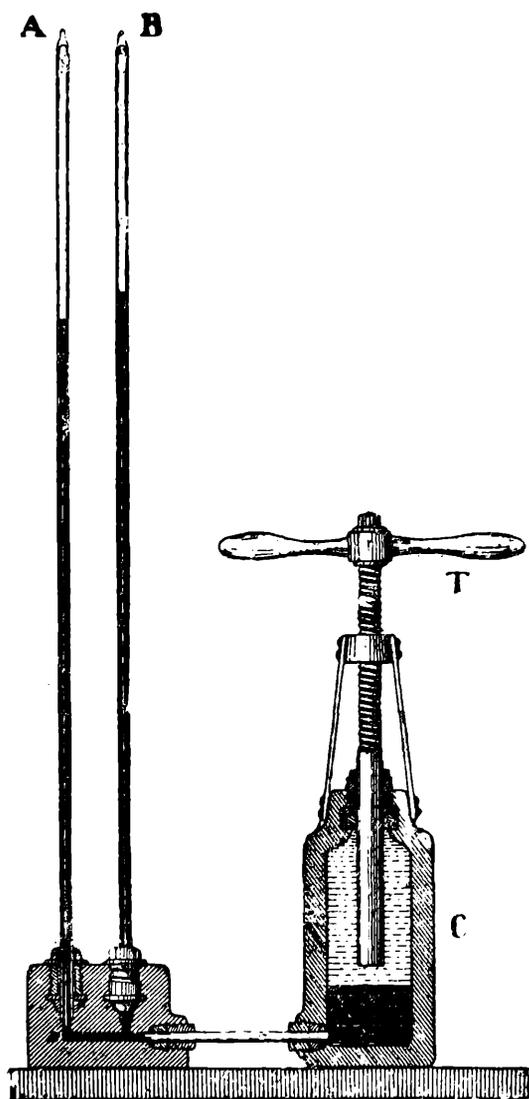


Fig. 105.

El método se funda, esencialmente, en el mismo principio aplicado por Boyle y por Mariotte.

El tubo *AB* (fig. 106) destinado a contener el gas tenía una longitud de 3 metros de largo, 10 milímetros de diámetro interior, y un espesor de 3 milímetros sus paredes. Por su parte superior se comunica por un tubo metálico de pequeña sección, con un recipiente *R*, donde se mantiene a presión elevada y bien seco el gas que ha de estudiarse; esta comuni-

cación puede cerrarse por medio de la llave *I*. Su parte inferior desemboca en el interior de un recipiente cilíndrico *J* que está en comunicación con el cuerpo de bomba de una máquina hidrostática de compresión cargada con mercurio y agua. La otra rama del aparato consistía en un tubo de 24 metros de largo, formado por el acoplamiento de varios tubos de vidrio iguales al ya citado. Por la acción de la máquina de compresión se impele el mercurio en ambas ramas, en las que asciende a distinto nivel. La presión alcanzada se mantiene cerrando la llave *I*; la que soporta el gas se obtiene de la misma manera que la indicada en el caso del tubo de Mariotte.

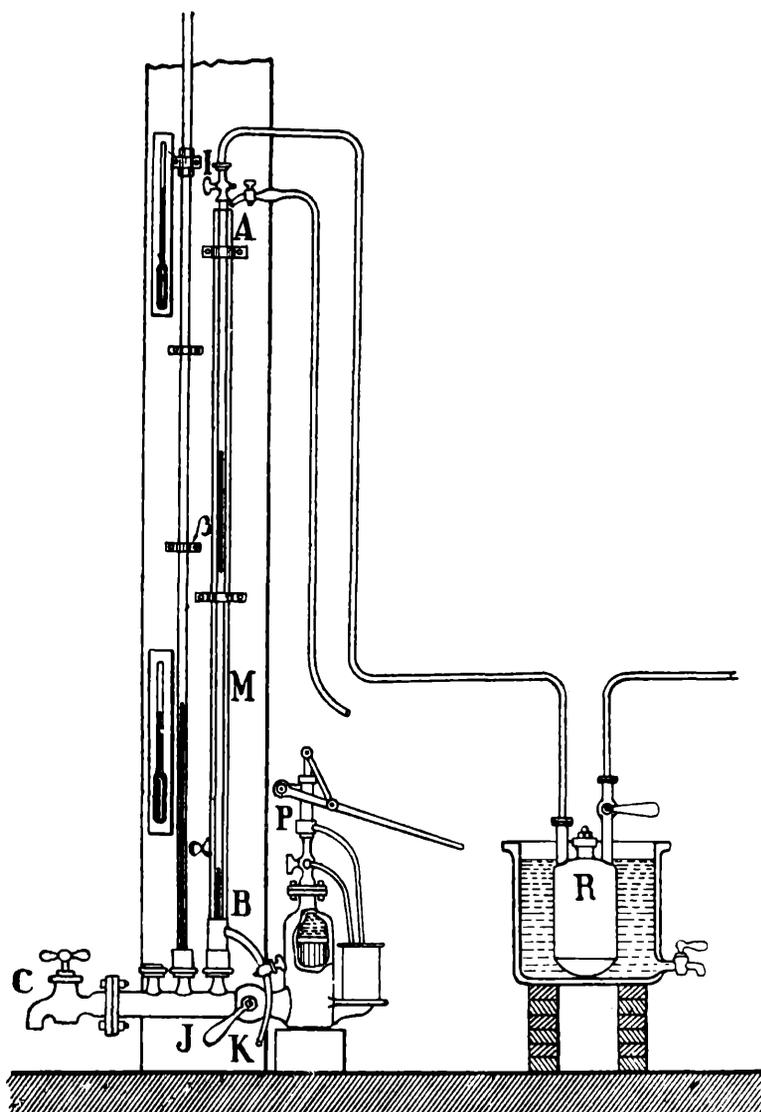


Fig. 106.

El volumen interior del tubo *AB* comprendido entre el robinete *I* y una marca α trazada muy cerca de su extremo inferior, estaba dividida, por un segundo trazo β , en dos partes exactamente iguales. Esto lo logró llenándolo de mercurio, cerrando la llave y dejando escurrir luego por el tubo *K* una vez el mercurio contenido entre el robinete y una marca transitoria trazada, aproximadamente, en el punto

medio y otra vez todo el contenido hasta la marca α . Pesando esas cantidades y desplazando convenientemente la señal provisoria, se logra tener pesos exactamente iguales. La señal de la parte media se convierte, en ese caso, en definitiva.

El procedimiento usado por él consistió en dejar entrar al tubo diferentes cantidades del gas contenido en el recipiente R y accionando luego la bomba hidrostática, hacerle ocupar una vez el volumen total (hasta el trazo α) y otra la mitad de ese volumen (trazo β), determinando, en cada caso, las presiones correspondientes. Le fué posible así extender sus observaciones hasta la presión de 30 atmósferas.

Como los volúmenes son siempre los mismos, la exactitud no disminuye, en este método, con la presión.

A fin de que la temperatura del gas fuese constante durante el curso de las medidas, el tubo AB estaba situado en el eje de otro de mayor diámetro, también de vidrio por el que hacía circular agua a temperatura constante.

Una serie de termómetros situados en el interior de éste le permitían leer la temperatura.

Regnault introdujo en sus medidas algunas correcciones que los demás experimentadores no habían tenido en cuenta, tales como la variación de la presión de la atmósfera con la altura — por lo que la presión leída con un barómetro situado cerca del suelo no es la que se ejerce sobre la superficie libre del mercurio del tubo largo, sino mayor — y la variación de la densidad del mercurio por la compresión proveniente de su propio peso.

A continuación se dan algunas de las medidas de Regnault. En esta tabla v_0 es el volumen total del tubo hasta el trazo α , y v_1 el volumen hasta el trazo β o hasta una posición muy próxima; p_0 y p_1 son las presiones correspondientes:

Aire		Nitrógeno		Acido carbónico		Hidrógeno	
p_0	$\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1}$	p_0	$\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1}$	p_0	$\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1}$	p_0	$\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1}$
738,72	1,001414	735,96	1,001012	764,03	1,007597		
2068,20	1,002709	1159,43	1,001074	1414,77	1,012313		
4219,05	1,003336	2159,22	1,001097	2164,81	1,018973	2211,18	0,998584
6770,15	1,004286	3030,22	1,001950	3186,13	1,028494	3989,47	0,996961
9336,41	1,006366	4953,92	1,002952	4879,77	1,045625	5845,18	0,996121
11472,00	1,005619	5957,96	1,003271	6820,22	1,066137	7074,96	0,994697
		7294,47	1,003770	8393,68	1,084278	9147,61	0,993258
		8628,54	1,004768	9620,06	1,099830	10361,88	0,992327
		9767,42	1,005147				
		10981,42	1,006456				

Si la ley de Mariotte fuese exacta, los cocientes $\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1}$ tendrían siempre un valor igual a la unidad. No sólo no ocurre esto, sino que el producto de la presión por el volumen disminuye paulatinamente, a medida que la presión aumenta, en el aire, nitrógeno y ácido carbónico, y aumenta en el hidrógeno. Las medidas de Regnault se refieren a temperaturas comprendidas entre 2° y 15°C.

El físico austríaco Netterer, pretendiendo licuar los gases, comprime, en la cámara de una especie de fusil a viento, hidrógeno, oxígeno y nitrógeno. Las presiones, que alcanzaron hasta cerca de 3000 atmósferas, las determinaba por medio de una válvula a palanca de seguridad.

Aun cuando en lo que a su propósito fundamental se refiere no obtuvo resultado, sus medidas brindaron los primeros datos relativos al comportamiento de los gases a grandes presiones.

Encontró que en el oxígeno y en el nitrógeno el producto pv disminuye hasta cierta presión, a partir de la cual aumenta continuamente.

En 1879, Cailletet publica los resultados que había obtenido relativos a la compresibilidad del aire, por mediciones que realizara en el fondo de uno de los pozos de la Butte aux Cailles, cerca de París, cuya profundidad era de 560 metros. El aparato usado por él está representado en la figura 107. Se trata de un piezómetro constituido por un tubo cilíndrico de acero *A*, en cuyo interior se encuentra el tubo que ha de contener el gas; *T* es un tubo flexible de acero, constituido por ensambladuras de trozos pequeños y que tenía una longitud de 250 metros. El aparato se bajaba lentamente al pozo por medio de dos hilos de acero. La presión se transmitía al piezómetro por una bomba, como en las experiencias de Regnault. Para determinar el volumen ocupado por el gas, el tubo de vidrio que lo contenía era dorado por dentro; el mercurio se amalgamaba con el oro hasta el borde mismo del menisco. La observación de la señal que así quedaba, se hacía levantando el aparato y destornillando la pieza *C*.

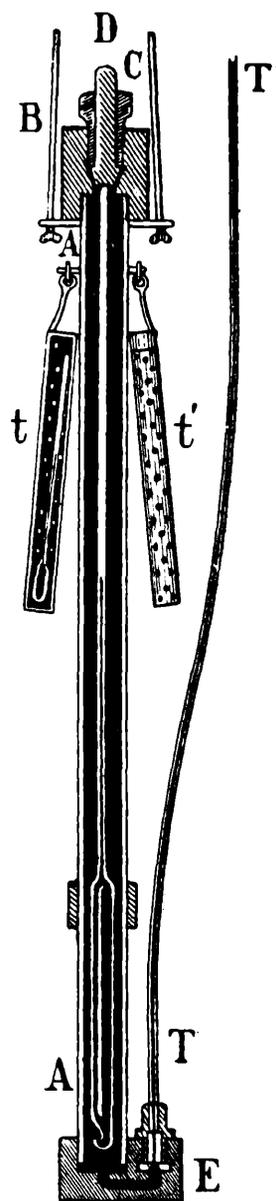


Fig. 107

Sus observaciones, sobre las que no insistiremos, no podían ser consideradas, ni mucho menos, libre de objeción.

Amagat, que por ruptura del aparato había abandonado las observaciones que comenzara en el fondo de una mina, inició una nueva investigación un mes después de aparecida la publicación de Cailletet.

Instala su aparato, semejante al de éste, en el fondo del pozo de una mina de 375 metros de profundidad situada cerca de Saint-Etienne.

Estudió así la compresibilidad del nitrógeno entre 75 y 450 atmósferas. Más tarde estudió en Lyon la región comprendida entre 20 y 27 atmósferas.

Sus resultados están contenidos en la tabla que va a continuación, en la que los productos pv están reducidos de tal manera que, a una atmósfera, su valor sea la unidad:

NITRÓGENO A 15° PARA PRESIONES MENORES QUE 75
ATMÓSFERAS Y A 22° PARA PRESIONES MAYORES

p (en atmósferas)	pv	p (en atmósferas)	pv
27,29	0,9894	168,81	1,0255
46,50	0,9876	208,64	1,0520
62,03	0,9858	251,13	1,0815
73,00	0,9868	290,93	1,1218
80,58	0,9875	332,04	1,1625
90,98	0,9893	373,30	1,2070
109,17	0,9940	430,77	1,2696
126,90	1,0015		

Conocida la compresibilidad del nitrógeno estudió por comparación, con un método semejante al de Pouillet, la del aire, oxígeno, óxido de carbono y etileno.

5. Causas de error indeterminadas. — Cuestiones no resueltas satisfactoriamente en todas estas determinaciones son las que se refieren a la condensación del gas en las paredes del tubo y a su penetración en la masa del vidrio y del mercurio.

El agua puede hacerse penetrar a presión elevada en el oro y no sería, por lo tanto, improbable que ocurriese lo mismo con los gases en el mercurio y el vidrio. Es conocido, además, el hecho de que si se hace el vacío en una ampolla de vidrio, poco a poco aumenta la

presión. Este fenómeno es debido al desprendimiento del gas condensado y ocluído en sus paredes.

6. La ley de Boyle-Mariotte a bajas presiones. — El comportamiento de los gases a presiones muy bajas ha sido y es, aún, motivo de controversia.

Amagat, por ejemplo, que realizó una serie cuidadosa de determinaciones, encontró que esa ley se cumplía satisfactoriamente, mientras que de las medidas de Mendelejeff, confirmadas por las de Fuchs, resultaría que en el aire el producto pv disminuye con la presión a partir de una atmósfera; su valor entre las presiones de 670 y 14 milímetros varía alrededor de 3,5 por ciento. Si esto fuese así el producto pv tendría en el aire un máximo y un mínimo.

De las medidas de Bohr, Baly y Ramsay resulta también que en el aire, oxígeno, nitrógeno e hidrógeno aquel producto no se mantiene constante; los apartamientos serían de alguna consideración a presiones de varios milímetros.

En particular observaron que, a la presión de 0,75 milímetros, más o menos, la ley que vincula a p y v en el oxígeno sufre una variación muy brusca; el producto pv disminuye muy sensiblemente. Este fenómeno fué atribuído a un cambio molecular, que consistiría en la formación de ozono.

En cambio, lord Rayleigh, fundándose en sus investigaciones, que son más recientes que las de los físicos antes mencionados, sostiene que los gases, sin excluir de entre ellos al oxígeno, se comportan a bajas presiones en perfecta concordancia con la ley de Boyle.

La divergencia entre los resultados obtenidos por los distintos investigadores se explicaría por la mayor influencia que tendría a bajas presiones, sobre la exactitud de las medidas, el gas ocluído en las paredes del manómetro.

7. Influencia de la temperatura. Representación gráfica de algunos de los resultados. La ecuación de Van der Waals. — Amagat (1869, 1872, 1880, 1883 y 1893), Andrews, (1869 y 1876), Winkelmann (1878), Roth (1880), Witkowski (1891), y otros, han estudiado la compresibilidad de muchos gases a distintas temperaturas y para presiones que han variado entre 1 y 3000 atmósferas. En las figuras 108 y 109 están representados los resultados relativos a algunos de esos flúidos. En el eje de las abscisas se ha llevado la presión y en el de las ordenadas su producto con el volumen.

La temperatura a que se refieren las observaciones están anotadas sobre las curvas.

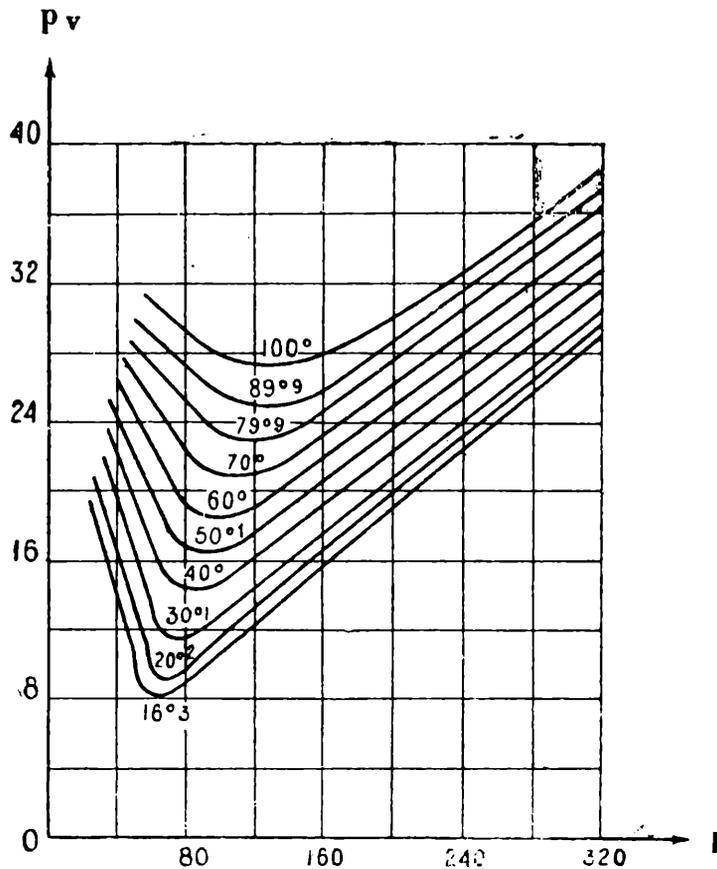


Fig. 108.

Como puede observarse, el comportamiento de los gases se aproxima tanto más al que corresponde a la ley de Boyle-Mariotte cuanto mayor es la temperatura. A temperaturas relativamente altas y presiones no muy elevadas, la aproximación de aquella ley es muy satisfactoria.

En el año 1870 Van der Waals establece una fórmula que representa, con mucha aproximación la compresibilidad de los gases. Esa fórmula, sobre cuya deducción ha-

blaremos en el volumen destinado al calor, es:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right) \cdot (v - b) = \text{const.} = \text{función de la temperatura,}$$

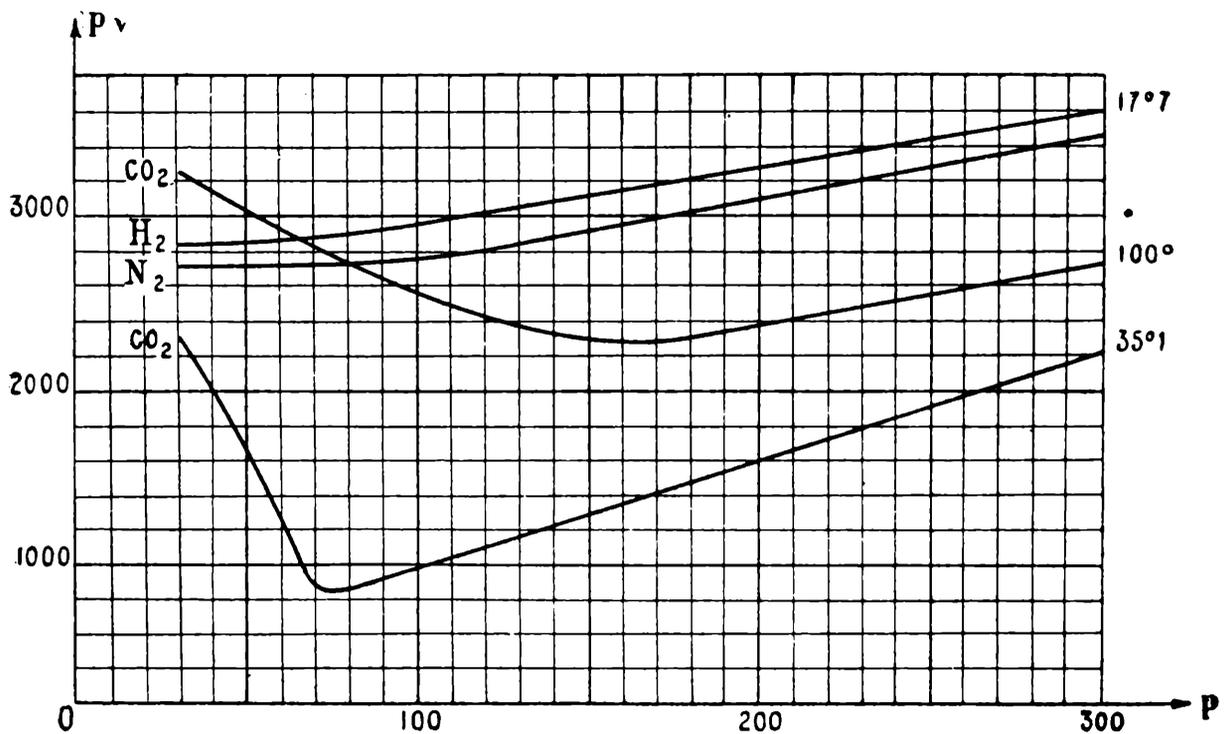


Fig. 109.

donde a y b son constantes; b sería el volumen real ocupado por las moléculas, y $\frac{a}{v^2}$ una *presión interior* proveniente de la fuerza de atracción entre ellas.

8. Medición barométrica de alturas. — En el año 1646 Pascal repitió el experimento de Torricelli empleando diferentes líquidos. La explicación dada por él a esa experiencia correspondía, más bien, a la hipótesis del horror al vacío.

No tardó, sin embargo, en cambiar de opinión, pues en una carta que dirigió a su cuñado Perier, en fecha 15 de noviembre de 1647, le refiere que ha ideado una experiencia con la que podrá decidir entre aquella hipótesis y la explicación formulada por Torricelli, y expresa su opinión concordante con esta última.

En la cima de una montaña, la atmósfera pesa menos — dice — que en su pie; si la altura barométrica es mayor abajo que arriba, no pudiéndose decir que la naturaleza tenga más horror al vacío en una parte que en otra, es menester concluir que estos fenómenos se deben realmente a la presión que proviene del peso del aire.

Perier llevó a cabo ese experimento en septiembre de 1648, instalando un barómetro de Torricelli en el pie del monte Puy-de-Dôme y otro en su cima, cuya altura es de 975 metros, encontrando una diferencia de más o menos 8 centímetros entre las alturas de las columnas de mercurio.

De las mediciones efectuadas posteriormente resulta que la altura barométrica disminuye alrededor de un milímetro por cada 10 metros. Con un buen barómetro se puede poner en evidencia esta variación, situándolo una vez sobre el piso y otra sobre una mesa, pues, a un metro corresponde una variación de 0,1 milímetro.

Recíprocamente, por las medidas de la presión se puede determinar, con bastante aproximación, la diferencia de altura entre dos puntos. En esto se funda la *nivelación barométrica*.

Si se atribuye a toda la masa de aire comprendida entre los puntos de observación una temperatura constante igual a la temperatura media entre ellos es posible, aplicando la ley de Boyle-Mariotte, deducir fórmulas con las que puede calcularse, por las presiones y la temperatura, la diferencia de nivel entre dos puntos.

Sean en efecto AB y CD (fig. 110) dos planos horizontales situados a las alturas z y $z + dz$ sobre el nivel del suelo. La presión sobre el primero sea p_1 y sobre el otro p_2 ; la diferencia $p_1 - p_2$, muy peque-

ña, la indicaremos con dp . El equilibrio de una masa gaseosa como la sombreada que supondremos, lo que es cómodo, constituyendo un paralelepípedo de un centímetro cuadrado de base, se explica, únicamente, si la diferencia $p_1 - p_2$ de las presiones es igual a su peso.

Se tiene, por consiguiente, si se indica con ρ el peso específico del aire:

$$- dp = \rho dz, \quad [5]$$

donde el signo menos del miembro de la izquierda es debido a que la presión disminuye en el sentido positivo de las z .

Por otra parte, puesto que suponemos constante la temperatura, se tiene, por la ley de Mariotte:

$$pv = C = \text{const.} \quad [6]$$

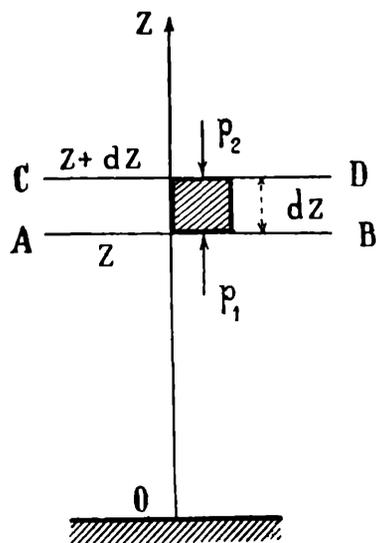


Fig. 110.

Si suponemos, lo que simplifica las operaciones, que v es el volumen de la unidad de peso del aire, es

$$v = \frac{1}{\rho}. \quad [7]$$

De las relaciones [6] y [7] resulta

$$p = C \rho, \quad [8]$$

con la [5] se convierte en

$$- dp = \frac{p}{C} dz, \quad [9]$$

o

$$dz = - C \frac{dp}{p}. \quad [10]$$

Integrando esta ecuación diferencial entre los puntos $z = h_0$ y $z + dz = h$, a los cuales corresponden las presiones p_0 y p posteriormente, resulta:

$$h - h_0 = C \log_e \frac{p_0}{p}. \quad [11]$$

La constante C se determina fácilmente. La relación [8] vale a cualquier presión, de modo que si $p = 1033 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^2}$, es decir, una atmósfera, se tiene:

$$C = \frac{\rho}{1033}, \quad [12]$$

donde en lugar de ρ debe escribirse el valor en gramos del peso de un centímetro cúbico de aire a la temperatura constante t atribuída a la atmósfera. Así se tendrá $h - h_0$ en centímetros, como es fácil verificar.

Es

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \alpha t}, \quad [13]$$

si ρ y ρ_0 se refieren a las temperaturas de 0° y t , a la misma presión — en este caso una atmósfera — y donde $\alpha = 0,00367$ es el coeficiente de dilatación del aire.

Por las [12] y [13] la [11] se convierte en:

$$h - h_0 = \frac{1033}{\rho_0} (1 + \alpha t) \log_e \frac{p_0}{p} \text{ cm.} \quad [14]$$

y puesto que:

$$\rho_0 = 0,001293 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$$

$$h - h_0 = 79900 (1 + \alpha t) \log_e \frac{p_0}{p} \text{ cm.} \quad [15]$$

Introduciendo en lugar de los logaritmos naturales los de Briggs, se tiene, en metros:

$$h - h_0 = 18400 (1 + \alpha t) \log \frac{p_0}{p} \text{ m.} \quad [16]$$

Se obtiene una fórmula más aproximada que ésta teniendo en cuenta la variación de la gravedad con la altura, la humedad del aire y la fuerza elástica del vapor de agua.

9. Altura virtual o aparente y peso total de la atmósfera. — Puesto que la densidad del aire disminuye indefinidamente a medida que se asciende verticalmente, no se puede hablar de un límite de la atmósfera, sino, cuando más, de una altura virtual o aparente. Como

tal se entiende a la altura de una masa de aire que teniendo en toda su extensión la densidad que corresponde a ese flúido a la temperatura de cero grado centígrado y a la presión de 760 milímetros, ejerciese sobre el nivel del mar la presión media de la atmósfera real. La indicaremos con H .

Como esta presión es de 1033 gramos por centímetro cuadrado y la densidad del aire en aquellas condiciones es de 0,001293 gramos por centímetro cúbico, se tiene:

$$H = \frac{1033}{0,001293} \text{ cm} = 7,99 \text{ Kg.}$$

El peso total de la atmósfera se calcula fácilmente, dado que el radio de la tierra es conocido, siendo su valor medio,

$$R = 6367,4 \cdot 10^5 \text{ cm.}$$

La superficie terrestre tiene, entonces, la extensión,

$$S = 4 \pi R^2 = 5,095 \cdot 10^{18} \text{ cm}^2,$$

y el peso total de la atmósfera será:

$$P = 5,095 \cdot 1,033 \cdot 10^{18} \text{ Kg} = 5,263 \cdot 10^{15} \text{ toneladas}$$

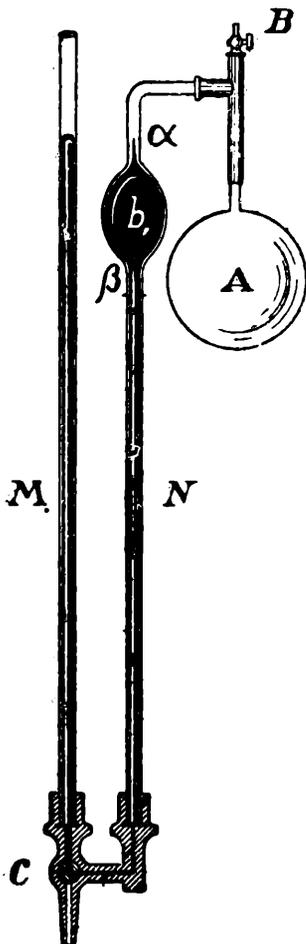


Fig. 111.

El de Regnault, que es el mejor, está representado en la figura 111. Se trata de un dispositivo manométrico, en una de cuyas ramas se adapta, por una prolongación tubular, una ampolla A de vidrio. La llave B permite ponerla en comunicación con la atmósfera.

Dejando abierto ese robinete se vierte mercurio en la rama larga hasta que el nivel coincida con una marca α situada sobre el ensanchamiento. Si se cierra ahora aquella llave, queda limitada dentro de la ampolla y de las ramas tubulares, hasta α , cierta masa gaseo-

sa a la presión atmosférica, cuyo volumen, bien definido, indicaremos con V .

Si girando convenientemente la llave C se deja escurrir el mercurio hasta que el nivel en la rama de la derecha coincida con la marca β , aquella masa de aire ocupará el volumen $V + v$, si se indica con v el volumen comprendido entre las dos marcas; su presión será menor que la atmosférica, y, por lo tanto, en el tubo de la izquierda el nivel del mercurio estará por debajo de la altura en que se encuentra en el otro. Sea h_1 esa diferencia de nivel, que se mide exactamente con un catetómetro, e indiquemos con H la altura de la columna barométrica. Se tiene, si la temperatura no ha variado:

$$HV = (H - h_1) (V + v), \quad [17]$$

con cuya expresión, midiendo H , h_1 y v se calcula V . El volumen v se determina pesando el mercurio que es capaz de contener el ensanchamiento b , a cierta temperatura, entre las señales α y β ; para ello se comunica con el exterior, por el robinete C , únicamente esa rama, y dejando escurrir el mercurio hasta que su nivel pase de la marca superior a la inferior.

Situado el cuerpo, cuyo volumen x se trata de medir, en el interior de la ampolla A , se repiten idénticas operaciones. Se tendrá, análogamente:

$$H (V - x) = (H - h_2) (V + v - x), \quad [18]$$

con lo que se calcula x .

Primitivamente, estos aparatos fueron muy usados, particularmente en el estudio de las pólvoras. Actualmente no se emplean para ese fin, pues las pólvoras condensan el aire con el que están en contacto, originando así errores en las medidas.

B. — MANÓMETROS

11. Definición. — Los manómetros son dispositivos destinados a la medición de las presiones de los gases y de los vapores.

Antes de tratar la ley de Boyle debimos habernos ocupado de ellos, pues para investigar la compresibilidad de los gases lo primero que hay que idear son los dispositivos manométricos. Particularmente para presiones muy bajas las cosas no son tan sencillas.

Es claro que aplicando luego los resultados experimentales obtenidos en el estudio de la elasticidad de los gases se puede, inversamente, determinar las presiones. En realidad se aplica con este fin la ley de Boyle únicamente en determinaciones groseras.

12. Manómetro a aire libre. — El manómetro de Regnault (figura 112) pertenece a ese tipo. Dos tubos de vidrio del mismo diámetro situados verticalmente y paralelos entre sí están en comunicación

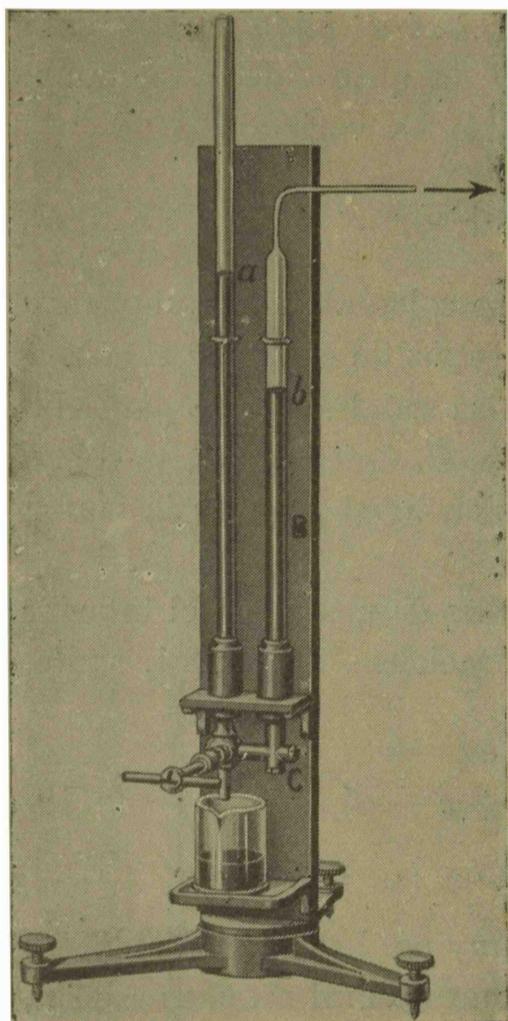


Fig. 112.

a través de una pieza tubular metálica *C*, con las que se hallan unidos por una juntura hermética.

Uno de ellos, corto, se prolonga en un tubo delgado por el que se comunica con el fluido cuya presión ha de medirse; el otro puede tener las más variadas longitudes.

Cargado el aparato con mercurio, la presión que se ejerce sobre la superficie libre de éste en la rama de la derecha es igual a la presión atmosférica más la diferencia de altura — que se mide con un catetómetro si es menor de un metro — entre los niveles del mercurio en las dos ramas.

A esta diferencia corresponde el signo positivo cuando el nivel *a* está a mayor altura que el nivel *b*, y es signo negativo en caso contrario.

La llave a tres vías que se ve abajo permite variar, cómodamente, la cantidad de mercurio del aparato.

En el estudio de la compresibilidad de los gases se han empleado los manómetros de este tipo hasta presiones de 430 atmósferas.

13. Manómetros para pequeñas presiones. Manómetro diferencial de Kretz-Batelli. Manómetro diferencial de lord Rayleigh. — Para la medición de presiones de algunos centímetros y hasta de 10 milímetros se recurre a una especie de dispositivo barométrico a sifón (fig. 113), que se carga de mercurio, bien puro, con

las mismas precauciones con que se opera en la preparación de un barómetro.

Si se hace el vacío en la rama abierta, cuando la presión alcanza cierto valor — uno diez centímetros más o menos, — el mercurio se desprende del vértice cerrado del tubo, quedando encima de él el vacío. La presión resulta medida por la distancia vertical entre los dos niveles.

Algunas máquinas neumáticas están provistas de un manómetro como éste. Se encuentra colocado en el interior de un tubo de vidrio

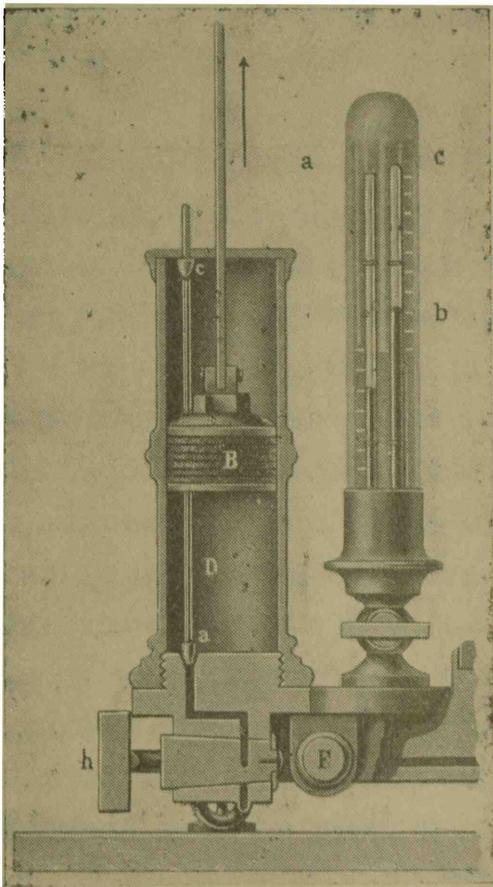


Fig. 113.

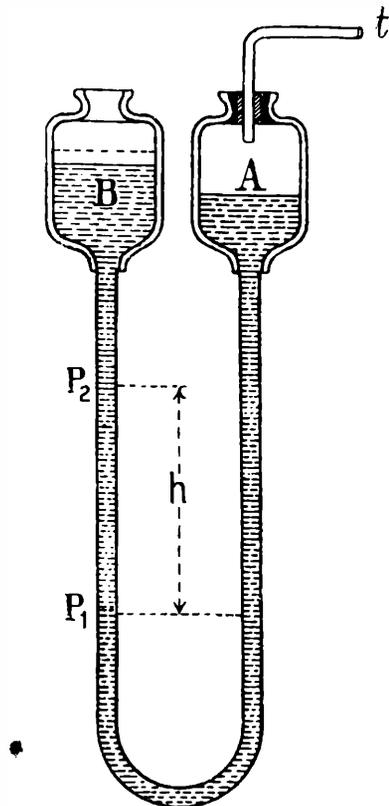


Fig. 114.

de paredes gruesas, que se pone en comunicación con el recipiente en que ha de hacerse el vacío.

Kretz ha ideado un manómetro con el cual se pueden medir diferencias muy pequeñas.

Un tubo en U (fig. 114), de diámetro interior pequeño, termina en sus extremos en dos recipientes *A* y *B*, cuyos diámetros son muy grandes con respecto al suyo.

En el recipiente *A* se vierte una mezcla coloreada de alcohol y agua de una densidad que indicaremos con ρ y en el otro esencia de trementina cuya densidad ρ' sea menor que la de la solución anterior. La

superficie de separación de estos líquidos, no mezclables, se encontrará en la rama de la izquierda, en cierto punto P_1 , y será muy nítida.

Si la presión que se ejerce sobre la superficie libre del recipiente A aumenta en una cantidad Δp , la superficie de separación ascenderá pasando a otro nivel tal como el P_2 . Puesto que los recipientes extremos son de sección relativamente muy grande, sus niveles no varían de una manera apreciable, y, por lo tanto, el cambio de presión en el seno de la masa flúida, en el punto P_1 , proviene de la sustitución de una columna de esencia de trementina de la altura $P_1P_2 = h$ por otra de solución de alcohol y agua. La variación de la presión en ese punto es, según el principio de Pascal, igual a la variación Δp . Se tiene así:

$$\Delta p = h (\rho - \rho'). \quad [19]$$

Haciendo la diferencia $\rho - \rho'$ muy pequeña, el desplazamiento h de la superficie de separación de los líquidos será, para valores muy pequeños de Δp — hasta 0,002 milímetros de mercurio — accesible a la medida.

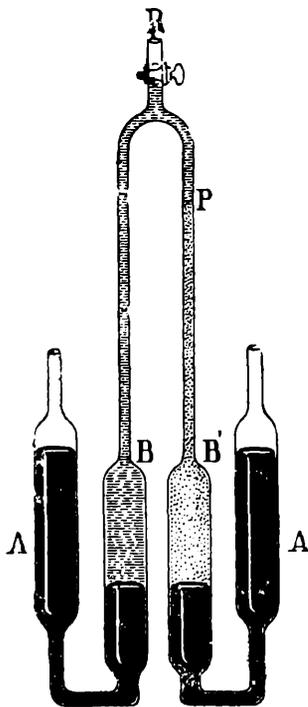


Fig. 115.

Batelli ha mejorado este manómetro construyendo un dispositivo (fig. 115) que permite impedir el contacto entre uno de los líquidos manométricos y el gas cuya presión ha de medirse.

Los recipientes A y A' , B y B' son cilíndricos y de gran diámetro, en comparación con el del tubo en U que los pone en comunicación.

Las partes sombreadas indican mercurio. Encima de su superficie libre en B se encuentra la esencia de trementina y sobre la de B' la solución coloreada de alcohol y agua.

La superficie de separación se encuentra en P . Las variaciones de presión sobre el mercurio de uno de los tubos A o A' se manifiesta por su desplazamiento y se calcula por la misma fórmula anterior.

Este dispositivo puede emplearse no solamente como manómetro diferencial sino también como micromanómetro, para lo cual debe cerrarse uno de los recipientes A , extrayendo previamente, por completo, el aire que contuviera.

Puesta en comunicación la otra rama extrema con un gas a presión muy baja, la altura h será la distancia entre la posición de la

superficie de separación en estas condiciones y la que tenía cuando ambas ramas estaban en comunicación con la atmósfera, pues la posición P no se modificaría si, tanto en A como en A' , se hiciese un vacío perfecto.

La fuerza elástica del vapor de mercurio, actuando tanto en un recipiente como en otro, no ocasiona errores en las medidas.

Batelli aplicó este método para medir las presiones en la investigación que realizó sobre la compresibilidad de los gases a muy bajas presiones.

Lord Rayleigh ha ideado un micromanómetro sumamente sensible que permite medir, con mucha exactitud, no sólo diferencias sino también presiones pequeñísimas entre 30 y 10^{-2} milímetros.

La figura 116 representa este instrumento en la forma que le han dado Schöel y Heuse para medidas comprendidas entre 5 y 10^{-2} milímetros de mercurio. Se trata de dos ampollas A_1 y A_2 de vidrio, de unos 25 milímetros de diámetro, que se comunican entre sí por un tubo BCD en U, que se prolonga hacia abajo por un tubo CE en comunicación, por medio de un grueso tubo de goma, con un recipiente R .

Están ligados por arriba por un cilindro arqueado, también en U, de vidrio macizo. De las uniones mismas de este cilindro con las ampollas, emergen, hacia el interior de éstas, dos piezas cónicas de vidrio, I_1 e I_2 , que terminan en punta muy afilada.

El aparato, fijo en un brete apropiado, puede girar, por una suspensión conveniente, alrededor de la arista horizontal de un prisma metálico. La giración se determina por el movimiento de un tornillo de muy corto paso.

Los tubos T_1 y T_2 comunican las ampollas con el exterior.

Supongamos que se da al aparato una posición inicial tal que las dos puntas de las lengüetas I_1 e I_2 estén exactamente sobre el mismo plano horizontal. Si se hace el mismo vacío, muy grande, en el interior de A_1 y A_2 , el mercurio subirá de nivel en ambas ramas; por desplazamiento de R y apretando finalmente al tubo con el tornillo de presión se logrará que las dos puntas toquen simultáneamente

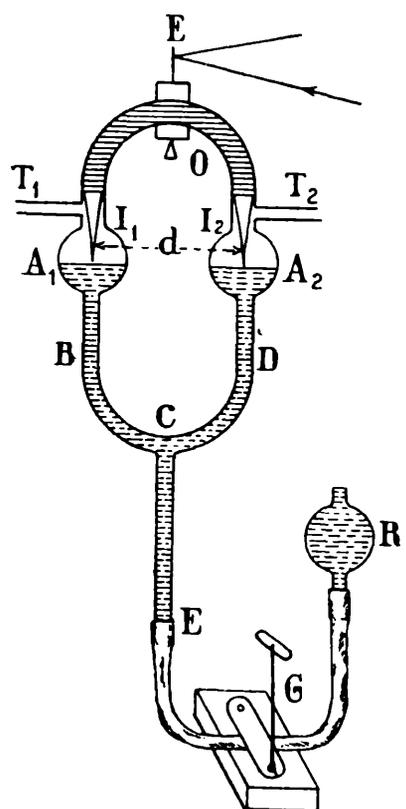


Fig. 116.

sobre el nivel del mercurio. Estos contactos se observan por un dispositivo a microscopio, en cuyo campo aparecen, merced a un prisma de reflexión total, simultáneamente las dos imágenes.

Si la presión aumenta a la derecha, por ejemplo, baja un poco el nivel del mercurio en A_2 y sube en A_1 y los contactos desaparecen. Estos se establecen haciendo girar el aparato en el sentido en que se mueven las agujas de un reloj. El ángulo θ en que es menester girar el aparato para que esto suceda se puede medir muy exactamente fijando en él un pequeño espejito E y observando el desplazamiento n que experimenta sobre una pantalla situada a la distancia D un delgado haz de luz reflejado, pues es:

$$\text{tang } 2 \theta = \frac{n}{D}. \quad [20]$$

Si d es la distancia en milímetros entre las dos puntas, la variación Δp de la presión será:

$$\Delta p = d \text{ sen } \theta. \quad [21]$$

Si se quiere medir el valor absoluto de presiones muy pequeñas es suficiente extraer de una de las ampollas, de la manera más perfecta posible, los gases que contenga (esto es muy factible). Lo mismo que en el caso del micromanómetro de Batelli la fuerza elástica del vapor de mercurio no influye sobre los resultados.

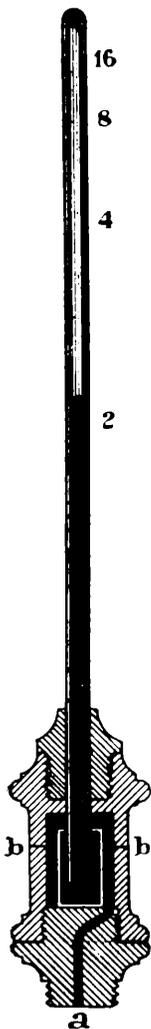


Fig. 117.

14. Manómetro a aire comprimido. — En los manómetros de este tipo la presión se determina por el volumen que adquiere determinada masa de gas encerrada en una de sus ramas.

La figura 117 representa un dispositivo de este tipo, constituido por un tubo cerrado en uno de sus extremos, invertido en una cubeta con mercurio que se encuentra en una caja metálica cerrada herméticamente.

La presión se ejerce, a través del tubo a , sobre la superficie libre del mercurio, transmitiéndose hasta la masa gaseosa, que está constituida, ordinariamente, por hidrógeno bien seco.

Si se pretende construir un verdadero instrumento de medida, el único camino consiste en calibrar cuidadosamente el tubo en que se

encuentra el gas y proveerlo de la graduación correspondiente, situando el cero de la escala en su extremo superior. Midiendo en cada caso el volumen, a la temperatura ambiente, cuando la presión que se ejerce en el interior de la caja metálica es la atmosférica — la del gas tendrá este valor disminuído en la presión que corresponde a la diferencia de nivel entre el mercurio de la cubeta y del tubo — y el volumen a que se reduce por la presión que se quiere medir queda ésta determinada por los resultados experimentales de Regnault y de Amagat.

Para las determinaciones técnicas es suficiente con aplicar la ley de Mariotte.

La exactitud de las determinaciones disminuye en estos instrumentos a medida que la presión aumenta.

Para determinaciones groseras existen manómetros de este tipo cuyo tubo está provisto de una graduación que da directamente la presión; la calibración se hace en tal caso aplicando la ley de Boyle para una temperatura media.

15. El micromanómetro de Arago-McLeod. — Este manómetro, representado en la figura 118, se funda en la ley de Boyle-Mariotte.

El volumen interior de la rama de la derecha comprendida entre el punto *C* de ramificación y la extremidad superior, volumen que indicaremos con *V*, es conocido. Se le determina exactamente pesando el mercurio que puede contener. La prolongación *AB* consiste en un tubo de pequeño diámetro que se gradúa en centímetros o en milímetros cúbicos previa una calibración cuidadosa.

Si se pone en comunicación el aparato, por la extremidad del tubo *E*, con un recinto mantenido a una presión muy baja, el gas contenido en todas sus ramas estará a esa misma presión mientras el nivel del mercurio en el tubo *CF* esté por debajo del punto *C*, lo que se logra desplazando verticalmente el recipiente *R*.

Indiquemos esa presión con *x*. Si se levanta el recipiente *R*, tan pronto como el mercurio pasa de *C* el gas contenido en la probeta

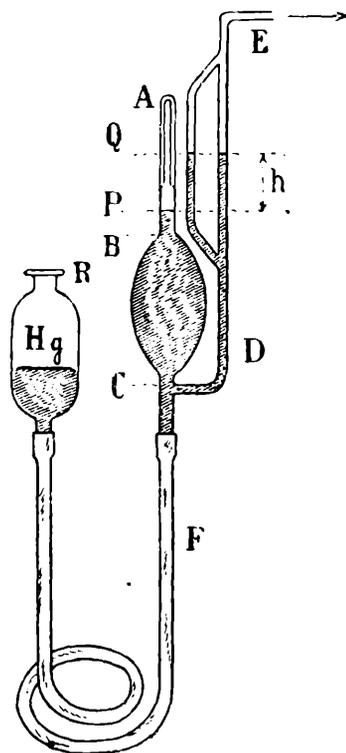


Fig. 118.

de la derecha comienza a comprimirse, mientras que en la otra rama la presión es la misma de antes. La diferencia de presión se manifiesta en una diferencia en las alturas de los niveles de mercurio de las dos ramas *CDE* y *CBA*. Supongamos que el ascenso de *R* continúe hasta que el nivel del mercurio a la derecha se encuentre en *P* por ejemplo; el nivel en el otro tubo estará en un punto tal como el *Q*.

Si *v* es el volumen del gas encerrado entre *A* y *P*, y *h* la distancia vertical entre *P* y *Q*, se tiene, por la ley de Boyle:

$$xV = (x + h)v, \quad [22]$$

de donde:

$$x = h \frac{v}{V - v}. \quad [23]$$

Esta última relación muestra que el manómetro es tanto más sensible cuanto menor sea *v* con respecto a *V*, por cuyo motivo a la probeta de la derecha se le ha dado la forma que muestra la figura. Con este instrumento pueden medirse presiones hasta de 10^{-4} milímetros.

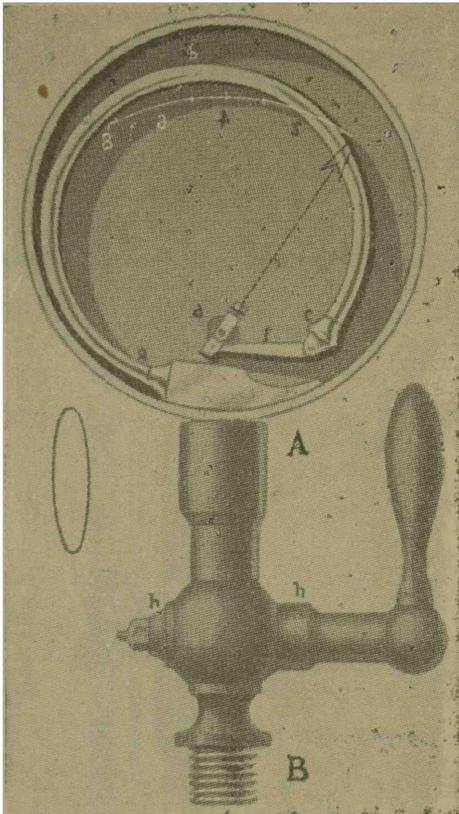


Fig. 119.

16. Manómetros metálicos. — La construcción de estos aparatos obedece a la misma idea aplicada en los barómetros metálicos.

El manómetro de Bourdon, por ejemplo, (fig. 119), consiste en un tubo circular metálico *abc*, de sección elíptica, que termina en su extremo *a* en una cámara fija a la armadura exterior; en ella desemboca el tubo *AB* a través del cual se le comunica con la masa gaseosa cuya presión ha de medirse. La otra extremidad *c* está unida por un juego de palancas a una aguja que puede girar alrededor de un eje y cuyo movimiento regula un resorte en espiral.

Si se sopla, por ejemplo, por el tubo *BA*, la presión interior del tubo *abc* se hace mayor que la exterior, por lo que tiende a desarrollarse; el extremo *c* se aleja de *a* accionando la palanca *f* y haciendo girar la aguja en sentido contrario a las de un reloj.

El aparato se calibra — puesto que se usa para determinaciones groseras — por comparación con uno a aire comprimido, operación que debe repetirse de cuando en cuando.

C. — BOMBAS HIDRÁULICAS Y OTROS DISPOSITIVOS HIDROMECAÑICOS

17. **Bombas hidráulicas.** — Las bombas hidráulicas son dispositivos destinados a elevar el agua. Los más empleados son los siguientes:

A. **BOMBA ASPIRANTE.** — Un cilindro metálico (fig. 120), hueco, denominado *cuerpo de bomba*, cerrado en su parte superior, se prolonga hacia abajo en un tubo del mismo material, llamado de aspiración, cuya extremidad, provista de rejilla, se sumerge en el agua. Una válvula *a*, situada en el nacimiento del tubo, abre o cierra su comunicación con aquél.

Un émbolo, provisto de una abertura axial dotada de una válvula *b*, puede recorrer el interior del cilindro, por la acción de una palanca.

Tanto la válvula *a* como la *b* se abren hacia arriba.

El funcionamiento es el siguiente: Si el émbolo se mueve hacia arriba, y, si se trata de los movimientos iniciales, el aire se enrarece en el interior de la bomba y la presión atmosférica que actúa sobre la superficie libre *ss* del líquido obliga a ascender a éste por el tubo de aspiración, abre la válvula *a* y llena en parte el cuerpo de bomba.

La válvula *b* permanece, mientras tanto, cerrada, a causa de la menor presión interior.

Cuando el émbolo se mueve hacia abajo presiona al líquido, lo que determina el cierre de la válvula *a* y la abertura de la *b*. El fluido pasa así al otro lado del émbolo y se derrama, en el desplazamiento siguiente, por el tubo lateral *C*.

Cuando el cuerpo de bomba está lleno de agua, un desplazamiento hacia arriba del émbolo determina el ascenso del fluido, por cuanto no puede existir un espacio vacío mientras que la columna de agua

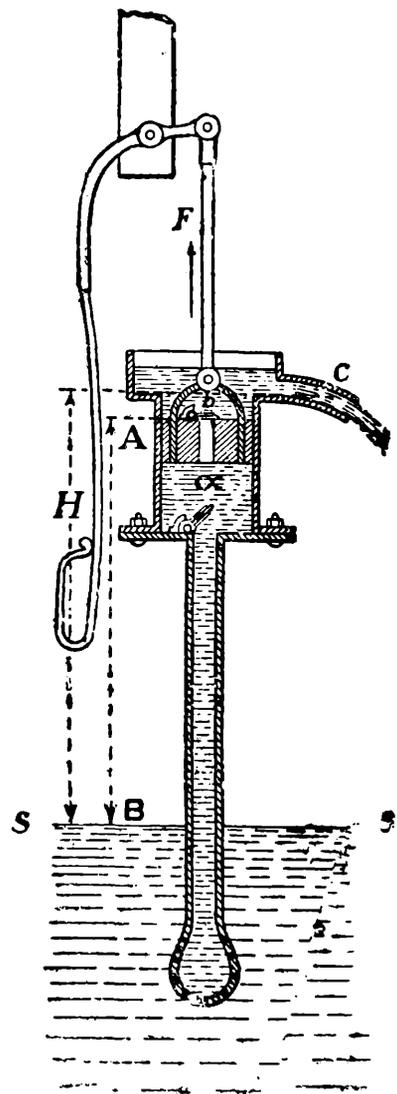


Fig. 120.

AB no tenga la altura que corresponde a la presión atmosférica. Esta altura sería de 10,33 metros pero, por la imperfección de los ajustes, ocurre que, en la práctica, la máxima altura a que se puede elevar el agua, con mecanismos de esta clase, es de 8 metros más o menos. El tubo de aspiración no debe, por lo tanto, tener una longitud mayor.

B. TRABAJO Y RENDIMIENTO. — Prescindamos, por el momento, del trabajo que se gasta a causa del roce.

Sea P el peso del agua que se levanta en cada ascenso del émbolo. cuya carrera indicaremos con h . Esa masa flúida recorre, como es notorio, el camino vertical H (fig. 120).

Sea, además, F la fuerza media con que es traccionado el vástago. El trabajo ejecutado en cada carrera hacia arriba es $F \cdot h$, que debe ser igual, excluídas las pérdidas, al trabajo PH gastado para levantar el peso P de agua a la altura H en contra de la gravedad. Se tiene así:

$$F \cdot h = P \cdot H. \quad [24]$$

Por otra parte, si S es la sección del cuerpo de bomba y P el peso de agua que se alza en cada juego del émbolo, se tendrá:

$$P = S \cdot h, \quad [25]$$

y por la [24] se tiene, para la fuerza media, la relación:

$$F = H \cdot S. \quad [26]$$

Las resistencias pasivas hacen que si se gasta en cada movimiento completo del émbolo (ida y vuelta) cierto trabajo, solamente una parte de éste — al rededor del 65 por ciento — se aprovecha en levantar agua. Si se indica con α el rendimiento, se tiene:

$$\alpha \cdot F \cdot h = P \cdot H \quad [27]$$

y por consiguiente:

$$F = \frac{H \cdot S}{\alpha}. \quad [28]$$

C. BOMBAS IMPELENTE Y ASPIRANTE IMPELENTE. — La bomba im- pelente (fig. 121) carece de tubo de aspiración; su cuerpo mismo está sumergido, en parte, en el líquido. Su émbolo es macizo y el tubo de

derrame, que nace en la parte inferior del cilindro y que está provisto de una válvula que se abre de abajo hacia arriba, está dotado, en

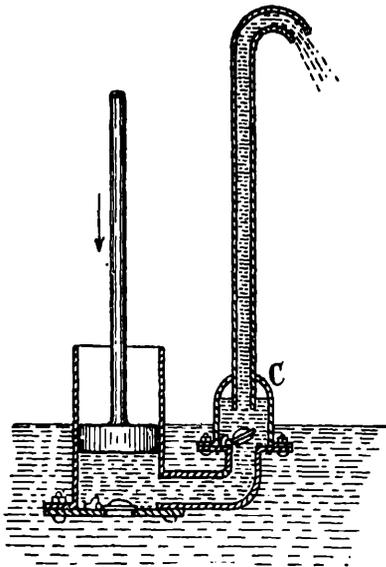


Fig. 121.

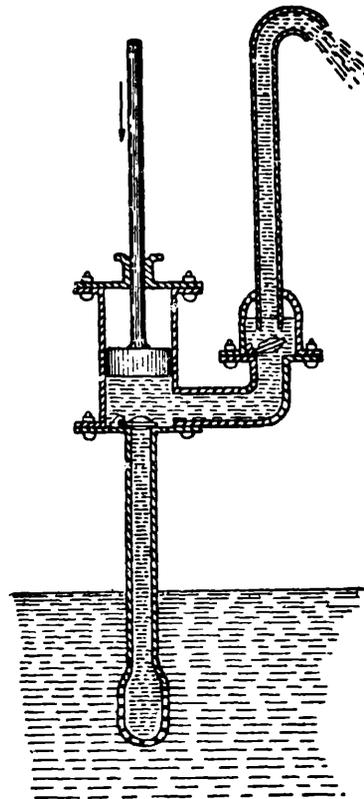


Fig. 122.

las buenas construcciones, de una cámara *C* de aire que mejora su funcionamiento, determinando además, un escurrimiento continuo.

Su funcionamiento salta a la vista. El cuerpo se llena de líquido, mientras el émbolo asciende merced a la presión existente en el fluido, gran parte de la cual es debida a la presión atmosférica.

Esta bomba tiene el inconveniente de que posibles oscilaciones del nivel del agua pueden dejarla en seco. Además, el arreglo de las válvulas, en caso de mal funcionamiento, requiere que la bomba sea retirada de su lugar.

Por este motivo se utiliza la aspirante impenetrante representada por la figura 122.

Un dispositivo de mucha eficacia, debido a que el émbolo, cualquiera sea el sentido de su marcha, aspira tras de sí e impele el líquido que está delante, por lo que se le denomina a doble juego, es el de la figura 123.

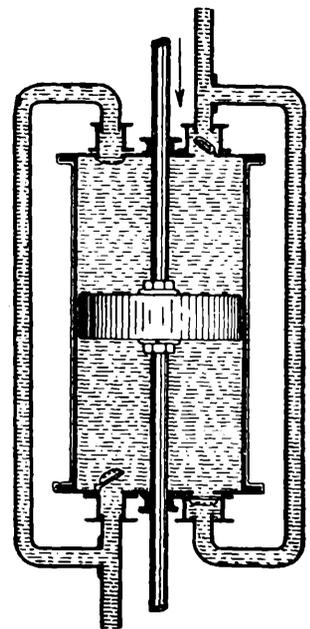


Fig. 123.

D. BOMBA DE INCENDIO. — La figura 124 representa una bomba de este tipo.

Se trata de un juego de dos potentes bombas impelentes que empujan el agua a una cámara grande *a* de aire. La compresión del gas impele el líquido por el tubo *hg* en un chorro intenso y continuo. Las bombas modernas pueden aspirar el agua sea directamente de las cañerías o de un río, lago, o arroyo, para lo cual los cuerpos de

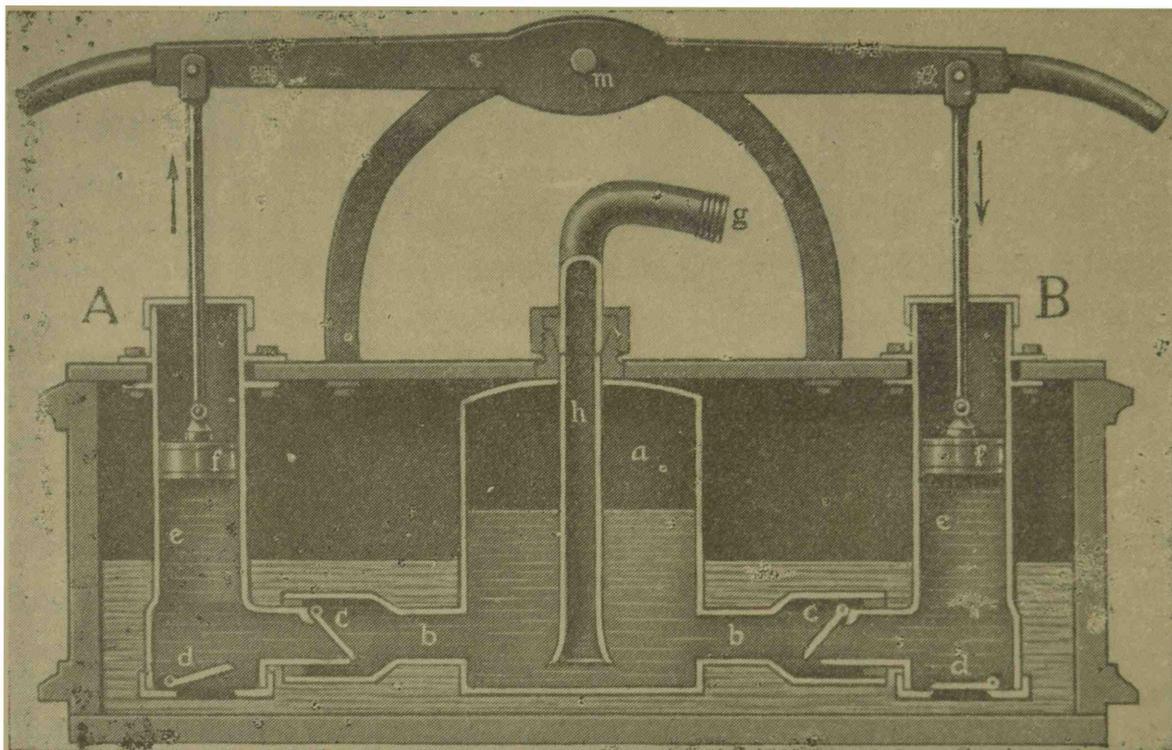


Fig. 124.

bomba se prolongan por dos tubos que terminan en una boca común, en la que puede atornillarse una pieza metálica provista de un largo tubo de goma.

E. BOMBAS ROTATIVA Y CENTRÍFUGA. — La bomba rotativa (fig. 125) está constituida por una caja metálica en cuyo interior gira excéntricamente el tambor *M*, provisto de varias aletas móviles, las que guiadas por un anillo central se apoyan constantemente en sus paredes. La giración del tambor en el sentido de las flechas hace que las paletas impulsen el líquido de izquierda a derecha, estableciendo una corriente desde *E* hacia *S*.

La figura 126 representa una bomba centrífuga para bajas presiones. Un árbol provisto de álabes gira en el interior de una armadura metálica cilíndrica dotada de dos aberturas.

El agua entra por *E* llenando el cuerpo de la bomba; las paletas la arrojan, por obra de la fuerza centrífuga, hacia la periferia, deter-

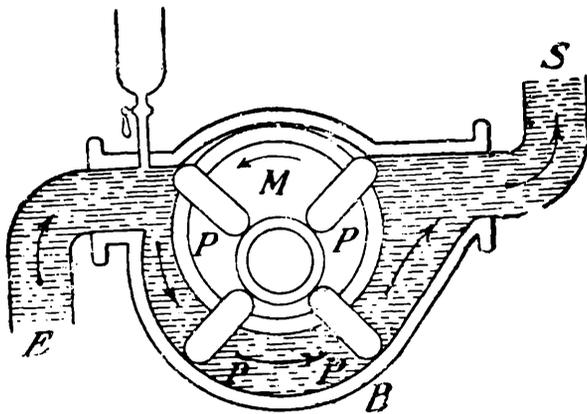


Fig. 125.

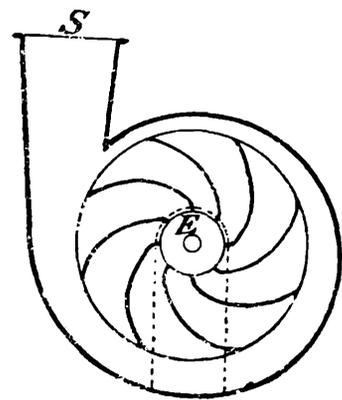


Fig. 126.

minando así presiones suficientes como para elevar el líquido a cierta altura. Por lo común están accionadas por un motor eléctrico.

18. **El sifón.** — Aun cuando la teoría completa del sifón sólo puede considerarse en la hidrodinámica, indicaremos aquí su funcionamiento, siguiendo una vieja costumbre. Conviene hacer notar antes que nada, que la presión atmosférica desempeña en el fenómeno — que se produce también en el vacío — un papel muy secundario.

El sifón consiste (fig. 127) en un tubo doblado, una de cuyas ramas es más larga que la otra y que, lleno de líquido, se invierte introduciendo sus extremidades en dos recipientes con líquidos. Suficiente es que esto ocurra con la rama corta.

Indiquemos con p_0 la presión sobre las superficies libres del líquido en R_1 y en R_2 , cuyo valor puede ser cero.

La presión p en A será, de acuerdo con el teorema general de la hidrostática:

$$p_A = p_0 - h_1 \rho,$$

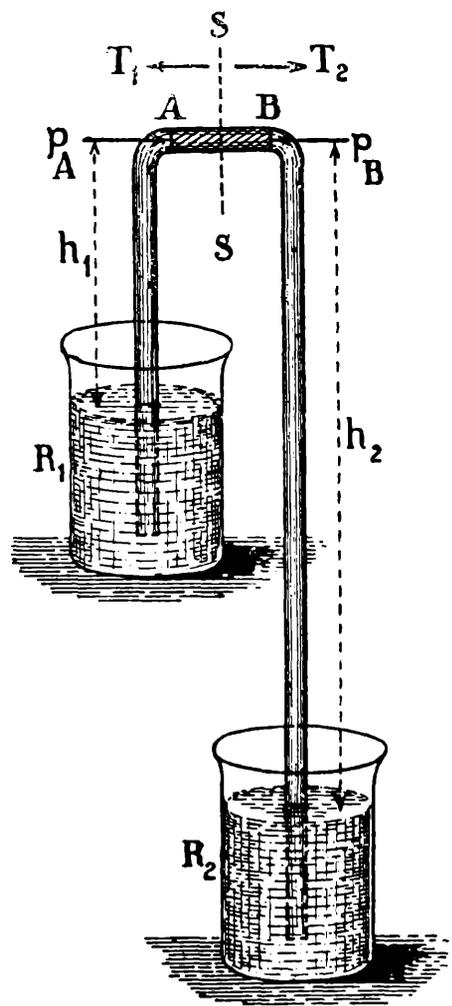


Fig. 127.

si h_1 indica la altura de la columna líquida y ρ el peso específico del fluido.

De la misma manera la presión en B será:

$$p_B = p_0 - h_2 \rho .$$

La presión en A es, por lo tanto, mayor que en B . La diferencia tiene el valor:

$$p_A - p_B = (h_2 - h_1) \rho .$$

El líquido contenido en la región sombreada es, según se ve, empujado hacia la derecha. El fluido circula constantemente en ese mismo sentido.

Discutamos un poco más a fondo el proceso. Actúe primeramente la presión atmosférica. El líquido se encuentra, en ese caso — si las

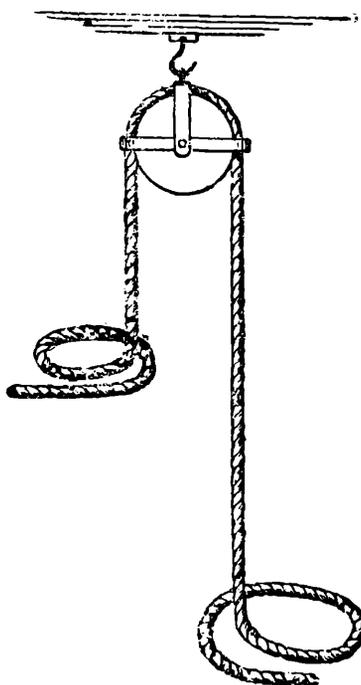


Fig. 128.

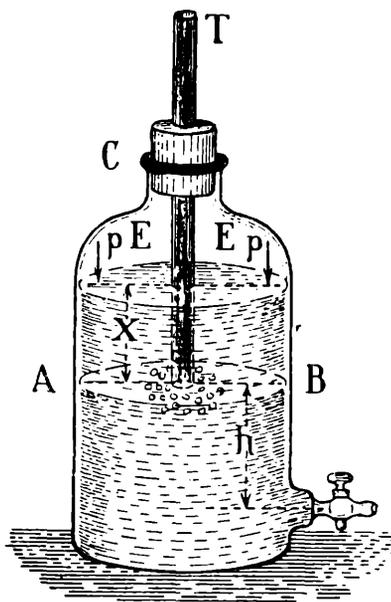


Fig. 129.

ramas no son muy largas — comprimido en todas partes, es decir, cualquiera sea la región en que se aisle con el pensamiento una porción de fluido, las fuerzas exteriores son de compresión. La columna líquida no tiene por qué cortarse en ninguna parte y la circulación puede continuar indefinidamente.

Sea, en cambio, la presión p sumamente pequeña, cero, por ejemplo. En este caso el líquido está sometido a una tracción. En la sección SS , por ejemplo, la tracción hacia un lado es, en valor absoluto,

$T_2 = h_2 \rho$, hacia el otro $T_1 = h_1 \rho$; la columna líquida debe soportar en SS , sin cortarse, la tracción $(h_2 - h_1) \rho$. Como se ha visto en el párrafo 3 del capítulo III, los líquidos pueden soportar, sin que su continuidad cese, tensiones relativamente elevadas.

En suma, el funcionamiento del sifón es exactamente igual al del movimiento de una sogá dispuesta como muestra la figura 128.

19. El frasco de Mariotte. — En este aparato (fig. 129) se aprovecha la presión atmosférica de una manera inteligente para mantener una corriente de líquido bajo una diferencia constante de presión.

Un tubo T de vidrio pasa a través del tapón C , que cierra herméticamente el frasco, penetrando en el seno del líquido que éste contiene.

Puesto que sobre el nivel AB la presión es igual a la p_0 de la atmósfera, se tiene, si p es la presión existente en el espacio E , que p_x es igual a la presión p más la presión del fluido correspondiente a la altura x .

Si se deja salir el líquido abriendo la llave del tubo lateral inferior, esa igualdad se mantiene, porque en seguida penetra aire en E , a través del seno del líquido, proveniente de la atmósfera.

La salida del fluido se hace, constantemente, bajo la presión de la altura líquida \dot{x} .

CAPITULO VI

MAQUINAS NEUMATICAS

1. **Máquinas neumáticas** ⁽¹⁾. — Las máquinas neumáticas son dispositivos destinados a hacer variar la presión, dentro de grandes límites, en el seno de una masa gaseosa contenida en un recinto limitado por paredes rígidas. Si la presión ha de ser disminuída, el juego del mecanismo extrae continuamente el flúido; si ha de ser aumentada introduce nuevas masas de gas.

Los tipos de máquinas existentes hoy día son numerosos. Nos ocuparemos de algunas, especialmente de las que reputamos mejores y de aquellas que, si bien anticuadas, se encuentran con frecuencia en los laboratorios.

La extensión de este capítulo se justifica por la enorme importancia científica y técnica que, en la actualidad, tiene el alto vacío.

2. **Máquina de vacío y compresión a un solo émbolo. Espacio nocivo. Límite de enrarecimiento.**—La figura 130 representa una máquina neumática de un solo cuerpo, que puede funcionar como bomba de vacío o de compresión.

El émbolo está constituido, como en todas las máquinas que se fundan en el mismo principio, por un cilindro formado por rodajas de cuero embebido en aceite, comprimido entre dos piezas metálicas. Se logra así un ajuste perfecto con las paredes del cuerpo de bomba.

Las válvulas, que pueden ser de construcción variadísima, consisten, en el modelo de la figura, en dos pistoncitos horizontales, uno de cuyos extremos termina una pieza cónica que se adapta perfectamente a una cavidad de forma similar, situada sobre el conducto que comunica al exterior con el espacio interior de la bomba; resortes

⁽¹⁾ La primera máquina fué ideada por Otto de Guericke, burgomaestre de Magdebourg, el año 1650.

en espiral regulan la adaptación de los pistones a las cavidades. Se abren además, en sentido contrario.

Supongamos que se ha conectado la bomba con dos recipientes *A* y *B*. Si se levanta el pistón, la presión en el interior del cuerpo de bomba se hace menor que la de los recipientes *A* y *B*. La sobrepresión abre la válvula de la izquierda y pasa aire del recipiente del mismo lado a la bomba; la otra válvula permanece cerrada.

Si después de haberse desplazado todo lo que permite el cilindro *MN* el émbolo baja, comprime el aire debajo de sí y la válvula, que

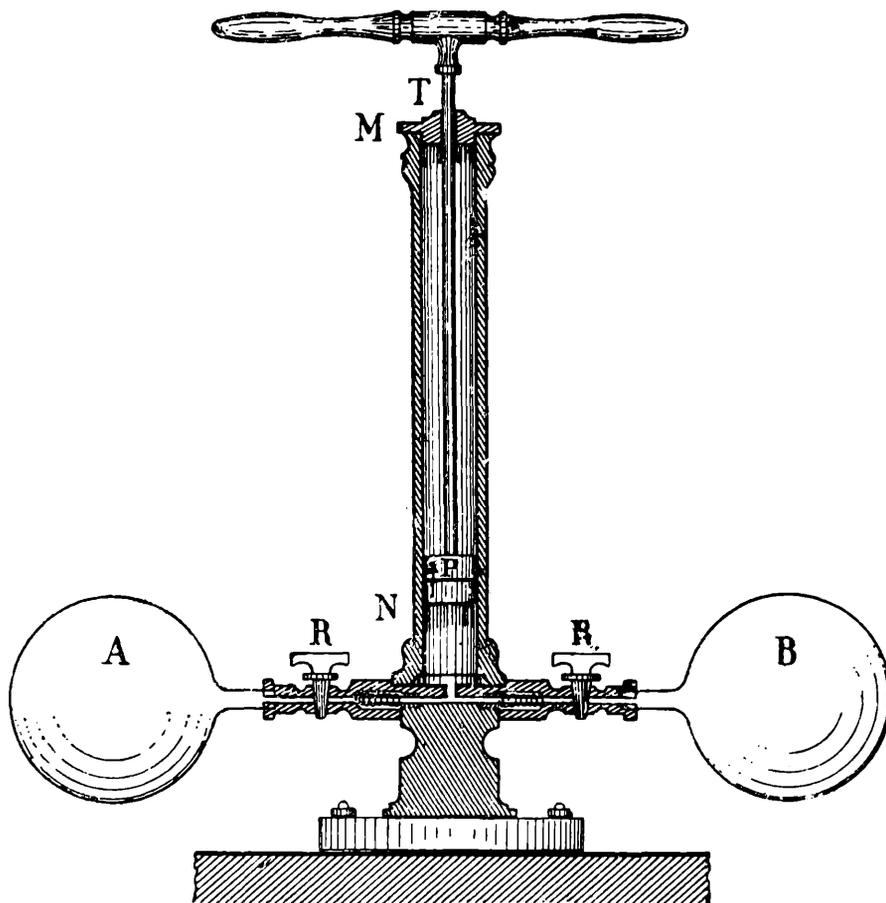


Fig. 130.

permanecía abierta, se cierra, luego se abre la de la izquierda y el aire del cuerpo de bomba es impelido al interior del recipiente *B*.

El resultado es que la presión disminuye en *A* por extracción de cierta masa de aire y aumenta en *B* por la introducción de esa misma cantidad de gas.

Si se quisiera, únicamente, extraer el aire de *A* es claro que no debe colocarse ningún recipiente *B*.

El fluido que extrae la bomba de *A*, va en este caso, directamente a la atmósfera.

El vacío que puede producirse con un mecanismo semejante está limitado por varias causas. En primer lugar, la abertura de las válvulas ha menester cierta fuerza mínima, y, cuando el enrarecimiento en A es muy pequeño, la diferencia de presiones origina una fuerza que se encuentra al fin por debajo de ese límite y la válvula no se abre a partir de ese momento.

Para evitar este inconveniente, en otros modelos, de los que estudiaremos uno, las válvulas de aspiración son comandadas, esto es, se abren y cierran en el momento oportuno por el movimiento mismo del mecanismo.

El ajuste de las válvulas y el del pistón con el cilindro tampoco es tan hermético como para no dejar pasar lentamente el aire. Conviene, por esto, en las máquinas a émbolo, cerrar la comunicación con el recipiente una vez alcanzado el mayor vacío posible.

Además, la base inferior del pistón no se adosa jamás de una manera perfecta a la cara inferior interna del cuerpo de bomba. El aire contenido en éste no es, por lo tanto, completamente expulsado por el descenso total del pistón, lo que determina la existencia de un límite de vacío que no puede ser sobrepasado.

A fin de poner esto en evidencia hagamos algunos cálculos, suponiendo, para limitar el problema a lo que nos interesa en este momento, que todos los ajustes son perfectos y que la fuerza mínima que abre las válvulas es cero. Sea, primeramente, nulo el *espacio nocivo*, esto es, el espacio comprendido entre el émbolo en su posición más baja y la base del cilindro.

Indiquemos con V el volumen de un recipiente en el cual se quiere producir el vacío, con v el volumen interior útil del cilindro, y con p_0, p_1, \dots, p_n las presiones de la masa gaseosa al fin de cada ascensión del émbolo. Se tiene, por ley de Boyle:

$$\begin{aligned} p_1 (V + v) &= p_0 V \\ p_2 (V + v) &= p_1 V \\ \cdot &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ p_n (V + v) &= p_{n-1} V. \end{aligned}$$

Por multiplicación de estas relaciones miembro a miembro resulta:

$$p_n = \left(\frac{V}{V + v} \right)^n p_0, \quad [1]$$

relación que muestra que la presión disminuye indefinidamente como los términos de una progresión geométrica cuya razón es $\frac{V + v}{V}$.

Veamos ahora lo que ocurre por la existencia de un espacio nocivo, cuyo volumen indicaremos con ε .

La válvula de escape — en la máquina de la figura, la de la derecha — se abre cuando por el descenso del émbolo la presión interior alcanza un valor igual al de la presión atmosférica (si la máquina hace el vacío en un recipiente A , el B no existe). A fin de cada « ida y vuelta » del émbolo queda, según esto, un volumen ε de aire a la presión atmosférica p_0 . Cuando la presión llegue a un valor p_i del que al bajar el émbolo el aire contenido en el cuerpo de bomba alcance el valor de la presión atmosférica, en el límite inferior de su carrera, es decir, cuando toda esa masa flúida ocupe el espacio nocivo ε , la válvula de escape no se abrirá más. El movimiento de la bomba no tendrá otro efecto que el de variar el volumen y la presión de la misma masa flúida entre los valores p_i y V , y p_0 y ε respectivamente. Por ley de Boyle se tiene:

$$p_i V = \varepsilon p_0$$

y, por consiguiente, a causa del espacio nocivo la presión menor p_i que se puede obtener es:

$$p_i = \frac{\varepsilon}{V} p_0. \quad [2]$$

3. Máquina de vacío a dos émbolos. — Una máquina que se encuentra muy frecuentemente en los gabinetes, y que consta de dos cuerpos de bombas, es las que muestran las figuras 131 y 132. Los émbolos, constituídos como se dijo en el número anterior, están atravesados axialmente por un agujero provisto de válvulas a resorte, que se abren de abajo hacia arriba.

Los cuerpos de bomba están en comunicación entre sí por un canal que se comunica, a su vez, con otro que desemboca en el centro de una plataforma R , cuya cara superior es de vidrio finamente esmerilado. La platina facilita la realización de experiencias en un espacio a baja presión o vacío, que se forma situando sobre ella una campana de vidrio de borde inferior plano untado de una mezela obtenida por fusión de cera, vaselina y goma.

Además, la desembocadura del canal, de pared metálica en toda su extensión, está provista de una rosca en la que pueden adaptarse

otros aparatos o recintos, tales por ejemplo, como los hemisferios de Magdebourg.

La máquina se acciona a mano por medio de un palanca de dos brazos combinada con una rueda que engrana en las cremalleras a que están fijos los pistones. Mientras uno de estos sube, aspirando aire del recinto que desea vaciarse, el otro expulsa al exterior aire ya extraído.

Las válvulas de aspiración *bb* están constituídas por piecitas metálicas cónicas, fijas a varillas *hh* del mismo material que pasan, a

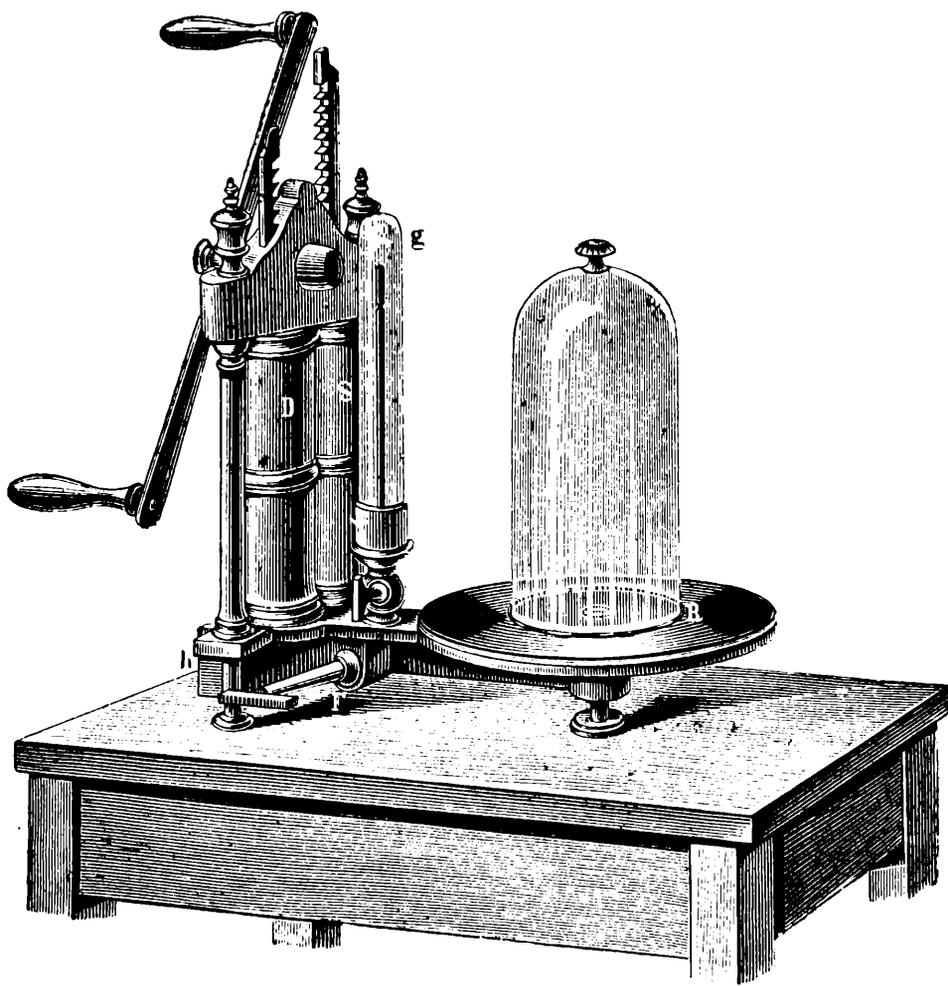


Fig. 131.

frotamiento suave, a través de los émbolos. Cuando uno de éstos sube hacia arriba levanta la varilla correspondiente *hh*, a causa del roce, tanto como lo permite un tope *i* situado en su extremo superior. La válvula *b* queda abierta durante toda la ascensión del émbolo. Se tiene así un caso de válvulas comandadas; la abertura de ellas no depende para nada del enrarecimiento producido en el recipiente.

Mediante la llave *F*, que está provista de un agujero transversal y otro longitudinal, se pueden mantener en comunicación los dos cuer-

pos de bomba con el recipiente (fig. 133 *a*, letra *O* de la llave hacia arriba), o aislar el recipiente y comunicar la bomba con el exterior (fig. 133 *b*, letra *Z* hacia arriba), o aislar el cuerpo de bomba y comunicar el recipiente con la atmósfera (fig. 133 *c*, letra *R*). En las dos últimas posiciones puede impedirse, además, la comunicación con el

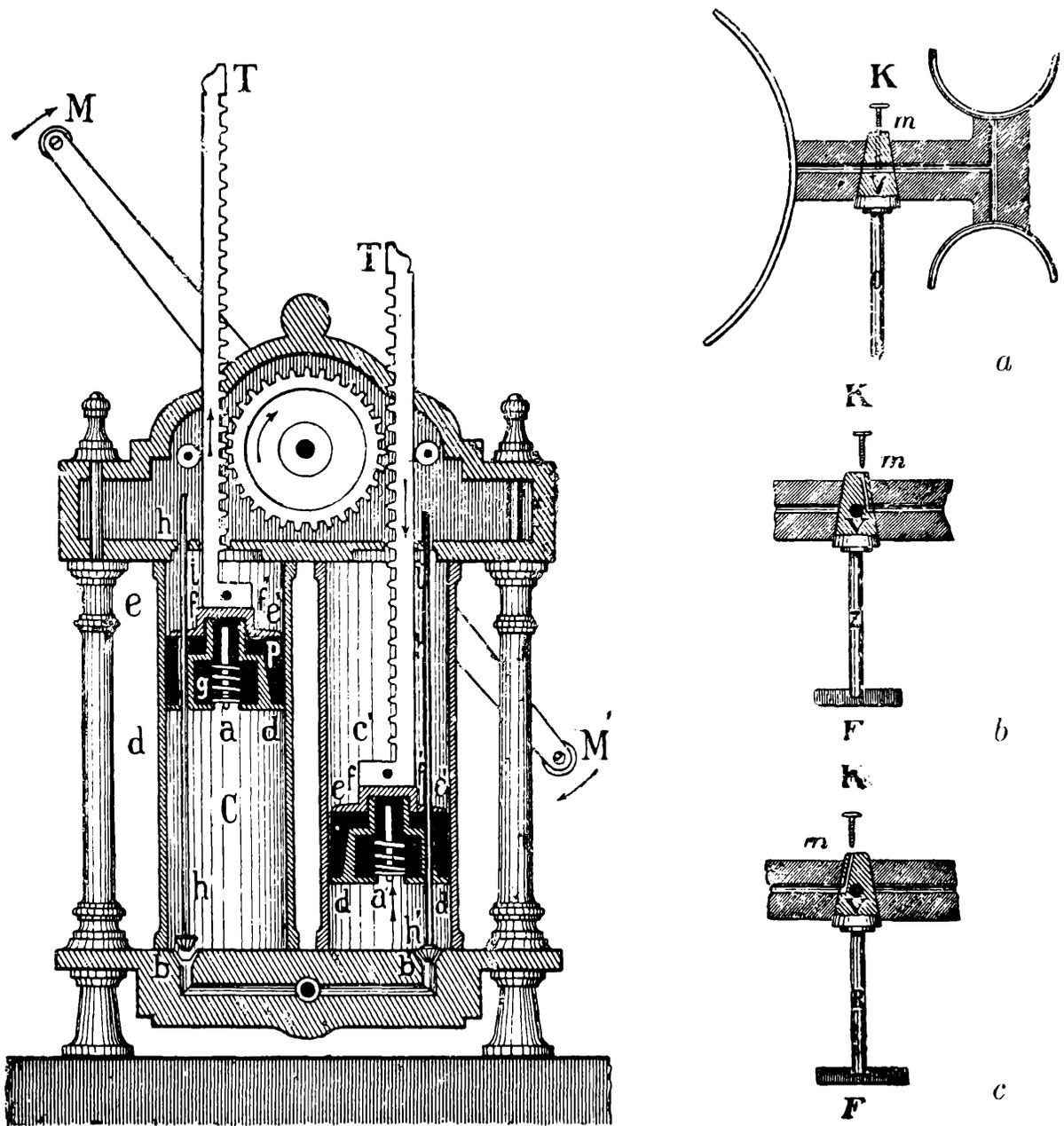


Fig. 132.

Fig. 133.

exterior, aislando así tanto la bomba como el recipiente, por medio del tornillo *K*.

La llave *h*, que apenas alcanza a verse en la fig. 131, situada en el frente de la máquina, permite, una vez alcanzado el mayor vacío posible, dejar en comunicación con el recipiente uno solo de los cuerpos de bomba al que la misma posición de la llave pone en comunicación con el otro cuerpo. Uno hace así el vacío en el cuer-

po del otro. Este dispositivo, debido a Babinet, permite obtener un límite de vacío menor que el que determina la existencia del espacio nocivo.

Las figuras 134 *a* y 134 *b* ilustran sobre la cuestión. En la posición *a* los dos cuerpos de bomba están en comunicación con el recipiente; en la posición *b* sólo está conectado con éste un cuerpo de bomba, eaque, mediante el orificio *st*, comunica, a su vez, con el otro cilindro.

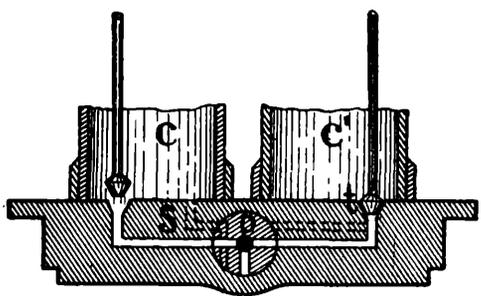


Fig. 134 *a*,

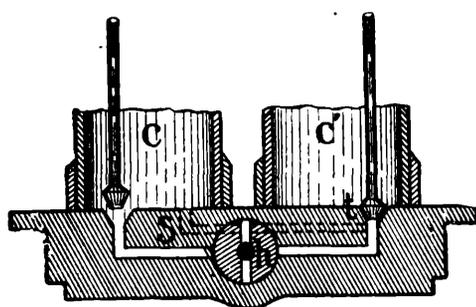


Fig. 134 *b*.

La llave *h* está provista de los orificios necesarios, visibles en los esquemas.

Suponiendo iguales los espacios nocivos de ambos émbolos e indicándolos con ε , la menor presión que puede obtenerse por este dispositivo es:

$$p_i' = \left(\frac{\varepsilon}{V} \right)^2 p_0, \quad [3]$$

es decir, se alcanza una presión mucho menor que antes.

Con esta máquina puede alcanzarse un vacío de un décimo de milímetro de mercurio.

4. Bombas a aceite. — En este tipo de bombas, construídas por primera vez por el inglés Roberto Gill en 1874 y luego por Fleuss, que se conocen hoy día con el nombre de « Bombas Geryk », se evita el espacio nocivo haciendo arrastrar por el émbolo una masa de aceite que descansa sobre él.

La figura 135 *a* representa un corte longitudinal. El vástago mueve un émbolo fijo en su extremo inferior, que está provisto de una válvula *E* que se abre de abajo hacia arriba; el ajuste con el cilindro del cuerpo de bomba se realiza mediante una pieza de cuero *C*, aprisionada entre dos piezas metálicas y doblada como muestra la figura, la que, por su forma, ajusta tanto más cuanto mayor es la compresión del gas en *V*.

El cuerpo de bomba está dividido en dos compartimentos cuya comunicación es posible abriendo la válvula *G*, que los mantiene aislados, adaptándose sobre la pieza de cuero *I*, por la presión que le aplica el resorte en espiral *K*.

El aceite se encuentra en las regiones sombreadas, encima del émbolo y del piso intermedio.

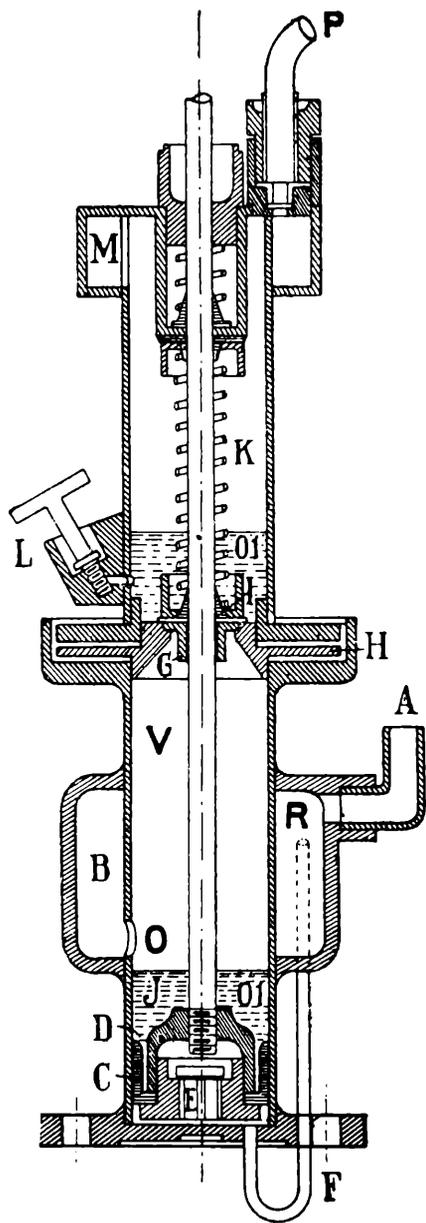


Fig. 135 a.

El tubo *A* es el conducto de aspiración que se comunica con el espacio interior cilíndrico por el ensanchamiento *B* y el orificio *O*, y por el tubo *R* y la válvula *E*; el tubo *F* es el escape.

El funcionamiento es el siguiente. Cuando sube el émbolo, tan pronto como el nivel del aceite pasa por el agujero *O*, el aire que se encuentra en el espacio *V* comienza a ser comprimido hasta que se abre la válvula *G* y es impelido al exterior. La expulsión total se realiza así: el émbolo levanta, casi al fin de su carrera, a la válvula *G* unos 6,5 milímetros y empuja a su través la masa de aceite, que arrastra consigo al aire. Al invertirse la marcha pasa en sentido contrario una cantidad igual de aquel líquido.

Cuando baja el pistón se hace el vacío en *V* y si la presión que existe en la masa gaseosa es mayor que unos 13 milímetros de mercurio se abre la válvula *E* y penetra el aire.

Cuando la presión es menor, esa válvula no es abierta por la acción del aire; éste es aspirado hacia el espacio *V* únicamente a través de *O* tan pronto como

el nivel del aceite llega a su altura.

El papel que desempeña *E* es, sin embargo, de la mayor importancia. Cuando sube el pistón penetra un poco de aceite al recinto *B*, parte del cual vuelve enseguida escurriéndose hasta el fondo del cuerpo de bomba. Al llegar el émbolo al límite inferior de su marcha lo comprime, la válvula *E* se abre y es impelido nuevamente a la región *J*. De otra manera pasaría por entre las paredes del cilindro

y la pieza de cuero *C* perjudicando así su estructura y por lo tanto el ajuste. Con una máquina de un solo cuerpo se obtienen vacíos hasta de 0,25 milímetros de mercurio, mientras que dos bombas acopladas, una de las cuales aspira a través del tubo *F* de la otra, con lo que extrae el aire aprisionado por el aceite situado encima de *G*, se obtienen vacíos hasta de 0,0002 milímetros de mercurio. La figura 135 *b* muestra una bomba semejante.

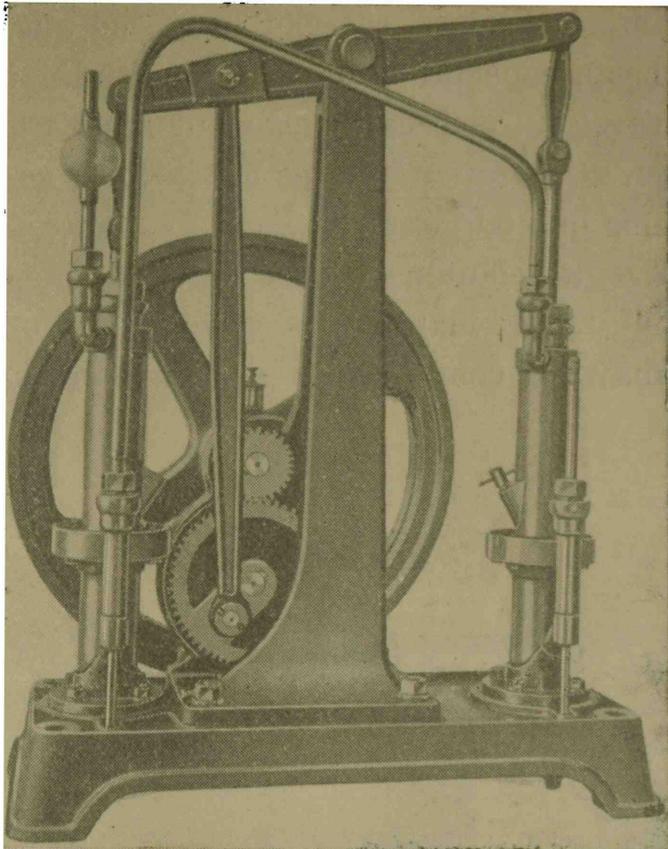


Fig. 135 *b*.

5. Bombas a mercurio.

— El primer aparato de este tipo (fig. 136) fué ideado por el físico alemán Pfluger, siendo construída, según sus indicaciones por el mecánico y vidriero de Bonn, Heinrich

Geissler, en el año 1857. Posteriormente ha sido perfeccionada, particularmente por Töpler y Alvergnyat.

Dos recipientes de vidrio *A* y *B* de una capacidad de un litro más o menos, uno de los cuales, el *A*, se prolonga hacia abajo por un tubo de sección inferior pequeña y de paredes gruesas, se comunican por medio de un tubo elástico de goma.

El recipiente *B* queda abierto en su parte superior; el *A* se continúa en un tubo *tr* provisto de una llave *O* que tiene dos perforaciones: una transversal y otra longitudinal. La llave es alargada y permite comunicar, mediante el agujero longitudinal, el recipiente *A* con otro pequeño recipiente *P*, abierto.

El funcionamiento es el siguiente. El recipiente en el que ha de hacerse el vacío se conecta al tubo *tr*; comunicando luego el recipiente *A* con el tubo *P*, mediante la llave *O*, se levanta el recipiente *B* hasta que el nivel del mercurio, que asciende en ambos lados por esa operación, aparezca en la ampolla *P*. Se expulsa así al exterior el aire existente en *A*. En este momento se gira la llave poniendo en comunicación el recipiente en que ha de hacerse el vacío con el *A*. Si se

hace descender ahora el nivel del mercurio, desplazando verticalmente hacia abajo al frasco *B*, el espacio vacío que va quedando en *A* se llena de aire proveniente del recinto a vaciar. Esta masa gaseosa se impele hacia el exterior lo mismo que antes, esto es, girando la llave hasta conectar el orificio longitudinal, y haciendo ascender luego el nivel del mercurio hasta que aumente la cantidad que había restado en *B*. Repitiendo estas operaciones se alcanza un vacío elevado (menor que 0,01 mm de Hg). La ventaja de estos dispositivos proviene de que el número de ajustes es menor y los existentes pueden ser muy bien mantenidos y, sobre todo, el espacio nocivo se hace, sin mayores complicaciones, rigurosamente cero.

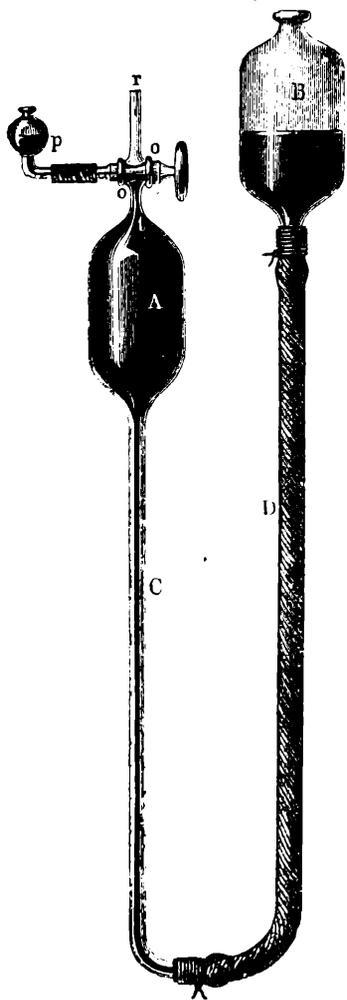


Fig. 136.

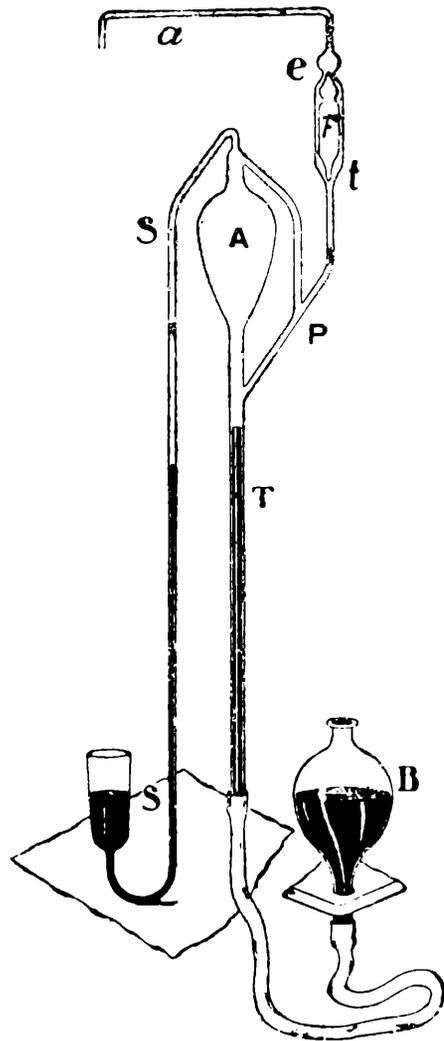


Fig. 137.

B. Töpler ha ideado un dispositivo sin robinete en el que Alvergniat ha introducido una pequeña mejora. Está representado en la fig.137.

El tubo de escape es el *SS*, de 80 cm de longitud, curvado en su extremidad, y que termina, como un barómetro de sifón, en un tubo de mayor diámetro. La pieza *F* es un flotador que actúa como válvula; cuando el mercurio asciende lo levanta adaptándolo herméticamente

al estrangulamiento *e* del tubo *t*; el mercurio puede llenar así completamente la ampolla *A*, sin ascender, a causa del vacío, en el tubo *t*.

El funcionamiento se comprende sin mayores explicaciones. Si se hace descender el nivel del mercurio por desplazamiento de la ampolla *B*, penetra aire del recipiente a vaciar, a través del tubo *at*, en *A*; haciendo ascender el mercurio, éste, al llegar al punto *P* de ramificación, cierra la comunicación de *A* con el recipiente; el mercurio que llena *A* completamente impele el aire hacia afuera a través de *SS*.

La presión, que se mide intercalando el manómetro de Arago-McLeod, puede reducirse con este aparato hasta el valor de 0,000012 milímetros de Hg.

6. Bomba rotativa de Gaede. — Es ésta, sin duda alguna, la máquina más apropiada, por su sencillez, eficacia y rapidez, para los gabinetes de enseñanza.

Funciona tanto como máquina de compresión (hasta dos atmósferas) como de vacío. Se obtienen con ella, en pocos minutos, presiones hasta de 0,01 milímetro.

Las figuras 138 *a* y *b* representan cortes transversal y longitudinal de una máquina de ese tipo. Un cilindro *A* provisto de dos paletas radiales móviles, accionadas por resortes, gira excéntrica-

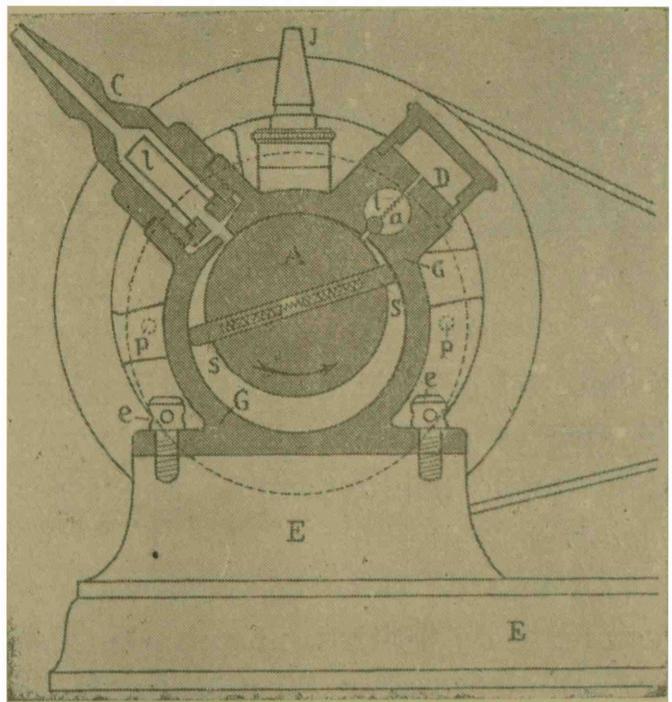


Fig. 138 a.

mente en el interior de un espacio cilíndrico con el que se mantiene en contacto a lo largo de una de sus generatrices.

El cilindro *A* se adapta por sus bases, perfectamente, al cuerpo de bomba y a las paletas; y éstas, comprimidas por los resortes, se aplican también sobre su cara lateral. El espacio libre entre uno y otro queda dividido de esta manera en dos regiones completamente aisladas entre sí.

El tubo *C* es el conducto de aspiración en cuyo camino se halla una camisa metálica cilíndrica *l* dotada de perforaciones muy finas, a

fin de impedir el pasaje de pequeños cuerpos sólidos o de gotas de mercurio; *a* es la válvula de escape que se comunica por el espacio *D* y el canal *K* con el recinto *O*, que sirve, a la vez, de cámara de aceite y de compresión. El tubo *J* es el conducto de escape.

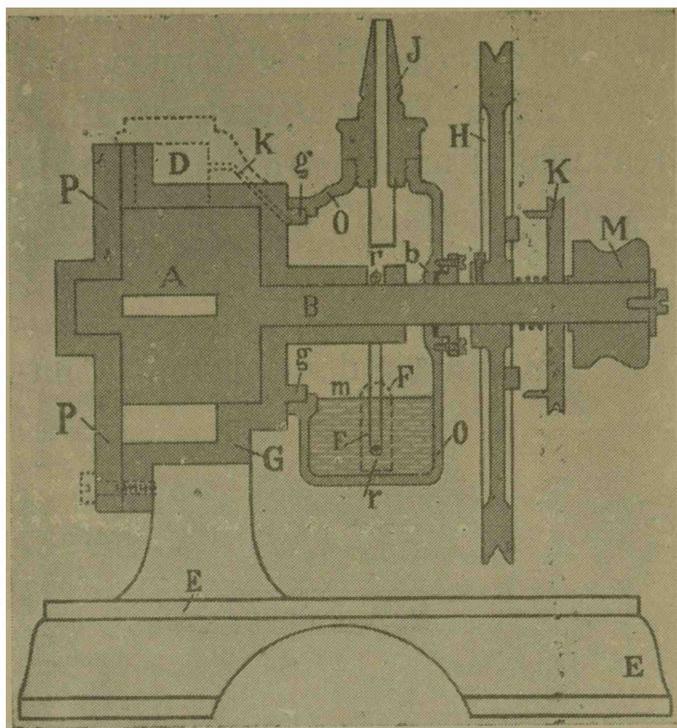


Fig. 138 b.

tésimo del orificio que lleva la válvula, la expulsión de esta masa de aire es completa. El espacio que queda detrás de las paletas aumenta, lo que determina una aspiración de aire del recipiente a vaciar.

Con una de estas bombas, accionada a mano, se alcanza, en un recipiente de 6 litros, una presión de un milímetro en 4 minutos de funcionamiento y en 20 minutos la presión mínima de 0,01 milímetro. Si es accionada a motor se alcanza el milímetro en menos de 2 minutos y el límite inferior de 0,01 en 15 minutos.

Si se desea emplear como máquina de compresión se utiliza, en lugar del tubo *C*, el *J*.

Se construyen también máquinas de este mismo tipo en las que el cuerpo de bomba se encuentra sumergido, completamente en aceite.

La presión mínima que se obtiene no es, sin embargo, utilizando una sola bomba, menor que 0,01 milímetro.

Acoplando dos máquinas de modo que una haga el vacío en la otra se obtienen hasta presiones de 0,00020 milímetros de mercurio.

La cámara *O* se llena de aceite hasta el nivel que indica la figura, lo que se controla a través de la ventana *F*, de vidrio. El anillo *r* deja caer aceite continuamente sobre el eje *AB* que la hace girar.

El funcionamiento es el siguiente: Si el cilindro *A* gira, en el sentido indicado por la flecha, las paletas comprimen el aire contenido en la región *G* y, abriendo la válvula *a*, lo impelen hacia la cámara *O*.

Como no existe más espacio nocivo que el infini-

La casa Siemens-Schuckert construye sistemas de este tipo de dos bombas acopladas, sumergidas en aceite, accionadas simultáneamente por un motor eléctrico que se prestan muchísimo para usos industriales.

7. Bomba a mercurio de Gaede. — Esta bomba permite alcanzar vacíos hasta de una presión de 0,00001 milímetro de mercurio.

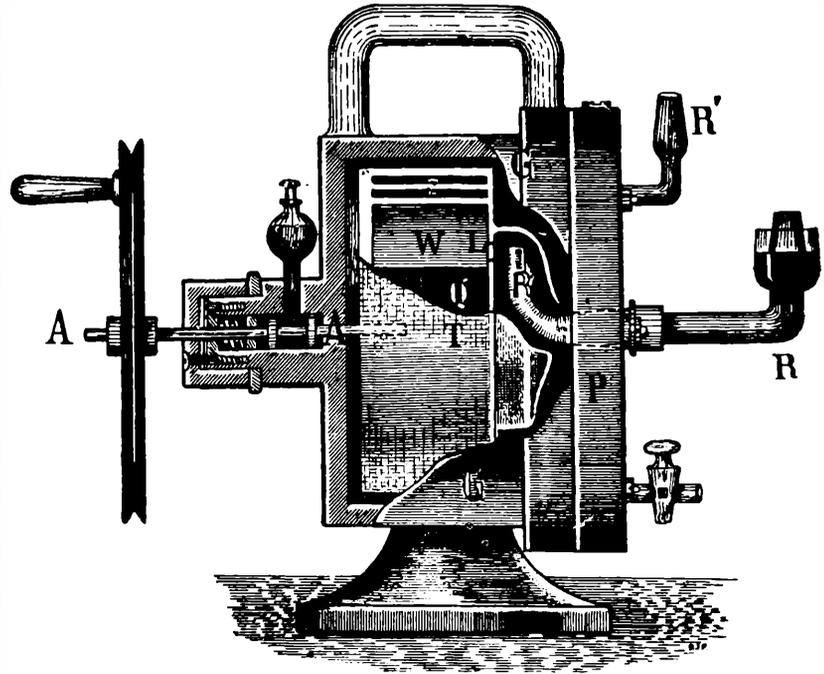


Fig. 140 a.

Se compone (figs. 140 a, 140 b y 141) de un recipiente de hierro

cerrado herméticamente, lleno hasta la mitad de mercurio, en cuyo interior gira un tambor *T* de porcelana, que está atornillado a un eje *AA* que puede accionarse a mano o con un motor.

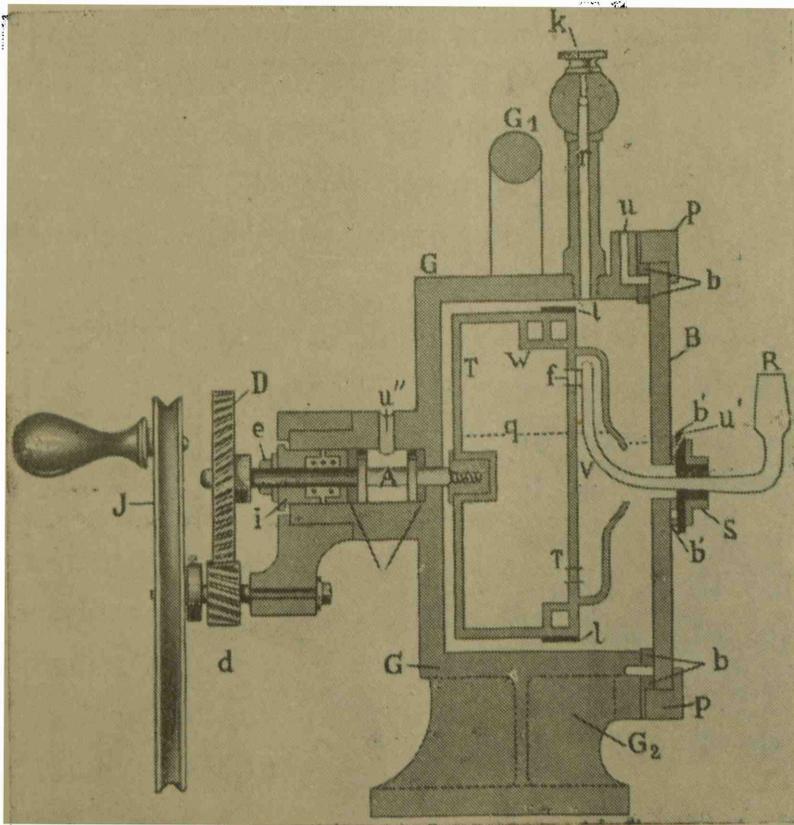


Fig. 140 b.

La pared cilíndrica del tambor consiste en tres láminas Z_1 , Z_2 y Z_3 , que terminan en forma de aletas, dividiendo el espacio interior de aquél en tres regiones distintas. Cada una de éstas se comunica con el tubo *RR* de aspiración mediante agujeros L_1 , L_2 y L_3 practicados en la cara frontal del tambor.

El funcionamiento es el siguiente: Con una bomba auxiliar cualquiera conectada al tubo R' se disminuye la presión en el interior del recipiente de hierro hasta que su valor sea de unos milímetros — es suficiente una trompa de agua — luego se comienza a hacer girar el cilindro de porcelana.

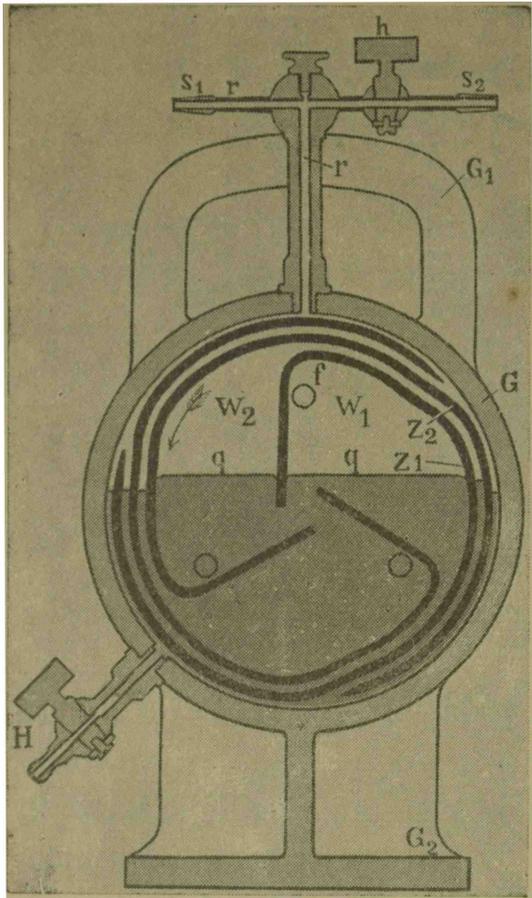


Fig. 141.

En el instante representado en la figura 141 el espacio W_1 está en comunicación, a través del agujero L_1 , con el tubo de aspiración R , pero no con el R' . Su volumen aumenta primero continuamente con la rotación, aspirando así el aire del recipiente conectado a R , hasta que por la inmersión del agujero en el mercurio, forma, momentáneamente, un recinto aislado.

Continuando la giración se comunica, por entre las paredes Z_1 y Z_2 y orificios que se encuentran sobre la parte cilíndrica del tambor T , con el tubo R' . El aire que extrajo por R es aspirado por R' .

Si el gas del recipiente y del cuerpo de bomba están bien secos, lo que se logra colocando un recipiente con pentóxido de fósforo en el trayecto de la tubuladura, la marcha del vacío en un recipiente de 6 litros, partiendo de una presión de 10 milímetros, es la siguiente: a los 5 minutos la presión es de 0,0001 y a los 15 se alcanza el valor mínimo posible que es 0,00001 milímetros. La presión se mide con el manómetro de Arago-McLeod.

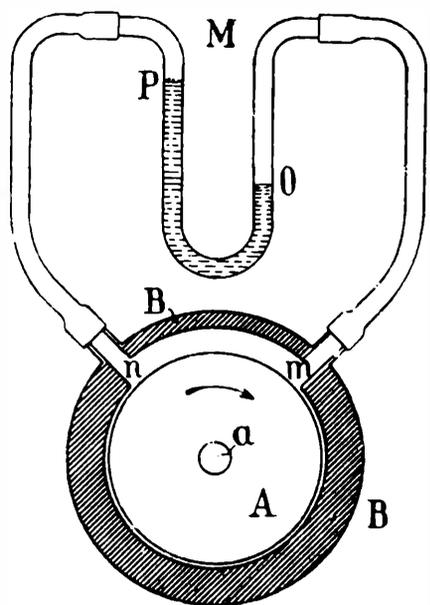


Fig. 142.

8. Bomba molecular de Gaede. —

Esta máquina consiste, en principio, en un cilindro A (fig. 142) que gira a gran velocidad alrededor de un eje flexible a , en

el interior de un recipiente *B*, también cilíndrico, provisto de dos salidas *m* y *n*.

En la región comprendida entre estas aberturas, la caja *B* es de mayor radio, el espacio que deja libre *A*, es allí por lo tanto, mayor.

Si la rotación del cilindro *A* se realiza en el sentido indicado por la flecha, el aire es arrastrado, a causa del roce, en el mismo sentido; se establecerá así una corriente gaseosa de *n* hacia *m*.

Si se intercala un manómetro *M* entre *n* y *m* se observará una diferencia *OP* de presión que proviene de la existencia de frotamiento entre el fluido y la superficie en movimiento y entre las capas mismas de aquél. Esa diferencia aumenta si crece el número de revoluciones.

Además, el valor absoluto final de la presión en el tubo *n* de aspiración es tanto menor cuanto menor es el valor inicial de la presión en el interior del recipiente *B*. Por lo menos, esto ocurre para bajas presiones, que es justamente lo que interesa. En la tabla que va a continuación se dan algunos datos numéricos que a esto se refieren:

Número de revoluciones por minuto	Presión inicial en <i>B</i>	Presión final en el tubo de aspiración,
	mm de Hg	mm de Hg
12.000	20,00	0,0003
12.000	10,00	0,00003
12.000	1,00	0,000005
12.000	0,05	0,0000002
6.000	0,05	0,00002
2.500	0,05	0,0003

Como puede observarse, partiendo de la presión inicial de 0,05 milímetros se alcanza, con una velocidad angular de 12.000 revoluciones por minuto, la *bajísima presión* de $2 \cdot 10^{-7}$ milímetros de mercurio.

Hemos dado la explicación fenomenológica; esbozemos ahora la explicación molecular. Los gases están constituídos, según ya dijimos, por moléculas que se mueven rectilíneamente, cambiando de dirección por choques de una con otras o con las paredes del recipiente. El movimiento es, en general, desordenado, de modo que las incidencias tendrán lugar bajo todos los ángulos posibles; lo mismo ocurrirá con las reflexiones.

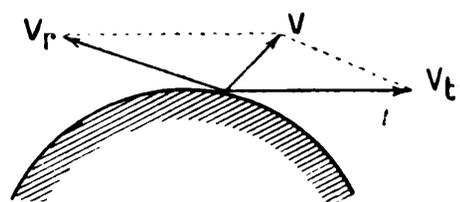


Fig. 143.

En un instante dado todo ocurre como si de la superficie del cilindro *A*, que se mueve a gran velocidad, fuesen arrojadas las moléculas con una velocidad v que fuese la resultante de la velocidad de reflexión v_r (fig. 143) y de la de traslación v_t de los puntos materiales de aquélla. Si v_t es muy grande, del mismo orden que la velocidad media de las moléculas, es claro que cualquiera sea el ángulo de incidencia, las moléculas serán arrojadas hacia el lado en que se produce la rotación. Esto explica el fenómeno en sí y en su dependencia con la velocidad angular de la máquina.

A presiones muy bajas, el funcionamiento es más eficaz debido a que, por el enrarecimiento, el número de colisiones por segundo entre las moléculas es muy pequeño con respecto al número de choques con la pared. A presiones como la atmosférica no funciona.

La figura 144 da una vista de conjunto de la bomba; el tubo de aspiración es el de mayor diámetro y el otro conducto está destinado a conectarla con la bomba que ha de reducir la presión inicial en la caja *B*.

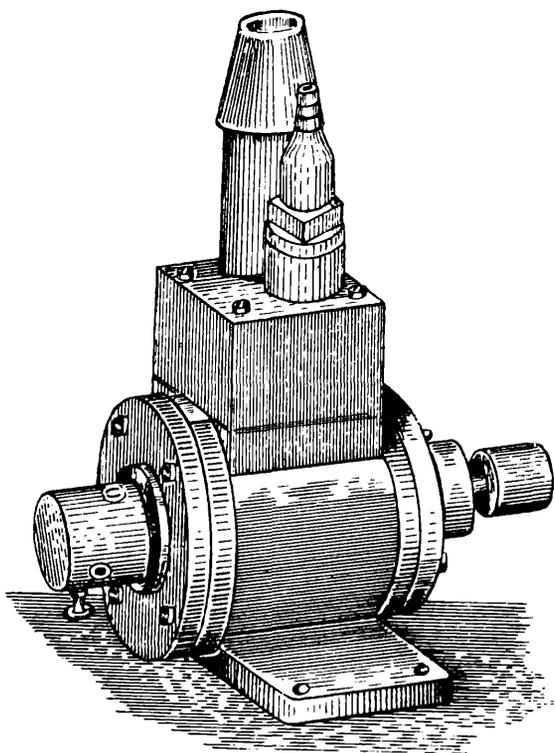


Fig. 144.

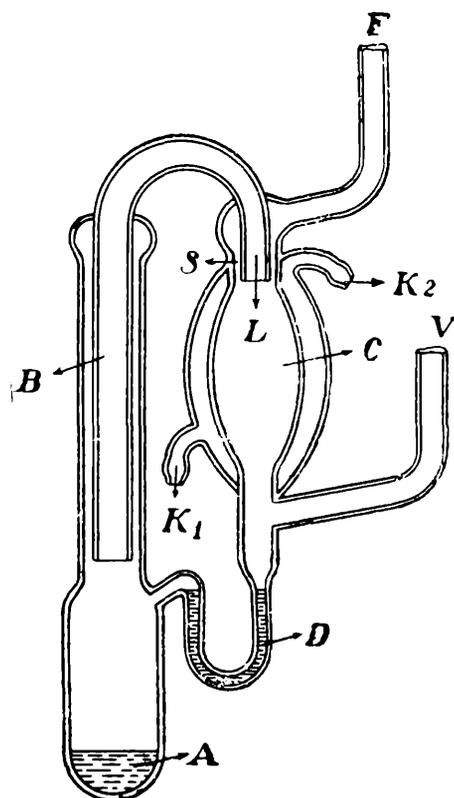


Fig. 145.

9. Bomba a condensación de Langmuir ⁽¹⁾. — En esta bomba que es, en realidad, sólo un perfeccionamiento de la bomba a difusión de Gaede, el gas es arrastrado por los choques de las moléculas de un chorro de vapor de mercurio.

⁽¹⁾ Véase para más detalles: A. GEHRTS, *Zeitschrift für Technische Physik*, número 3, página 61, 1920. W. KERRIS, *Hochvakuum-Pumpen. Archiv für Technisches Messen*. Febrero de 1936.

Permite alcanzar vacíos muchísimo más elevados que la rotativa a mercurio y que la molecular. El límite del vacío queda determinado exclusivamente por el recipiente que contiene el gas; si éste es hermético, puede decirse que la presión disminuye continuamente hasta

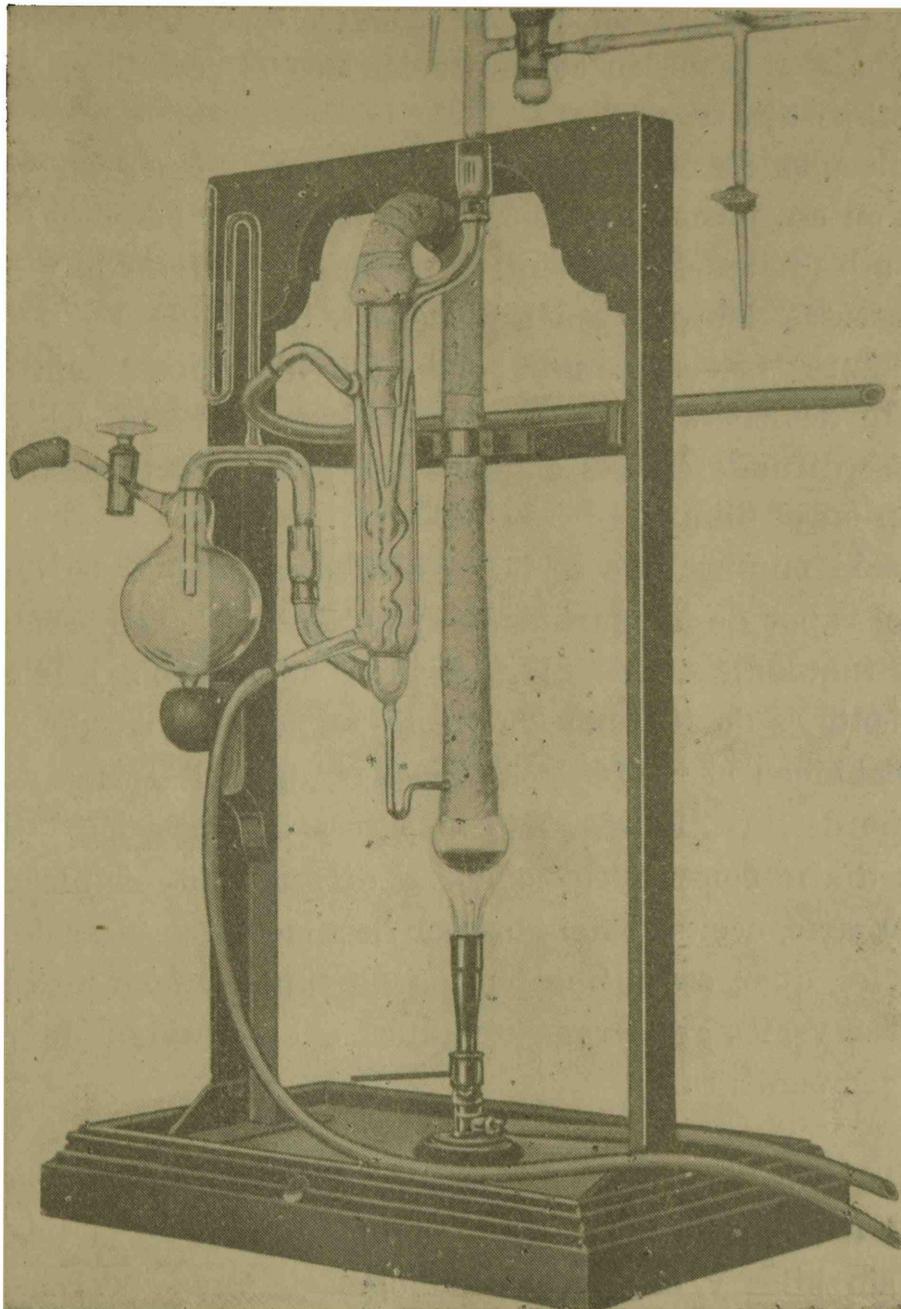


Fig. 145 a.

alcanzar un valor igual a la tensión del vapor de Hg a la temperatura del aire líquido.

En la figura 145 se tiene representado por un corte el aparato que se construye, ordinariamente, de vidrio pirex.

El vapor producido por el calentamiento del mercurio que se encuentra en *A* (con la llama de un mechero de Bunsen, una estufa

eléctrica o un baño de aceite) sigue por el tubo *B* y desemboca por *L* en una ampolla *C*, sobre cuyas paredes enfriadas por agua que entra por *K*₂ y sale por *K*₁, se condensa volviendo por *D* nuevamente a *A*.

En la ampolla *C* se mantiene, con una bomba auxiliar conectada con el tubo *V*, una presión que oscila entre 0,1 y 0,01 milímetros de Hg; el tubo *F* se pone en comunicación con el recinto en el que ha de producirse alto vacío.

Las moléculas de mercurio, que salen por *L* con gran velocidad, impulsan, en esa misma dirección, a las moléculas gaseosas; el vapor que llega a las paredes comprime el mercurio condensado y a las moléculas gaseosas, las que son aspiradas a través de *V*.

En la figura 145 *a*, se ve una bomba de vidrio pirex, construída en el Instituto de Física de la Universidad de la Plata. El vapor de mercurio se difunde en dos etapas a través de aberturas diferentes, que se ven en el dibujo.

La presión mínima que se logra con estas bombas es igual a la tensión del vapor de mercurio correspondiente a la temperatura más baja de la tubuladura. Como la tensión de aquel vapor a la temperatura ambiente es de 10^{-3} mm de Hg, se sumerge parte del tubo que une la bomba con el recipiente a evacuar, dándole forma adecuada, en un baño de aire líquido. Esto encarece la operación.

Hoy en día se construyen bombas a difusión que emplean, en lugar de mercurio, aceites obtenidos por destilación en el vacío de aceites minerales, que poseen una tensión de vapor sumamente baja. Se obtienen así vacíos relativamente altos, sin necesidad de producir una baja temperatura.

10. Definición moderna de alto vacío. Características de las bombas a alto vacío ⁽¹⁾. — Las válvulas usadas en la telegrafía y telefonía sin hilos y las nuevas ampollas de rayos X son recintos donde el vacío es sumamente elevado.

Si la presión no se encuentra por debajo de ciertos límites, las características de esos aparatos sufren modificaciones de importancia que disminuyen, en sumo grado, o anulan su eficacia técnica.

Como no es ésta la oportunidad de entrar en detalles referentes a los fenómenos eléctricos que se observan en las válvulas, diremos, solamente, que la presión es en ella igual o menor que 10^{-7} milímetros.

⁽¹⁾ Véase el artículo de A. GEHRST recientemente citado.

de mercurio. Un vacío igual o menor es designado en la técnica, siguiendo a Langmuir, *alto vacío*.

De acuerdo con esto serían bombas de alto vacío solamente la molecular de Gaede, la de condensación de Langmuir y las de tipos semejantes.

Las bombas de alto vacío se caracterizan por los tres datos siguientes: 1º el vacío preliminar que requieren para su funcionamiento; 2º el vacío final que producen; y 3º la velocidad de aspiración. Todas las bombas a alto vacío conocidas requieren un vacío preliminar de 0,1 a 0,01 milímetros de mercurio.

El vacío preliminar depende de la separación entre la desembocadura del tubo L y la pared interior del recipiente C , pues la dimensión de ella debe ser del orden del camino medio entre dos choques.

La bomba rotativa a mercurio de Gaede permite alcanzar vacíos hasta de 10^{-5} milímetros de mercurio y la molecular hasta 10^{-7} milímetros. La de Langmuir, en cambio no tiene límite.

La bomba rotativa a mercurio no es, pues, en realidad, a *alto vacío*.

Si de una masa de gas de volumen v a la presión p se extrae en el intervalo de tiempo comprendido entre t y $t + dt$ el volumen dv , la velocidad de aspiración en el instante t se define por el cociente diferencial:

$$s = \frac{dv}{dt} \quad [4]$$

o

$$s = \frac{d}{dt} \frac{pv}{p} = - \frac{v}{p} \frac{dp}{dt}, \quad [5]$$

pues $pv = \text{constante}$, de acuerdo con la ley de Mariotte. Integrando entre los instantes t_1 y t_2 se tiene:

$$\int_{t_2}^{t_1} s dt = v \cdot \log_e \frac{p_1}{p_2}, \quad [6]$$

o si s es un valor medio de s entre t_1 y t_2 se tendrá:

$$s = \frac{v}{t_2 - t_1} \log_e \frac{p_1}{p_2}. \quad [7]$$

Así, puede determinarse la velocidad de aspiración en función de la presión por las medidas de las presiones, de intervalo en intervalo de tiempo.

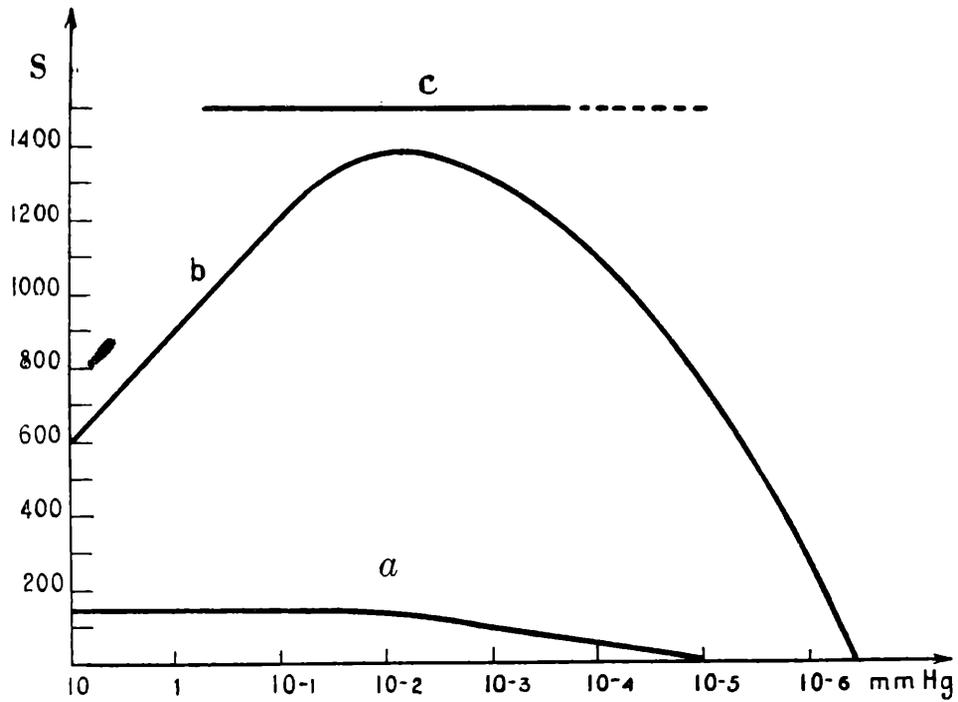


Fig. 146.

En la figura 146 la curva a representa la velocidad de aspiración de la bomba rotativa a mercurio, la b la de la molecular y la c la de Langmuir. Como se ve la de esta última es constante, lo que es, por cierto, muy ventajoso.

HIDRODINAMICA

CAPITULO VII

CLASES DE MOVIMIENTOS. ECUACIONES DE EULER. MOVIMIENTO ESTACIONARIO. ECUACION DE BERNOULLI.

1. Movimiento laminar y turbulento. — El estudio del movimiento de los flúidos se designa con el nombre de *hidrodinámica*.

El movimiento de los líquidos se presenta bajo dos estados diferentes: el *laminar* y el *turbulento*.

Es laminar (de lámina) cuando las partículas se ordenan según capas o láminas que se mueven tranquilamente; es turbulento cuando las partículas cumplen, al mismo tiempo que el movimiento de conjunto, *pulsaciones*.

Todo el mundo ha podido notar estas dos clases de corrientes en el agua que sale de los robinetes de las cañerías de alimentación de la ciudad. Si la cantidad de agua que sale por segundo no es muy grande, el movimiento es laminar; el chorro ofrece el aspecto de una masa compacta. Si se abre más y más el robinete, el movimiento deja de ser laminar para convertirse en turbulento.

La observación de estas dos especies de corriente se facilita introduciendo en la masa líquida una substancia colorante.

El movimiento del agua en los ríos y canales es, generalmente, turbulento. Quien se haya detenido a contemplar el correr del líquido, habrá observado, por las partículas extrañas suspendidas, la existencia de pulsaciones, de las que proviene el aspecto de inquietud que ofrece.

Las diferencias en el comportamiento mecánico de estas clases de corrientes se pondrán de manifiesto en el curso del estudio que sigue.

Conviene, tanto desde el punto de vista científico como técnico, estudiar primeramente el movimiento laminar y luego el turbulento.

2. Las ecuaciones de Euler para flúidos ideales.—Euler dedujo, por la aplicación del principio de masa, ecuaciones que permiten describir el movimiento de los flúidos ideales. Pueden extenderse, además, sin dificultad, a los flúidos reales.

Es claro que no puede hablarse en los flúidos de una aceleración desde que cada partícula tiene la suya propia, que representaremos con a .

La ecuación de Euler se deduce en seguida por un método semejante, pero más general, que el empleado en el capítulo I para establecer las condiciones del equilibrio.

Consideremos (fig. 147) una pequeña porción flúida perteneciente a una masa líquida que se mueve en cierta dirección n . Supongamos, para mayor sencillez, que está contenida en el interior de una

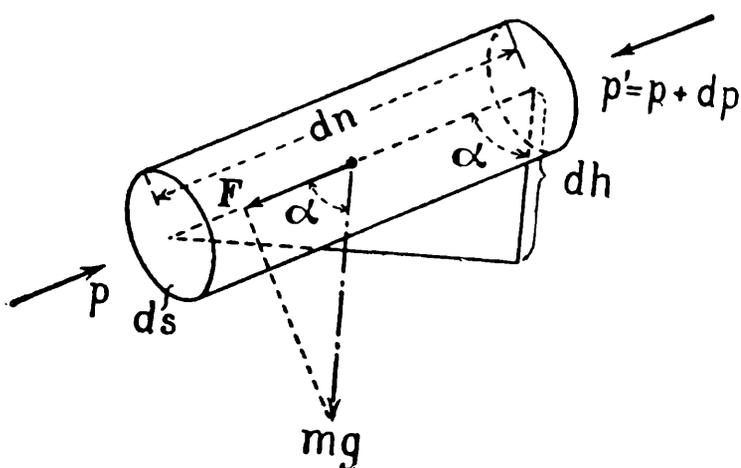


Fig. 147.

superficie ideal, cilíndrica, de sección circular ds y longitud dn . Su masa, multiplicada por su aceleración en la dirección n debe ser igual, por la ecuación general de la dinámica, a la suma de las componentes que admiten las fuerzas exteriores aplicadas sobre ella, en esa misma dirección.

Son fuerzas exteriores las que provienen de las presiones laterales — que por ser normales no admiten componentes según n — que originan las presiones p y p' aplicadas a las bases del cilindro y la componente F del peso mg según n . Como, por el momento, se considera ideal al flúido, deben suponerse nulas las fuerzas del roce sobre la superficie lateral del cilindro.

Puesto que la presión debe variar de una manera continua, se tiene, por la pequeñez de dn :

$$p' = p + dp .$$

La fuerza en dirección positiva de las n provenientes de las presiones p y p' es $-dp \cdot ds$ y la originada por el peso $-mg \cdot \cos \alpha$.

La suma de esas fuerzas debe ser igual a la masa m por la aceleración a_n en dirección n , de modo que será:

$$- (dp \cdot ds + mg \cdot \cos \alpha) = ma_n . \quad [1]$$

Se tiene, además, si τ es el volumen del cilindro y ρ el peso específico del líquido:

$$\tau = ds \cdot dn \quad ; \quad mg = \rho \tau \quad \text{y} \quad \cos \alpha = \frac{dh}{dn} \quad [2]$$

Introduciendo estos valores en la [1] resulta:

$$-\frac{d}{dn} \left(\frac{p}{\rho} + h \right) = \frac{a_n}{g}, \quad [3]$$

que es la relación de Euler ⁽¹⁾. Se obtiene la forma diferencial introduciendo la relación $a_n = \frac{dv_n}{dt}$, en la que v_n indica la velocidad en dirección n .

De la [3] resulta en seguida la condición general del equilibrio. En efecto, si el líquido está en reposo la velocidad debe ser nula en todas direcciones, de suerte que:

$$a_n = 0,$$

y por consiguiente:

$$\frac{p}{\rho} + h = \text{constante},$$

relación que constituye el teorema general de la hidrostática, según vimos en el capítulo I.

3. El movimiento estacionario de un líquido ideal: ecuación de continuidad.

— El movimiento de un líquido se dice *estacionario* cuando en cada uno de los puntos del espacio ocupado por la corriente su velocidad permanece constante en magnitud y dirección.

Las partículas líquidas se mueven según líneas bien determinadas, que se denominan *líneas de corriente*. Estas líneas pueden ponerse en evidencia suspendiendo en el líquido aserrín muy fino o polvo de licopodio.

Se entiende como *sección* de la corriente, el elemento de superficie situado en ella y que corta normalmente a sus líneas.

Las líneas que pasan por los bordes de un elemento s_1 (fig. 148) de una sección, constituyen un *tubo líquido o de corriente*.

⁽¹⁾ La derivada con respecto a n es, en realidad, parcial.

El fluido se mueve en su interior como si las paredes fuesen impermeables, constituyendo lo que se denomina un *filete líquido*.

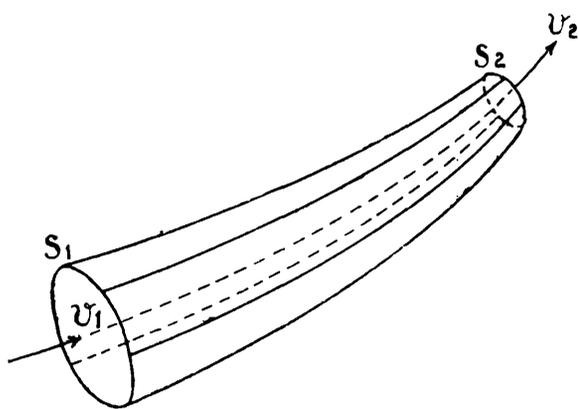


Fig. 148.

Es claro que, si el fluido es incompresible, los volúmenes que pasan a través de las diferentes secciones de un tubo de corriente en una unidad de tiempo son iguales, o, en otras palabras, la *intensidad* de la corriente o *caudal* tiene un valor constante a lo largo del tubo.

Si v_1 es la velocidad del fluido en la sección s_1 y v_2 la velocidad en otra sección s_2 del mismo filete, esa condición se expresa por la igualdad:

$$s_1 v_1 = s_2 v_2, \quad [4]$$

o, de una manera general, por:

$$sv = \text{constante}, \quad [5]$$

que es la llamada ecuación de continuidad.

De la relación [4], resulta:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_2}{v_1}. \quad [6]$$

Es decir, en dos puntos cualesquiera de un mismo filete líquido las velocidades están en razón inversa de las secciones.

Al establecer la relación [4] se ha supuesto, implícitamente, que las velocidades tienen el mismo valor en todos los puntos de una misma sección, lo que no es necesario para que el movimiento sea estacionario.

Si esto no sucede, es muy fácil demostrar que esa relación permanece válida si v_1 y v_2 representan las velocidades medias en las secciones s_1 y s_2 . Las mismas conclusiones son aplicables como es evidente, al caso en que el líquido circula por un tubo material rígido.

4 Relación entre las velocidades y las distancias de las secciones. — Supongamos que por un extenso canal de paredes paralelas, dotado en su punto medio de una ensambladura (fig. 148 a), circula estacionariamente un fluido ideal.

En los lugares donde las paredes son paralelas la velocidad tendrá, como es notorio, el mismo valor en todas partes, que indicaremos con c , y las líneas de corriente serán rectas de idéntica dirección.

Se han dibujado algunas de modo que dividen la sección del canal en elementos de área de la misma extensión s ; vale decir, en tubos de corrientes iguales. El volumen líquido que pasa en cada unidad de tiempo a través de cualquiera de sus secciones será sc .

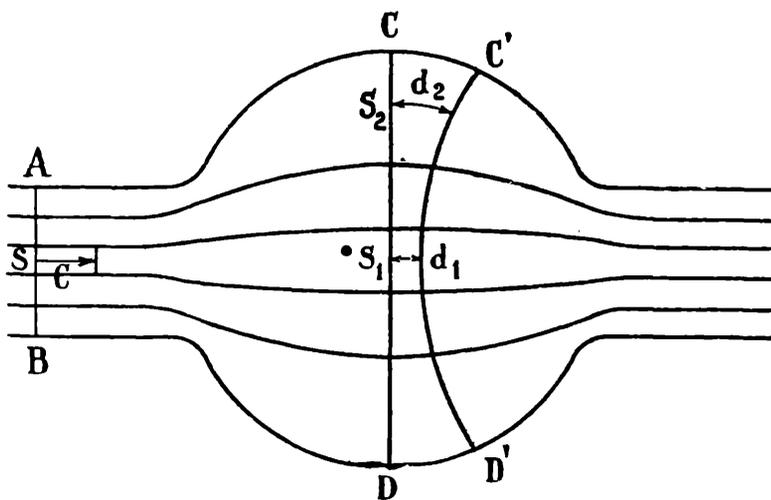


Fig. 148 a.

En la ensanchadura las líneas tomarán la forma que se ve en la figura; los tubos se hacen de mayor sección, pero, de acuerdo con la ecuación de continuidad, si a través de las secciones s_1 y s_2 las velocidades son v_1 y v_2 , respectivamente, se tiene que:

$$sc = s_1 v_1 = s_2 v_2 .$$

El fotograbado enseña que la sección de los filetes es tanto menor y, por consiguiente, la velocidad tanto mayor cuanto más « central » es el tubo.

Es fácil ver que las secciones de los filetes están en relación con la distancia de dos secciones de la corriente. En la figura se han trazado dos secciones vecinas: la CD y la $C'D'$.

Como puede observarse, a la distancia mayor d_2 corresponde la sección mayor s_2 . La teoría evidencia que las secciones de dos filetes tales como la s_1 y s_2 están entre sí como las distancias d_1 y d_2 a una sección próxima y puesto que las secciones están en razón inversa de las velocidades correspondientes, resulta que:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{d_2}{d_1} .$$

Esto es: *En el espacio limitado por dos secciones de la corriente las velocidades en dos puntos cualesquiera están entre sí como la razón inversa de las distancias de aquéllas.*

Esta relación, en concurrencia con la del párrafo anterior, permite representar la distribución de las velocidades en la corriente.

5. La ecuación de la energía de Bernoulli. La presión hidrodinámica. — Bernoulli ha sido el primero en deducir, para el movimiento estacionario de flúidos ideales, una ecuación que se denomina de energía.

Se la puede deducir aplicando la ecuación de Euler. Damos aquí, por razones de simplicidad, una demostración energética.

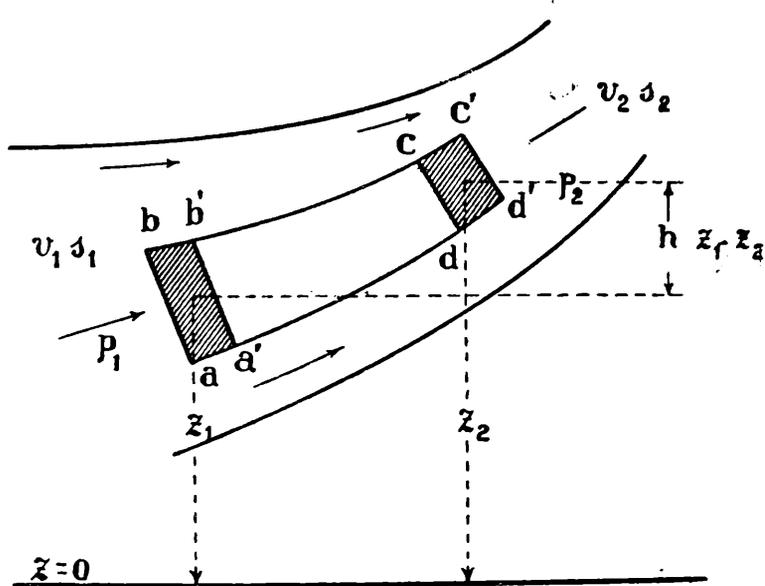


Fig. 149.

Consideremos el segmento $abcd$ (fig. 149) de un filete líquido de una corriente estacionaria, que se realiza en el sentido que indican las flechas. Sean s_1 y s_2 , v_1 y v_2 las secciones y velocidades correspondientes a sus extremos. Si, como se ha supuesto, $s_2 < s_1$ será $v_2 > v_1$.

Después de cierto tiempo, el líquido que contenía ese argumento, considerado ahora como perteneciente al espacio, se encontrará dentro del espacio $a'b'c'd'$ del mismo filete.

Puesto que la masa líquida contenida en la región $a'b'cd$ ha sido substituída por otra igual, animada en cada punto de la misma velocidad en virtud de ser estacionaria la corriente, todo ha ocurrido como si el cambio consistiese, únicamente, en el traslado del líquido que ocupaba la región $abb'a'$, de velocidad v_1 y volumen $\tau = aa' \cdot s_1$, a la región $dcc'd'$.

Preguntemos ahora cuál es el trabajo puesto en juego y cuáles son las variaciones de energía que van aparejadas con ese cambio.

Fuerzas laterales al filete no existen, puesto que suponemos que el flúido es ideal; las presiones p_1 y p_2 dan lugar a las fuerzas $p_1 s_1$ y $p_2 s_2$ aplicadas normalmente sobre las bases del segmento de filete, las que le entregan el trabajo:

$$p_1 s_1 \cdot aa' - p_2 s_2 \cdot dd' = (p_1 - p_2) \tau \quad [7]$$

pues aa' y dd' son los caminos recorridos por los puntos de aplicación de las fuerzas, y $p_1 s_1$ tiende a acelerar el movimiento, y $p_2 s_2$ a retardarlo.

El trabajo debe ser, por el principio de conservación de la energía, igual a la suma de las variaciones de las energías cinética y potencial que ha experimentado la masa líquida de la región $aba'b'$, al ser transportada a la región $cdc'd'$. Esta masa tiene el valor $\frac{\rho}{g} \tau$ si ρ es el peso específico del líquido y g la aceleración de la gravedad.

La energía cinética se ha incrementado en:

$$\frac{1}{2} \frac{\rho \tau}{g} (v_2^2 - v_1^2)$$

y la potencial de gravitación en:

$$\rho \tau h = \rho \tau (z_2 - z_1),$$

que representa el trabajo gastado para elevar en h la altura de la masa líquida en cuestión, cuyo peso es $\rho \tau$.

Se tiene, por lo tanto, estableciendo la igualdad enunciada y dividiendo por τ :

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2g} (v_2^2 - v_1^2) + \rho (z_2 - z_1) \quad [8]$$

de donde:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2, \quad [9]$$

o, de una manera general, puesto que pueden considerarse segmentos cualesquiera del filete,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2g} + z = \text{constante}, \quad [10]$$

expresión que constituye el teorema de Bernoulli. *La constante se refiere a un filete determinado; su valor variará, en general, de un filete a otro.*

Esto ocurre, por ejemplo, si dos filetes vecinos se mueven a distinta velocidad, *pues la presión debe tener, sobre la superficie que los separa de uno y otro lado, el mismo valor.*

Si la corriente consiste en un conjunto de filetes, como ocurre en el movimiento en un tubo, por ejemplo, puede aplicarse el teorema de Bernoulli directamente a toda la corriente, si se entiende como v a la velocidad media, es decir, al cociente de dividir el volumen de agua que circula por segundo por la sección del tubo.

Esto es posible siempre que el tubo no tenga curvaturas pronunciadas. Si esto ocurre, aun cuando el teorema permanece válido para cada filete, sería incorrecto escribir una sola relación para toda la sección de la corriente si ella pertenece a una curva de pequeño radio, como se verá más adelante.

El término $\frac{p}{\rho}$, variable en general de un lugar a otro, es la altura h a que subiría el líquido en un tubo vertical abierto cuya boca inferior se encontrase en un punto de la corriente; el producto ρh da la presión p existente en el mismo punto. El término z representa la altura de éste sobre un plano horizontal cualquiera elegido como origen.

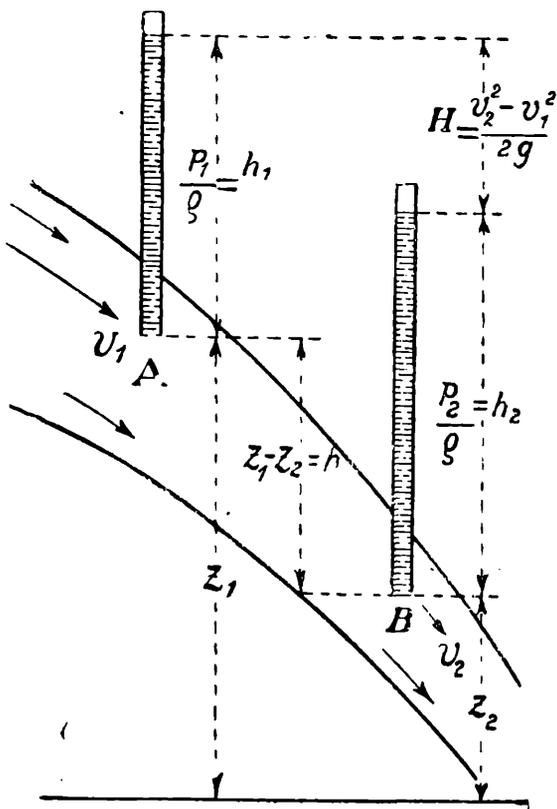


Fig. 150.

de éste sobre un plano horizontal cualquiera elegido como origen.

En la figura 150 se han ilustrado estas consideraciones, dibujando las alturas a que sube el líquido en tubos ubicados en dos puntos A y B de una corriente estacionaria.

La diferencia de altura entre los niveles a que alcanza el fluido en el interior de los tubos está dado por la expresión:

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + z_2\right) = H \quad [11]$$

o, por el teorema de Bernoulli, por:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = H. \quad [12]$$

Es decir que, si en todas partes la velocidad media de la corriente tiene el mismo valor —lo que sucede en el caso de un tubo si la sección es constante— los niveles alcanzados por el líquido en los tubos están sobre el mismo plano horizontal. (Véase el capítulo siguiente donde se introduce la viscosidad del fluido).

El teorema puede presentarse bajo un aspecto semejante al general de la hidrostática. En un fluido en reposo, la presión p es constante en todo plano horizontal; la diferencia entre las presiones en dos de ellos, situados a la distancia h , es ρh .

Si el líquido está animado de un movimiento estacionario, lo que permanece constante en todo plano horizontal ($z = \text{const.}$) es, por la [10], la suma:

$$p + \frac{1}{2} \frac{\rho}{g} v^2 = \text{constante} \quad [13]$$

de la presión y de la energía cinética de la masa de la unidad de volumen (pues $\frac{\rho}{g}$ es la masa específica), suma que por analogía se denomina presión hidrodinámica.

En este caso, el producto ρh daría la diferencia entre las presiones hidrodinámicas en dos planos horizontales situados a la distancia h .

Para los puntos A y B de la figura sería:

$$\left(p_1 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{g} v_1^2 \right) - \left(p_2 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{g} v_2^2 \right) = \rho (z_1 - z_2) = \rho h. \quad [14]$$

La significación energética del teorema de Bernoulli se hace transparente multiplicando la [10] por ρ , que es, por la incompresibilidad del fluido, una constante. Se tiene así la relación:

$$p + \frac{\rho}{2g} v^2 + \rho z = \text{constante}. \quad [15]$$

El término ρz es el trabajo que hay que gastar en elevar la masa ρ de la unidad de volumen a la altura z ; el segundo término representa la energía cinética de la masa de ese mismo volumen, y la presión tiene la significación de una energía potencial, puesto que p_1 por ejemplo, representa el trabajo gastado por la presión si $s_1.aa'$ tiene un volumen igual a la unidad.

Por lo tanto, según el teorema de Bernoulli, *en un movimiento estacionario la energía total de la unidad de volumen del líquido permanece constante*. Es claro que lo mismo ocurre con la energía de la unidad de masa.

6. Experiencias y aplicaciones. — A. Si por el interior de un tubo cuya sección varía de una manera continua (fig. 151), situado horizontalmente y provisto de tubos verticales que desembocan en

lugares diferentes, circula una corriente estacionaria de agua, se observa que el líquido asciende en los tubos a tanto mayor altura

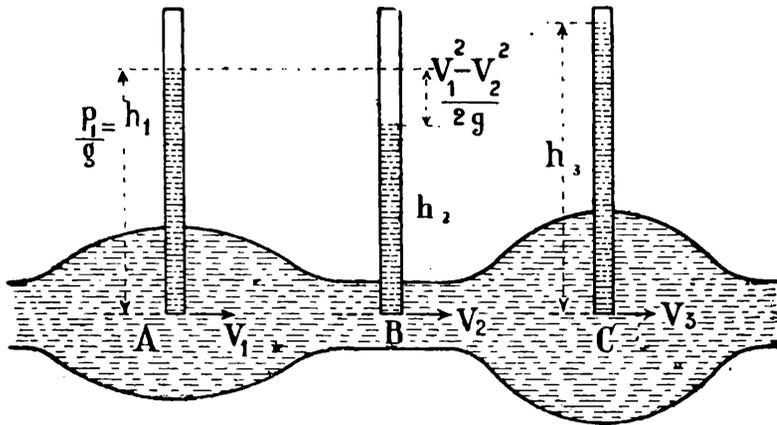


Fig. 151.

cuanto mayor es, en el lugar de su desembocadura, la sección del conducto.

La explicación fluye en seguida del teorema de Bernoulli. Eligiendo al plano horizontal, sobre el que se encuentran los extremos *A*, *B* y

C de los tubos, como plano $z = 0$; debe ser, para todos los puntos del mismo plano, de acuerdo con la [10]:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2g} = \text{constante},$$

y, por lo tanto, a mayor velocidad corresponde menor altura $\frac{p}{\rho}$ de la columna líquida.

B. Un experimento muy ilustrativo e interesante, debido a Banki, es el siguiente; un conducto circular de vidrio *AB*, parte del cual, *cd* (fig. 152), está constituido por un tubo de goma de paredes muy delgadas, pasa a través de un recipiente *R* de vidrio, en cuyo interior puede variarse la presión del aire, mediante una bomba de vacío o de compresión.

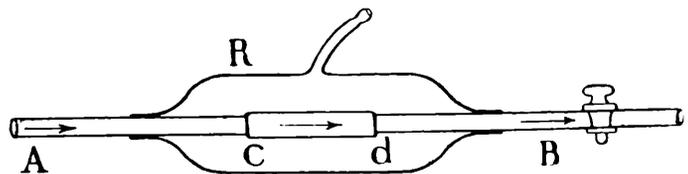


Fig. 152.

Si se hace circular agua por su interior y se disminuye la presión en el recipiente, el tubo de goma se contrae. Así debe ser, en efecto, pues si disminuye la presión en sus paredes y por lo tanto en el líquido que contiene, éste debe aumentar su velocidad de acuerdo con el teorema de Bernoulli.

Por la ecuación de continuidad la sección debe hacerse, como ocurre, más pequeña.

Lo contrario sucede si se comprime aire en el interior del tubo *R*.

El mismo principio vale en una corriente gaseosa estacionaria. Un fenómeno muy interesante que obedece a la disminución de la presión con la velocidad, es el siguiente: si se pone en comunicación el tubo *ab* (figs. 153 *a* y *b*) con un recipiente que contiene aire comprimido a la presión *p*, la corriente gaseosa determina una succión del disco inferior, móvil, hacia arriba.

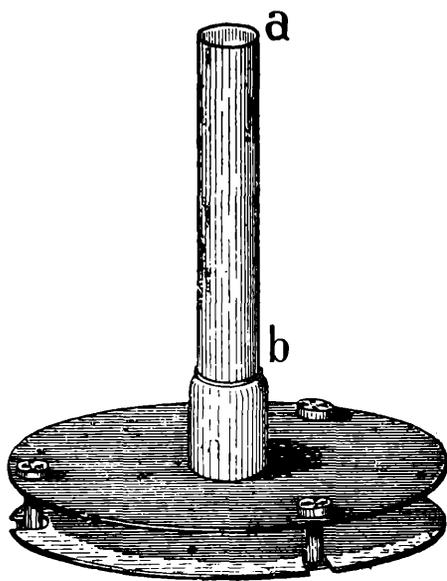


Fig. 153 *a*.

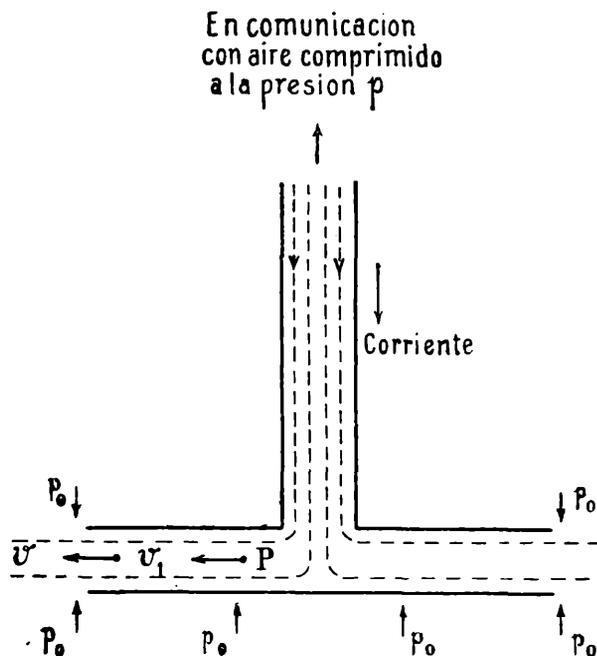


Fig. 153 *b*.

Este hecho resulta inesperado a la luz de la lógica vulgar. Con el auxilio del teorema de Bernoulli se explica fácilmente. En los lugares de salida del gas, esto es, en los bordes mismos de los discos, la presión atmosférica actúa libremente sobre la corriente flúida; la presión en ella será la atmosférica, que indicaremos con p_0 . Si la velocidad de salida es v , se tiene:

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{g} v^2, \quad [15]$$

pues la velocidad del gas en el recipiente con aire comprimido es nula.

En un punto interior tal como P la velocidad v_1 debe ser mayor que v , de acuerdo con la ecuación de continuidad, pues allí la sección total de la corriente es menor. Si se indica con p_1 la presión, debe ser

$$p = p_1 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{g} v_1^2. \quad [16]$$

Ahora bien, la presión entre los discos es p_1 , mientras que en el exterior tiene el valor p_0 y, por las [15] y [16], la expresión:

$$p_0 - p_1 = \frac{1}{2} \frac{\rho}{g} (v_1^2 - v^2) \quad [17]$$

es positiva, puesto que $v_1 > v$. Las placas deben, pues, juntarse.

De una manera semejante se explica el funcionamiento del aspirador representado en la figura 154.

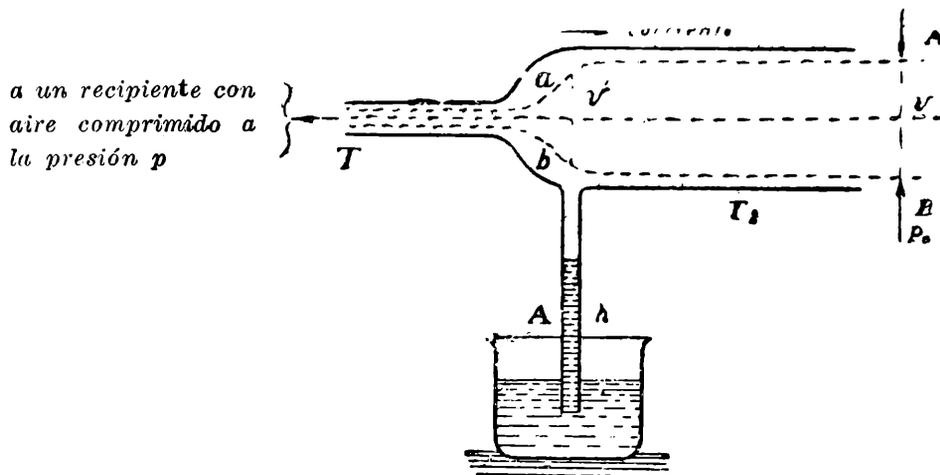


Fig. 154.

La presión en la sección AB es la atmosférica p_0 ; la velocidad de salida v será tal, que se cumpla la relación:

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{g} v^2. \quad [18]$$

En la sección ab , el chorro, de velocidad v_1 , es mayor que v , y la presión p_1 tiene el valor dado por la relación:

$$p = p_1 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{g} v_1^2. \quad [19]$$

De las [18] y [19] resulta:

$$p_0 - p_1 = \frac{1}{2} \frac{\rho}{g} (v_1^2 - v^2), \quad [20]$$

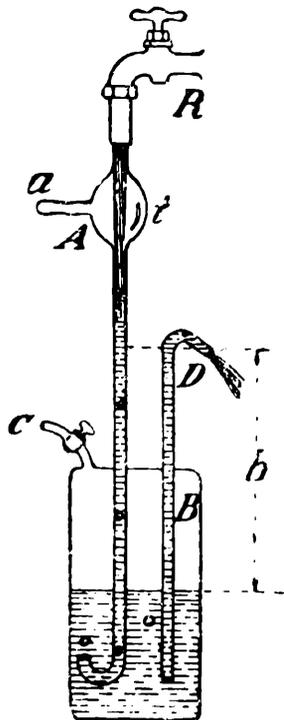


Fig. 155.

magnitud positiva, puesto que $v_1 > v$. La altura h a que sube el líquido en el tubito lateral será tal, que sea:

$$p_0 - p_1 = \rho' h \quad [21]$$

si ρ' es el peso específico del líquido. El efecto es debido, como es evidente, a la forma del chorro; si el conducto de aspiración A estuviese más hacia la derecha, donde la sección de la corriente es constante, el fenómeno no se produciría.

Idéntica es la explicación del funcionamiento de la trompa de agua. La representada en la figura 155 funciona también como máquina de compresión; pueden obtenerse con ella presiones hasta de algunos centímetros.

En el mismo principio se funda la bomba a mercurio de Sprengel.

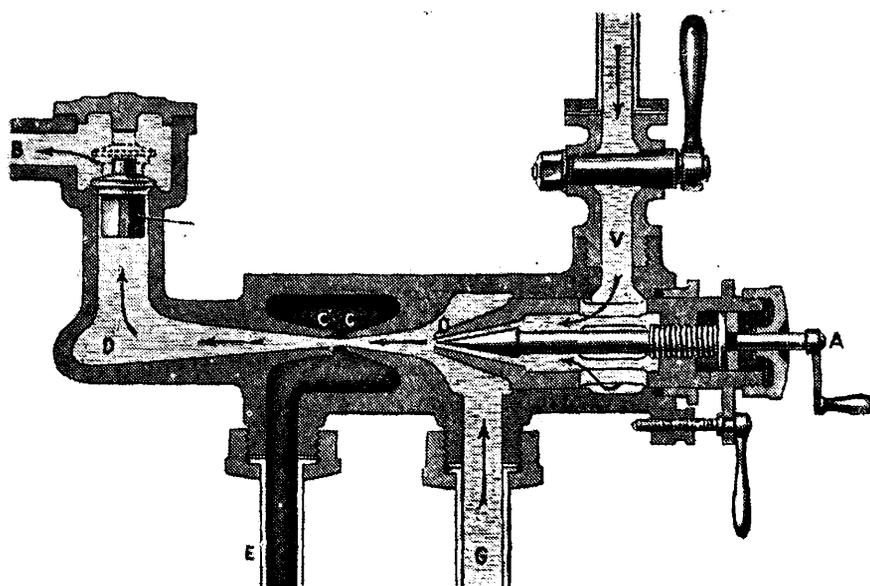


Fig. 156.

C. EL INYECTOR DE GIFFARD. — Este inyector (fig. 156), muy usado en las máquinas a vapor, se funda en el mismo principio.

El tubo V se comunica con la parte superior de la caldera mediante una llave; el D con la parte inferior, por una válvula que se abre de abajo hacia arriba. Los conductos G y E se comunican con el condensador.

Si se abre la llave, se precipita el vapor por el tubo V ; el chorro adquiere gran velocidad al pasar por el estrechamiento cónico O , regulable con la manivela A , produciendo una aspiración continua por el tubo G .

El líquido penetra a D , abre la válvula y llega a la caldera; parte vuelve al recipiente o al condensador.

D. MEDIDOR VENTURI. — Este instrumento, que permite medir la velocidad de agua en cañerías y la cantidad que circula por segundo, se funda, también, en el teorema de Bernoulli.

Si el líquido circula, por ejemplo, en el interior de un tubo cilíndrico de sección s_1 se intercala en ésta la pieza ABC (fig.157), que consiste en un tubo corto de sección $s_2 < s_1$ situado entre dos tubos cónicos cortos de diferente longitud.

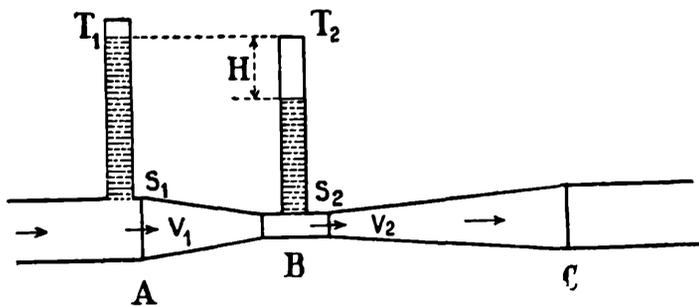


Fig. 157.

Dos tubos verticales T_1 y T_2 desembocan en los tubos de secciones s_1 y s_2 . En ellos los niveles del lí-

quido alcanzan distintas alturas, puesto que las velocidades son, en los lugares en que desembocan, diferentes.

La diferencia de altura está dada por la relación.

$$H = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}. \quad [22]$$

Por la ecuación de continuidad se tiene, además,

$$v_2 = v_1 \frac{s_1}{s_2}, \quad [23]$$

y, por consiguiente:

$$v_1 = \frac{s_2}{\sqrt{s_1^2 - s_2^2}} \sqrt{2gH}. \quad [24]$$

La cantidad de fluido que pasa por segundo es:

$$q = v \cdot s_1 = \frac{s_1 s_2}{\sqrt{s_1^2 - s_2^2}} \sqrt{2gH}. \quad [25]$$

La forma cónica de los tubos de conexión entre las secciones de diámetro s_1 y los comienzos de la sección s_2 hacen que la diferencia H de nivel sea debida casi exclusivamente a los cambios de velocidad.

Debido al cambio mismo de sección se produce una disminución de la presión hidrodinámica, que es muy pequeña si la variación es continua. De estas cuestiones nos ocuparemos en uno de los capítulos venideros.

CAPITULO VIII
 VISCOSIDAD DE LOS FLUIDOS

A. — Líquidos

1. **Pérdida de carga en los tubos.**—El teorema de Bernouilli que rige el movimiento estacionario de los flúidos ideales no explica de una manera rigurosa los fenómenos que se observan en los flúidos reales. Los apartamientos provienen, en el movimiento laminar, de la existencia de una fuerza de roce entre las capas líquidas que se deslizan una sobre otra.

En la deducción de la ecuación de Bernouilli se supuso, implícitamente, nulo al frotamiento. Es claro, entonces, que ese teorema no puede regir los movimientos de los flúidos reales de una manera exacta.

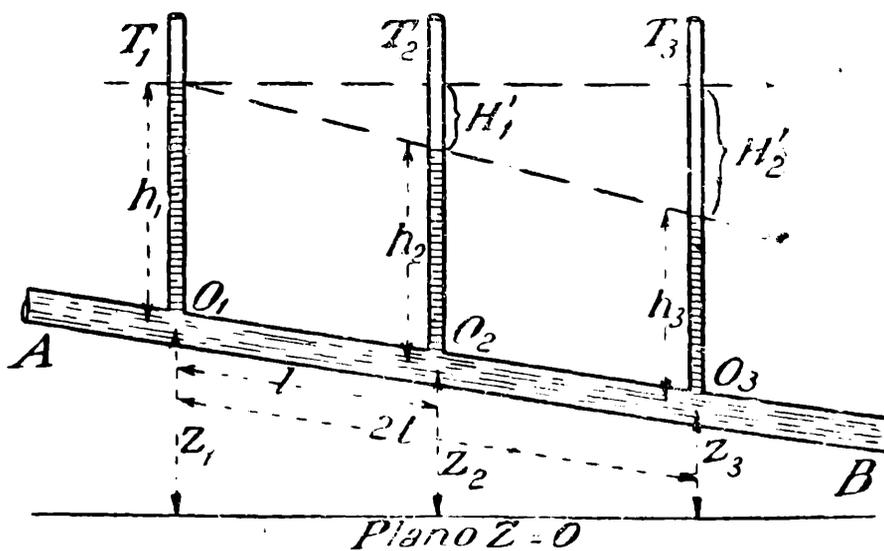


Fig. 158.

Si en el interior de un conducto cilíndrico *AB*, por ejemplo, de sección constante (fig. 158), se tiene una corriente estacionaria de un flúido, la velocidad tendrá en todas partes el mismo valor. Si el teorema de Bernouilli fuese válido los niveles que alcanza el líquido en los tubos verticales de que está provisto estarían todos sobre el mismo plano horizontal (véase el número 4 del capítulo anterior). Se

observa, en cambio, que los niveles se encuentran tanto más bajos cuanto más se avanza en dirección de la corriente y, de tal manera, que todos se hallan situados sobre cierta línea inclinada.

La diferencia de los niveles en dos cualesquiera de los tubos es, por lo tanto, proporcional a la longitud del conducto comprendido entre sus desembocaduras.

Si, como en el caso de la figura, se tienen tres tubos equidistantes de modo que dos consecutivos comprendan la distancia l del conducto y los extremos la $2l$, se tendrá para las diferencias H_1' y H_2' de las alturas de los niveles la relación:

$$\frac{H_2'}{2l} = \frac{H_1'}{l}, \quad [1]$$

es decir, que:

$$H_2' = 2 H_1'$$

o, de una manera completamente general, si H' es la diferencia de los niveles de dos tubos que desembocan en dos puntos del conducto situados a la distancia l se tiene:

$$\frac{H'}{l} = \text{constante} = J, \quad [2]$$

si se indica con J la caída de nivel del líquido de los tubos por unidad de longitud del conducto.

La experiencia muestra, según eso, que en lugar de ser, de acuerdo con la relación [10] del capítulo anterior,

$$\frac{p_1}{\rho} + z_1 = \frac{p_2}{\rho} + z_2$$

(puesto que la velocidad tiene el mismo valor en todas partes) es, para dos puntos situados a la distancia l ,

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + z_2 \right) = H' = J l. \quad [3]$$

2. Definición del coeficiente de viscosidad.—Estos hechos experimentales se explican de una manera satisfactoria introduciendo la fuerza de roce entre las capas líquidas.

Supongamos, lo que no resta generalidad a estas consideraciones, que se tiene un movimiento estacionario de un fluido real sobre un

plano rígido horizontal PQ tal que los lugares de velocidad constante sean también planos horizontales. La figura 159 representa una sección con el plano del papel; las líneas horizontales son los trazos de algunos de aquellos planos.

La experiencia muestra que sobre la pared misma la velocidad del líquido es sumamente pequeña, de modo que puede considerarse nula. Por razones de continuidad y de simetría la velocidad del líquido debe aumentar en dirección a su normal.

Resulta así un deslizamiento de unas capas sobre otras, lo que origina una fuerza de roce

que se define como sigue: la fuerza de roce que actúa sobre cada centímetro cuadrado de dos capas que se deslizan una sobre otra, que indicaremos con R , es igual al producto de una constante η , característica para cada líquido, por la variación

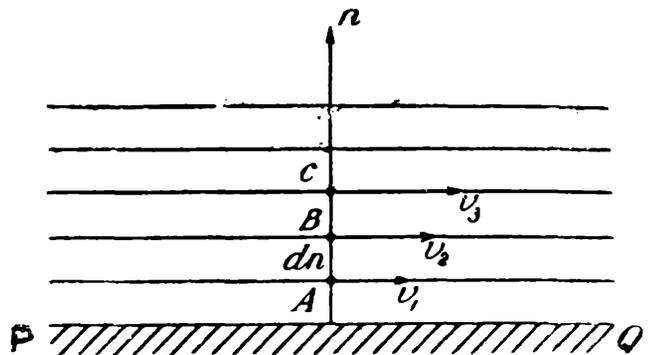


Fig. 159.

de la velocidad en dirección a la normal n a la superficie de separación es decir:

$$R = \eta \frac{dv}{dn}. \quad [4]$$

El cociente diferencial, que es el gradiente de velocidad, se forma de esta manera: En dos puntos A y B situados sobre la misma normal a una capa líquida, a la distancia d , las velocidades serán v_1 y v_2 ; la variación media de las velocidades en dirección a la normal a la capa es:

$$\frac{v_2 - v_1}{d}.$$

En el punto A , que puede considerarse como perteneciente a la superficie de separación de dos capas líquidas, se tiene:

$$\frac{dv}{dn} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{v_2 - v_1}{d}. \quad [5]$$

La magnitud η se denomina *coeficiente de viscosidad o de frotamiento interior*.

De acuerdo con la [4] el coeficiente de viscosidad es numéricamente igual a la fuerza que actúa sobre cada unidad de superficie (en sentido contrario al movimiento) de una capa líquida que a la unidad de distancia de la pared se mueve estacionariamente con la unidad de velocidad. En efecto, $R = \eta$ cuando $v_2 = 1$ y $d = 1$ y, como se ha dicho, el líquido está en reposo sobre la pared.

Sus dimensiones son:

$$[\eta] = \left[\frac{\text{fuerza} \cdot \text{longitud}}{\text{superficie} \cdot \text{velocidad}} \right] = M L^{-1} T^{-1}, \quad [6]$$

pues no hay que olvidar que R es la fuerza por unidad de superficie.

Si se mide la longitud en centímetros, el tiempo en segundos y la fuerza en gramos será:

$$[m] = \frac{\text{gramo-peso}}{\text{cm/seg}^2}$$

y, por lo tanto,

$$[\eta] = \frac{\text{gramo-peso} \cdot \text{seg}}{\text{cm}^2};$$

si la fuerza se mide en dinas, la masa está dada en gramos y es:

$$[\eta] = \text{cm}^{-1} \cdot \text{gr} \cdot \text{seg}^{-1}.$$

Como en las aplicaciones aparece comúnmente el cociente de la viscosidad por la masa específica, es más cómodo, para los usos técnicos, utilizar ese cociente que muchos autores denominan viscosidad cinemática e indican con la letra Z . Se tiene, entonces,

$$Z = \frac{\eta}{\mu} = \frac{\eta \rho}{g}, \quad [7]$$

cuya dimensión es:

$$[Z] = \frac{L^2}{T}$$

o en el sistema $C. G. S.$:

$$[Z] = \text{cm}^2 \cdot \text{seg}^{-1}. \quad [8]$$

3. **La distribución de la velocidad. Ley de Poiseuille.** — Estudiaremos ahora, introduciendo las fuerzas de roce, el movimiento laminar estacionario de un líquido en el interior de un tubo cilíndrico de sección circular constante.

Es claro que las velocidades aumentan desde las paredes hasta el centro y las superficies de velocidad constante serán cilindros circulares coaxiales entre sí y con el tubo.

Consideremos un filete líquido de longitud l limitado por una de esas superficies cilíndricas coaxiales con el tubo de radio r (figs. 160 *a* y *b*). Las

fuerzas que actúan sobre él en dirección del movimiento son las provenientes de las presiones p_1 y p_2 cuyo valor total es:

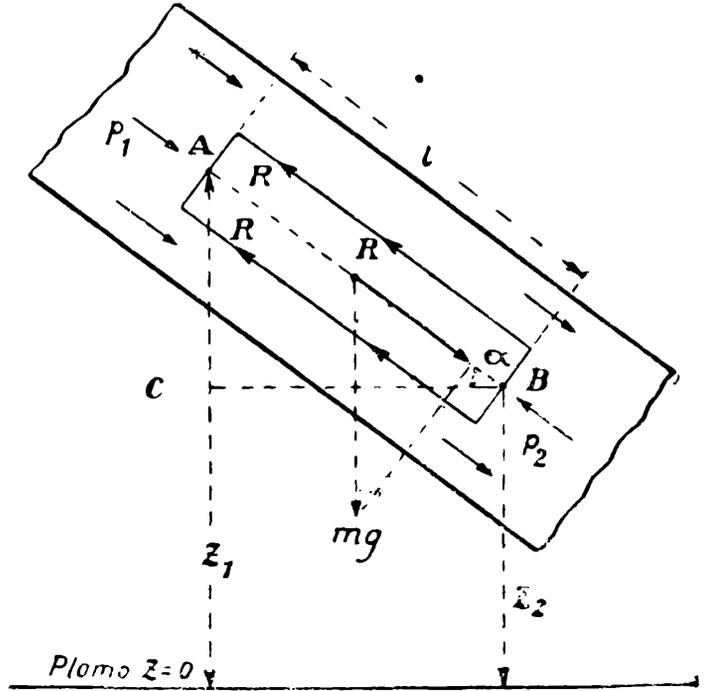


Fig. 160.

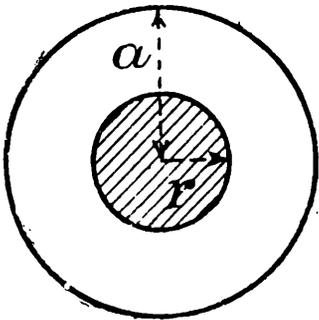


Fig. 160 *a* *b*.

$$(p_1 - p_2) \pi r^2$$

y la componente del peso mg :

$$\rho \pi r^2 l \cdot \text{sen } \alpha = \rho \pi r^2 (z_1 - z_2), \quad [9]$$

es decir, en total,

$$\rho \pi r^2 \left[\left(\frac{p_1}{\rho} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + z_2 \right) \right] = \rho \pi r^2 H' = \rho \pi r^2 J l, \quad [10]$$

en virtud de la [3].

En sentido contrario actúan, sobre la superficie lateral, las fuerzas R del roce. La suma total de estas fuerzas es:

$$2 \pi r l R = 2 \pi l \eta r \frac{dv}{dr}. \quad [11]$$

Puesto que el movimiento es uniforme la suma de las fuerzas que actúan en ambos sentidos debe ser cero. Resulta así, después de dividir por $\pi l r$,

$$J \rho r = - 2 \eta \frac{dv}{dr}, \quad [12]$$

de la que, por integración, se obtiene:

$$v = - \frac{J \rho}{4 \eta} r^2 + C, \quad [13]$$

donde C es una constante de integración. Esta se determina por la condición de que para $r = a$, indicando con a el radio del tubo, la velocidad debe ser cero. Resulta:

$$C = \frac{J \rho}{4 \eta} a^2, \quad [14]$$

y, por lo tanto,

$$v = \frac{J \rho}{4 \eta} (a^2 - r^2). \quad [15]$$

Se tiene así la ley de distribución de las velocidades. La [5] es la ecuación de una parábola cuyo eje es el del tubo. En la figura 161 está representada gráficamente.

Los desarrollos de este número, realizados hasta aquí, se deben a Navier y a Stokes (1845).

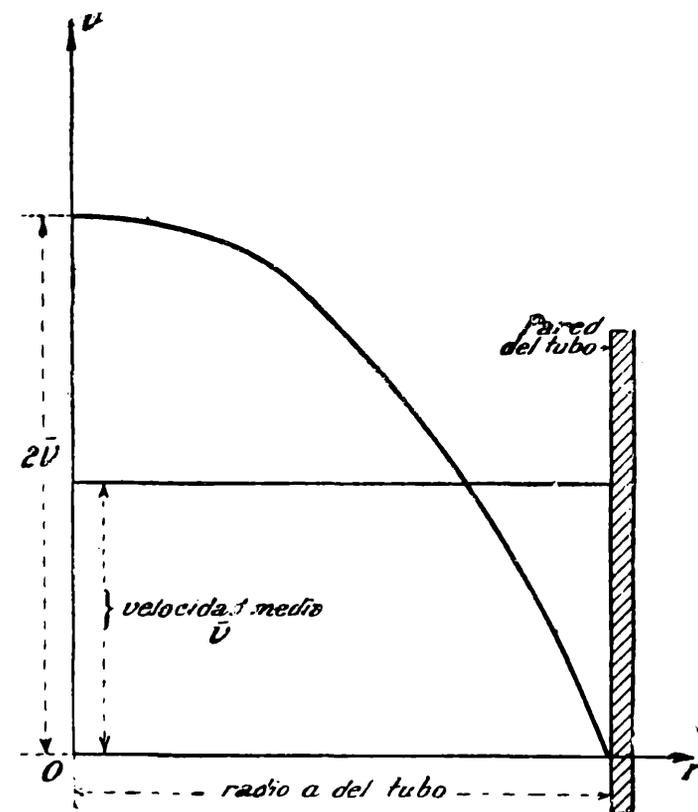


Fig. 161.

La cantidad de líquido que pasa en una unidad de tiempo por una sección del tubo se calcula fácilmente por medio de la [15]. A través de la superficie $2 \pi r \cdot dr$ de una corona de radio r y espesor dr (fig. 162) pasa en la unidad de tiempo el volumen líquido:

$$dq = 2 \pi r \cdot dr \cdot v = \frac{\pi J \rho}{2 \eta} (a^2 - r^2) r \cdot dr, \quad [16]$$

y a través de la sección del tubo, el volumen :

$$q = \frac{\pi J \rho}{2 \eta} \int_0^a (a^2 - r^2) r \cdot dr = \frac{\pi}{8} \frac{\rho}{\eta} J a^4. \quad [17]$$

Esta ley fué deducida experimentalmente por Poiseuille en 1847.

Según ella la cantidad de líquido que pasa a través de una sección de un tubo circular es, en el movimiento laminar, proporcional a la pérdida de carga por unidad de longitud y a la cuarta potencia del radio, e inversamente proporcional al coeficiente de viscosidad.

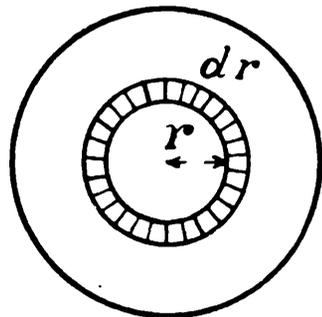


Fig. 162.

Es claro que la *velocidad media*, que indicamos con \bar{v} , en una sección cualquiera del tubo, estará dada por la relación :

$$\bar{v} = \frac{q}{\pi a^2}, \quad [18]$$

con lo que resulta de la [17] :

$$J = \frac{\rho}{8 \eta} \frac{\bar{v}}{a^2}. \quad [19]$$

Esta fórmula contiene el resultado experimental según el cual J es una constante. La pérdida de carga por unidad de longitud es, de acuerdo con ella, proporcional a la velocidad media y al coeficiente de viscosidad, e inversamente proporcional al cuadrado del radio.

De la [15] y [19] resulta que la velocidad v_0 del líquido en el eje del tubo, esto es para $r = 0$, es el doble que la velocidad media, es decir que :

$$v_0 = 2 \bar{v}. \quad [20]$$

A fin de poner en evidencia la concordancia perfecta entre los resultados experimentales y teóricos, damos a continuación una tabla de valores. En la primera columna figura el diámetro $2r$ de los tubos, en la segunda el volumen líquido derramado en 500 segundos y en la tercera los volúmenes calculados con la fórmula de Poiseuille :

$2r$	$500 \cdot q$ (observados)	$500 \cdot q$ (calculados)
mm	mm ³	mm ³
0,01395	1,465	1,465
0,02938	28,826	28,808
0,04374	141,500	141,63
0,08549	2067,400	2066,9
0,11340	6398,300	6389,2
0,14160	15532,000	15547,0

Esta tabla es de Poiseuille mismo. Es claro que la tercera columna se obtiene calculando con *una* de las medidas el valor de η que corresponde al líquido en cuestión, adoptando luego ese número para todos los cálculos.

La concordancia perfecta existente entre los datos de las observaciones y del cálculo prueba que la ley de las velocidades es exacta.

4. Determinación experimental del coeficiente de viscosidad.

— A. DETERMINACIÓN ABSOLUTA. — Un método consistente en medir la cantidad de líquido que pasa a través de un tubo de diámetro muy pequeño durante cierto tiempo. La fórmula de Poiseuille permite calcular, con esos datos, a η .

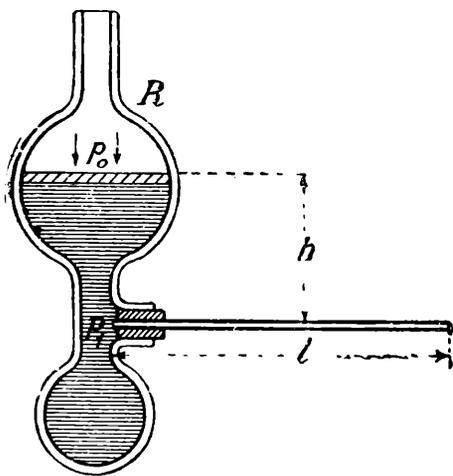


Fig. 163.

En la figura 163 se tiene un esquema de una instalación apropiada a ese propósito. El tubo es horizontal, de modo que la gravedad no interviene, en su trayecto, en el movimiento del líquido.

La presión p_1 , en la inmediata vecindad de la primera extremidad, será:

$$p_1 = p_0 + \rho h,$$

si se indica con p_0 la presión atmosférica, con ρ el peso específico del líquido y con h la distancia vertical entre el eje del tubo y la superficie libre; la presión en el otro extremo tiene el valor:

$$p_2 = p_0.$$

Con estos valores, la [3] se convierte en:

$$H' = J l = \frac{p_1 - p_2}{\rho} = h \quad [21]$$

$$J = \frac{p_1 - p_2}{\rho l} = \frac{h}{l}. \quad [22]$$

El volumen escurrido en t segundos será, según la [17],

$$Q = qt = \frac{\pi \rho}{8 \eta} \frac{h}{l} r t. \quad [23]$$

Aun cuando el nivel del líquido del recipiente R desciende muy poco por el escurrimiento de un volumen apreciable, debe tomarse para h el valor medio entre las alturas inicial y final. Midiendo además a Q , r , l , t y q se calcula η .

B. CORRECCIÓN. — El volumen Q escurrido corresponde al volumen líquido que existía en la zona superior sombreada. Implícitamente se ha admitido, en este caso, que todo el trabajo gastado por la gravedad durante la caída h de la masa líquida de volumen Q se ha consumido totalmente en el trabajo del roce. No es así, sin embargo, pues parte es almacenada en forma de energía cinética por el fluido que se mueve en el tubo. Es necesario, por esto, modificar un poco los cálculos anteriores.

Indiquemos, como antes, con q el volumen escurrido en la unidad de tiempo.

La gravedad gasta durante su caída el trabajo $q h$. El trabajo que consume el roce es, por segundo:

$$(p_1 - p_2) \cdot \pi a^2 \bar{v} = (p_1 - p_2) q, \quad [24]$$

pues $(p_1 - p_2) \pi^2$ es la fuerza y \bar{v} el camino recorrido. La energía cinética almacenada por el líquido debemos calcularla por una integración sobre todas las capas cilíndricas. Esa energía está dada por la expresión:

$$\frac{1}{2} \frac{\rho}{g} \int_0^a 2 \pi r v \cdot v^2 dr. \quad [25]$$

Poniendo en lugar de la velocidad el valor:

$$v = \frac{2q}{\pi a^4} (a^2 - r^2), \quad [26]$$

que resulta de las [15] y [17], se obtiene para la energía cinética del volumen q la expresión:

$$\frac{\rho}{g} \frac{q^3}{\pi^2 a^4}.$$

Se tiene, por lo tanto,

$$\rho h = (p_1 - p_2) + \frac{\rho}{g} \frac{q^3}{\pi^2 a^4}. \quad [27]$$

o

$$J = \frac{p_1 - p_2}{\rho l} = h - \frac{1}{g} \frac{q^3}{\pi^2 a^4}. \quad [28]$$

Se ve, así, que en lugar de h debe introducirse en la fórmula [23] el valor:

$$h - \frac{1}{g} \frac{q^3}{\pi^2 a^4}. \quad [29]$$

Esta corrección ha sido introducida por Hagenbach y Couette.

C. DETERMINACIÓN RELATIVA. — Conocido el valor absoluto del coeficiente de viscosidad de un líquido, se puede determinar el de otro por comparación de los tiempos t_1 y t_2 que corresponden a los escurrimientos de volúmenes iguales a través del mismo tubo.

Si las alturas líquidas h son iguales en ambos casos, se tiene, prescindiendo de la pequeña corrección de que acabamos de hablar,

$$p_1 - p_2 = \rho_1 h$$

para uno de los líquidos y

$$p_1 - p_2 = \rho_2 h$$

para el otro, y por la [23]:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\rho_1 t_1}{\rho_2 t_2}. \quad [30]$$

En la práctica se usa comúnmente, a este fin, el aparato representado en la figura 163. Se trata de un tubo en U, una de cuyas

ramas es, en parte capilar, y provista de un pequeño ensanchamiento *A*. Dos marcas α y β , trazadas sobre el tubo capilar, a uno y a otro lado de la ampolla, fijan el volumen de escurrimiento.

La otra rama, mucho más amplia, está provista, también, de un ensanchamiento esférico *B*.

Las medidas se hacen de la manera siguiente: se introduce primeramente con una pipeta unos cuantos centímetros cúbicos del líquido de comparación (se usa por lo general agua) y aspirando por el tubo de goma *T* se hace ascender el líquido en la rama de la izquierda hasta que su nivel se encuentre más o menos un centímetro por encima de α . Abandonando después el líquido a sí mismo, se mide el tiempo que transcurre entre los pasajes del nivel por α y β .

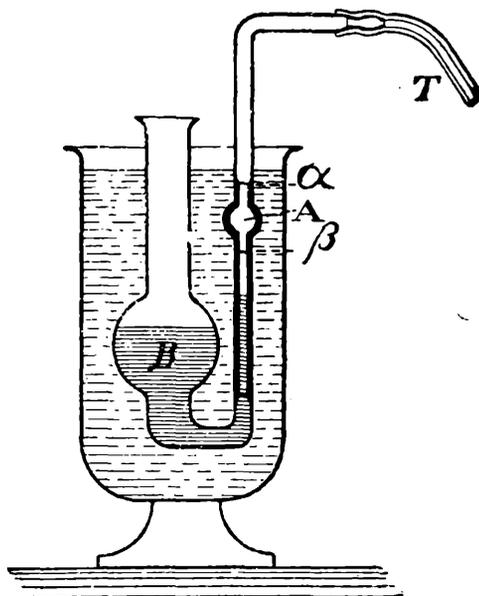


Fig. 164.

Se lava luego cuidadosamente el viscosímetro, con el mismo líquido cuyo coeficiente se ha de determinar, e introduciendo un volumen igual al del agua se mide el tiempo de escurrimiento que le corresponde. El valor del coeficiente se calcula con la fórmula [30].

Como el frotamiento interior varía mucho con la temperatura, ésta debe estar bien definida en toda determinación, lo que se logra introduciendo el aparato en un baño de agua.

Como el frotamiento interior varía mucho con la temperatura, ésta debe estar bien definida en toda determinación, lo que se logra introduciendo el aparato en un baño de agua.

D. MÉTODO DE COULOMB. — El coeficiente de viscosidad puede determinarse también por un procedimiento ideado por Coulomb.

Un disco de radio *R* se hace oscilar en un plano horizontal, sumergido en el seno de un líquido, bajo la acción de las fuerzas elásticas de un hilo metálico del cual está suspendido.

La teoría muestra que el decrecimiento logarítmico γ de las oscilaciones guarda con el coeficiente η la relación:

$$\gamma = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{R^4}{I} \sqrt{\eta \rho T}, \quad [31]$$

donde *I* es el momento de inercia de la suspensión, *T* el tiempo de duración de una oscilación simple y ρ el peso específico del líquido.

O. E. Meyer ha utilizado el fundamento de este método en la determinación del coeficiente de roce interior del agua. Los valores que encontró son un poco mayores que los de Poiseuille.

5. Valores numéricos. Dependencia con la temperatura.— Damos a continuación una tabla de valores que se refieren a la temperatura de 18° C. Están dados en $\frac{\text{dina seg}}{\text{cm}}$; dividiéndolos por 981 se tienen los valores correspondientes en $\frac{\text{gramo-peso seg}}{\text{cm}^2}$.

Substancia	$\eta \frac{\text{dina seg}}{\text{cm}^2}$	Substancia	$\eta \frac{\text{dina seg}}{\text{cm}^2}$
Agua	0,0106	Benzol	0,0066
Alcohol metílico ..	0,0064	Glicerina	11
Alcohol etílico	0,0130	Mercurio	0,0159
Eter	0,0026		

El valor de η disminuye rápidamente con la temperatura, como puede observarse en la siguiente tabla referente al agua. Figuran allí los valores $10^5 \cdot \eta$ en $\frac{\text{dina seg}}{\text{cm}^2}$.

t	$10^5 \cdot \eta$	t	$10^5 \cdot \eta$	t	$10^5 \cdot \eta$	t	$10^5 \cdot \eta$
0°	1797	19°	1029	30°	803	100°	284
5	1518	20	1004	40	655	110	256
10	1307	21	980	50	551	120	232
15	1140	22	957	60	470	130	212
16	1110	23	936	70	407	140	196
17	1082	24	915	80	357	150	184
18	1055	25	895	90	317	160	174
19	1029	30	803	100	284		

En gran número de substancias el coeficiente de viscosidad se representa, en su dependencia con la temperatura, por funciones de la forma

$$\eta = \frac{C}{(1 + bt)^n},$$

donde t es la temperatura y C , b y n constantes.

Para el agua es:

$$C = 0,017941 \quad ; \quad b = 0,023120 \quad ; \quad n = 1,5423.$$

Para el alcohol etílico:

$$C = 0,017753 \quad ; \quad b = 0,004770 \quad ; \quad n = 4,3731.$$

6. La viscosidad de los gases.— La experiencia muestra que en los gases existen también fuerzas de roce. Si se manda una corriente de aire, por ejemplo, a lo largo de un tubo (fig. 165) provisto de

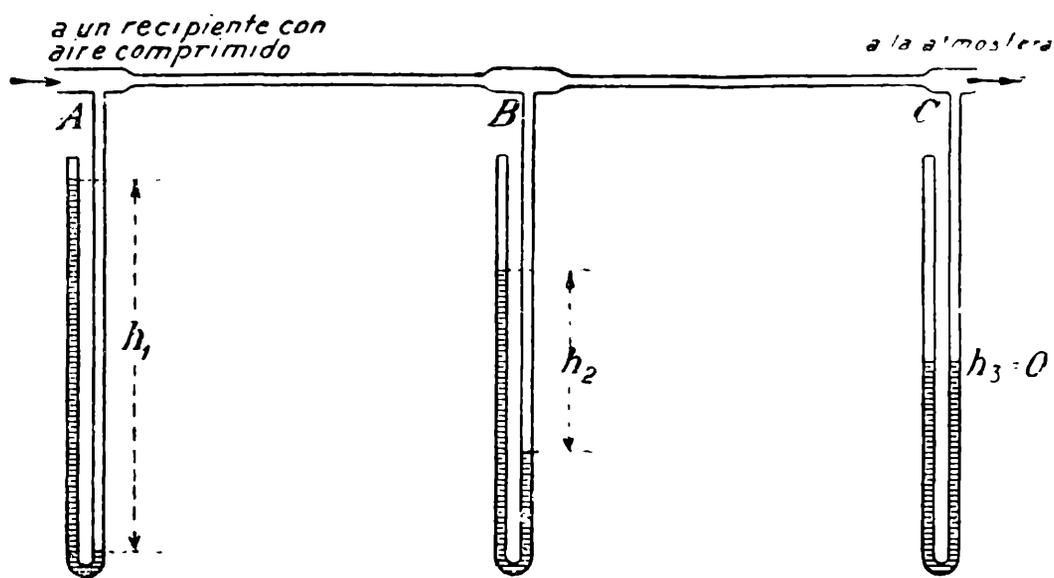


Fig. 165.

manómetros, se observa una caída lineal de la presión, lo mismo que en los líquidos. Las presiones en los lugares *A*, *B* y *C* se obtienen sumando a la presión atmosférica, respectivamente, las que corresponden a las diferencias de nivel h_1 , h_2 y h_3 en las ramas de los manómetros; diferencias que dan, por lo tanto, la caída de presión a lo largo del tubo.

En los gases, al revés que en los líquidos, el frotamiento interno aumenta con la temperatura. Esto puede ponerse en evidencia, fácilmente, calentando (fig. 166) el tramo del tubo comprendido entre los dos últimos manómetros. Las columnas líquidas que indican la sobrepresión diferirán en éstos más que entre los dos primeros.

El movimiento en el interior de un tubo circular puede estudiarse de una manera análoga a la seguida en los líquidos, pero existe una diferencia que proviene del hecho de que los gases son muy compresibles.

Si el movimiento es estacionario, aun cuando la densidad ρ varía de un punto a otro con la presión, las masas de gas que pasan en una

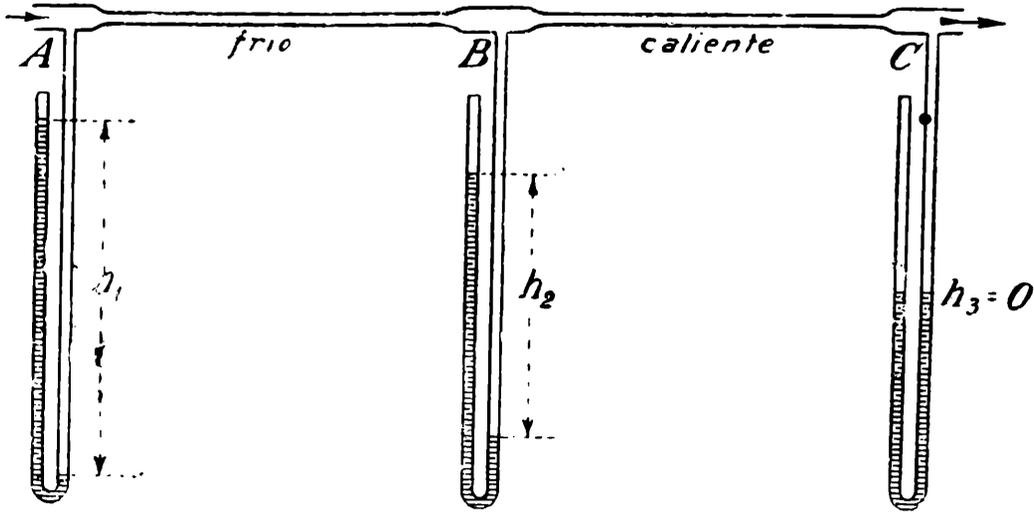


Fig. 166.

unidad de tiempo a través de las diferentes secciones son iguales y, por lo tanto, el producto ρv de la densidad por la velocidad tiene que

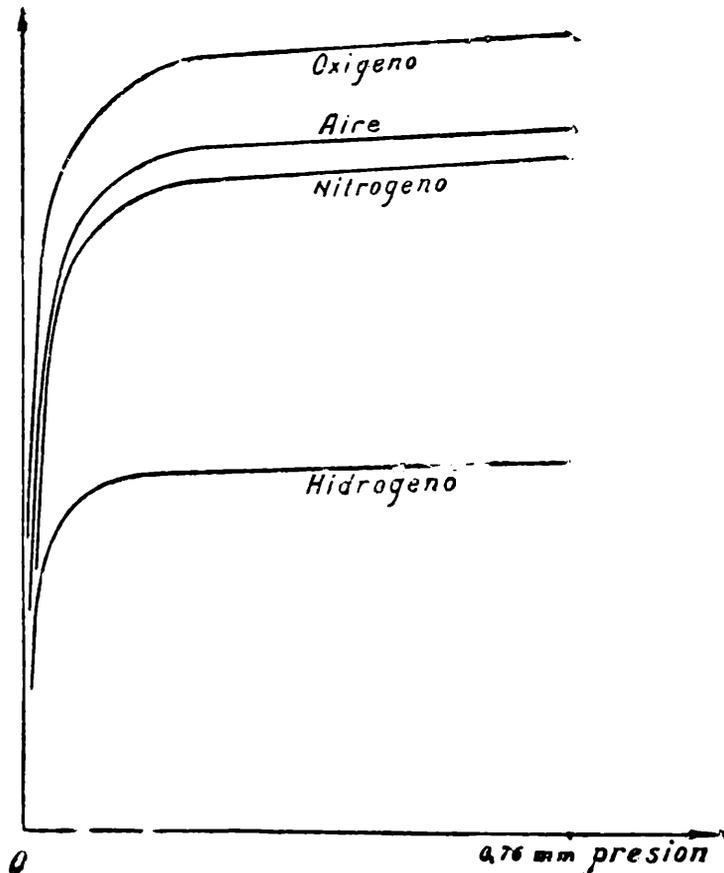


Fig. 167.

ser constante. Puesto que la densidad es proporcional a la presión p , se sigue que el producto $p v$ es invariable a lo largo del tubo. Como p varía de una sección a otra es claro que v no puede ser constante como lo es en el movimiento estacionario de un líquido. Existe, pues, un gradiente de velocidad a lo largo del tubo, además del gradiente radial. Si el tubo es de pequeña sección se puede despreciar el gradiente transversal.

La teoría, que no deseamos desarrollar aquí, muestra que si $p_1 V_1$ y

$p_2 V_2$ son las presiones y volúmenes de entrada y salida de cierta masa gaseosa, se tiene:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 = \frac{p_1^2 - p_2^2}{16 l \eta} \pi a^4,$$

donde l es la longitud y a el radio del tubo. Por medio de esa fórmula puede determinarse η . En la tabla que va a continuación se dan los valores correspondientes a algunos gases, obtenidos por O. E. Meyer y Graham que se refieren a la temperatura de 15° más o menos:

Substancia	$10^5 \cdot \eta$
Aire	19,0
Nitrógeno	18,4
Oxígeno	21,2
Hidrógeno	9,3
Acido carbónico .	16,0

El conocimiento del coeficiente de frotamiento interior de las substancias gaseosas es de una importancia muy grande, pues en la *teoría cinética* de los gases se explica el fenómeno del roce por el intercambio de moléculas, animadas de distintas velocidades, entre las capas flúidas en movimiento y se establece una relación entre aquel coeficiente y el camino medio λ entre dos choques. Se puede así, determinando η , calcular λ .

Un resultado muy interesante, establecido primeramente por esa teoría y que ha sido comprobado después experimentalmente, es que el frotamiento interior es independiente de la presión. La experiencia muestra que esta ley se cumple dentro de límites muy grandes, pero que a presiones muy bajas (alrededor de 10^{-4} mm) la viscosidad disminuye rápidamente con la presión, como indican las curvas de la figura 167 que representan observaciones realizadas por Crookes.

CAPITULO IX

PERDIDA DE CARGA POR CAMBIO DE SECCION DE LOS TUBOS. LEY DE BORDA. SALIDA DE LOS FLUIDOS POR ORFICIOS Y TUBOS

1. **Ley de Borda.** — En un tubo cuya sección varía de una manera discontinua (fig. 168) se produce una pérdida de carga en el lugar del cambio.

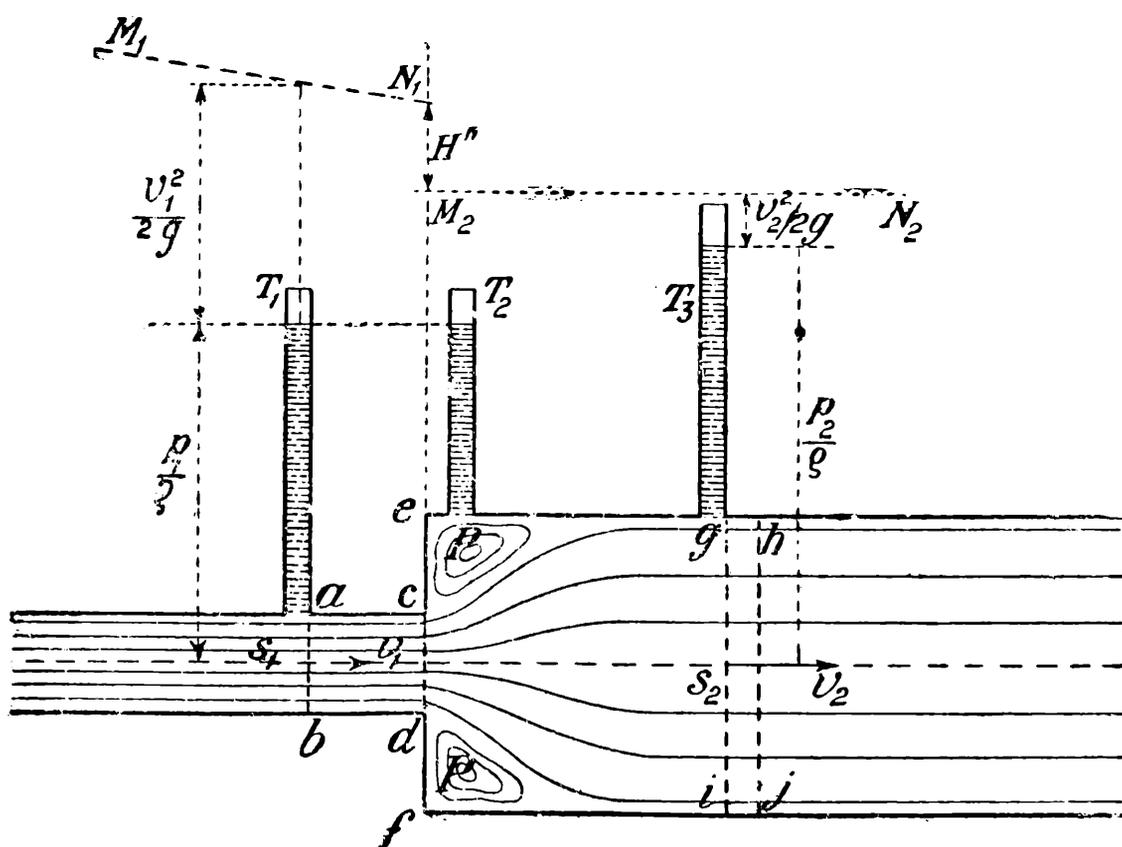


Fig. 168.

Si las presiones y las velocidades son p_1 y v_1 en la sección s_1 , y p_2 y v_2 en la sección s_2 , no existe la igualdad:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2g} \quad [1]$$

que exige el teorema de Bernouilli (pues z es constante si el tubo es horizontal) sino que se tiene una diferencia:

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2g}\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2g}\right) = H'' \quad [2]$$

No figura aquí la pérdida por roce, porque nos referimos a secciones s_1 y s_2 bastante próximas.

Esta pérdida es ocasionada, como dijimos, por la discontinuidad de la sección. Es decir, si en el tubo delgado la carga disminuye, a causa del frotamiento interior, en la forma que indica la línea M_1N_1 y, en el de mayor diámetro en la indicada por la línea M_2N_2 , esas líneas ofrecen, en el lugar de la discontinuidad de la sección, el salto H'' .

Calculemos su valor. La experiencia enseña que las alturas a que llega el líquido en dos tubos T_1 y T_2 que desembocan en el conducto en la inmediata cercanía de la discontinuidad son iguales, lo que significa que la presión, en los puntos situados sobre ec y df , es igual a la presión existente en el tubo de menor sección en la inmediata proximidad de cd . De aquí resulta, por el teorema de Bernouilli ⁽¹⁾, que la velocidad que lleva el líquido al desembocar en el tubo de mayor diámetro se continúa en éste durante un pequeño trayecto. Esto es posible, únicamente, si las líneas de corrientes se distribuyen tal como muestra el dibujo; después de un cierto trayecto se hacen paralelas al eje del tubo. En las regiones P queda una masa de agua que se denomina *agua muerta*, animada de un movimiento irregular. La pérdida de carga se debe a la energía que se consume en el mantenimiento de ese movimiento.

Borda ha sido el primero en calcular esa pérdida, que deduciremos aplicando el principio de masa en la forma siguiente. La fuerza actuante sobre una masa dada en determinada dirección es igual a la variación de su cantidad de movimiento en la misma dirección.

Supongamos que en la unidad de tiempo la sección ab se traslada a cd ; la gi habrá pasado a hj , de modo que $ac = bd = v_1$ y $gh = ij = v_2$. Por la incompresibilidad del líquido el volumen contenido en la región $abcd$, que está expresado por el producto $s_1 v_1$, es igual al contenido en la $ghij$, cuyo valor es $s_2 v_2$.

⁽¹⁾ Podemos aplicarlo por tratarse de puntos situados sobre secciones sumamente próximas.

El único cambio dinámico consiste en que el volumen $s_1 v_1 = s_2 v_2$ ha pasado de la velocidad v_1 a la v_2 ; la variación de su cantidad de movimiento es:

$$\frac{\rho}{g} s_2 v_2 \cdot v_2 - \frac{\rho}{g} s_1 v_1 \cdot v_1 = \frac{\rho}{g} (s_2 v_2^2 - s_1 v_1^2). \quad [3]$$

Si el tubo está situado horizontalmente la fuerza actuante es:

$$p_1 s_2 - p_2 s_2 = (p_1 - p_2) s_2,$$

pues la presión sobre todo el plano $ecdf$ es, como se dijo, p_1 .

Se tiene, por lo tanto

$$(p_1 - p_2) s_2 = \frac{\rho}{g} (s_2 v_2^2 - s_1 v_1^2), \quad [4]$$

que se transforma, con el auxilio de la ecuación de continuidad:

$$s_1 v_1 = s_2 v_2,$$

en

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{g} (v_2^2 - v_1 v_2), \quad [5]$$

que puede escribirse:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2g} [(v_2 - v_1)^2 + v_2^2 - v_1^2], \quad [6]$$

o, finalmente,

$$p_1 + \frac{\rho}{2g} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2g} v_2^2 + \frac{\rho}{2g} (v_2 - v_1)^2, \quad [7]$$

de modo que la pérdida de carga tiene el valor:

$$H'' = \frac{\rho}{2g} (v_2 - v_1)^2, \quad [8]$$

o, por la ecuación de continuidad:

$$H'' = \left(\frac{s_2}{s_1} - 1 \right) \frac{v_2^2}{2g}. \quad [9]$$

Si el tubo no corre horizontalmente, y si son z_1 y $z_2 < z_1$ las alturas de las secciones s_1 y s_2 , a contar de un plano horizontal

elegido como cero, se tiene para la fuerza actuante, en lugar del valor dado anteriormente, el valor:

$$(p_1 - p_2) s_2 + \rho_2 s_2 (z_1 - z_2),$$

donde el segundo término es la componente en la dirección del tubo de la fuerza de gravedad que actúa sobre la masa contenida en $efgi$. Se obtiene en este caso una relación que resulta de la [7] sumando z_1 al primer miembro y z_2 al segundo.

2. **Salida de los líquidos por un orificio. Teorema de Torricelli.** — Si se hace un pequeño agujero en un recipiente de regulares dimensiones lleno de líquido (fig. 169), éste comienza a derramarse, al principio con velocidades crecientes y luego con velocidad constante. Esto sucede mientras la altura de la superficie libre del líquido permanece invariable o, mejor dicho,

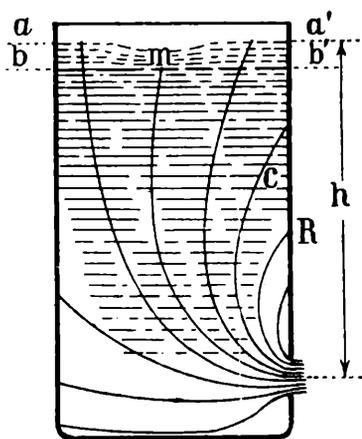


Fig. 169.

líquido permanece invariable o, mejor dicho, mientras la presión sobre el orificio, del lado interior, no varíe, lo que se logra utilizando un frasco de Mariotte.

Torricelli (1640) fué el primero en estudiar el fenómeno y en establecer que la velocidad de salida es igual a la que adquiriría un cuerpo cayendo en el vacío desde la superficie libre del líquido hasta el orificio, es decir

$$v = \sqrt{2gh}. \quad [10]$$

Bernoulli demostró esta ley de la manera siguiente: supongamos que en la unidad de tiempo el nivel del líquido pasa de la posición aa' a la bb' , esto es, que se derrama una cantidad de líquido igual a la de la región más sombreada, cuya masa indicaremos con m .

Todo ocurre, dinámicamente, como si la misma masa m , situada a la altura h y animada de cierta velocidad v' , cayese saliendo por el orificio con la velocidad v .

El trabajo gastado por la gravedad es mgh y la variación de la energía cinética

$$\frac{1}{2} m (v^2 - v'^2).$$

Por el principio de conservación de la energía debe ser:

$$mgh = \frac{1}{2} m (v^2 - v'^2). \quad [11]$$

Además, si S es la sección del recipiente y s la del orificio, se tiene, por la incompresibilidad del fluido,

$$Sv' = sv.$$

Si como se ha supuesto, s es muy pequeño respecto a S , v' es despreciable en comparación a v , con lo que se obtiene la ley de Torricelli. Puede deducirse también, en seguida, aplicando el teorema de Bernoulli. Sobre la superficie libre del líquido la presión es la atmosférica p_0 y la velocidad nula, por lo supuesto. En la sección del chorro situada sobre el orificio la velocidad es la de salida v y la presión es también la atmosférica. Debe ser, entonces,

$$p_0 + \rho z_1 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho z_2,$$

si z_1 y z_2 son las alturas de la superficie libre y del orificio a partir de un plano elegido como origen. La diferencia $z_1 - z_2$ es lo que antes hemos llamado h . De esta relación resulta la fórmula [10].

En las deducciones se ha supuesto que todo el trabajo gastado por la gravedad se convierte en energía cinética, es decir, se supone que no existe ningún roce. Para que eso suceda la velocidad del líquido en el interior del recipiente R , debe ser, en todas partes, muy pequeña, pues sólo en ese caso el frotamiento entre las capas flúidas será despreciable; y el líquido no debe rozar en el orificio. Ambas condiciones quedan satisfechas haciendo un agujero muy pequeño biselado hacia afuera.

3. **Comprobación experimental.** — La ley de Torricelli fué comprobada experimentalmente por Mariotte y otros por medición de la distancia horizontal que recorre el chorro sobre cierto plano.

Sea (fig 170) AB la traza del plano en cuestión y H la distancia que los separa del orificio. El líquido que se vierte describe durante la caída un arco de parábola, recorriendo la distancia vertical H y la horizontal x .

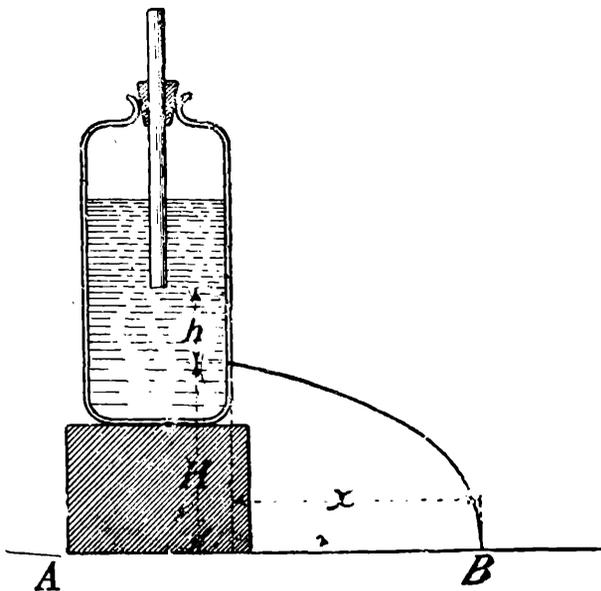


Fig. 170.

Si t es el tiempo de caída, se tiene

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

y, por consiguiente,

$$x = vt = v \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{2v^2 H} \quad [12]$$

donde v es la *velocidad horizontal* de salida del fluido, cuyo valor debe ser $\sqrt{2gh}$.

La experiencia da valores de x que concuerdan con los que se obtienen teóricamente con esta fórmula.

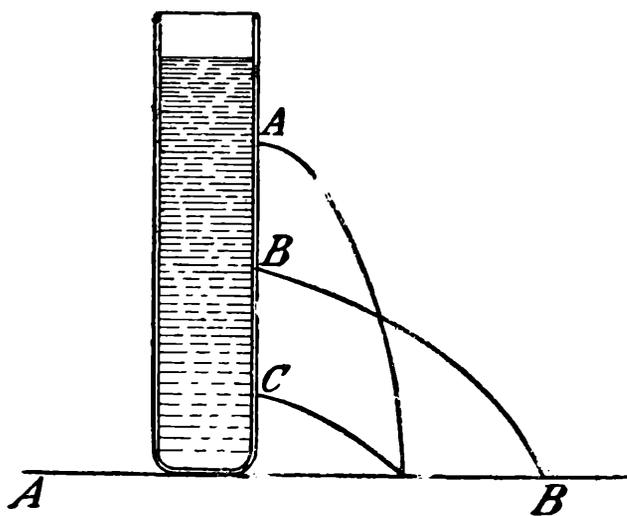


Fig. 171.

La [12] muestra también que la mayor distancia horizontal corresponde a un chorro que sale de un orificio tal como el de B (fig. 171) para el cual $h = H$, pues en ese caso el producto hH tiene un valor máximo. Dos chorros que salen de orificios A y C situados a distancias iguales, respectivamente, de la superficie libre

y del plano AB caerán en un mismo punto de éste.

La resistencia del aire es una causa de error en estas determinaciones. Bozut ha utilizado, por esto, mercurio, encontrado entre los resultados experimentales y teóricos diferencias que eran apenas del orden de $\frac{1}{100}$.

4. Gasto teórico. Contracción de la vena líquida. Coeficientes experimentales. — Si se indica con s la sección del orificio y con v la velocidad de salida, la cantidad q del líquido que se vierte por segundo debería ser:

$$q = vs = s \sqrt{2gh}.$$

La experiencia muestra que es menor, teniendo el valor:

$$q = cs \sqrt{2gh}, \quad [13]$$

donde $c < 1$ es un coeficiente llamado de derrame. La causa de esto proviene de que la velocidad dada por el teorema de Torricelli no corresponde al lugar mismo del orificio sino a un lugar situado en su inmediata cercanía, donde la vena líquida sufre una contracción reduciéndose su sección a:

$$s' = c s . \quad [14]$$

En orificios circulares practicados en paredes delgadas el valor del coeficiente de contracción, que depende del tamaño del orificio y de la magnitud de h , está comprendido entre:

$$c = 0,61 \quad \text{y} \quad c = 0,63 .$$

Si existe un poco de roce en la pared del orificio la velocidad v es menor que la dada por el teorema de Torricelli.

Conviene, sin embargo, para los usos técnicos, escribir el gasto siempre en la forma indicada por la [13] ; el coeficiente c sería en ese caso el producto entre el coeficiente de velocidad y el de contracción.

Determinaciones experimentales de Michelotti, Weisbach y otros enseñan que el gasto a través de picos cortos bien pulidos, de la forma del de la figura 172, oscila entre el 96 y 99 por ciento del teórico. Es claro que la contracción de la vena debe desaparecer casi por completo.

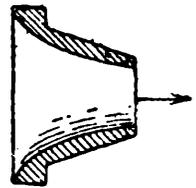


Fig. 172.

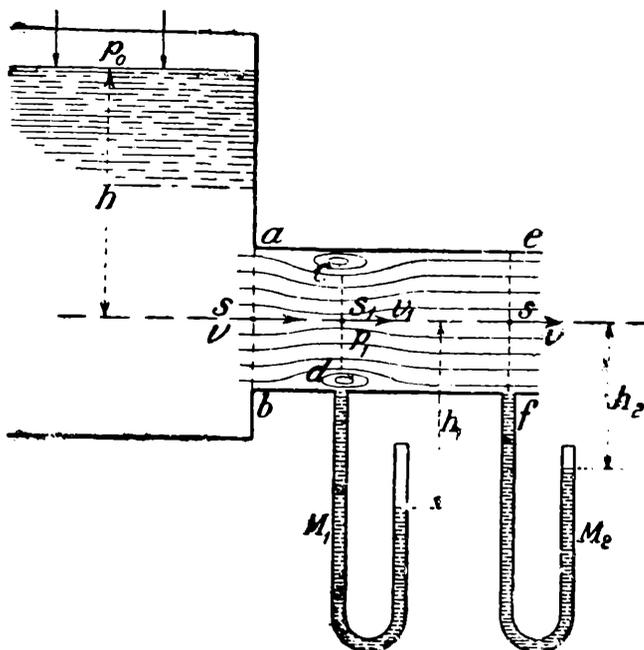


Fig. 173.

5. Salida por tubos cilíndricos. — Si el líquido se derrama no a través de un orificio sino de un tubo cilíndrico corto, la velocidad de salida es menor pero la cantidad que fluye en cada unidad de tiempo es mayor, a causa de que el chorro se hace más grueso. Esto fué observado por primera vez por el marqués Poleni alrededor del año 1718.

Michelotti, Weisbach y otros han comprobado esos resultados. Según mediciones de este último, para tubos cuyo diámetro era la

tercera parte de la longitud, los coeficientes de derrame correspondientes a alturas h comprendidas entre 0,23 metros y 0,6 metros estarían comprendidos entre valores $c = 0,842$ y $c = 0,810$.

El primer valor corresponde a un tubo de un centímetro de diámetro y el segundo a uno de cuatro centímetros.

Si se colocan manómetros M_1 y M_2 , como indica la figura 173, se observará, además, que, cerca de la desembocadura del tubo en el recipiente, existe una sección donde la presión tiene un valor menor que en las demás secciones. El manómetro M_1 indica que la presión se encuentra por debajo de la presión atmosférica en una cantidad proporcional a h_1 ; en M_2 en una cantidad proporcional a h_2 ; siendo h_1 notablemente mayor que h_2 . Esto prueba que el chorro es más delgado en la región en que desemboca el primer manómetro; las líneas de corriente deben ser de la forma que se ve en el dibujo.

Es de interés y de la mayor importancia mostrar que estos hechos pueden ser explicados de una manera satisfactoria, teóricamente.

La sección del chorro en los lugares ab y ef del tubo es la misma que la de éste, que indicamos con s ; las velocidades en ambos lugares tendrán, por la incompresibilidad del líquido, el mismo valor v . En el lugar de la contracción la sección sea s_1 , la velocidad v_1 y la presión p_1 . Indicaremos con p_0 la presión atmosférica, que actúa sobre la superficie del recipiente y la boca ef del tubo.

Por el teorema de Bernouilli se tiene:

$$\frac{p_0}{\rho} + h = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2g}. \quad [15]$$

Entre la sección cd y ef se tiene, por el cambio de sección, de acuerdo con el teorema de Borda:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2g} + \frac{(v_1 - v)^2}{2g}. \quad [16]$$

De estas dos relaciones resulta:

$$\frac{v^2}{2g} = h - \frac{(v_1 - v)^2}{2g}. \quad [17]$$

Esta ecuación muestra que la velocidad de salida es menor que la dada por la ley de Torricelli.

Utilizando la ecuación de continuidad, siempre válida,

$$s_1 v_1 = sv$$

y adoptando para s_1 el valor:

$$s_1 = 0,62 s ,$$

que dan las experiencias de salida por un orificio, se tiene:

$$(v_1 - v)^2 = 0,36 v^2, \quad [18]$$

con lo que la [17] se convierte en:

$$v = 0,86 \sqrt{2 g h} \quad [19]$$

$$q = sv = 0,86 \cdot s \sqrt{2 g h} . \quad [20]$$

Es decir, teóricamente se obtiene para el coeficiente de derrame el valor $c = 0,86$, que concuerda satisfactoriamente con los valores obtenidos experimentalmente.

Resulta, además, en números redondos,

$$v_1 = 1,4 \cdot \sqrt{2 g h} . \quad [21]$$

lo que explica por qué la presión en la sección cd es bastante menor que en la ef . El valor de h_1 es, de acuerdo con las [15] y [21],

$$\frac{p_0}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} = \left(\frac{v_1^2}{2g} - h \right) = (1,4^2 - 1) h , \quad [22]$$

de donde:

$$h_1 = \frac{p_0 - p_1}{\rho} = 0,96 h. \quad [23]$$

Venturi, que fué el primero en medir la disminución de la presión en el lugar de la contracción, encontró el valor:

$$h_1 = 0,74 h$$

de modo que, también en lo que a esto se refiere, la teoría responde, *grosso modo*, de los hechos de la experiencia.

6. Salida de los gases por orificios. — La velocidad de salida de un gas por un orificio se obtiene en seguida aplicando el teorema de Bernouilli.

Supongamos que se tiene un recipiente lleno de un gas comprimido a la presión p . Como la presión que proviene del peso es, en los gases, despreciable con respecto a la que proviene de su fuerza elástica, hablaremos de una presión única p en toda la masa. Esto corresponde a despreciar, en todos los casos, en el teorema de Bernouilli, los términos de la forma ρz .

Si se practica un pequeño agujero, sale un chorro gaseoso; la velocidad de salida debe ser tal que la presión sea la que se ejerce sobre el chorro; la atmosférica p_0 , si el recipiente está colocado directamente en el aire. Se tiene, entonces,

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{g} v^2 \quad [24]$$

si ρ es el peso específico del gas a la presión p .

De la [24] resulta:

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\rho} (p - p_0)}, \quad [25]$$

es decir, la velocidad de salida es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la densidad.

Si se indica con ρ_n el peso específico del gas a la presión normal de una atmósfera, que indicaremos con p_n , se tiene, por la ley de Boyle,

$$\frac{p}{p_n} = \frac{\rho}{\rho_n},$$

de donde:

$$\rho = \rho_n \frac{p}{p_n},$$

con lo que la [25] se transforma en:

$$v = \sqrt{\frac{2g p_n}{\rho_n} \frac{p - p_0}{p}} \quad [26]$$

Si se miden las presiones en gramos por centímetro cuadrado, la aceleración en $\frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$ y el peso específico en gramos por centímetro cúbico, se tiene

$$p_n = 1033 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^2}$$

$$g = .981 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$$

$$v = 1423,7 \sqrt{\frac{1}{\rho_n} \frac{p - p_0}{p}} \frac{\text{cm}}{\text{seg}} .$$

Si la presión exterior p_0 es cero, el gas sale con la velocidad:

$$v_{(\text{vacío})} = 1423,7 \sqrt{\frac{1}{\rho_n}} \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$$

que depende, como ρ_n , exclusivamente de la temperatura.

Para el aire a cero grado es:

$$\rho_n = 0,001293 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} ,$$

y, por lo tanto,

$$v_{(\text{vacío})} = 395,9 \frac{\text{m}}{\text{seg}} .$$

7. El método de Bunsen para determinar el peso específico de los gases. — De acuerdo con la relación [26] los tiempos que tardarán en derramarse a través de orificios idénticos dos volúmenes iguales de gases diferentes, mantenidos a la misma sobrepresión, estarán en razón directa de las raíces cuadradas de sus pesos específicos, puesto que las velocidades están en razón inversa de las mismas magnitudes.

Si se indican con t y t' los tiempos y con ρ_n y ρ_n' los pesos específicos respectivos se tiene:

$$\frac{t}{t'} = \sqrt{\frac{\rho_n}{\rho_n'}}$$

o

$$\frac{t^2}{t'^2} = \frac{\rho_n}{\rho_n'} \quad [27]$$

es decir, que los pesos específicos de los gases están entre sí como los cuadrados de los tiempos que emplean volúmenes iguales, a la misma sobrepresión, en fluir por orificios idénticos.

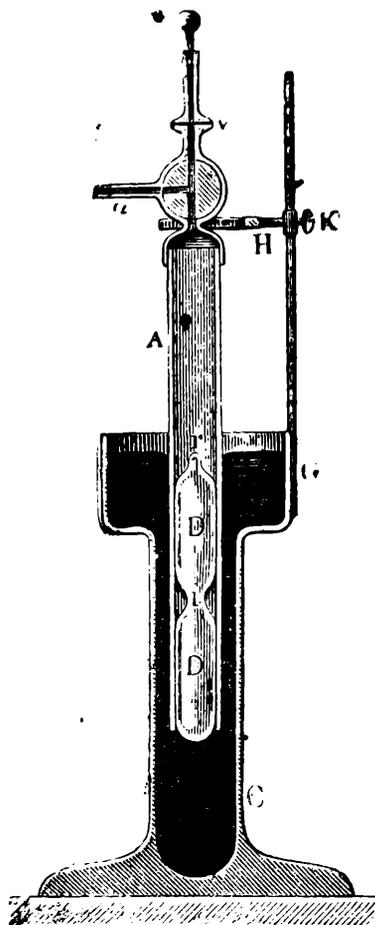


Fig. 174.

En esta relación se funda el método de Bunsen para medir la densidad de los gases. El aparato que se utiliza con este fin está representado en la figura 174. En el interior del tubo *A* de vidrio se pueden almacenar, sucesivamente, gases diferentes a la misma presión. Esto se consigue levantando completamente el tubo y poniéndolo en comunicación a través del pico *a*, girando convenientemente la llave a tres vías, con los recipientes donde se tienen los gases cuyos pesos específicos han de medirse; el gas (refiriéndonos a uno cualquiera de ellos) fluye por la extremidad inferior, a ras del mercurio que contiene la cubeta profunda *C*. Cerrada la llave, después de un momento se hace descender al tubo *A*; al introducirse en el mercurio, el gas es comprimido originándose una diferencia en los niveles interno y externo del

mercurio. Si la altura exterior, visible, es siempre la misma, la sobrepresión de los gases tendrá también el mismo valor.

Si se retira el tapón *s* el gas comienza a fluir hacia el exterior a través de un orificio practicado en una delgada lámina de platino que se encuentra en el ajuste *v*. El mercurio que asciende en el interior del tubo levanta el flotador *D* de vidrio, que lleva dos trazos horizontales, y cuyos tiempos de pasaje se observan por la misma visual.

Se obtienen así los tiempos que corresponden a la salida de volúmenes iguales al volumen del flotador comprendido entre los dos señales.

CAPITULO X

MOVIMIENTO TURBULENTO EN LOS TUBOS

1. **Velocidad media límite entre el movimiento laminar y el turbulento.** — Osborne Reynolds ha deducido, de numerosas experiencias realizadas por él, que tan pronto como la velocidad media de un líquido de coeficiente η de viscosidad y densidad ρ alcanza en un tubo de radio a el valor:

$$\bar{v}_l = 1000 \frac{\eta g}{\rho a} \frac{\text{cm}}{\text{seg}}, \quad [1]$$

donde η , g , ρ y a se expresan en unidades *C. G. S.*, el estado de movimiento laminar es inestable, convirtiéndose en turbulento tan pronto como la velocidad pasa de ese valor.

Este resultado ha sido comprobado por numerosas experiencias, por lo que la [1] es universalmente usada en la técnica.

En el agua el movimiento será, en todos los casos prácticos, turbulento; estado que se llama por esto hidráulico.

Trátase, por ejemplo, de un tubo de un centímetro de radio; la temperatura del agua sea 20°C , de modo que el valor de $\frac{\eta}{\rho}$ será 0,01 centímetro por segundo; la velocidad media límite tendría el valor

$$\bar{v}_l = 10 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}.$$

En un tubo cuyo radio fuese de 5 centímetros esa velocidad sería

$$\bar{v}_l = 2 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}.$$

En aceite, en cambio, el movimiento será laminar hasta velocidades muy grandes. El valor $\frac{\eta}{\rho}$ es, más o menos, 3 centímetros por segundo,

de modo que en un tubo de un centímetro de radio aquella velocidad tendría el valor:

$$\bar{v}_l = 3000 \frac{\text{cm}}{\text{seg}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{seg}} .$$

2. La pérdida de carga por unidad de longitud del tubo. — Reynolds mismo ha descubierto que en el caso del movimiento turbulento la pérdida de carga por unidad de longitud está dada por la relación:

$$J = \zeta \frac{\bar{v}^2}{ag} , \quad [2]$$

donde ζ es una constante numérica, denominada *coeficiente de resistencia*, que depende de la velocidad media v , del radio y de la viscosidad; a el radio del tubo y g la aceleración de la gravedad.

El valor de ζ para la velocidad límite se deduce en seguida, pues debe ser, si el movimiento es turbulento,

$$J = \zeta \frac{\bar{v}_l^2}{ag} , \quad [3]$$

y si es laminar:

$$J = \frac{8 \eta}{g \rho} \frac{\bar{v}_l}{a^2} ; \quad [4]$$

de modo que se puede escribir:

$$\zeta = \frac{8 \eta}{g \rho a \bar{v}_l} . \quad [5]$$

Sustituyendo en esta última relación \bar{v} por su valor, dado por la [1], resulta:

$$\zeta = 0,008 .$$

Esta magnitud es, según muestra la experiencia, una función del cociente $\frac{a \bar{v} \rho}{\eta}$, que se denomina *velocidad reducida*.

En la técnica se utilizan varias fórmulas empíricas que dan los valores del coeficiente de resistencia en función de la velocidad reducida. Su valor aumenta primero lentamente, a partir del valor 0,008, y luego disminuye en la misma forma.

3. Distribución de las velocidades. — La experiencia enseña que la turbulencia determina una distribución más uniforme de la velocidad.

Bazín ha medido experimentalmente la velocidad en distintos lugares de una misma sección de una corriente turbulenta que circulaba por un tubo de cemento, bien alisado, de 40 centímetros de radio. Sus resultados están consignados en la tabla siguiente:

$\frac{r}{a}$	$\frac{v}{\bar{v}}$	$\frac{r}{a}$	$\frac{v}{\bar{v}}$
0,000	1,167	0,625	1,047
0,125	1,160	0,750	1,001
0,250	1,147	0,875	0,922
0,375	1,126	0,937	0,846
0,500	1,092	1,000	0,741

donde r es la distancia al eje del tubo, v la velocidad en el punto a la distancia r , y \bar{v} la velocidad media.

Esta distribución está representada gráficamente en la figura 175. La velocidad media difiere, en todas partes, como puede observarse, poco de las velocidades locales.

4. La teoría en el movimiento turbulento. — Que las leyes del movimiento turbulento no pueden ser las mismas que las del movimiento laminar resulta de sencillas consideraciones dinámicas.

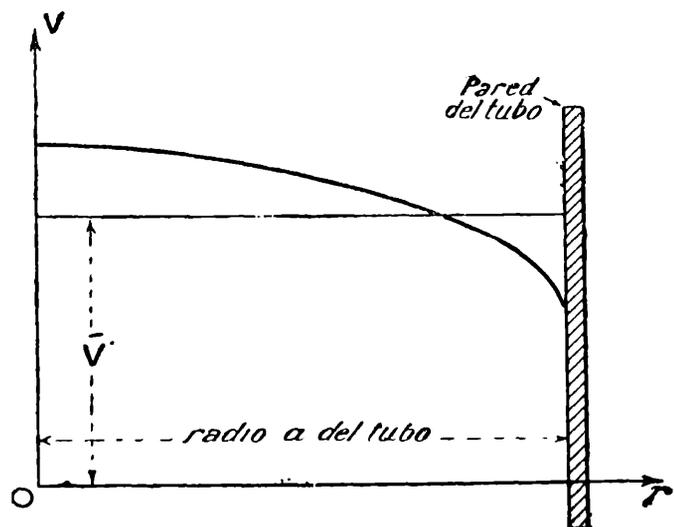


Fig. 175.

En la teoría del movimiento laminar se han considerado las fuerzas que actúan sobre un segmento de un filete cilíndrico, coaxial con el tubo, y se ha anulado la suma, por cuanto el movimiento de traslación de conjunto tiene una aceleración cero.

En el movimiento turbulento la aceleración del movimiento longitudinal de traslación de conjunto tiene también una aceleración media nula, pero a causa de las pulsaciones, cuyas velocidades admiten una componente radial y otra longitudinal, la cantidad de

movimiento de un segmento de filete sufre, en la dirección del tubo, en cada unidad de tiempo, cierta variación.

La suma de las fuerzas que se anula en el movimiento laminar debe igualarse, en el turbulento, a esa variación de la cantidad de movimiento.

Es así como puede darse cuenta teóricamente, con bastante aproximación, de los hechos que se observan en el movimiento de que nos ocupamos.

Es claro que la teoría no dice nada referente al valor de la velocidad límite ni al coeficiente de resistencia.

CAPITULO XI

FUERZAS EN LOS CONDUCTOS PRODUCIDAS POR LAS VARIACIONES DEL VECTOR VELOCIDAD. FUERZAS POR CHOQUE. RESEÑA SOBRE RUEDAS Y TURBINAS

1. **Varía solamente el módulo de la velocidad.** — Supongamos que se tiene una corriente estacionaria en un conducto recto cuya sección varía en determinado lugar, de una manera continua (fig. 176), pasando del valor s_1 al s_2 . El cambio de velocidad del líquido origina una fuerza aplicada sobre el tubo, en sentido contrario a aquel en que la velocidad aumenta.

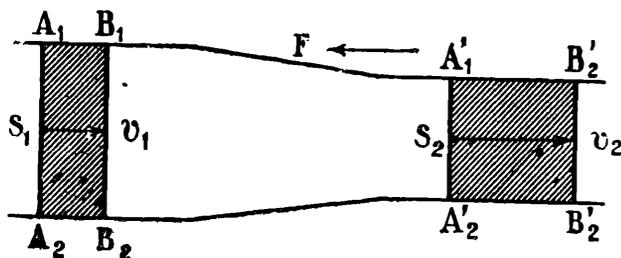


Fig. 176.

Consideremos la masa flúida contenida en la región A_1A_2

$A_1'A_2'$ y supongamos que después de una unidad de tiempo la sección A_1A_2 se encuentra en B_1B_2 y la $A_1'A_2'$ en $B_1'B_2'$. Es claro que será $A_1B_1 = A_2B_2$ la velocidad v_1 del líquido en la sección mayor del conducto, y $A_1'B_1' = A_2'B_2'$ la velocidad v_2 en la otra sección, debiendo ser, por la incompresibilidad del flúido,

$$s_1 v_1 = s_2 v_2 = q, \quad [1]$$

si se indica con q el gasto.

Los efectos dinámicos deben provenir del hecho de que, debido a ese desplazamiento, del tubo mayor ha salido un volumen líquido $s_1 v_1$ que tenía la velocidad v_1 mientras que en el otro ha aparecido un volumen igual $s_2 v_2$ con la velocidad v_2 .

La variación de la cantidad de movimiento en la unidad de tiempo es :

$$\frac{\rho}{g} (s_1 v_1 \cdot v_1 - s_2 v_2 \cdot v_2) = \frac{\rho}{g} (s_1 v_1^2 - s_2 v_2^2) = \frac{\rho}{g} q (v_1 - v_2), \quad [2]$$

y debe ser, por el principio de masa, igual a la fuerza aplicada sobre esa masa líquida. Por el principio de la igualdad de la acción y de la reacción el líquido aplica sobre el tubo una fuerza igual y de sentido contrario. Si indicamos su magnitud con F se tiene:

$$F = \frac{\rho}{g} (s_1 v_1^2 - s_2 v_2^2) = \frac{\rho}{g} q (v_1 - v_2). \quad [3]$$

Si el líquido circula en sentido contrario, la fuerza F actuaría también en el otro sentido.

Si el líquido sale por un orificio o conducto de sección s (fig. 177), con la velocidad v , de un recipiente en el que la velocidad del líquido puede considerarse nula o muy pequeña respecto a v , la fuerza de reacción será:

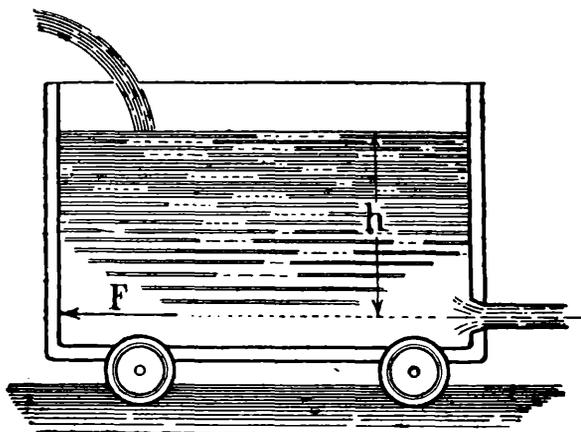


Fig. 177.

$$F = \frac{\rho}{g} q v = \frac{\rho}{g} s v^2, \quad [4]$$

como es fácil deducir de manera análoga a la que hemos empleado en el caso anterior.

Si la altura de la superficie libre del líquido del recipiente, con respecto al lugar de salida del chorro, es h , se tiene, por el principio de Torricelli,

$$v = \sqrt{2 g h},$$

y, por lo tanto,

$$F = 2 s \rho h, \quad [5]$$

es decir, la reacción es el doble que la fuerza que corresponde a la presión hidrostática de una columna líquida de altura h y sección s .

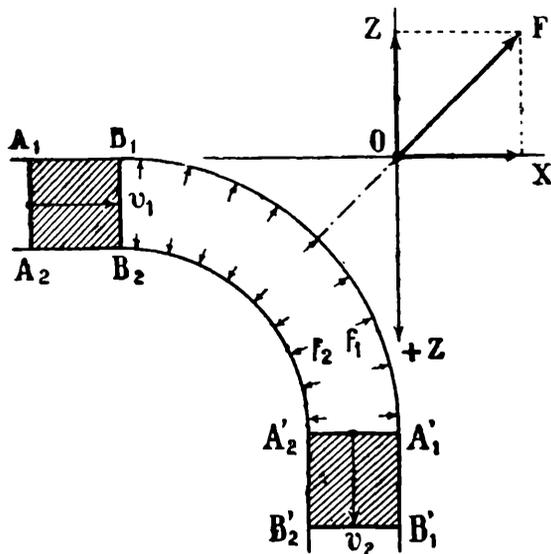


Fig. 178.

2. Cambia la dirección de la velocidad. — Supongamos que el líquido se mueve con velocidad constante sobre una curva. El cambio de dirección sea, (fig. 178), de 90 grados. Tomemos un sistema de

ejes rectangulares xz , como muestra el dibujo, y calculemos la variación de las cantidades de movimiento, en la unidad de tiempo, en sus direcciones. Esas variaciones dan, con signo cambiado, las fuerzas X y Z aplicadas sobre el tubo.

Se tiene:

$$X = \frac{\rho}{g} qv, \quad [6]$$

pues la masa $\frac{\rho}{g} q$, donde q tiene la significación dada en el párrafo anterior, tenía en A_1A_2 la velocidad v en la dirección x , mientras que en $A_1'A_2'$ su velocidad es, en esa dirección, cero. La variación de la cantidad de movimiento en la dirección $+x$ es $-\frac{\rho}{g} qv$, lo que da, a la vez, la fuerza actuante sobre la masa líquida; su dirección es la de las x negativas. La fuerza de reacción sobre el tubo es igual y de sentido contrario, es decir, $\frac{\rho}{g} qv$ en dirección de las x positivas. De la misma manera resulta:

$$Z = -\frac{\rho}{g} qv. \quad [7]$$

La fuerza total F se obtiene por la regla del paralelogramo. Su valor es:

$$F = \sqrt{X^2 + Z^2} = \sqrt{2} \frac{\rho}{g} qv. \quad [8]$$

Este resultado puede obtenerse determinando la *variación total de la velocidad*, esto es, la velocidad que debe sumarse a v_1 para obtener

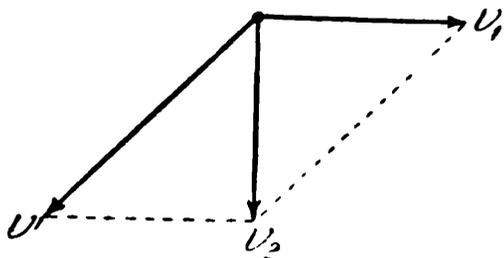


Fig. 179.

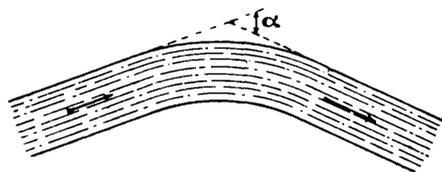


Fig. 180.

v_2 . Esa variación está dada por el vector v' (fig. 179), cuyo módulo es $v\sqrt{2}$. La variación total de la cantidad de movimiento tiene la dirección de v' y el módulo $\frac{\rho}{g} qv\sqrt{2}$.

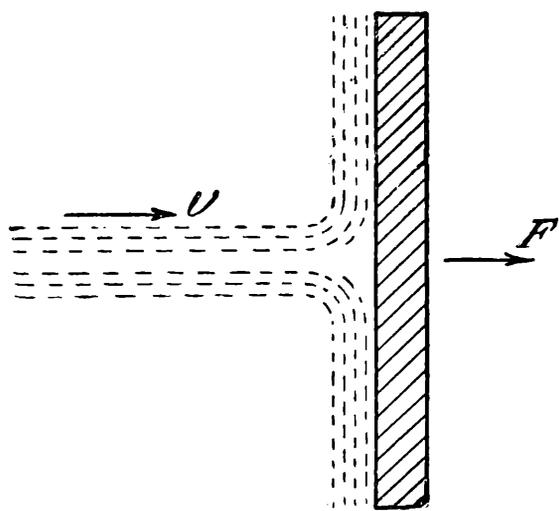
Es conveniente hacer notar que esa fuerza se origina por la existencia de un gradiente de presión en dirección radial. En efecto, si se consideran dos secciones vecinas del tubo, la distancia entre ellas aumenta hacia el exterior de la curva y, por consiguiente, la velocidad del líquido es menor del lado de afuera que del lado de adentro. Por el teorema de Bernouilli lo contrario ocurre con la presión.

Si el ángulo de giración no es 90° sino α (fig. 180), se obtiene fácilmente, por este último método,

$$F = \frac{\rho}{g} qv \sqrt{2 (1 - \cos \alpha)}. \quad [9]$$

3. Choque normal de un chorro sobre una superficie. —

Si se hace incidir un chorro de agua normalmente sobre una superficie



que no sea demasiado pequeña, corre sobre ella en la forma que muestra la figura 181. La variación de la cantidad de movimiento en la dirección de la normal es $-\frac{\rho}{g}qv$, si q es el gasto y v la velocidad del fluido.

La fuerza que el chorro aplica sobre la placa es, por lo tanto,

Fig. 181.

$$F = \frac{\rho}{g} qv, \quad [10]$$

y la placa reacciona con una fuerza F igual y de sentido contrario.

Esa relación, que fué establecida por Bernouilli, ha sido sometida a la comprobación experimental por Bidone (1838), Weisbach y otros. Si la placa tiene por lo menos seis veces el diámetro del chorro y su distancia a la boca de salida del líquido es más del doble de ese mismo valor, la fuerza que se obtiene por las medidas es casi exactamente igual (hasta 96 %) al valor dado por la teoría.

El valor real de la fuerza media en cada unidad de tiempo se acerca más, en todos los casos, al valor teórico, y su distribución en el tiempo es, por otra parte, más uniforme, si en lugar de un plano se tiene una superficie de un corte como el que enseña la figura 182. La misma variación de la cantidad de movimiento se produce en un tiempo mayor y el igual se desliza con mayor producción de movi-

mientos irregulares, que son los que determinan, por roce, disipación de energía. La fuerza media teórica tiene el mismo valor que en el caso anterior.

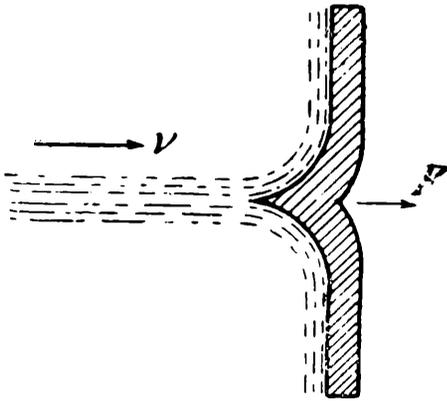


Fig. 183.

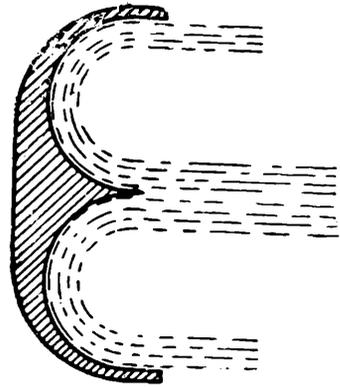


Fig. 182.

Si la velocidad del agua se invierte por completo, como es el caso de la figura 183 la fuerza media teórica es:

$$F = \frac{2}{g} \rho qv. \quad [11]$$

El valor real que da la experiencia es, en este caso, bastante menor a causa de que por el roce resulta $v_2 < v_1$.

4. El plano o paleta se mueve. — En las fórmulas que se han deducido hasta ahora se ha supuesto, implícitamente, que la superficie que recibe el choque está en reposo.

En la práctica se utilizan las fuerzas que así se originan para producir trabajo. Las superficies pertenecen a mecanismos que giran bajo el impulso del agua, transformando parte de la energía del fluido en trabajo útil.

Si la superficie se desplaza en la dirección del chorro, las fórmulas anteriores conservan su validez si se introduce como velocidad la *relativa* del chorro con respecto al plano. Es decir, si el chorro tiene la velocidad v y la paleta se mueve en el mismo sentido con la velocidad v' debe ponerse en las fórmulas en lugar de v el valor $v - v'$.

Que esto es así resulta en seguida del hecho de que la cantidad de agua que llega en cada unidad de tiempo a la paleta es $s(v - v')$, si s es la sección del chorro. La variación de la cantidad de movimiento del agua en la paleta es:

$$\frac{\rho}{g} s (v - v') (v - v') = \frac{\rho}{g} q (v - v'), \quad [12]$$

si q significa la cantidad de agua que llega a la paleta en cada unidad de tiempo.

El trabajo que entregaría un plano semejante en la unidad de tiempo sería:

$$A = F \cdot v' = \frac{\rho}{g} s v' (v - v')^2. \quad [13]$$

Es muy importante hacer notar aquí, en un caso tan sencillo como éste, que la eficiencia de un mecanismo de esta clase depende de v' ; para cierto valor v' , A alcanza un valor máximo. En efecto, derivando la [13] e igualando a cero, resulta:

$$\frac{dA}{dv'} = (v - v')^2 - 2 v' (v - v') = 0$$

o

$$v' = \frac{v}{3},$$

lo que prueba que la eficiencia mayor corresponde a una velocidad de la placa que sea igual a la tercera parte de la del chorro.

5. Ruedas hidráulicas. — Las figuras 184 y 185 representan dos tipos de ruedas hidráulicas. La primera, a vertedero superior, se

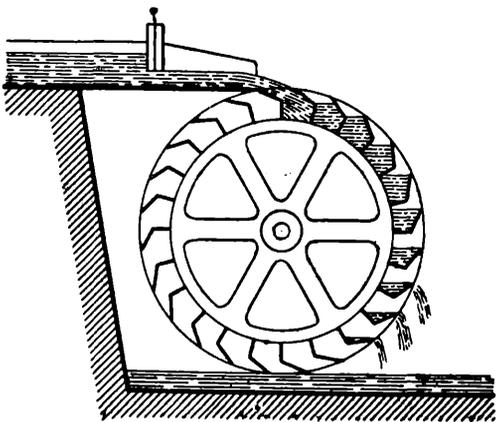


Fig. 184.

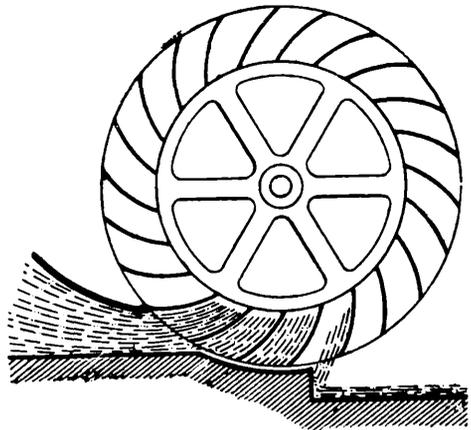


Fig. 185.

utiliza cuando la corriente de agua ofrece una caída muy rápida de nivel. El agua que llena los álabes hace girar la rueda por el momento de rotación que determina el choque, en virtud de la energía cinética del líquido y de su peso. El fluido comienza a derramarse de los álabes cuando éstos han girado cerca de media circunferencia; a los 180° de giración se encuentran completamente vacíos.

La mayor parte del trabajo producido proviene, en esta rueda, del trabajo de caída del líquido o, lo que es lo mismo, de su energía potencial.

El rendimiento, esto es, la relación entre el trabajo útil del mecanismo y la que se pone en libertad por la caída del agua, alcanza, en las ruedas a vertedero superior, hasta un 80 por ciento.

En la práctica se las construye hasta de un diámetro de 15 metros; si la caída es mayor se aprovecha la energía por caídas parciales sobre varias ruedas.

En la de la figura 185 se aprovecha la energía cinética de una corriente de agua; parte pasa a la rueda por choque del líquido sobre las paletas. El rendimiento es pequeño.

Se instalan también ruedas a vertedero medio.

6. Turbina a reacción. — La figura 186 representa un dispositivo de ese tipo. El agua entra en un recipiente cilíndrico del que sale en dirección tangencial por una serie de tubos *T* de que está provisto; las reacciones de los chorros determinan el movimiento de rotación.

La primera turbina de reacción, aplicada a fines industriales, parece que fué una instalada al norte de Gottingen, en un molino de trigo, en el año 1750.

La idea proviene, en realidad, de Herón de Alejandría, quien utilizó, para poner en rotación un mecanismo, la reacción de un chorro de vapor en lugar de la de un chorro de agua.

7. Turbinas Jonval, Girard, Francis y rueda Pelton. — La figura 187 representa la turbina Jonval, muy usada en otro tiempo. El agua es lanzada, a través de los conductos inclinados de una rueda fija *F*, a los conductos inclinados de una rueda móvil *M*. El agua se pone en contacto con los álabes de la rueda con una velocidad y los abandona con otra; la variación de su energía cinética es absorbida por la rueda.

En los dispositivos modernos las ruedas fijas y movibles son concéntricas; una es la corona de la otra. La figura 188 muestra un

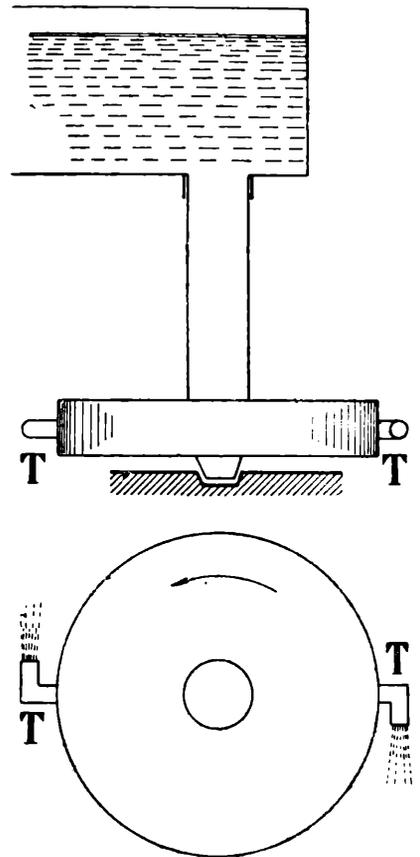


Fig. 186.

corte transversal de una rueda semejante donde puede observarse la orientación de los álabes.

El agua cae sobre los álabes de la parte móvil con la *velocidad absoluta* v_1 con que sale de la rueda fija y los abandona con la *velocidad absoluta* v_2 ; mientras tanto el mecanismo gira con cierta velocidad angular ω .

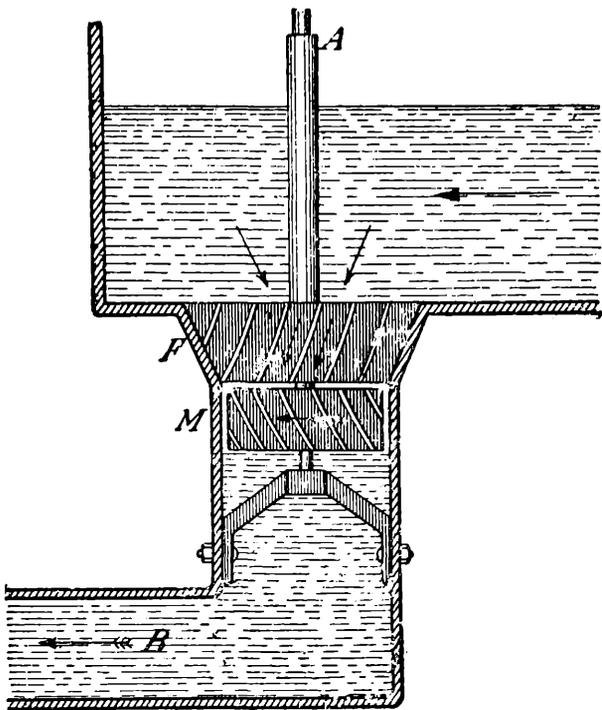


Fig. 187.

Para aprovechar de la mejor manera la energía, el agua debe tener, al caer sobre la parte móvil, una *velocidad relativa* u_1 tangencial a los álabes y debe abandonarlos también con una *velocidad relativa tangencial* u_2 .

Si r_1 y r_2 son los radios interior y exterior de la parte giratoria, las *velocidades de arrastre* son:

$$p_1 = \omega r_1 \quad \text{y} \quad p_2 = \omega r_2.$$

Las velocidades absolutas v_1 y v_2 quedan determinadas por la regla del paralelogramo (véase tomo 1, pág. 267).

El trabajo que entrega el agua en cada unidad de tiempo se calcula fácilmente.

Recordemos primeramente algunas leyes mecánicas referentes a las rotaciones.

El momento de rotación está dado (véase tomo I, págs. 198 y 240) por la relación:

$$\mathcal{M} = \frac{d}{dt} (I\omega), \quad [15]$$

donde I indica el momento de inercia de las masas con respecto al eje de giración y ω la velocidad angular. El producto $I\omega$ es el impulso. El trabajo gastado en cada unidad de tiempo es:

$$A = \mathcal{M} \omega \quad [16]$$

como es fácil establecer, pues si una fuerza F actúa sobre una masa que gira alrededor de un punto situado a la distancia r , el camino

recorrido en la unidad de tiempo es $r\omega$, el trabajo $F r \omega$ y $F r$ es el momento.

Para obtener el momento que aplica el líquido sobre la rueda debemos calcular el momento rotatorio o, lo que es lo mismo, *la varia-*

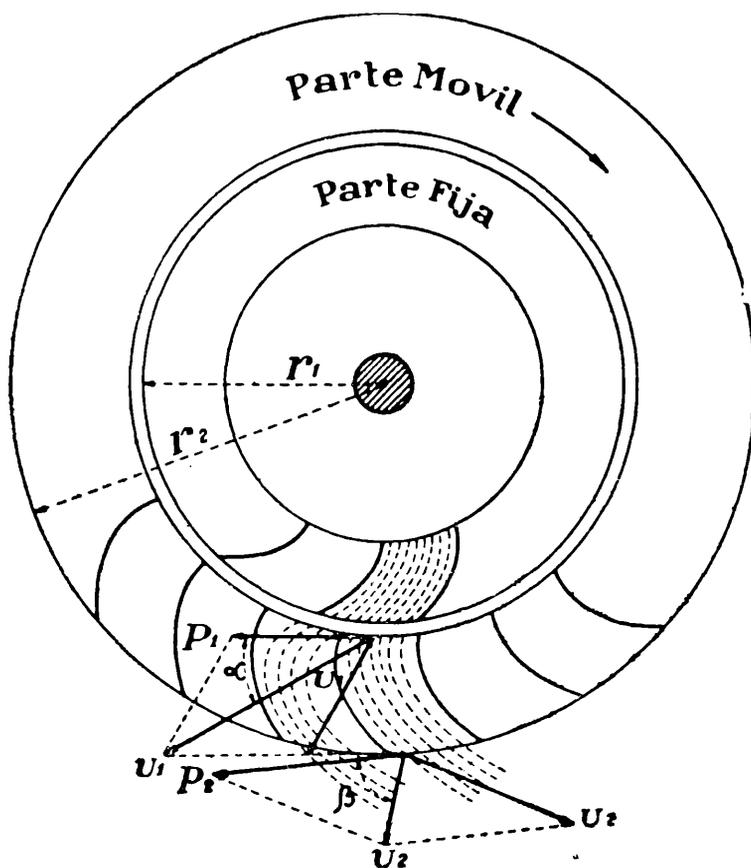


Fig. 188 (1).

ción del impulso del agua en la unidad de tiempo alrededor del eje de la turbina.

Sea m la masa de agua que pasa por segundo a través del mecanismo. Esa masa gira, al caer sobre los álabes de la rueda móvil, con la *velocidad angular absoluta*:

$$\frac{v_1 \cos \alpha}{r_1}.$$

(1) En la fig. 188 la diagonal del paralelogramo de arriba debe llevar la letra v_1 en lugar de u_1 y la del inferior la letra v_2 en cambio de u_2 .

El momento de inercia de esa masa tiene allí el valor mr_1^2 . El impulso es, en ese momento,

$$mr_1^2 \frac{v_1 \cos \alpha}{r_1} = mr_1 v_1 \cos \alpha. \quad [17]$$

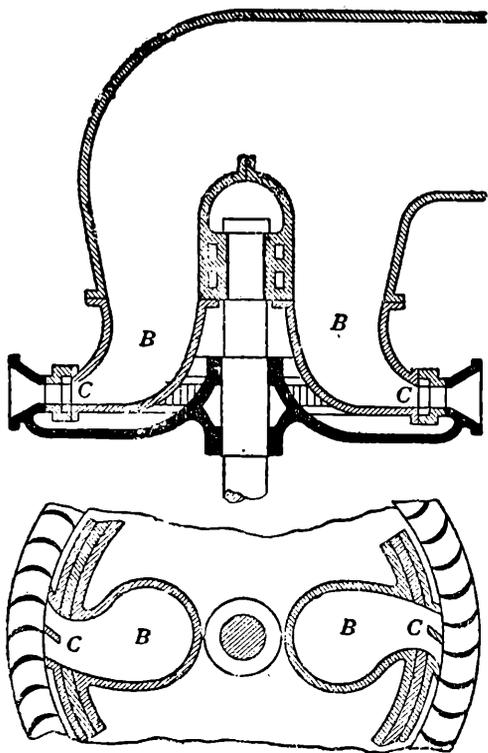


Fig. 189.

Análogamente, al abandonar el álabe, un segundo más tarde, el impulso de esa masa de agua tiene el valor:

$$m_2 r_2 v_2 \cos \beta.$$

La variación total del impulso es igual al momento total \mathcal{M} que aplica el agua sobre los álabes y recíprocamente. Se tiene, por lo tanto,

$$\mathcal{M} = m (r_1 v_1 \cos \alpha - r_2 v_2 \cos \beta). \quad [18]$$

El trabajo producido será:

$$A = \mathcal{M} \omega = m (p_1 v_1 \cos \alpha - p_2 v_2 \cos \beta) \quad [19]$$

que debe ser igual a la variación $\frac{m}{2} (v_1^2 - v_2^2)$ de la energía cinética del agua.

En la turbina Girard (fig. 189) la parte móvil es la externa; la interna no consiste en una rueda con paletas sino en el dispositivo que se ve en el dibujo; el agua sale en dirección radial a través de conductos BC .

Una turbina muy usada por su rendimiento es la americana Francis en las que el rotador se encuentra en el interior; el agua incide radialmente desde afuera. La figura 190 muestra la parte giratoria.

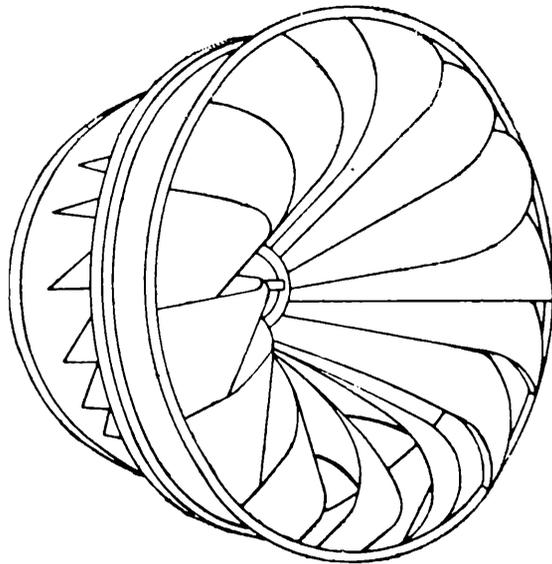


Fig. 190.

En la rueda Pelton (fig. 191 a) se aprovecha la energía que entrega un chorro de agua por choque sobre paletas de forma especial. La

figura 191 *b* muestra la forma de un chorro potente. La energía del agua se convierte primero completamente en energía cinética, gran parte de la cual (más del 80 %) se entrega luego, por choque, al mecanismo.

EL ARIETE HIDRÁULICO. — Este dispositivo, representado esquemáticamente en la figura 192, aprovecha de una manera ingeniosa la transformabilidad de la energía para elevar el agua de un nivel a otro mayor.

Si se abre el robinete *R* el agua del recipiente *A* comienza a circular por el tubo *TT*; la energía potencial de las masas se convierte así en energía cinética. Si se cierra luego aquella llave se observa que el agua asciende por el tubo *tt* hasta mayor altura que la primitiva *h*. La explicación de este hecho es sencilla; en lugar de

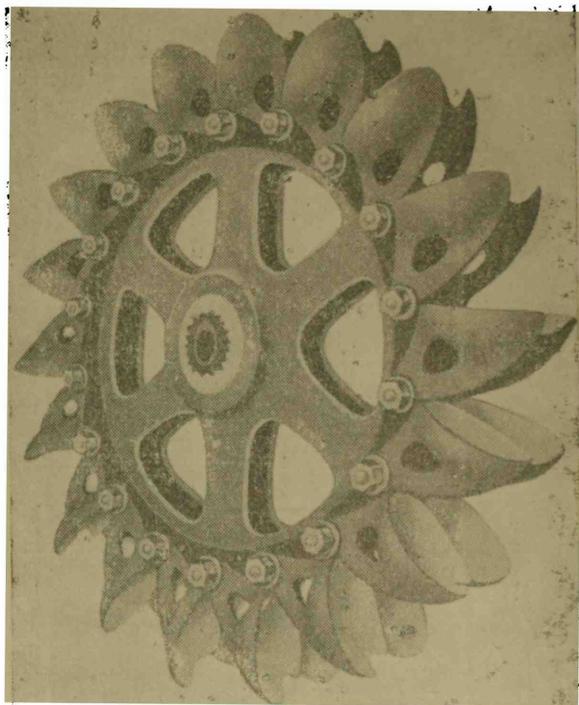


Fig. 191 *a*.

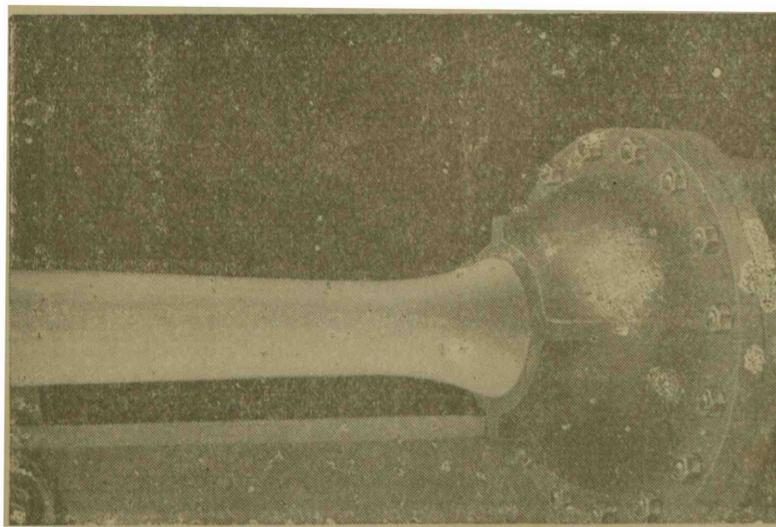


Fig. 191 *b*.

la energía cinética, desaparecida por la obturación del conducto, debe engendrarse un *quantum* equivalente de otra forma de energía; la energía potencial almacenada en las masas de agua elevadas hasta el recipiente *B* es parte del producto de esa transformación.

Que una masa que se encontraba originariamente en *A* se halle luego en *B*, donde la energía potencial es mayor, no lesiona en nada

el principio de conservación de la energía; la masa ascendida hasta *B* ha absorbido, de otras masas que no se han elevado, el exceso de energía que corresponde a su actual posición. Es notorio, pues, que sólo parte del líquido puede ser elevado.

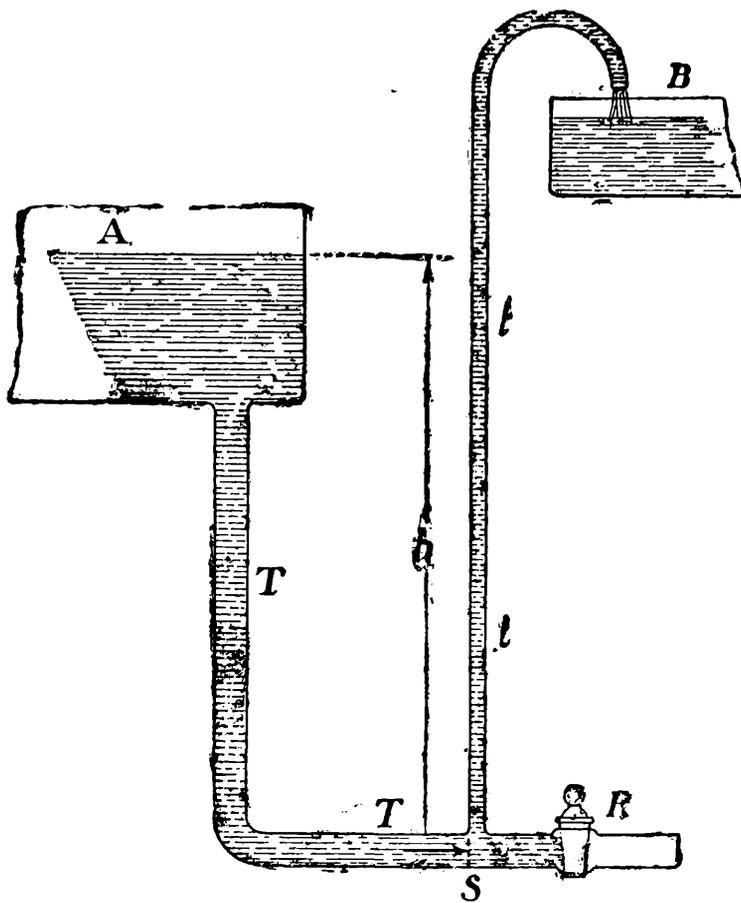


Fig. 192.

Hemos discutido el fenómeno desde el punto de vista del principio de conservación de la energía; hagámoslo ahora a la luz del principio de la conservación del impulso. Por la detención repentina del líquido la presión en una sección como la *s* se eleva a un valor ρh , si ρ es el peso específico del fluido, más una presión *dirigida* en el sentido de la flecha igual a la variación de la cantidad de movimiento de toda la masa detenida. La presión así originada determina el ascenso del líquido.

CAPITULO XII

MOVIMIENTO TURBILLONARIO Y RESISTENCIA DE LOS FLUIDOS AL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS

A. — MOVIMIENTO TURBILLONARIO

1. **Circulación.** — En los capítulos anteriores nos hemos ocupado de los movimientos estacionarios laminar y turbulento. Se han considerado, en todos los casos, tan sólo porciones limitadas de los filetes líquidos, comprendidas entre dos secciones; la cantidad de fluido que entra por una sección en cierto tiempo sale por la otra sección en el mismo tiempo. Esto trasunta, en palabras, la ecuación de continuidad, que vale, como es notorio, para el movimiento estacionario de todos los fluidos y, con gran aproximación, para movimientos cualesquiera de los líquidos, puesto que éstos son prácticamente incompresibles.

Si un movimiento estacionario se cumple con una masa fluida limitada por una superficie, real o imaginada, a través de la cual ni entra ni sale fluido, es claro que la condición de continuidad impone que las líneas de corriente sean cerradas. Se tiene así una *circulación* del fluido.

Movimientos de esta naturaleza se producen en el seno de líquidos desigualmente calentados, particularmente cuando se calientan por debajo. Las corrientes atmosféricas que se denominan *vientos* son ejemplos del mismo tipo y origen.

2. **Torbellinos.** — Un movimiento interesante y muy diferente de los anteriores es el llamado *turbillonario*, en el cual las masas fluidas giran al rededor de una línea, que se denomina *eje del torbellino*, de la misma manera que si fuesen rígidas. Esto es: *la velocidad angular tiene el mismo valor para los puntos de todo plano normal al eje.*

La diferencia fundamental entre este movimiento y los que podemos llamar de circulación consiste en que, mientras en éstos, en el

espacio comprendido entre dos secciones, las velocidades están en razón inversa de sus distancias, en aquéllos la relación es directa.

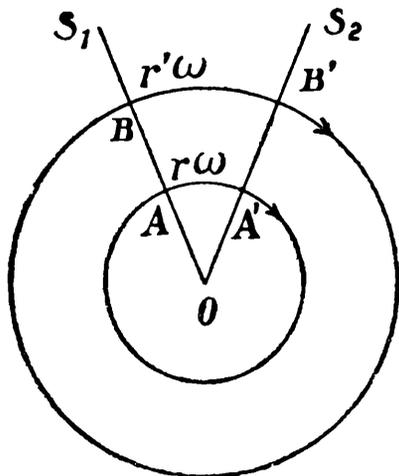


Fig. 193.

En efecto, representan los círculos de radios r y r' (fig. 193) dos líneas de corriente del torbellino y s_1 , s_2 dos secciones. Si el líquido gira con la velocidad angular ω la velocidad en A es $r\omega$ y en B $r'\omega$ y es claro que los arcos de círculos que van de A a A' y de B a B' , que son las distancias de las secciones, son proporcionales, respectivamente, a esas velocidades.

Es fácil producir torbellinos anulares en el seno de un líquido por medio del aparato que se ve en la fig. 194, debido al físico alemán Eduardo Riecke. Se llena el recipiente B de agua pura y el A de agua coloreada hasta la llave R . Si se deja abierta esta llave durante un corto intervalo de tiempo, pasa una pequeña cantidad del líquido coloreado, que se desprende del pico E del tubo en forma de un toroide o anillo circular (fig. 195), que asciende verticalmente hacia arriba. El líquido gira alrededor de la línea punteada que es, por lo tanto, el eje del torbellino.

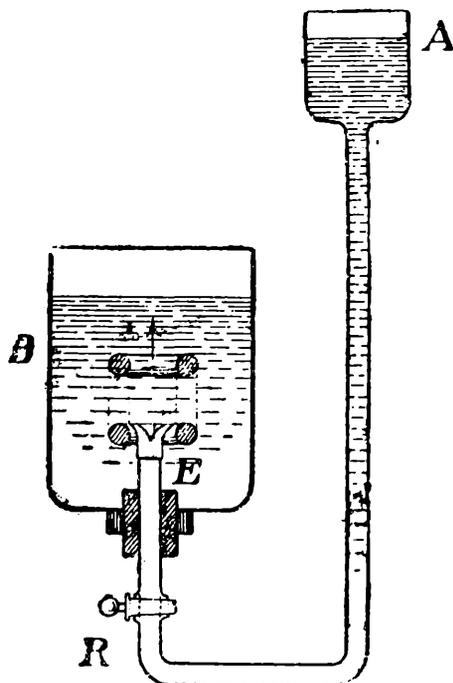


Fig. 194.

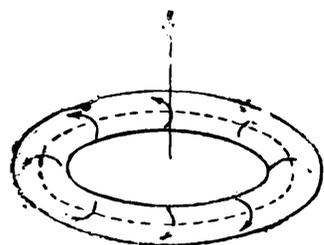


Fig. 195.

Torbellinos no cerrados se producen en el agua de un río, o en la contenida en un recipiente no demasiado pequeño, introduciendo en unos centímetros una lámina plana rígida, desplazándola en la dirección de su normal, y retirándola después. Se forman dos hoyuelos en los que el líquido gira rápidamente, el uno en un sentido y el otro en sentido contrario. Si el recipiente es hondo estos hoyuelos no son sino los extremos del mismo torbellino. Puede ocurrir también que los otros extremos se encuentren en el fondo del recipiente. Un ejemplo imponente del torbellino líquido lo constituye el fenómeno llamado *tromba marina*.

Torbellinos gaseosos pueden producirse llenando de humo de cigarro una caja rectangular (fig. 196), una de cuyas caras está provista de un agujero circular y cuya cara opuesta está cerrada por una membrana elástica bien tensa.

Si por desplazamiento de ésta se presiona esa masa gaseosa, sale por el agujero un torbellino anular de plano paralelo al de aquél, que se propaga en dirección normal, como se ve en la figura.

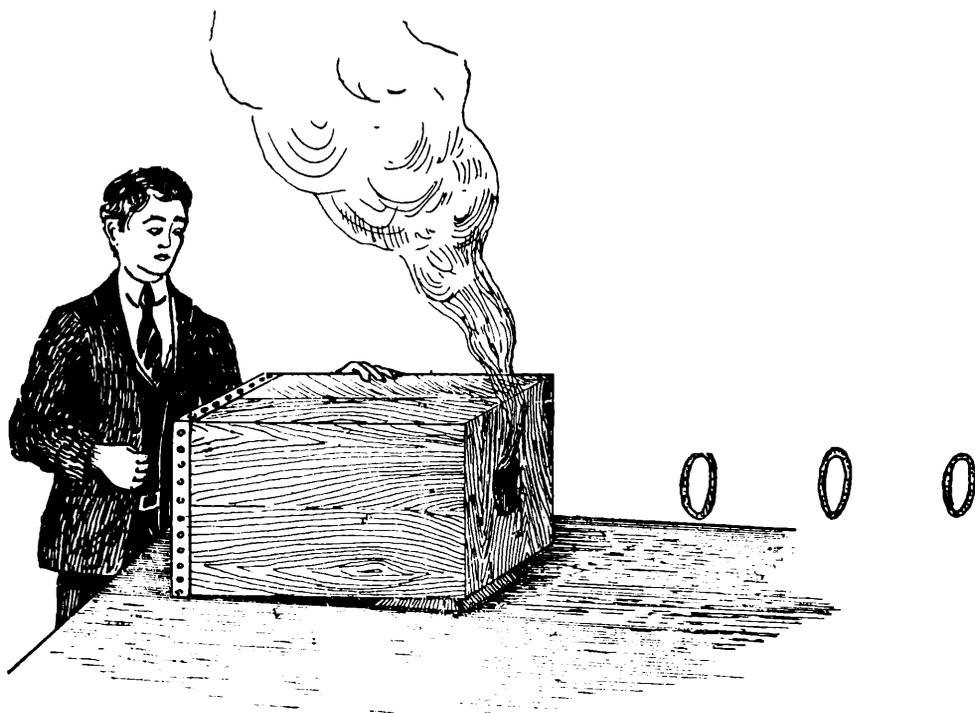


Fig. 196.

Se observa que cuanto menor es el diámetro del anillo tanto mayor es su velocidad de desplazamiento y viceversa, .

Se producen también fenómenos de atracción y de repulsión. Por ejemplo, dos anillos que se mueven en el mismo sentido, con diferente velocidad, pasan sucesivamente, uno por dentro del otro. Cuando el más veloz se acerca al otro se contrae y pasa por dentro, luego aumenta el diámetro, con lo que su velocidad disminuye, mientras que lo contrario ocurre con el restante, que acelera su marcha pasando por dentro del primero. Estos fenómenos se repiten sucesivamente.

3. Rudimentos de la teoría.—A. CONSTANCIA DEL MOMENTO DEL TORBELLINO. — Ocupémosnos ahora de la teoría, sin pretensión alguna de rigor.

Consideremos un segmento pequeño de un filete de torbellino; el líquido gira alrededor del eje, según ya se dijo, como si fuese un cuerpo rígido. Según las leyes de la rotación el momento de las

fuerzas exteriores es igual a la variación, en el tiempo, del impulso. cuya magnitud está dada por el producto del momento de inercia con respecto al eje de giración por la velocidad angular.

En el caso de que nos ocupamos, su valor es:

$$\frac{m}{2} r^2 \omega,$$

si se indica con ω la velocidad angular, puesto que se trata, por la pequeñez del segmento considerado, de un elemento cilíndrico recto, de cierto radio r , cuya masa indicamos con m .

Si el momento exterior es cero, debe ser:

$$\frac{m}{2} r^2 \omega = \text{const.},$$

de donde:

$$r^2 \omega = \text{const}$$

Si se introduce el factor π y se indica con S la sección del filete resulta

$$S\omega = \text{const.} \quad [1]$$

es decir, que el producto de la sección del filete por la velocidad angular es constante. Ese producto se denomina *momento del torbellino*.

Por razones de estabilidad ese momento tiene, además, el mismo valor en todas las secciones. Si la sección varía en un sentido es claro que la velocidad angular debe variar en sentido contrario. Es notorio, por otra parte, que si la continuidad del movimiento ha de ser una realidad el torbellino debe ser cerrado o terminar en las paredes que limitan a la masa flúida.

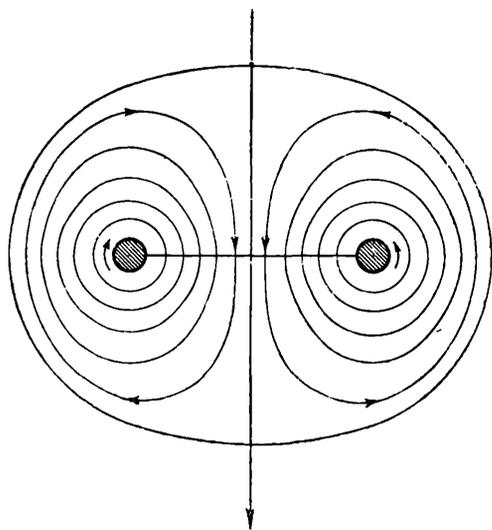


Fig. 197.

B. EXPLICACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO Y DE LOS FENÓMENOS DE ATRACCIÓN DE LOS TORBELLINOS ANULARES. — El movimiento de rotación de las masas del torbellino determina una circulación del resto del líquido, por cuya corriente es arrastrado, puesto que flota en él.

En la figura 197 se han dibujado las líneas de corriente del movimiento de circulación que originan dos torbellinos paralelos de momentos iguales y opuestos; tales líneas son las que corresponderían si estuviesen en reposo o, lo que es lo mismo, representan las trayectorias de las partículas sobre un plano perpendicular a sus ejes que se mueve con su misma velocidad. Las líneas de corriente del movimiento de circulación que origina un torbellino anular, en el fluido circundante, en un plano meridiano, son de la misma forma; su desplazamiento se producirá, entonces, en la dirección de la normal a su plano, como se afirmó más arriba.

Si dos torbellinos se mueven en regiones vecinas, deben reaccionar uno sobre el otro, a causa del movimiento del fluido circundante.

Si giran en idéntico sentido y los ejes normales de simetría coinciden, se mueven sobre el eje común también en el mismo sentido (fig. 198). La superposición de las velocidades que cada uno de ellos determina sobre el fluido en que se mueven origina un aumento de velocidad del de atrás y una disminución de la de adelante; nacen así fuerzas P que hacen disminuir el diámetro del primero y fuerzas Q que aumentan el del segundo. Los fenómenos ocurren como se describió más arriba.

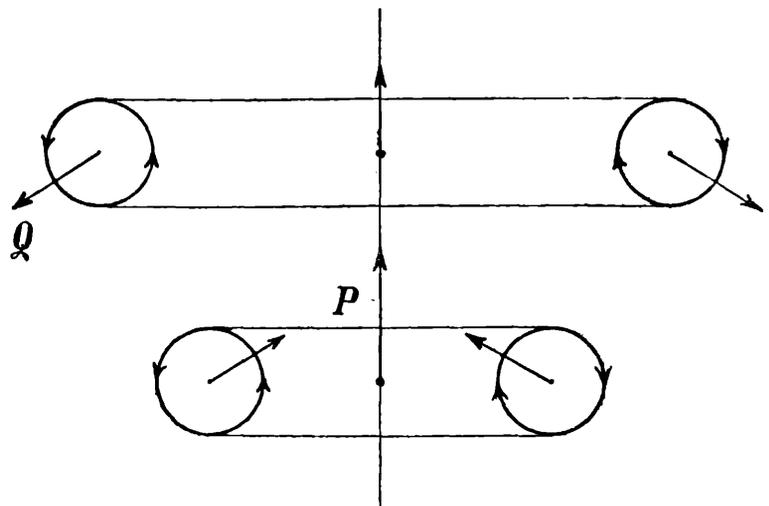


Fig. 198.

B. — RESISTENCIA DE LOS FLÚIDOS AL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS

4. Cuerpos que tienen la forma de las líneas de corriente. —

El conocimiento de la resistencia que oponen al desplazamiento de los cuerpos el agua y el aire es de la mayor importancia en la técnica de la construcción de medios de locomoción. El asunto resulta también de interés para otros problemas prácticos, por cuanto se ponen en evidencia; con ese motivo, las alteraciones que ocasionan, en la distribución de las líneas, cuerpos situados en la corriente de un fluido.

Como los fenómenos que se observan dependen de la velocidad relativa, parece ser lo mismo, a primera vista, que el fluido esté en re-

poso y el cuerpo moviéndose o que el cuerpo esté inmóvil y se mueva el fluido en sentido contrario con la misma velocidad.

La experiencia muestra, sin embargo, que si bien el fenómeno es, en ambos casos, cualitativamente el mismo, los valores numéricos de las fuerzas son desiguales.

Por este motivo se habla de *presión* si el cuerpo se encuentra en reposo y el fluido en movimiento y de *resistencia al movimiento* si sucede lo contrario.

En las discusiones cualitativas consideramos siempre el primer caso, pero daremos, en lo posible, los valores numéricos experimentales que corresponden a los dos.

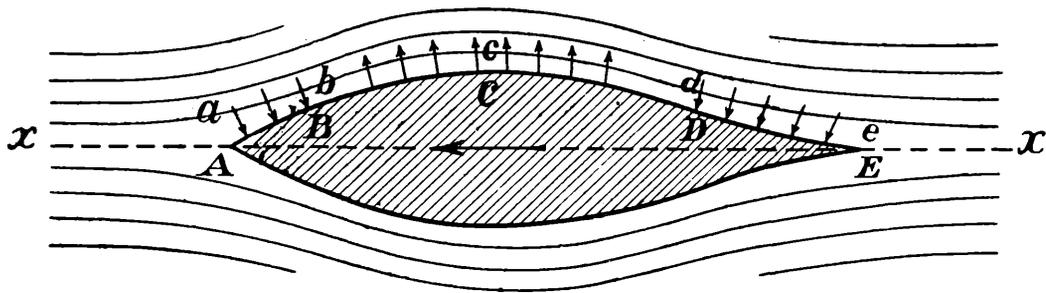


Fig. 199.

En lo que sigue estudiaremos algunos casos particulares referentes a cuerpos de diversas formas.

Al decir *cuerpos que tienen la forma de las líneas de corriente* queremos significar, tan sólo, que se trata de cuerpos que, situados en un fluido en movimiento, su superficie resulta *envuelta* por las líneas de corriente; que por cada uno de sus puntos pasa una línea que le es tangencial. Conservamos así una forma usual de expresión.

Hagamos notar, también, que no se trata aquí, tampoco, de discutir cuál debe ser la forma del cuerpo para que tal ocurra.

Supondremos siempre, en lo sucesivo, que el fluido se mueve, antes de introducir el cuerpo, estacionariamente en línea recta, de tal modo que dentro de cada filete la velocidad sea constante.

Si nos limitamos al estudio de lo que ocurre en un plano las líneas de corriente serán rectas paralelas.

Introduciendo en una corriente semejante un cuerpo como el sombreado de la figura 199 las líneas se distribuyen como se ve en el mismo dibujo. El cuerpo tiene, pues la forma de las líneas de corriente.

Vamos a poner en evidencia que para tales cuerpos la resistencia al movimiento, o la fuerza con que los empuja el fluido, proviene,

casi exclusivamente, de su viscosidad. La fuerza se dice en ese caso de *roce superficial*.

Si no existiese ningún roce, es decir, si el fluido fuese ideal, la fuerza sería nula. Daremos la prueba de Froude.

Consideremos primeramente las fuerzas que se originan por los cambios de dirección de la corriente de un líquido que circula, por ejemplo, en un tubo sinuoso $A B C D E$ de sección constante (fig. 200).

Si el primero y el último tramo tienen la misma dirección representada en el dibujo con la recta punteada x es claro que, cualquiera que sea la forma de la sinuosidad, la variación del impulso entre A y E en la unidad de tiempo, en dirección de x , es cero, y, por lo tanto, la fuerza total que el líquido aplicará sobre el tubo en la misma dirección será también nula.

Conviene, para lo que sigue, dibujar las fuerzas parciales. La figura muestra la distribución de las mismas y sus magnitudes, que se

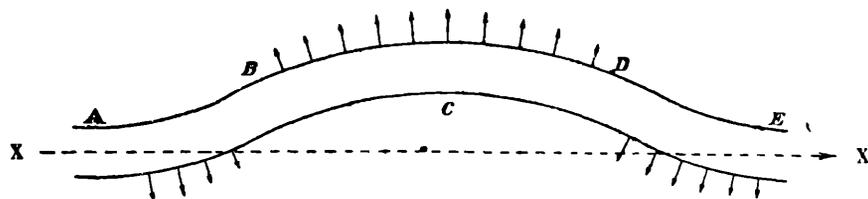


Fig. 200.

obtienen fácilmente con las reglas del capítulo anterior. Se trata de las fuerzas de inercia que el líquido aplica sobre el tubo. La suma de las proyecciones sobre la recta xx debe ser, por lo que antecede, igual a cero.

Volvamos a nuestro problema. El líquido que circula entre las líneas de corrientes $a b c d e$ y $A B C D E$ (fig. 199) se encuentra exactamente en las mismas condiciones como si circulara en un conducto. La línea $a b c d e$ podría suponerse como perteneciendo a la superficie de una pared ideal rígida sin que la distribución de la corriente sufriese en lo más mínimo.

Los cambios de dirección de la velocidad del agua originan, como en el caso anterior, las fuerzas que se ven en el dibujo; la suma de sus proyecciones en la dirección xx debe ser también cero. El cuerpo no es, pues, impelido por el movimiento del agua, es decir, la suma de la fuerza de inercia es nula. No estará sometido, en dirección del movimiento del líquido, a otra fuerza que la proveniente de las tangenciales que origina la viscosidad, las que, exprofeso, habíamos dejado de considerar.

5. Cuerpos que tienen sólo en parte la forma de las líneas de corriente. — Un caso semejante está representado por el doble cono de la figura 201. Las líneas de corriente salen tangentes a las generatrices del cono de adelante limitando a una región Z , que aparece punteada en la figura, en la que el líquido no toma parte del movimiento de conjunto, formando lo que se llama la « estela »; aparecen allí movimientos « turbillonarios » locales.

El líquido se pone, entonces, en contacto con el cuerpo según cierta dirección en O y lo abandona en A y B bajo otra dirección. Se origina así una variación del impulso del agua en la dirección xx de la corriente y, por consiguiente, el cuerpo estará sometido a una fuerza de inercia en la misma dirección.

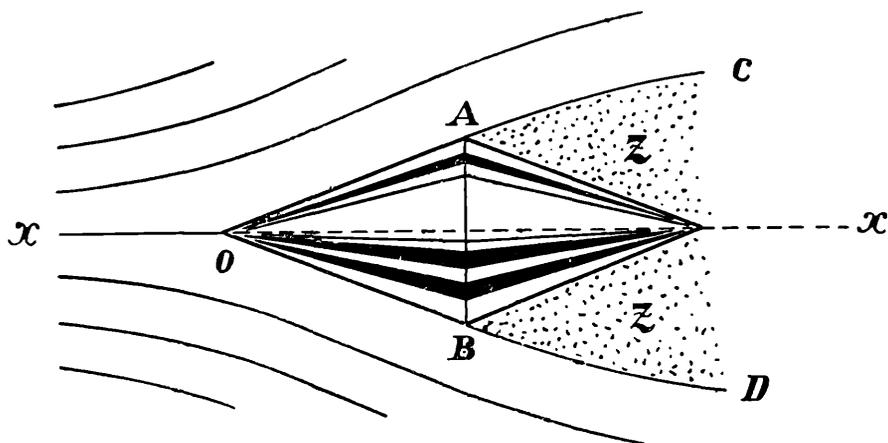


Fig. 201.

Actúan, además, en el mismo sentido, fuerzas provenientes del roce sobre la superficie $D B O A C$, pues también el roce del agua que permanece en la región Z con el líquido de la corriente, determina una fuerza resistente al movimiento del cuerpo.

Si el fluido fuese ideal, esto es, si no fuese viscoso, la superficie $D B A C$ separaría una región en que el líquido está animado de un movimiento de traslación de otra en que su velocidad sería nula; el movimiento sería, pues, *discontinuo*. Tampoco habría movimientos turbillonarios en la estela.

En los fluidos reales no puede existir una superficie de discontinuidad, pues eso daría lugar a fuerzas de roce infinitamente grandes, lo que no tiene sentido; la velocidad varía en realidad, de una manera continua, dentro de cierta capa de pasaje. La viscosidad origina también los movimientos turbillonarios que se observan en la región Z .

La formación misma de la estela depende también de la viscosidad del líquido. Mientras que, por ejemplo, la teoría enseña que una esfe-

ra situada en una corriente estacionaria de un flúido ideal tiene la forma de las líneas de corriente, como muestra la figura 202 la experiencia revela, en cambio, la existencia de una estela.

Lanchester ha ideado una experiencia que permite mostrar fácilmente ese hecho.

A través de un agujero practicado en una esfera hueca de vidrio *abc* (fig. 203) penetra un tubo cilíndrico de la misma substancia.

Si se sopla aire coloreado con un poco de humo a través del tubo, la masa gaseosa se mueve turbilhonariamente en el interior, sale por el espacio que queda libre entre el agujero y el tubo, sigue el contorno de la esfera hasta una región muy próxima a su ecuador, donde las líneas abandonan su superficie en dirección más o

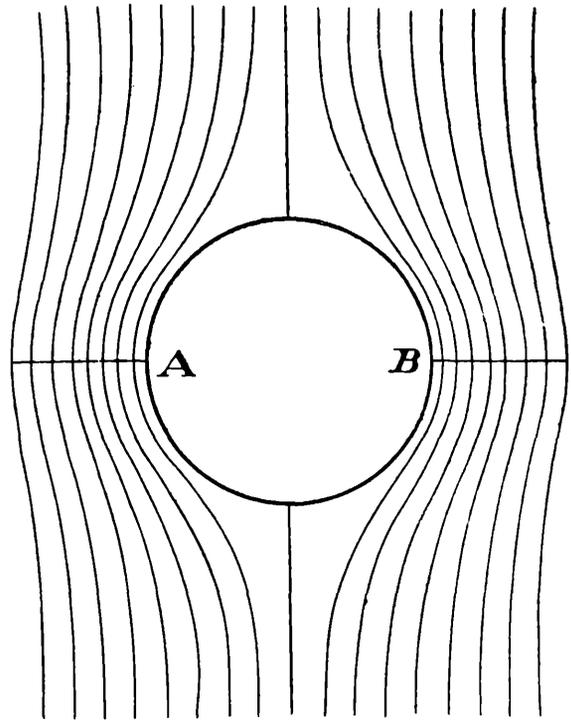


Fig. 202.

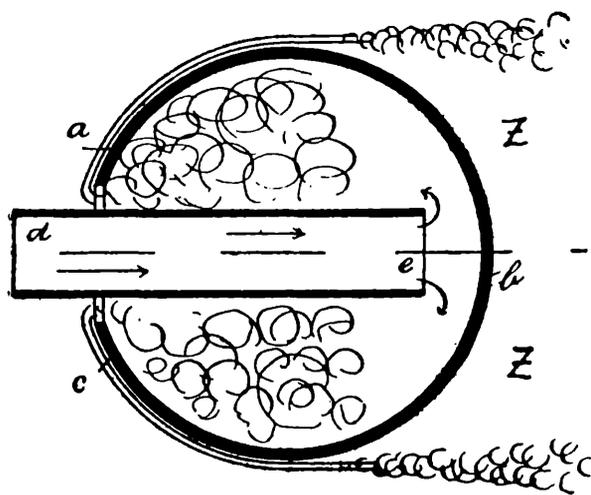


Fig. 203.

menos tangencial.

En la región *Z* la masa de aire no participa de la corriente; es la región de la estela.

6. Roce superficial. — Apenas se profundice el análisis se verá que esta determinación es incorrecta. En primer lugar, el líquido en contacto con el cuerpo permanece adherido a su superficie y, por lo tanto, el roce no se produce sobre ella sino entre

las capas flúidas. Además se oponen al movimiento del cuerpo las fuerzas de roce entre todas las capas líquidas que son puestas en movimiento.

Supongamos, en efecto, que en un flúido en reposo se mueve un plano *PQ* (fig. 204) en la dirección de la flecha; a causa del roce parte del líquido es arrastrado; en el estado estacionario la cantidad

de fluido que lo acompaña será invariable; es claro que no se trata de las misma partículas sino que unas se desprenden de él y otras son arrastradas en su lugar.

La velocidad de las partículas sobre el plano es la de él mismo; a cierta distancia las partículas permanecerán en reposo, es decir, la velocidad será cero.

Las velocidades de las partículas m situadas sobre una normal al plano, entre éste y la región de la velocidad cero, están dadas por una ley de distribución que es parabólica si el movimiento es laminar, de otra forma si es turbulento.

Esa ley está representada por la curva $m' m'$ trazada arbitrariamente; las posiciones m' son las que alcanzan los puntos m respec-

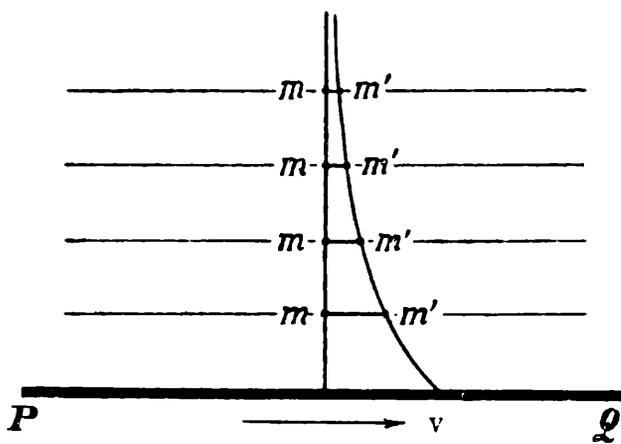


Fig. 204.

tivos en el transcurso de una unidad de tiempo.

El gradiente de la velocidad disminuye, pues, hasta anularse a medida que nos alejamos del plano. Lo mismo ocurre con las fuerzas que opone uno cualquiera de los filetes al deslizamiento del que se encuentra debajo de él.

Como el deslizamiento de todos los filetes es, en definitiva, producido por el desplazamiento del plano, es claro que para mantener su movimiento con la velocidad constante v es menester una fuerza R que sea la suma de todas esas fuerzas parciales.

La aplicación de la ley de viscosidad (relación [4] de la pág. 165) es válida, lo que es notorio, únicamente mientras el movimiento es laminar, es decir, en agua para pequeñas velocidades (véase 1 del capítulo X). En este caso, que difícilmente se presenta en la práctica, la experiencia enseña que la resistencia de frotamiento es proporcional a la velocidad. Este resultado fué deducido teóricamente por Stokes utilizando la ley de viscosidad.

Allen dedujo de sus experiencias, publicadas en el año 1900, la existencia de tres regiones de velocidad, para las cuales el roce superficial obedece a leyes diferentes.

Para pequeñas velocidades es proporcional a la velocidad; se alcanza luego una velocidad crítica para la cual depende de la

potencia, y por fin, para movimientos rápidos esa fuerza es proporcional al cuadrado de la velocidad.

Esto ratifica, en realidad, los resultados de los Froude, padre (1873) e hijo, quienes dedujeron de sus experiencias con placas, que la resistencia superficial R está dada por la relación:

$$R = c \rho S v^x, \quad [2]$$

donde S es la superficie mojada, ρ el peso específico del agua, c y x constantes. Los valores de estas últimas dependerían, según ellos, de la longitud de la placa en la dirección del movimiento y de la naturaleza de su superficie.

En la tabla que sigue se dan algunos de los resultados que obtuvieron:

Longitud de la placa en metros	Barnizada		Parafinada	
	c	x	c	x
0,61	0,210	2,00	0,209	1,95
2,44	0,184	1,85	0,161	1,94
6,10	0,161	1,85	0,145	1,93

En el aire valen las mismas fórmulas para la resistencia superficial. Su valor es mucho menor que en el agua, lo que significa que la constante c es más pequeña. Sobre esto volveremos más adelante.

7. Presión sobre una placa situada formando un ángulo diferente de cero con la dirección de la corriente. — A. ATAQUE NORMAL. — Supongamos, primeramente, (fig. 205) que la placa se orienta normalmente a la dirección de la corriente.

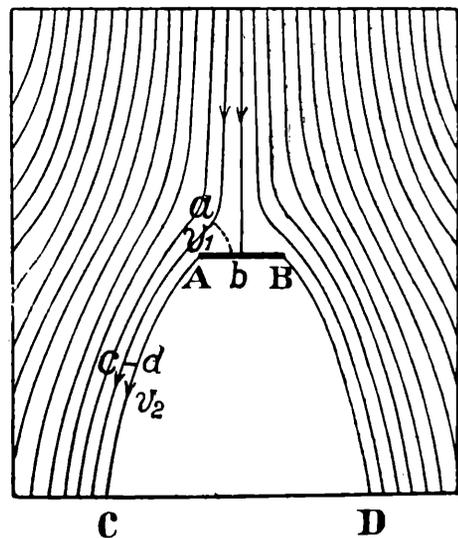


Fig. 205.

Las líneas cambiarán de dirección en su proximidad, distribuyéndose simétricamente con respecto a la normal en su punto medio.

Si la viscosidad del líquido fuese nula, el agua de la estela, que se encuentra limitada por la placa y las líneas AC y BD , estaría en reposo y el movimiento sería discontinuo. A causa del roce aparece el movimiento turbillonario que se ve en la figura 206.

Que la placa es empujada en dirección de la corriente resulta en seguida del hecho de que masas líquidas se ven precisadas a cambiar de dirección por su presencia; la variación del impulso de esas masas origina una fuerza que se aplica en la dirección mencionada, o lo que es lo mismo, por la curvatura de las líneas actúan fuerzas centrífugas cuya resultante se aplica sobre la placa en el sentido de la corriente.

Como se ha visto (párrafo 2 del capítulo XI) en las curvas la presión del líquido es mayor del lado de afuera que del lado de adentro lo que significa que la velocidad del líquido es menor del lado exterior. Resulta, así, que la velocidad del líquido es, en las vecindades de la placa, menor que la existente lejos de ella, que indicaremos con c ; por eso y puesto que el líquido es incompresible se han dibujado los filetes de mayor sección cerca de la placa.

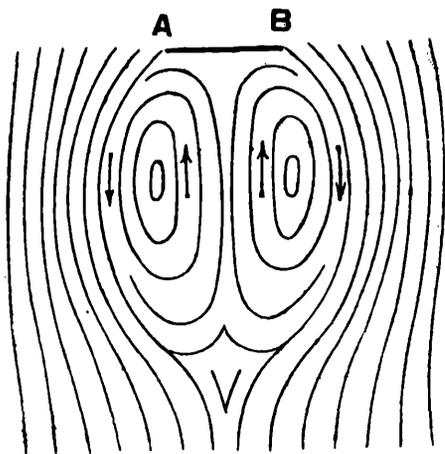


Fig. 206.

Es claro que la dirección de la fuerza puede determinarse también por las presiones que recibe la placa de uno y otro lado. Apliquemos por ello el teorema de Bernouilli. Según él, dentro de un filete debe permanecer constante la suma:

$$p + \frac{1}{2} \frac{\rho}{g} v^2 = \text{const} = P_0, \quad [3]$$

que se denomina, como sabemos, presión hidrodinámica.

Consideremos el filete señalado con flechas en el dibujo e indiquemos con P_0 el valor constante de la presión hidrodinámica. Supongamos por un momento que el líquido es ideal; los torbellinos desaparecen. Sea, además p_2 la presión constante que reinaría en la masa en reposo del fluido de la estela.

El equilibrio del fluido sobre las líneas AC y BD , en dirección de sus normales, es posible solamente si las presiones son iguales de uno y otro lado, y, por consiguiente, si indicamos con v_2 la velocidad en la sección cd , debe ser:

$$P_0 - \frac{1}{2} \frac{\rho}{g} v_2^2 = p_2, \quad [4]$$

y puesto que P_0 y p_2 son constantes debe serlo v_2 . Como lejos de la placa la velocidad es c , resulta que éste será el valor de la

velocidad sobre todos los puntos del filete considerado, que se encuentra sobre la estela. Se tiene, por lo tanto:

$$P_0 - \frac{1}{2} \frac{\rho}{g} c^2 = p_2. \quad [5]$$

Sobre la sección *ab* la presión tendrá el valor p_1 que da la expresión:

$$P_0 - \frac{1}{2} \frac{\rho}{g} v_1^2 = p_1. \quad [6]$$

De estas dos relaciones resulta:

$$p - p_2 = \frac{1}{2} \frac{\rho}{g} (c^2 - v_1^2), \quad [7]$$

valor positivo, ya que como hemos visto, $v_1 < c$. La placa será empujada, pues, en el mismo sentido de la corriente; los dos caminos según los cuales se ha obtenido esta conclusión son absolutamente equivalentes.

Por la existencia de los torbellinos estos resultados se modifican, naturalmente, en parte; la discusión teórica no es en ese caso nada sencilla.

Además de las fuerzas de inercia que acabamos de considerar actúan las provenientes del roce del líquido de la corriente con el de la estela. Esta fuerza es, para placas normales, despreciable con respecto a las anteriores.

En lo que se refiere al valor total de la fuerza normal que actúa sobre la placa nos atendremos, exclusivamente, a los resultados experimentales.

Mariotte, du Buat (1816), Poncelet (1839), Stanton (1909), Engels y Gebers (1907 y 1908), Matthias (1911 y 1912) se han ocupado de su medida en el agua. Resulta que la fuerza está dada por la relación:

$$F = k \rho S \frac{v^2}{2g}, \quad [8]$$

donde ρ es el peso específico del agua, S la superficie sumergida de la placa, v la velocidad de la corriente, y k una constante que depende de la velocidad y del grado de inmersión, en la forma que indican las tablas siguientes:

CUADRADO DE 10 CENTÍMETROS DE LADO

El borde superior situado
10 centímetros por de-
bajo de la superficie li-
bre del agua

$v \frac{\text{m}}{\text{seg}}$	k
0,5	1,26
1,5	1,23
2,0	1,14
2,5	1,10
3,0	1,09
3,5	1,10

El borde superior a flor
de agua

$v \frac{\text{m}}{\text{seg}}$	k
0,5	1,26
1,0	1,53
1,5	1,59
2,0	1,41

La fuerza resulta expresada en kilogramos si se elige como unidad de longitud el metro y como unidad de tiempo el segundo, debiéndose escribir a S en metros cuadrados y a ρ en kilogramos por metro cúbico.

Los coeficientes que acabamos de dar se refieren a una placa en reposo en una corriente. Con él puede calcularse lo que se denomina presión de la corriente.

Si el líquido está en reposo y se mueve la placa en la dirección de su normal vale la misma fórmula pero los coeficientes k son menores, como ha encontrado du Buat y más recientemente Engels y Gebers. Sus valores son, en este caso, alrededor de las dos terceras partes de las anteriores.

Si la placa se encuentra en el aire los fenómenos son enteramente análogos, valiendo relaciones de la misma forma que la anterior tanto para la presión como para la resistencia al movimiento. Es decir, se tiene:

$$F = k_{\text{aire}} \rho_{\text{aire}} S \frac{v^2}{2g} . \quad [9]$$

Los valores experimentales obtenidos para k en el aire son muy poco diferentes de los obtenidos para placas en reposo en una corriente de agua. Esto prueba que la resistencia debida al roce para placas normales es pequeña respecto a las fuerzas de inercia.

Para las aplicaciones es más cómodo escribir esa relación en la forma

$$F = K S v^2 , \quad [10]$$

de modo que:

$$K = \frac{k \rho}{2g} . \quad [11]$$

De las determinaciones experimentales de Hutton (1878), Langley (1888), Eiffel y otros, resulta que para *placas en reposo* el valor de K (coeficiente de presión), que depende de la velocidad y de la forma de la placa, oscila entre el valor 0,087 y 0,121.

Para el coeficiente K de resistencia al movimiento, de las medidas de Hutton, Langley y Dines, resultaría un valor de 0,090.

B. EL ATAQUE OBLICUO. — Si la placa se encuentra inclinada con respecto a la dirección de la corriente las líneas se distribuyen como indica la figura 207. La simetría desaparece por completo. El punto de aplicación de la presión no se encontrará en la parte central de la placa sino desplazando lateralmente hacia el borde de adelante, puesto que en su vecindad la curvatura de las líneas es más pronunciada.

Para mantenerla en esa posición será menester una fuerza igual y contraria aplicada en su centro de gravedad y un par cuyo momento sea igual y opuesto al de la presión con respecto al mismo punto.

Por ese motivo, si la placa puede girar libremente alrededor de un eje vertical fijo, su posición de equilibrio será aquella en que es normal a la corriente.

Cualquiera que se haya dedicado al deporte del remo habrá observado que en días de viento es muy incómodo navegar en dirección oblicua a su corriente; a pesar del uso del timón, es menester, todavía, compensar el par que determina la presión, remando de un lado con mucha más energía que del otro.

Las experiencias de Langley (1891) muestran que para placas rectangulares en el aire la presión normal a la placa está dada por la fórmula empírica de Duchemin:

$$P_a = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{1 + \operatorname{sen}^2 \alpha} k \rho S \frac{v^2}{2g} \quad [12]$$

o

$$P_a = P_{90^\circ} \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{1 + \operatorname{sen}^2 \alpha}, \quad [13]$$

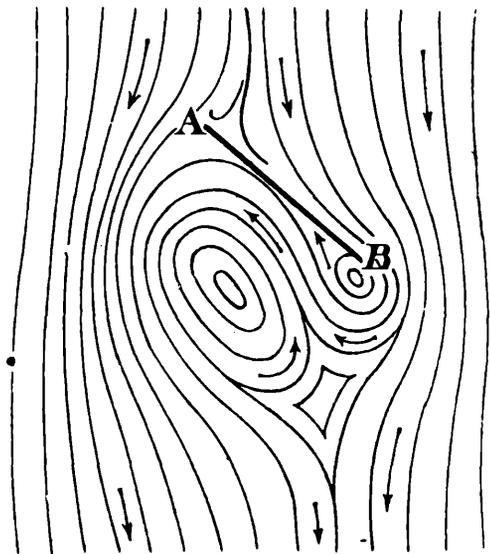


Fig. 207.

donde α es el ángulo de inclinación de la placa con respecto a la corriente. Esta fórmula valdría para cualquier fluido. Para obtener en magnitud y dirección la fuerza total que aplica el viento sobre la placa debe sumarse, geoméricamente, a esa presión, la fuerza tangencial del roce, que en este caso no es nula por la asimetría de la distribución de las líneas con respecto a la placa.

Según las medidas de Lanchester la fuerza de roce del aire sobre placas planas rectangulares sería:

1º, para placas pequeñas y velocidades de 3 metros por segundo, de 0,020 a 0,025 de la presión que corresponde al ataque normal;

2º, para placas de 5 hasta 15 decímetros cuadrados de superficie y velocidades de 6 hasta 9 metros por segundo, de 0,009 hasta 0,015 de la presión que corresponde al ataque normal.

Según experiencias modernas, realizadas también, como la de Langley, con placas rectangulares, la fórmula de Duchemin no representaría, en forma completamente satisfactoria, los resultados experimentales.

8. Distribución de la presión sobre placas rectangulares. — Por la distribución de las líneas de corriente se hace notorio que en ningún caso la presión puede estar uniformemente distribuída sobre las placas.

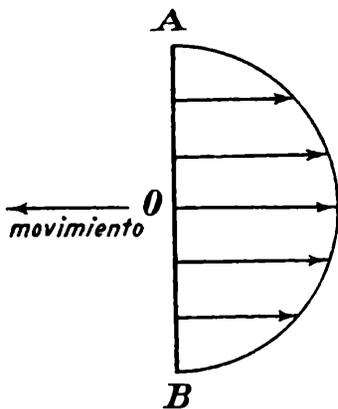


Fig. 208.

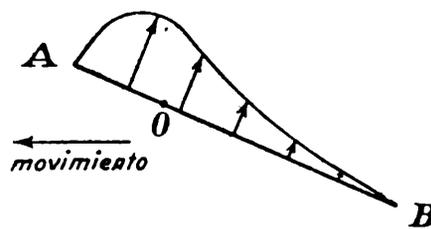


Fig. 209.

En el ataque normal resulta, por simetría, que el centro de la fuerza coincide con el centro de figura, pero la presión — en el sentido estricto — debe disminuir hacia los bordes. Es suficiente para convencerse de ello, observar la curvatura de los filetes infinitamente vecinos a la placa en los diferentes lugares. En el centro la curvatura es grande y está dirigida en sentido contrario a la placa, luego disminuye para cambiar de sentido en la proximidad de los bordes; la presión debe, por esta causa, ser mayor en el centro.

La experiencia confirma estos resultados. La figura 208 muestra la distribución de la presión para el ataque normal.

En el ataque oblicuo es fácil deducir de la misma manera que el centro de la fuerza se encuentra cerca del borde proa, y que la presión disminuye hacia los bordes; la figura 209 ilustra sobre su distribución.

El primero en ocuparse de la determinación de la posición del centro de presión en placas rectangulares situadas en el agua fué Avanzini.

Posteriormente Yoessel dedujo, de experiencias realizadas en el Loire, que el desplazamiento lateral r del centro de presión está dado por la expresión:

$$r = 0,3 (1 - \text{sen } \alpha) l, \quad [14]$$

si se indica con l el largo de la placa.

En la figura 210 se han dibujado los centros O de presión sobre una placa orientada, con respecto a la corriente flúida, bajo diferentes ángulos.

Las mismas relaciones valen si se trata no de agua sino de aire.

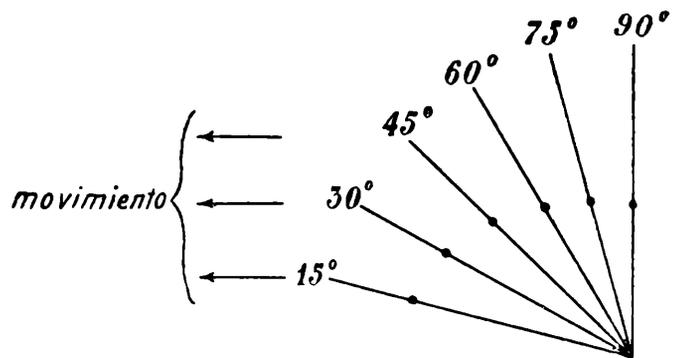


Fig. 210.

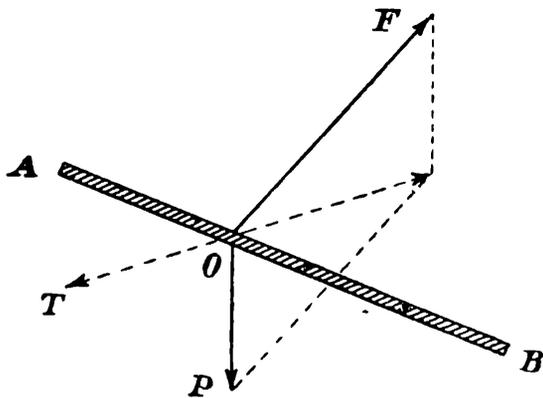


Fig. 211.

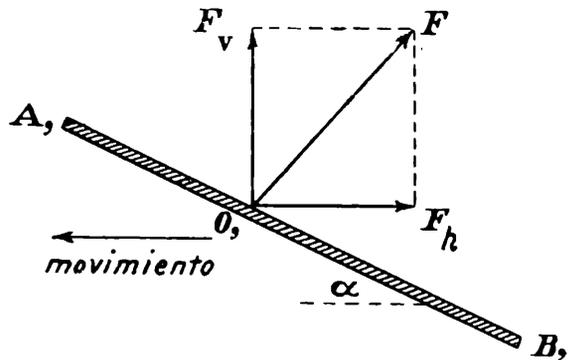


Fig. 212.

9. Las componentes horizontal y vertical de la fuerza. — Nos referiremos aquí exclusivamente a placas en el aire. La fuerza total, que representaremos con F no es, como sabemos, normal a la placa sino inclinada un poco hacia el borde de popa a causa de la fuerza del roce superficial.

El equilibrio de una placa en el aire (o de un barrilete) se produce si se aplica una fuerza T de igual magnitud y de sentido

opuesto a la diagonal del paralelogramo cuyos lados son la fuerza F y el peso P de la placa (fig. 211).

Prescindamos por un momento del roce, o lo que es lo mismo, supongamos que la fuerza F es normal a la placa (fig. 212). Sus componentes vertical y horizontal están dadas por las relaciones:

$$F_v = F \cdot \cos \alpha \quad , \quad F_h = F \cdot \sin \alpha \quad , \quad [15]$$

donde indicaremos, como antes, con α el ángulo de inclinación del plano con la dirección de su movimiento o de la corriente.

Por esas relaciones se ve que la fuerza F_v que se opone al peso aumenta si disminuye α . Como la fuerza total F disminuye si α decrece existirá cierto ángulo para el cual F_v tiene el valor máximo. Si F_v es mayor que el peso, la placa sube, si es menor, baja.

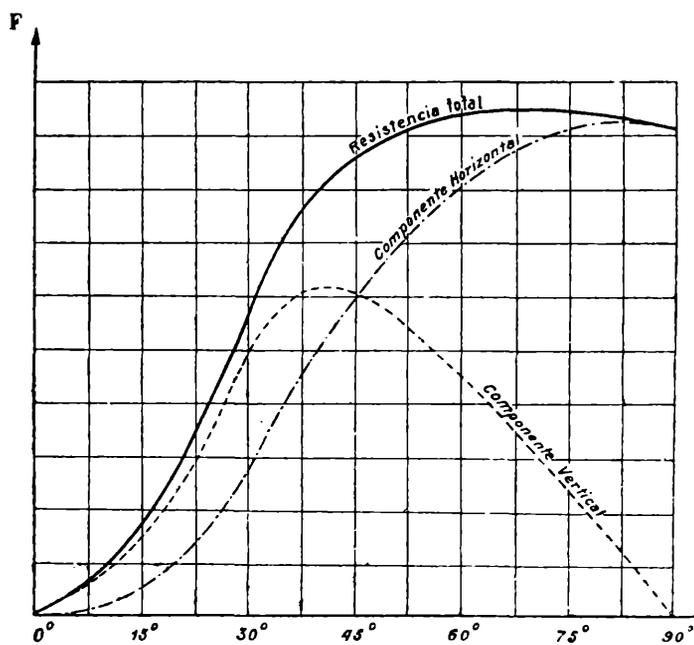


Fig. 213.

En la figura 213 está representada la fuerza total de F y las componentes vertical y horizontal en función del ángulo de inclinación. Son las curvas con que Mannesmann representó gráficamente sus medidas experimentales.

10. La desviación lateral de una pelota de tennis. — Si se arroja una pelota de tennis, animada de un movimiento de rotación, se va desviando lateralmente durante su marcha, hacia un lado u otro, según el sentido de su giración. Este hecho se explica fácilmente por la acción dinámica del aire.

La distribución de las líneas de corriente, supuesta la pelota sin movimiento de traslación, girando con cierta velocidad y el aire en movimiento, lo que es lo mismo, está representada en la figura 214.

Esa distribución se comprende en seguida sin dificultad. Para el punto Q las velocidades de traslación y de rotación son opuestas mientras que para el P tiene el mismo sentido. Las velocidades tota-

les cerca de Q son menores que cerca de P ; las presiones son en la primera región mayores que en la segunda, por lo que la curvatura de las líneas debe ser allí mayor; la estela ocupa la región punteada. La pelota estará, por lo tanto, sometida a una fuerza de resistencia dinámica que admite una componente normal a la dirección de la velocidad de traslación, la que determina su desviación. Es claro que si la velocidad de rotación es muy pequeña con respecto a la de traslación, la distribución de las líneas será simétrica respecto a la dirección de la corriente y no se observará ningún efecto.

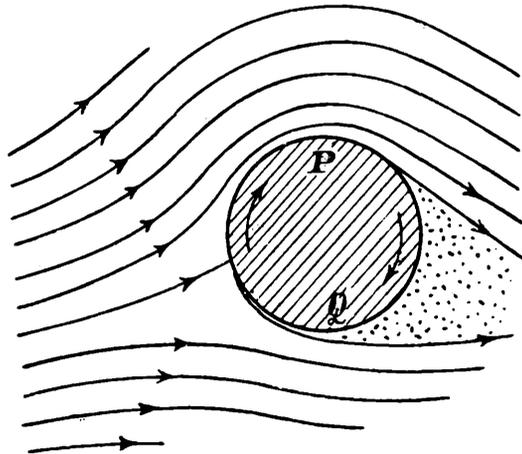


Fig. 214.

11. El movimiento de los proyectiles. — En las páginas 249 y 250 del primer tomo dimos brevísimas indicaciones relativas a la marcha de los proyectiles. Volvemos nuevamente al asunto para explicar algunos de los fenómenos que se observan, sin que sea nuestro ánimo ocuparnos a fondo de este difícil problema.

Repitiendo parte de lo que dijimos entonces, la marcha de los proyectiles de las armas modernas es la siguiente:

1º, en la primera parte de su trayectoria el eje del proyectil describe un cono, cuyo eje es tangente en todo momento de la trayectoria (como tal entendemos a la línea descrita por el centro de gravedad);

2º, después de cierto trayecto el proyectil se coloca en la dirección de la tangente a la trayectoria;

3º, la dirección de la trayectoria se desvía en el sentido de la rotación del proyectil;

4º, la trayectoria del centro de gravedad no es plana sino una línea espiral.

Demostraremos las dos primeras afirmaciones. La tercera y la cuarta se explican, también por la combinación de efectos aerodinámicos y giróscopos. El tercer efecto no puede explicarse, exclusivamente, de la misma manera que la de una pelota de tennis, pues en los proyectiles las velocidades de rotación, grandes en sí, son muy pequeñas con respecto a las de traslación.

En la figura 215 se ha representado, en corte, un proyectil cuya giración se ha supuesto hacia la derecha; en O está su centro de gra-

vedad, Ox es la dirección momentánea de la trayectoria. Oz es un eje que se encuentra en el plano vertical que pasa por Ox , y Oy es el

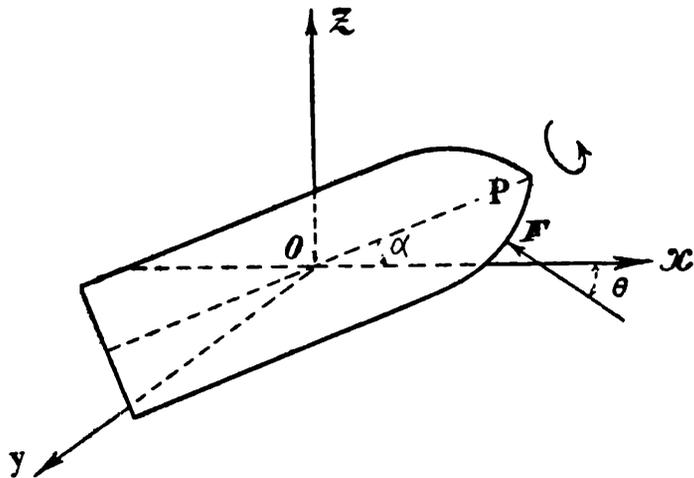


Fig. 215.

tercer eje que completa el sistema de coordenadas.

Por el efecto de la caída el proyectil se encuentra bien pronto inclinado con respecto a la dirección del movimiento; la resistencia aerodinámica consistirá en una fuerza F aplicada cerca de la proa.

Esa fuerza se puede descomponer en dos componentes, una normal F_n y otra paralela F_t a la trayectoria. Si θ es el ángulo que forma con el eje x se tiene:

$$F_n = F \operatorname{sen} \theta$$

fuerza que determina un momento alrededor del punto O y que, de acuerdo con las leyes del movimiento del giróscopo (véase tomo I, pág. 252 y siguientes) hará mover el eje de giración en un plano normal a la de la cupla; resulta así un movimiento de precesión cuyo eje es Ox .

La otra componente:

$$F_t = F \operatorname{cos} \theta,$$

no origina ningún momento; altera, únicamente, la curvatura de la trayectoria disminuyendo el alcance del proyectil.

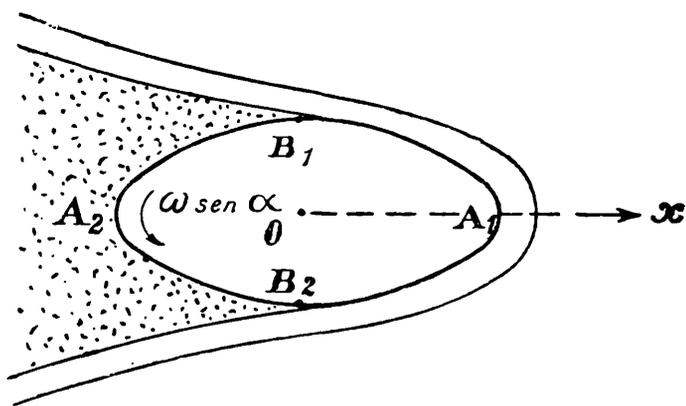


Fig. 216.

El segundo efecto se explica por la acción giroscópica de momentos originados por la resistencia que opone el aire a la rotación del proyectil que, por la traslación, forma detrás de sí una estela.

En la figura 216 se ha representado un corte del proyectil por un plano que pasa por Ox y es perpendicular al plano POx ; la velocidad de la rotación de ese corte alrededor de O es $\omega \operatorname{sen} \alpha$, si α es la inclinación del proyectil respecto a la dirección de marcha Ox .

Puesto que la velocidad de traslación es muy grande respecto a la de rotación, la estela es simétrica respecto a Ox .

En los puntos situados sobre el arco $B_1A_1B_2$ la presión es mayor que en los puntos opuestos situados sobre el arco $B_2A_2B_1$; las fuerzas de roce que se oponen a la giración son mayores en la primera zona que en la segunda.

Esas fuerzas equivalen a una fuerza aplicada en O en dirección perpendicular a la Ox , dirigida hacia la derecha, que modifica un poco la curvatura lateral de la trayectoria, y a un par de sentido negativo, que, por las leyes del movimiento giroscópico, hace mover el eje de rotación en el plano (POX) que es perpendicular al de sus fuerzas; el ángulo α disminuye por esto hasta que el proyectil es tangente a la trayectoria.

DINAMICA DE LA ELASTICIDAD Y ACUSTICA

CAPITULO XIII

SUPERPOSICION DE OSCILACIONES DETERMINACION DE LA FRECUENCIA DE VARILLAS TEOREMA DE FOURIER

1. **Movimiento armónico.** — Se designa, según vimos en el primer tomo, movimiento armónico, al movimiento que ejecuta un punto material sometido constantemente a la acción de una fuerza proporcional a la distancia que lo separa de un punto fijo y hacia el cual está ésta dirigida.

El más sencillo es el rectilíneo, representado por las funciones de seno o coseno, que se denomina *movimiento oscilatorio simple*. Tal es, por ejemplo, el representado por la expresión

$$x = a \operatorname{sen} 2 \pi \frac{t}{T}. \quad [1]$$

Se trata de un movimiento oscilatorio que se cumple en cierta dirección, indicada con la letra x ; la amplitud del movimiento es a y el tiempo de oscilación T . En la figura 217 está representado gráficamente.

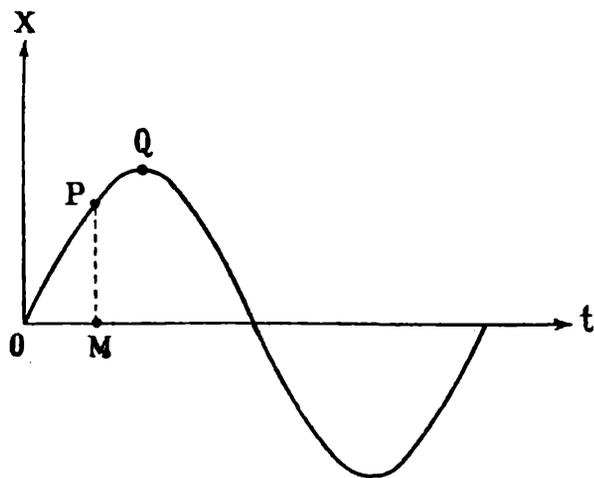


Fig. 217.

El tiempo se ha comenzado a medir a partir de un instante en el que el punto material pasaba por el punto fijo de reposo, puesto que para $t = 0$ es $x = 0$.

Es claro que el mismo movimiento puede representarse empezando a medir el tiempo de otro instante cualquiera, por ejemplo, a partir del instante en que el punto se encontraba en P . La ecuación de

movimiento debe dar, en ese caso, para $t = 0$, la elongación $x = PM$, lo que sucede escribiendo

$$x = a \cdot \text{sen} \left(2 \pi \frac{t}{T} + \varphi \right) \quad [2]$$

y calculando φ , que se denomina *fase inicial*, por la relación

$$x_{t=0} = PM = a \text{ sen } \varphi. \quad [3]$$

Considerando al movimiento oscilatorio (véase capítulo VIII del primer tomo) como movimiento de la proyección de un punto m (fig. 218) que se mueve uniformemente sobre un círculo, la fase inicial φ sería el ángulo que forma el radio vector con la dirección Oy normal a la Ox , pues ese es el ángulo descrito a contar del último pasaje por O , en dirección positiva, entendiéndose como tal a la que va de O a P , OP es aquí el valor PM de la figura anterior.

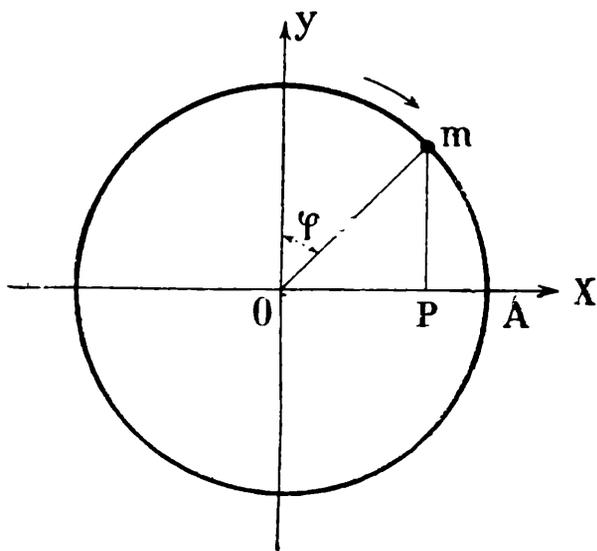


Fig. 218.

Si se midiese el tiempo de oscilación a partir del momento en que la elongación tiene el valor máximo, cuando el punto está en Q , o sobre el círculo en A , sería $\varphi = \frac{\pi}{2}$ y se tendría

$$x = a \cdot \text{sen} \left(2 \pi \frac{t}{T} + \frac{\pi}{2} \right) = a \cdot \text{cos } 2 \pi \frac{t}{T}. \quad [4]$$

Se ve así que el mismo movimiento oscilatorio puede representarse por un seno o por un coseno; las fases iniciales difieren en $\frac{\pi}{2}$ o, lo que es lo mismo, los instantes de tiempo tomados como origen distan un intervalo de tiempo igual a la cuarta parte de una oscilación doble.

2. Superposición de oscilaciones. — Si un punto material ejecuta simultáneamente más de un movimiento oscilatorio, el movimiento resultante se obtiene aplicando el *principio de superposición de los movimientos*.

Este problema se presenta con frecuencia en todas las ramas de la física, tanto en cuestiones científicas como técnicas, por lo que lo trataremos aquí con algún detenimiento.

Interesa, particularmente, la composición de oscilaciones que se realizan según la misma recta, es decir, paralelas, y de las que se cumplen según direcciones ortogonales.

A. COMPOSICIÓN DE OSCILACIONES PARALELAS DEL MISMO PERÍODO. — Supongamos que un punto material m ejecuta un movimiento oscilatorio sobre un segmento material rectilíneo $x'x'$ (fig. 219) alrededor del punto O' . El segmento cumple, a la vez, un movimiento oscilatorio del mismo período, tal que la línea $x'x'$ coincida siempre con la dirección xx fija en el espacio; el punto O' cumple, por pertenecer a $x'x'$, un movimiento armónico sobre xx alrededor de un punto O que coincide, en el dibujo, con O' .

El punto m cumple simultáneamente dos oscilaciones paralelas y se pregunta cuál es el movimiento resultante.

Si el segmento $O'x'$ no se moviese, el movimiento oscilatorio del punto estaría representado por una expresión de la forma:

$$x_1 = a_1 \cdot \text{sen} \left(2 \pi \frac{t}{T} + \varphi_1 \right), \quad [5]$$

donde x_1 es la elongación sobre la recta $x'x'$, a_1 la amplitud del movimiento, T el tiempo de oscilación y φ_1 la *fase inicial*.

Si el punto m estuviese fijo en O' sobre $O'x'$ y ésta oscilase en la forma indicada, el movimiento del punto sobre la recta fija xx estaría dado por la expresión

$$x_2 = a_2 \cdot \text{sen} \left(2 \pi \frac{t}{T} + \varphi_2 \right), \quad [6]$$

donde x_2 , a_2 , T y φ_2 tienen la misma significación que las magnitudes análogas de la [5]. Es claro que esta relación presenta, por lo supuesto, el desplazamiento de O' respecto a O .

Estos movimientos están representados en la figura 220 por las curvas delgadas señaladas con [1] y [2] respectivamente; las magnitudes $A_1 B_1$ y $A_2 B_2$ son iguales porque representan tiempos iguales de oscilación. El movimiento resultante, representado por el trazo grueso, se obtiene sumando las elongaciones con sus signos respectivos, de acuerdo con el principio de superposición.

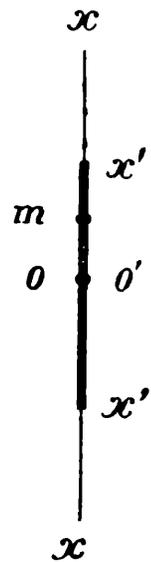


Fig. 219.

Esto es, por otra parte, evidente. El punto material es desplazado sobre la recta $O'x'$ a partir de O' , en el tiempo $OM = t_1$, por ejemplo, en el camino MP_1 mientras que en el mismo tiempo el punto O' de la recta $O'x'$ se ha desplazado sobre Ox en el camino MP_2 y, por lo

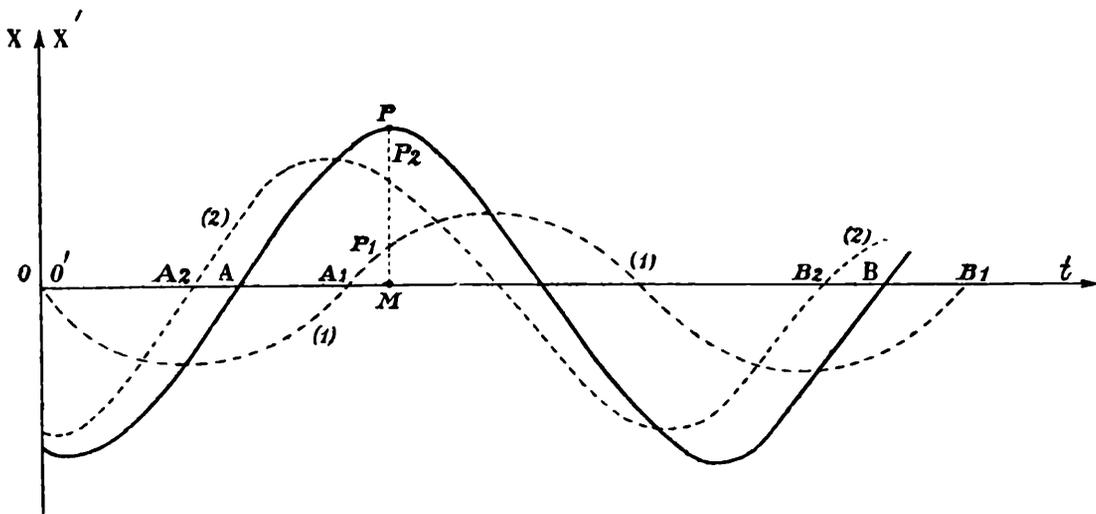


Fig. 220.

tanto, el desplazamiento total del punto sobre la recta fija xx debe ser la suma de las elongaciones MP_1 y MP_2 ; el punto se encontrará sobre el punto P de la recta xx .

Se trata en realidad de un problema de movimiento relativo en que tanto el movimiento relativo (sobre $O'x'$) como el de arrastre (el de $O'x'$) son rectilíneos.

En este caso, como se ha visto en el capítulo XIII del primer tomo, no sólo las coordenadas y la velocidad, sino también la aceleración, se obtienen por la regla del paralelogramo. Siendo paralelas las oscilaciones la suma geométrica se convierte en una suma algebraica.

De la observación de la curva resultante puede inducirse:

Que dos movimientos armónicos simples de igual dirección y del mismo período, dan por superposición un movimiento armónico simple del mismo período.

Resolvamos ahora matemáticamente el problema. El movimiento resultante será, de acuerdo con lo dicho más arriba,

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cdot \text{sen} (2 \pi n t + \varphi_1) + a_2 \cdot \text{sen} (2 \pi n t + \varphi_2), \quad [7]$$

donde, por razones de comodidad, se ha introducido en lugar del tiempo T de oscilación la frecuencia n , mediante la conocida relación

$$n = \frac{1}{T}.$$

Desarrollando los senos y sacando factores comunes, resulta :

$$x = (a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2) \operatorname{sen} 2 \pi n t + \\ + (a_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + a_2 \operatorname{sen} \varphi_2) \cos 2 \pi n t \quad [8]$$

expresión que se reduce a otra muy sencilla introduciendo dos nuevas magnitudes a y φ definidas por las relaciones

$$a \cos \varphi = a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2 \\ a \operatorname{sen} \varphi = a_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + a_2 \operatorname{sen} \varphi_2 . \quad [9]$$

Se obtiene

$$x = a \cos \varphi \operatorname{sen} 2 \pi n t + a \operatorname{sen} \varphi \cos 2 \pi n t = a \operatorname{sen} (2 \pi n t + \varphi). \quad [10]$$

Puesto que a_1 , a_2 , φ_1 y φ_2 son constantes dadas con las oscilaciones, lo mismo ocurre con a y φ . El movimiento resultante es, entonces, un movimiento armónico de la misma frecuencia que la de los componentes.

Su amplitud se obtiene cuadrando y sumando las relaciones [9]. Resulta :

$$a^2 = a_1^2 + 2 a_1 a_2 (\operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2) \quad [11]$$

o

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2). \quad [12]$$

Esta expresión muestra que, en general, la amplitud del movimiento resultante es menor que la suma de las amplitudes de las oscilaciones que la componen. Es igual a la suma solamente si la diferencia de fase $\varphi_1 - \varphi_2$ es nula, pues, en ese caso, se tiene :

$$\cos (\varphi_1 - \varphi_2) = 1 \quad ; \quad a^2 = (a_1 + a_2)^2 \quad \text{o} \quad a = a_1 + a_2.$$

En cambio si la diferencia de fase es igual a π , esto es, si $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$, resulta

$$a = a_1 - a_2.$$

La amplitud depende, entonces, en grado sumo, de la diferencia de fase. Si las amplitudes a_1 y a_2 fuesen iguales y $\varphi_1 - \varphi_2$ fuese cero, la amplitud del movimiento resultante sería el doble de las

amplitudes de los movimientos componentes, y si fuese $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ sería $a = 0$; el punto quedaría en reposo.

La fase inicial φ de la oscilación compuesta queda definida por la relación

$$\text{tang } \varphi = \frac{a_1 \text{ sen } \varphi_1 + a_2 \text{ sen } \varphi_2}{a_1 \text{ cos } \varphi_1 + a_2 \text{ cos } \varphi_2} \quad [13]$$

que resulta en seguida de la [9].

B. OSCILACIONES PARALELAS DE DIFERENTE PERÍODO. — Este problema se resuelve gráficamente de la misma manera que el problema anterior. Resolvámoslo matemáticamente.

Sean las oscilaciones

$$x_1 = a_1 \cdot \text{sen } (2 \pi n_1 t + \varphi_1) \quad [14]$$

y

$$x_2 = a_2 \cdot \text{sen } (2 \pi n_2 t + \varphi_2). \quad [15]$$

Sea, además, $n_1 > n_2$. Introduciendo en x_1 la diferencia

$$n_1 - n_2 = \nu$$

de las frecuencias, o

$$n_1 = n_2 + \nu,$$

se tiene, para el movimiento resultante:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cdot \text{sen } [2 \pi n_2 t + (2 \pi \nu t + \varphi_1)] + a_2 \cdot \text{sen } (2 \pi n_2 t + \varphi_2). \quad [16]$$

Procediendo análogamente que en el número anterior, resulta:

$$\begin{aligned} x = & [a_1 \cdot \text{cos } (2 \pi \nu t + \varphi_1) + a_2 \cdot \text{cos } \varphi_2] \cdot \text{sen } 2 \pi n_2 t \\ & + [a_1 \cdot \text{sen } (2 \pi \nu t + \varphi_1) + a_2 \cdot \text{sen } \varphi_2] \cdot \text{cos } 2 \pi n_2 t \end{aligned} \quad [17]$$

Si se escribe

$$\begin{aligned} a \text{ cos } \varphi &= a_1 \cdot \text{cos } (2 \pi \nu t + \varphi_1) + a_2 \cdot \text{cos } \varphi_2 \\ a \text{ sen } \varphi &= a_1 \cdot \text{sen } (2 \pi \nu t + \varphi_1) + a_2 \cdot \text{sen } \varphi_2 \end{aligned} \quad [18]$$

se obtiene

$$x = a \cdot \text{sen } (2 \pi n_2 t + \varphi), \quad [19]$$

relación que presenta el movimiento resultante bajo la apariencia de un movimiento armónico simple.

No es así, sin embargo, puesto que tanto la amplitud a como φ son, en virtud de las [18], funciones del tiempo. De esas relaciones resulta

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 [\cos (2 \pi \nu t + \varphi_1) \cdot \cos \varphi_2 + \operatorname{sen} (2 \pi \nu t + \varphi) \cdot \operatorname{sen} \varphi_2] \quad [20]$$

o

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos (2 \pi \nu t + \varphi_1 - \varphi_2) \quad [20']$$

y

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{a_1 \operatorname{sen} (2 \pi \nu t + \varphi_1) + a_2 \operatorname{sen} \varphi_2}{a_1 \cos (2 \pi \nu t + \varphi_1) + a_2 \cos \varphi_2} \quad [21]$$

Discutamos la expresión [20'] que se refiere a la amplitud. Se trata de una función periódica del tiempo; la frecuencia es ν y el período $\tau = \frac{1}{\nu}$. Su valor máximo es $a = a_1 + a_2$, que corresponde a los instantes de tiempo para los cuales es:

$$\cos (2 \pi \nu t + \varphi_1 - \varphi_2) = 1 \quad [22]$$

y el valor mínimo es $a = a_1 - a_2$ que corresponde a los instantes de tiempo para los cuales es

$$\cos (2 \pi \nu t + \varphi_1 - \varphi_2) = -1. \quad [23]$$

La amplitud varía, entonces, periódicamente entre los valores extremos $a_1 + a_2$ y $a_1 - a_2$. El número de veces por segundo que la amplitud alcanza uno de estos valores es, por lo que antecede,

$$\nu = n_1 - n_2, \quad [24]$$

relación que se utiliza, como se verá, tanto en la acústica como en los fenómenos análogos de la óptica, para determinar con exactitud pequeñas diferencias de la frecuencia.

La oscilación de la amplitud es tanto más lenta cuanto menor es la diferencia de las frecuencias de las oscilaciones componentes.

Particularmente interesante tanto en la mecánica (y por lo tanto en la acústica) como en la electricidad, es el movimiento resultante

de oscilaciones de la misma amplitud y de frecuencia muy poco diferente.

Un movimiento semejante está representado en la figura 221.

Como puede verse, es el movimiento que correspondería, si no existiese roce, a cada uno de los péndulos acoplados que constituyen

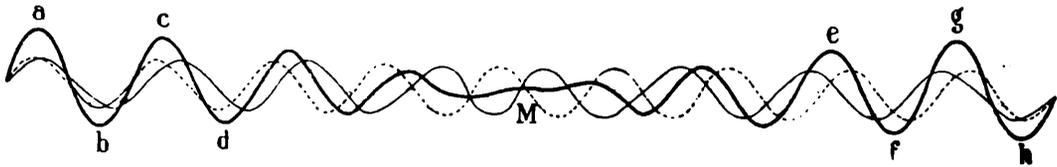


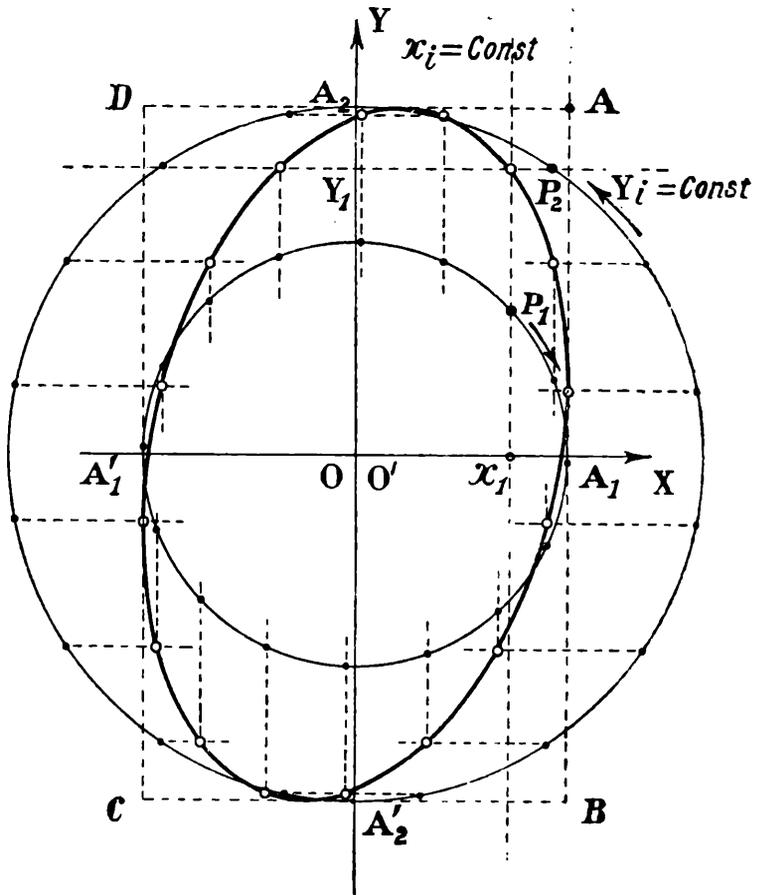
Fig. 221.

el llamado péndulo doble de Oberbeck (ver tomo I). El valor máximo de la amplitud es el doble de la amplitud de las componentes y el mínimo es cero.

C. OSCILACIONES ORTOGONALES DEL MISMO PERÍODO — Si el punto material cumple un movimiento armónico simple alrededor de un punto O' de una recta xx , que a su vez oscila de tal modo que la trayectoria de sus puntos sea paralela a una dirección yy que le es perpendicular, se dice que las oscilaciones componentes son ortogonales.

La dirección yy se ha trazado en la figura 222 pasando por O' , punto que por pertenecer a xx oscila sobre yy alrededor de un punto O , que coincide en el dibujo con la intersección de los ejes.

El primer movimiento puede ser considerado como un movimiento relativo; el segundo como uno de arrastre. Puesto que ambos son rectilíneos valen aquí también las consideraciones que se hicieron en el apartado A.



Fi . 222.

Encontremos el movimiento resultante, primero gráficamente. Suponemos que las frecuencias de ambas oscilaciones son iguales. Conviene a nuestro propósito actual considerar los movimientos componentes como generados por las proyecciones de movimientos circulares de *la misma velocidad angular*.

Si OA_1 y OA_2 son las amplitudes, el estado de movimiento del punto en el instante elegido como origen del tiempo estaría dado en cada una de las oscilaciones componentes, supuestas cumpliéndose una independiente de la otra, por puntos x_1 e y_1 , respectivamente, que serían las proyecciones sobre xx e yy de las posiciones P_1 y P_2 , que en el mismo instante tendría, sobre cada uno de los círculos de radios OA_1 y OA_2 el punto material.

Los pares de posiciones simultáneas que corresponden a instantes sucesivos se encuentran fácilmente, teniendo presente que en tiempos iguales el punto debe recorrer sobre ambos círculos, a partir de P_1 y P_2 , respectivamente, ángulos iguales.

El movimiento resultante se encuentra gráficamente en seguida. Si en el mismo tiempo que el punto recorre el camino x_i paralelo a x , recorre el camino y_i paralelo a y , sus posiciones en el plano fijo xy se encuentran en las intersecciones de las rectas $x_i = \text{const.}$ con las correspondientes $y_i = \text{const.}$

Uniendo esos puntos se obtiene la curva que muestra la figura. La trayectoria es, pues, según puede observarse, una elipse encerrada dentro de las tangentes a los círculos, trazadas en sus intersecciones con el eje respectivo de oscilación; su posición, dentro del rectángulo $ABCD$, depende, como es evidente, de la diferencia de las fases.

Todas las características del movimiento se ponen en evidencia, de una manera sencilla, discutiendo el problema matemáticamente.

La trayectoria del punto se encuentra eliminando el tiempo entre las expresiones.

$$x = a_1 \cdot \text{sen} (2 \pi n t + \varphi_1) \quad [25]$$

c

$$y = a_2 \cdot \text{sen} (2 \pi n t + \varphi_2), \quad [26]$$

que representan los movimientos oscilatorios ortogonales. Es, naturalmente, $OA_1 = a_1$ y $OA_2 = a_2$.

Sin restar, en lo más mínimo, generalidad al problema, se puede simplificar su solución escribiendo las relaciones anteriores en la forma (1) :

$$x = a_1 \cdot \text{sen } 2 \pi n t \quad [27]$$

$$y = a_2 \cdot \text{sen } (2 \pi n t + \varphi), \quad [28]$$

lo que significa que se elige como origen del tiempo un instante en el cual el punto, en su movimiento sobre xx , pasa por O' .

Debe ser $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, puesto que la diferencia de fase entre los movimientos es constante, lo que resulta evidente, sin mayor análisis, considerando los movimientos generadores circulares.

Se tiene

$$\frac{x}{a_1} = \text{sen } 2 \pi n t \quad [29]$$

$$\frac{y}{a_2} = \text{sen } 2 (\pi n t + \varphi) = \text{sen } 2 \pi n t \cdot \cos \varphi + \cos 2 \pi n t \cdot \text{sen } \varphi \quad [30]$$

de donde

$$\frac{y}{a_2} = \frac{x}{a_1} \cos \varphi + \sqrt{1 - \text{sen}^2 2 \pi n t} \cdot \text{sen } \varphi \quad [31]$$

o

$$\frac{y}{a_2} = \frac{x}{a_1} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{x^2}{a_1^2}} \cdot \text{sen } \varphi. \quad [32]$$

De esta relación resulta, por algunas transformaciones elementales :

$$\frac{y^2}{a_2^2} - 2 \frac{xy}{a_1 a_2} \cos \varphi + \frac{x^2}{a_1^2} = \text{sen}^2 \varphi, \quad [33]$$

que es la ecuación de una elipse con centro en el origen. La magnitud y orientación de sus diámetros principales depende de las amplitudes a_1 y a_2 de la diferencia de fase φ .

(1) Matemáticamente la transformación se realiza como sigue: Introduzcamos en lugar de t otro tiempo t' definido por la relación $2 \pi n t + \varphi_1 = 2 \pi n t'$, será

$$2 \pi n t + \varphi_2 = 2 \pi n t' + (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Si se indica otra vez el tiempo con t en lugar de t' y si se escribe φ en lugar de $\varphi_2 - \varphi_1$ se tiene las relaciones [27] y [28].

Discutamos algunos casos.

1º SEA $\varphi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \text{etc.}$ Se tiene, por lo tanto, $\text{sen } \varphi = 0$ y $\text{cos } \varphi = 1$. La ecuación [33] se convierte en

$$\frac{y^2}{a_2^2} - 2 \frac{xy}{a_1 a_2} + \frac{x^2}{a_1^2} = 0 \quad [34]$$

o

$$\left(\frac{y}{a_2} - \frac{x}{a_1} \right)^2 = 0, \quad [35]$$

es decir,

$$y = \frac{a_2}{a_1} x. \quad [36]$$

La trayectoria es, pues, una recta que pasa por el origen y que yace en el primer y tercer cuadrante; es la diagonal CA del rectángulo $ABCD$ (fig. 222).

2º SEA $\varphi = \pm \pi, \pm 3\pi, \text{etc.}$ Se tiene $\text{sen } \varphi = 0$ y $\text{cos } \varphi = -1$, resultando de la [33]:

$$y = - \frac{a_2}{a_1} x, \quad [37]$$

lo que muestra que la trayectoria es una recta que pasa por el origen, comprendida en el segundo y cuarto cuadrante; es la diagonal DB del rectángulo $ABCD$.

3º SEA $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \text{etc.}$ En ese caso es $\text{sen } \varphi = 1$ y $\text{cos } \varphi = 0$.

La ecuación de la trayectoria se convierte en

$$\frac{y^2}{a_2^2} + \frac{x^2}{a_1^2} = 1, \quad [38]$$

que es la ecuación de una elipse cuyos diámetros principales son los ejes de coordenadas.

El movimiento se cumple en el sentido de las agujas de un reloj para $\varphi = \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{7\pi}{2}$ y en sentido contrario para $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \text{etc.}$

4° Si $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, la trayectoria es también una elipse cuyo eje mayor pasa por O y está comprendido

entre OA_1' y OA_2 ; si $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ se tiene también una elipse cuyo eje mayor se encuentra entre OA_1' y OA_2' .

En la figura 223 se tienen representados los casos discutidos.

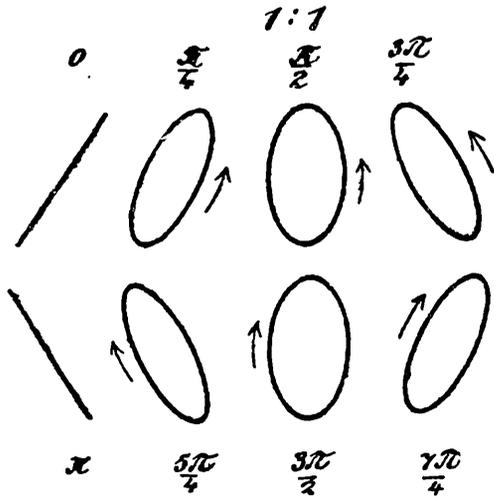


Fig. 223.

En la figura 223 se tienen representados los casos discutidos. ciones sucesivas simultáneas se encuentran teniendo presente que si las frecuencias son n_1 y n_2 , los ángulos descritos en un mismo intervalo t_i de tiempo serán, respectivamente, $2\pi n_1 t_i$ y $2\pi n_2 t_i$. Si se indican, como antes, con x_i e y_i las coordenadas que dan la posición del punto, la trayectoria del movimiento resultante es el lugar de las intersecciones de las rectas $x_i = \text{const}$, con las correspondientes rectas $y_i = \text{const}$.

En la figura 224 se ha construido la trayectoria del movimiento resultante de dos oscilaciones ortogonales de distinta amplitud cuyas frecuencias están en la relación $n_1:n_2 = 3:2$ y cuyas fases son, en el momento inicial, iguales.

Las posiciones iniciales de ambos movimientos se reproducen simultáneamente después de un tiempo que abarque el menor número

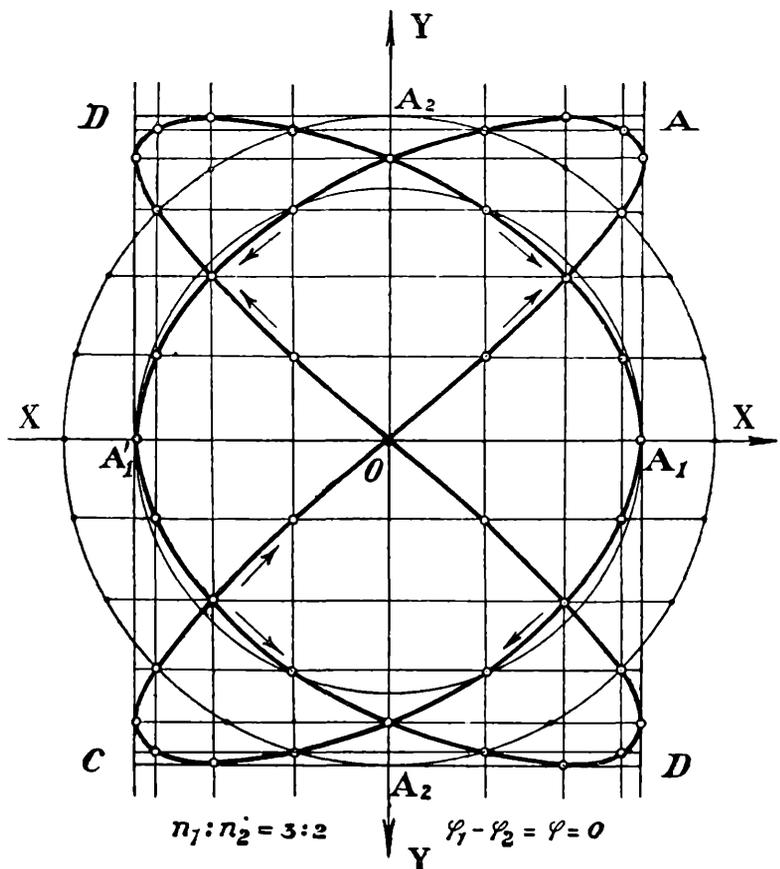


Fig. 224.

entero de períodos de las oscilaciones, es decir, transcurrido el tiempo $3T_1 = 2T_2$. Esto muestra que para obtener, en el caso supuesto, la curva completa, debe continuarse la obtención de posiciones simultáneas hasta que se hayan dado tres vueltas sobre el círculo del movimiento más rápido y dos sobre el otro.

El punto recorrerá, entonces, siempre la misma curva, tardando en cada recorrido el tiempo $\tau = 3T_1 = 2T_2$. La forma de la curva depende, dado n_1 y n_2 , exclusivamente de las posiciones iniciales, mejor dicho, de la diferencia de las fases.

Es claro que si las frecuencias no estuviesen en una relación racional la trayectoria sería abierta.

Para ilustrar la cuestión resolvamos matemáticamente un caso particular. Trátese de componer las oscilaciones:

$$x = a_1 \cdot \text{sen } 2 \pi n t \quad [39]$$

e

$$y = a_2 \cdot \text{sen } (4 \pi n t + \varphi). \quad [40]$$

Las frecuencias están en la relación 1:2 y la diferencia inicial de las fases es φ .

De la [40] resulta, teniendo presente que

$$\text{sen } 4 \pi n t = 2 \text{sen } 2 \pi n t \cdot \cos 2 \pi n t, \quad [41]$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{a_2} &= 2 \text{sen } 2 \pi n t \cdot \cos 2 \pi n t \cdot \cos \varphi + \\ &+ \sqrt{1 - 4 \text{sen}^2 2 \pi n t \cdot \cos^2 2 \pi n t} \cdot \text{sen } \varphi. \end{aligned} \quad [42]$$

Eliminando de esta relación a $\text{sen } 2 \pi n t$ y $\cos 2 \pi n t$ por las relaciones

$$\text{sen } 2 \pi n t = \frac{x}{a_1} \quad [43]$$

y

$$\cos 2 \pi n t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a_1^2}}$$

que resultan de la [39]

$$\frac{y}{a_2} = 2 \frac{x}{a_1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a_1^2}} \cdot \cos \varphi + \left(1 - \frac{2 x^2}{a_1^2}\right) \text{sen } \varphi, \quad [44]$$

que es la ecuación de la trayectoria. Se ve así, en un caso concreto que dadas las frecuencias, la trayectoria queda definida por las amplitudes y la diferencia inicial de las fases.

En la figura 225 están representadas las trayectorias que corresponden a diferentes casos.

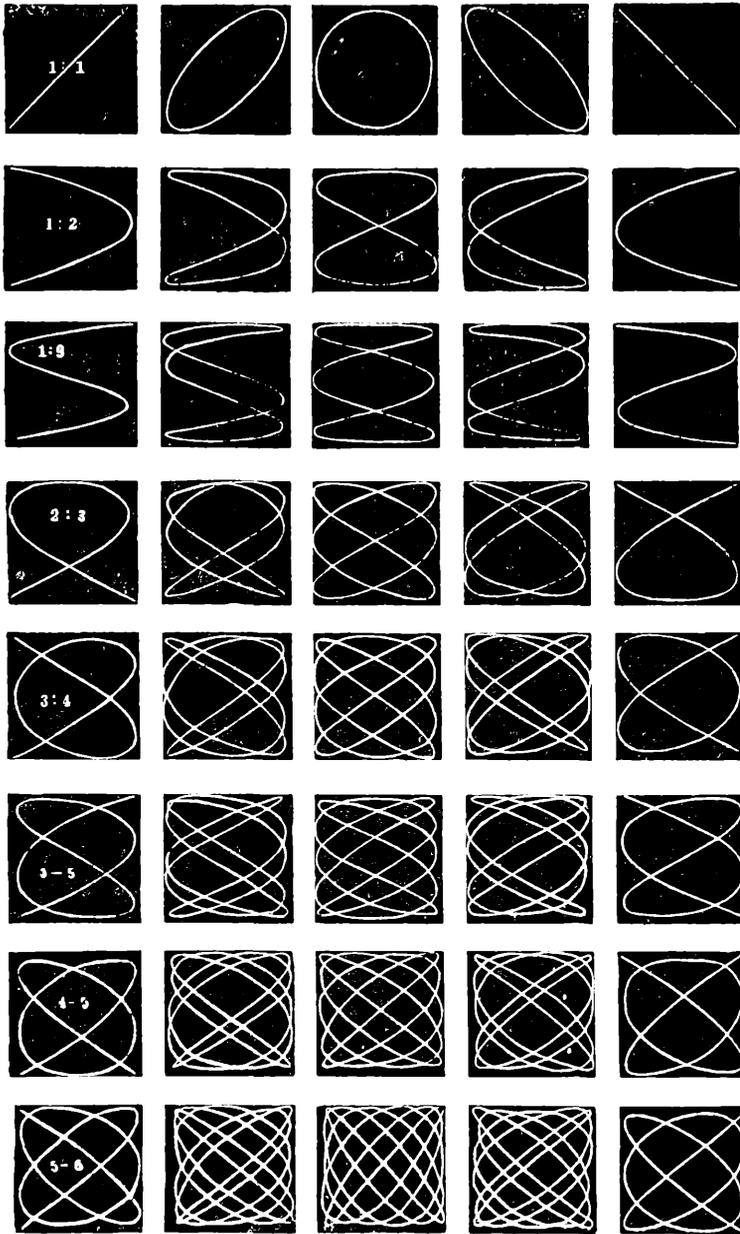


Fig. 225.

queño orificio; el trazo de la trayectoria se obtiene llenando el vaso de arena fina coloreada, que derrama en forma de chorro delgado.

4. Las varillas elásticas de Wheatstone.— Si se tiene (fig. 228) una varilla metálica de corte rectangular, fija en uno de sus extremos, se le puede hacer vibrar apartando el extremo libre de su posición de reposo.

El movimiento es la superposición de las oscilaciones que son paralelas a sus caras (direcciones xx e yy).

3. El péndulo doble.— Por medio del dispositivo pendular de la figura 226 pueden obtenerse, objetivamente, las trayectorias correspondientes a los movimientos resultantes de dos oscilaciones ortogonales de diferente período.

Los movimientos componentes son los de los péndulos de longitud OB y AB (fig. 227). La masa suspendida lleva un vaso cónico de vidrio que se prolonga hacia abajo en un tubo que termina en un pe-

En esto se funda el caleidófono de Wheastone, representado en la figura 229. Las diversas relaciones de las frecuencias se obtienen variando convenientemente los espesores de las varillas. Las trayec-

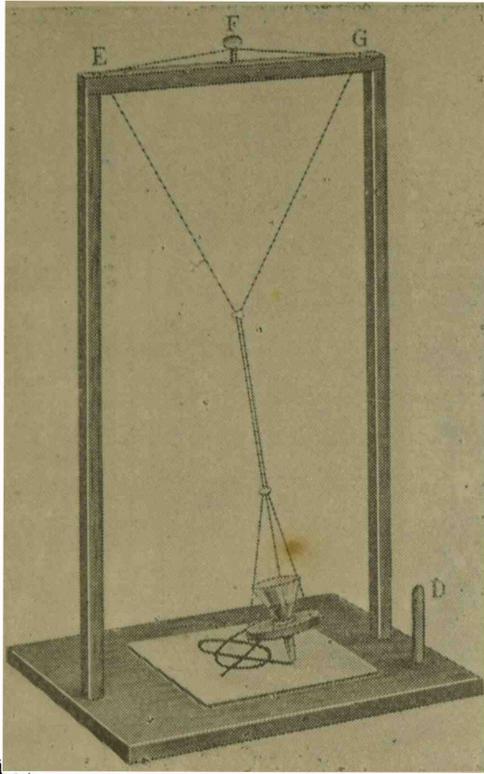


Fig. 226.

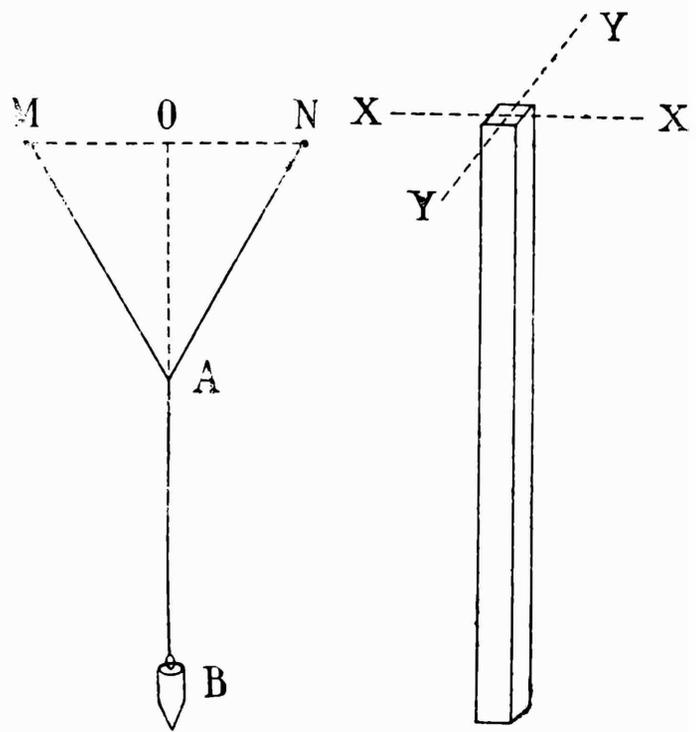


Fig. 227.

Fig. 228.

torias se hacen visibles mediante los botoncitos metálicos brillantes en que terminan.

Lippich ha construído un caleidófono universal, representado en la figura 230, con el cual pueden componerse tanto oscilaciones paralelas como ortogonales; los períodos de oscilación se les modifica variando las longitudes de las varillas metálicas *B* y *C*, que se fijan por medio de dos tornillos.

5. Las figuras de Lissajous. — Posteriormente a Wheatstone, Lissajous obtuvo, objetivamente, la superposición de oscilaciones haciendo reflejar un rayo de luz, sucesivamente, sobre dos pequeños espejuelos fijos en dos diapasones (fig. 231). Si los diapasones son paralelos, las oscilaciones también lo son; el movimiento oscilatorio rectilíneo de la « mancha de luz » sobre la pantalla es el movimiento de superposición. Para observar su marcha en el tiempo es menester, en este caso, intercalar en el camino del rayo de luz, después de las dos reflexiones, un espejo giratorio; se comprobarán así los resultados consignados en los párrafos precedentes.

Cuando los diapasones son normales, las oscilaciones componentes también lo son; como es evidente, no es menester, para observar la trayectoria, el auxilio de un espejo rotativo.

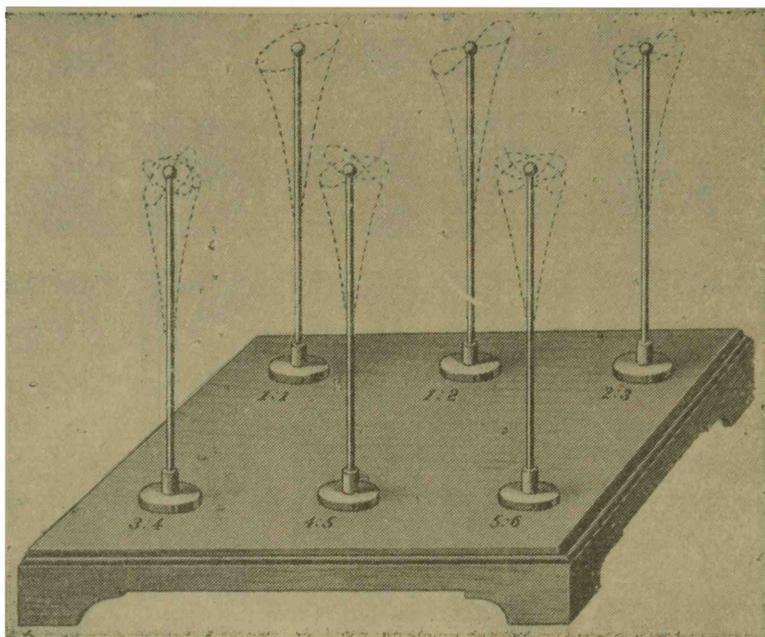


Fig. 229.

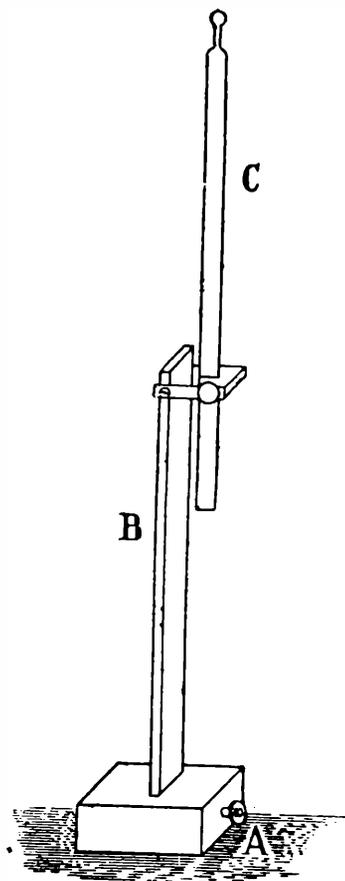


Fig. 230.

6. El microscopio a vibración. — Este aparato (fig. 232) fué ideado y utilizado por Helmholtz para estudiar el movimiento oscilatorio de los diferentes puntos de una cuerda.

Un microscopio *M* está fijo a una de las ramas de un sólido diapason que oscila verticalmente, excitado por el electroimán *E*. Si se enfoca con el microscopio un punto brillante que oscila horizontalmente cerca de su objetivo, se observará un movimiento compuesto.

De la forma de la trayectoria y por conocimiento del movimiento del diapason se puede inferir cuál es el movimiento del punto.

7. Las oscilaciones propias de las varillas son amortiguadas. En lo que antecede se ha supuesto que las oscilaciones carecían de amortiguamiento. Tal ocurre si la amplitud es mantenida constante por una fuerza exterior, como sucede, por ejemplo, cuando la vibración de un diapason es « entretenida » electromagnéticamente. Si se excita a un diapason por un golpe seco y se le abandona a sí mismo, sus oscilaciones, que pueden observarse por el procedimiento de

Lissajous, con el auxilio de un espejo rotativo, son amortiguadas.

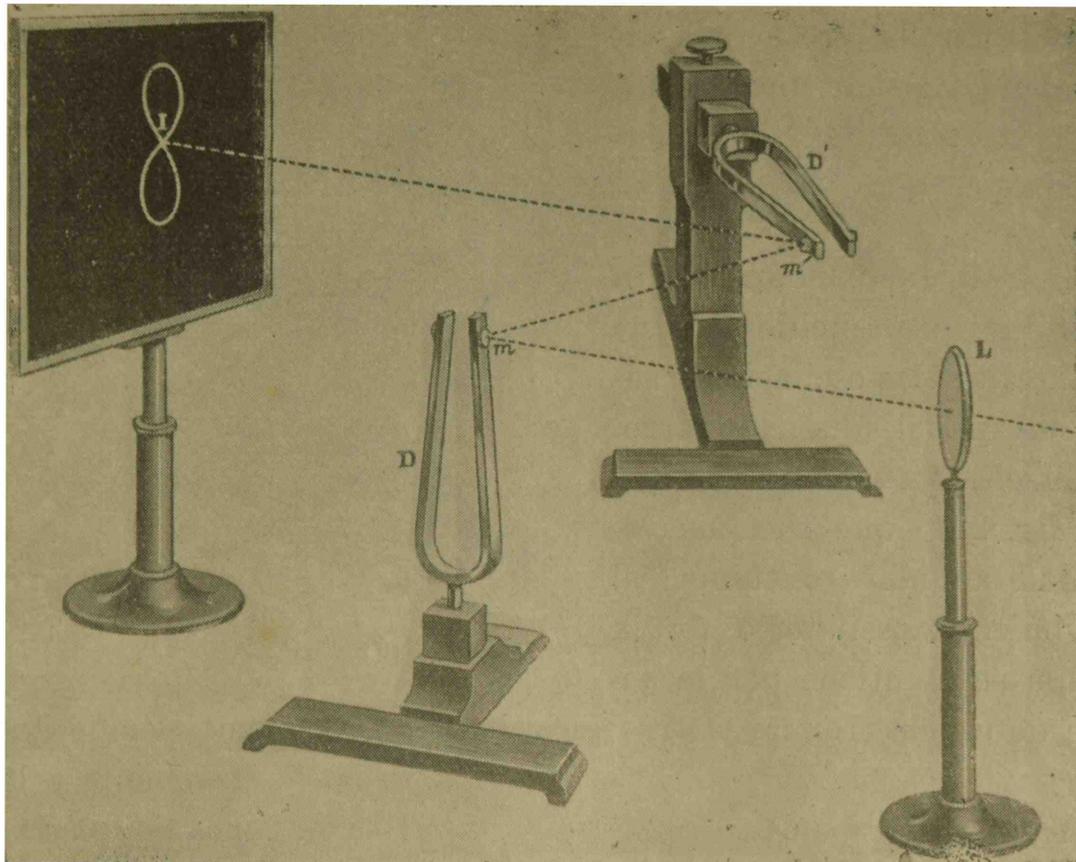


Fig. 231.

Este amortiguamiento proviene del roce en el aire y de la energía que llevan consigo las ondas acústicas que genera.

En la figura 233 está representada gráficamente la trayectoria del movimiento compuesto por dos oscilaciones amortiguadas ortogonales.

8. Medida de la frecuencia.—Nos limitaremos aquí a la medida de la frecuencia de las oscilaciones del extremo de una varilla elástica, recta, doblada (diapasón).

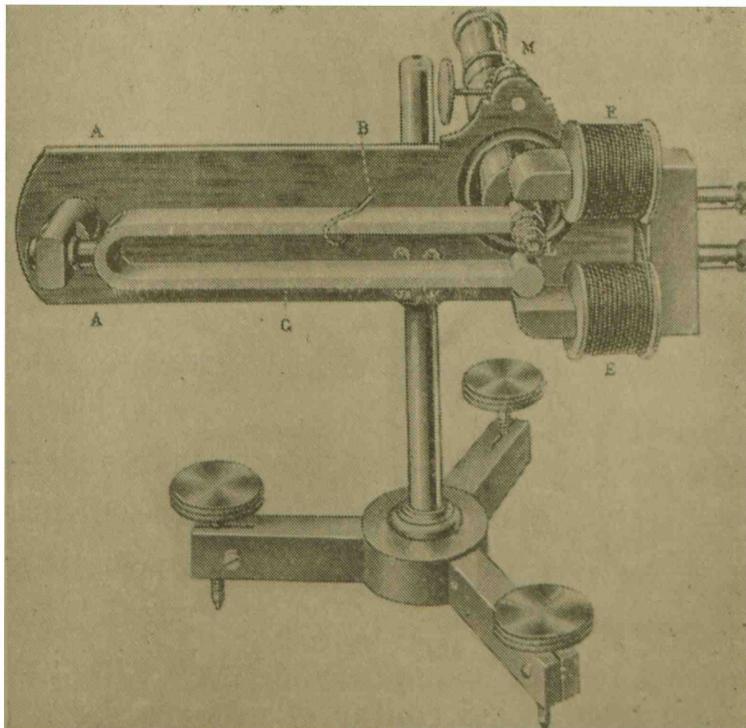


Fig. 232.

Este asunto es de importancia no sólo para la mecánica y la acústica sino también para la electricidad; la frecuencia de corrientes alternadas se mide, habitualmente, por la frecuencia de las oscilaciones de una lengüeta de acero excitada por resonancia.

A. POR INSCRIPCIÓN. — Un procedimiento sencillo consiste en inscribir las oscilaciones sobre un papel ahumado arrollado sobre un tambor cilíndrico (fig. 234) que gira con velocidad angular constante; el movimiento oscilatorio de la varilla se mantiene por la acción de un electroimán. Otra aguja inscribe, al mismo tiempo, paralelamente a la línea ondulada que aquélla dibuja, un trazo recto interrumpido de tanto en tanto por trazos inclinados, que indican los segundos de tiempo.

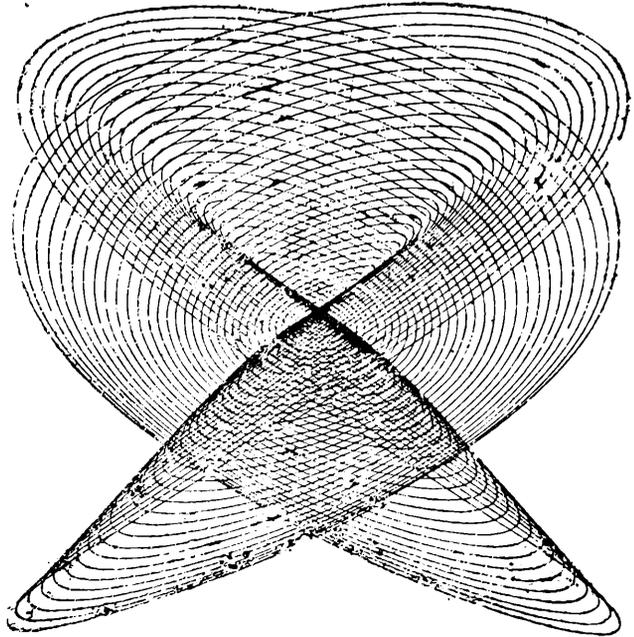


Fig. 233.

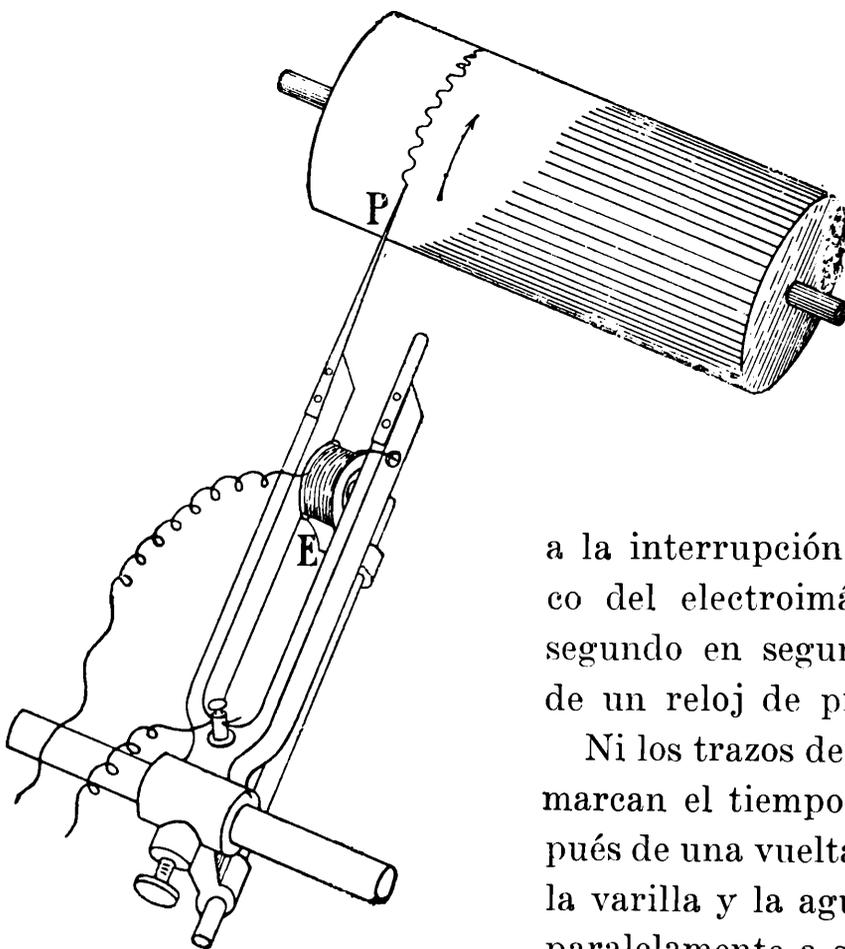


Fig. 234.

Estos trazos se producen merced a la interrupción del circuito eléctrico del electroimán de la aguja, de segundo en segundo, por el péndulo de un reloj de precisión.

Ni los trazos del diapasón ni los que marcan el tiempo se superponen después de una vuelta del cilindro porque la varilla y la aguja son desplazadas, paralelamente a sus generatrices, por la giración de un tornillo sin fin.

Se pueden así contar el número de oscilaciones ejecutadas en un número relativamente grande de segundos.

El inconveniente de este método consiste en que la punta que hay que dotar a la varilla modifica un poco su frecuencia.

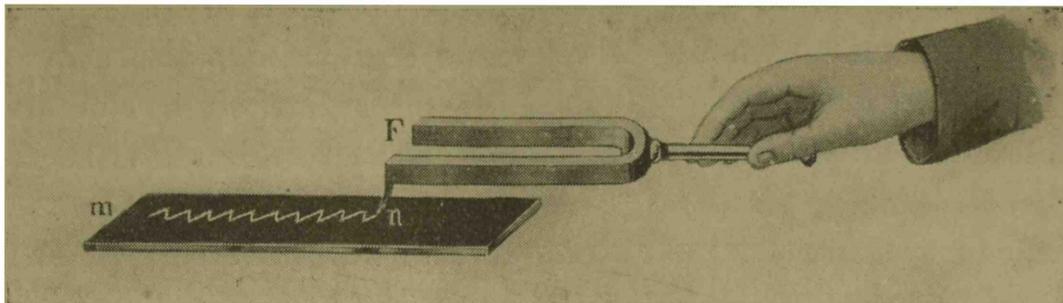


Fig. 235.

En la figura 235 está representado un modo de inscribir las oscilaciones con medios sencillos.

B. EL MÉTODO ESTROBOSCÓPICO. — Es éste un método muy antiguo, que se utiliza de variadas maneras en la determinación de la frecuencia. Consiste, en principio, en lo siguiente: delante de la varilla

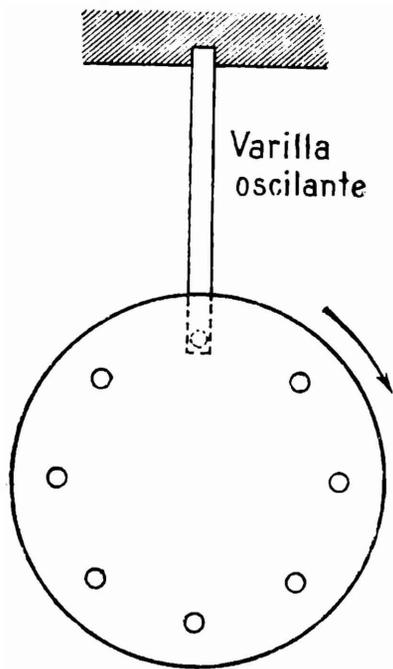


Fig. 236.

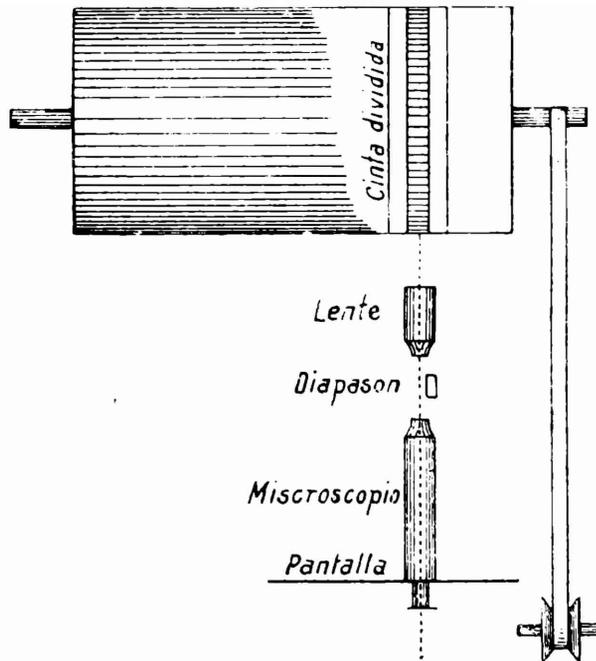


Fig. 237.

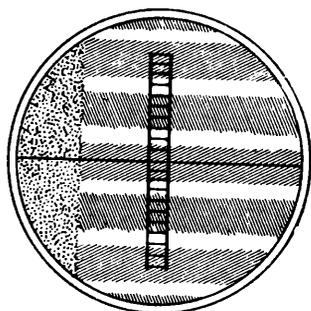
oscilante (fig.236) gira con velocidad angular constante un disco dotado de perforaciones de la misma forma, distribuídas circularmente a distancias iguales una de otra. Si el tiempo que tarda un agujero en pasar a una posición ocupada por el agujero anterior es igual al tiempo que tarde en pasar, sucesivamente, por la misma posición, el cuerpo oscilante, éste, visto a través de aquéllos, aparece como si estuviese en reposo.

Si el primero de esos tiempos es menor que el otro, el cuerpo aparece como si se desplazara lentamente hacia atrás, y si es mayor, como si se moviese despacio hacia adelante.

La coincidencia se alcanza, teniendo presente lo que antecede, variando convenientemente la velocidad angular del disco. Es claro que la exactitud del método depende de la exactitud con que es posible determinar una velocidad angular; en realidad se sustituye un problema con otro.

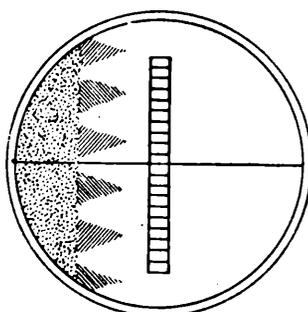
M. Leod y Clarke (1880) han aplicado este método de manera tal, que la velocidad angular de rotación puede determinarse con suma exactitud.

Por medio de un microscopio (fig. 237) se observa simultáneamente la extremidad de la varilla oscilante y las imágenes de líneas equidistantes trazadas en un papel arrollado en un tambor girante, que proyecta, en el mismo plano, una lente de corta distancia focal.



A

Fig. 238.



B

Fig. 239.

Si tanto el cuerpo como el tambor están en reposo, el campo ofrece el aspecto de la figura 238; si ambos se mueven, el campo aparece como se ve en la figura 239.

Si el tiempo que tarda una línea en ocupar la posición de la precedente es menor que el período de la varilla, la sombra alabeada se mueve, aparentemente, en sentido contrario al de la rotación del tambor; lo inverso ocurre si aquel tiempo es menor que el de la oscilación. La sombra permanece en reposo si los tiempos son iguales.

Si el número de líneas es muy grande, ya para velocidades pequeñas de rotación, el tiempo que tarda una línea en ocupar el lugar de la precedente es muy pequeño. Por ejemplo, si el cilindro tiene 10 centímetros de radio y las líneas se trazan a un milímetro de distancia una de la otra, resultan 628 líneas, aproximadamente.

Si el cilindro diese una vuelta por segundo, aquel tiempo sería $\frac{1}{628}$ de segundo, lo que correspondería a 628 vibraciones por segundo.

Velocidades de rotación de ese orden pueden medirse muy exactamente señalando sobre el tambor, por medio de trazos, por el mismo procedimiento que en el caso del método gráfico, la marcha del tiempo, de segundo en segundo.

9. Teorema de Fourier. — Se ha discutido ya el problema de la superposición de movimientos armónicos simples; el movimiento resultante se obtuvo por la aplicación del principio de coexistencia. Se pueden obtener así los más variados tipos de movimientos oscilatorios.

Encararemos ahora el problema inverso preguntando: ¿es posible considerar a todo movimiento oscilatorio como la superposición de movimientos oscilatorios simples?

Por el teorema de Fourier se evidencia

que un movimiento oscilatorio cualquiera del período T resulta, de una sola manera, por la superposición de movimientos oscilatorios simples de períodos $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \frac{T}{4}, \dots$, etc.

Que eso es posible de una manera única significa que existe tan sólo un sistema de valores de las amplitudes y de las fases iniciales que resuelven el problema.

En la figura 240 se ha representado el caso de un movimiento de cierto período T , cuyas elongaciones varían proporcionalmente al tiempo. Las cruces representan los valores que se obtienen por la superposición de los movimientos sinusoidales de períodos $T, \frac{T}{3}, \frac{T}{5}$ y $\frac{T}{7}$, que están señaladas en la figura.

La curva sinusoidal 1 de período T se denomina oscilación fundamental; las otras, cuyas frecuencias son iguales a algunos de los submúltiplos del período de la fundamental, se denominan armónicas.

El movimiento ondulatorio que origina la oscilación dada es idéntico al que se obtiene por la superposición de las ondas que corresponden a las oscilaciones simples o componentes.

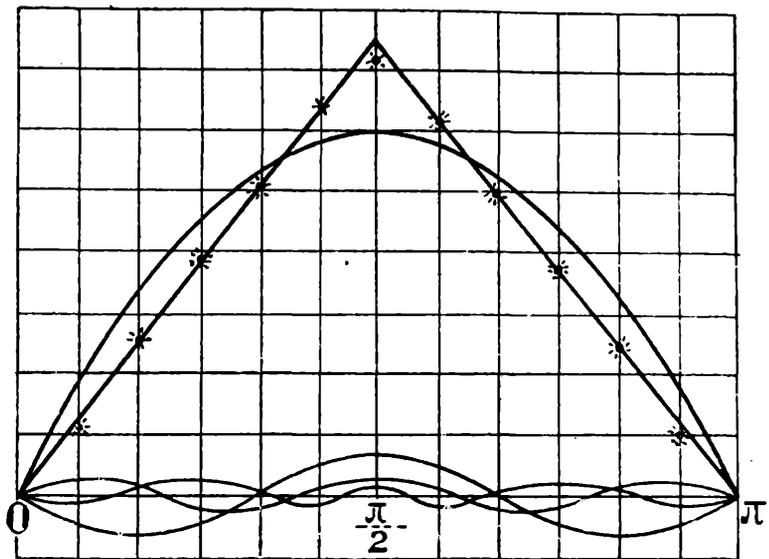


Fig. 240.

CAPITULO XIV

PROPAGACION DEL MOVIMIENTO OSCILATORIO EN UN MEDIO ELASTICO. ELEMENTOS DE SISMOMETRIA

A. — DEFINICIONES. ECUACIONES DE LOS RAYOS. PRINCIPIO
DE HUYGENS. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS.

1. **Consideraciones generales.** — La experiencia enseña que si una porción cualquiera de un medio continuo sufre variaciones del impulso, lo mismo ocurrirá, poco a poco, en todos los elementos de masa circundantes. Primero son las partes más próximas luego las más alejadas las que sufren una variación de su cantidad de movimiento; la *perturbación* se propaga con velocidad finita en todas las direcciones. Si el medio es homogéneo e isótropo el valor de la velocidad de propagación es independiente de la dirección.

Un golpe dado en el extremo de una larga barra de hierro es acusado, por procedimientos subjetivos u objetivos, en el otro extremo, después de transcurrido cierto intervalo de tiempo. Un movimiento de las masas rocosas en el seno de la tierra se propaga hasta los lugares más remotos, si bien con intensidad decreciente.

Lo mismo ocurre con las explosiones en el aire o en el agua; poco a poco se perciben en lugares más y más lejanos con decreciente energía.

En todos estos casos el movimiento originario consiste en variaciones del impulso que se pueden considerar, de acuerdo con el teorema de Fourier, como la superposición de movimientos oscilatorios de diferentes frecuencias.

Por este motivo, estudiando el fenómeno de la propagación de un movimiento oscilatorio simple tendremos resuelto el problema de la propagación de un movimiento cualquiera.

Nos limitaremos a medios isótropos y homogéneos en los que, siendo todos los lugares y direcciones idénticos, es suficiente considerar una dirección cualquiera.

Si en un medio elástico es alejado un elemento de masa de su posición de reposo nace en seguida una fuerza que trata de restablecer su primitiva posición. Si el elemento es abandonado a sí mismo oscilará alrededor de ella.

Si la deformación cae dentro de los dos límites de la elasticidad perfecta, la fuerza es proporcional a la elongación, según la ley de Hooke, y el movimiento vibratorio será armónico.

2. Ondas longitudinales y transversales. — La experiencia muestra que el movimiento oscilatorio se propaga de dos maneras: en una las masas oscilan perpendicularmente a la dirección de

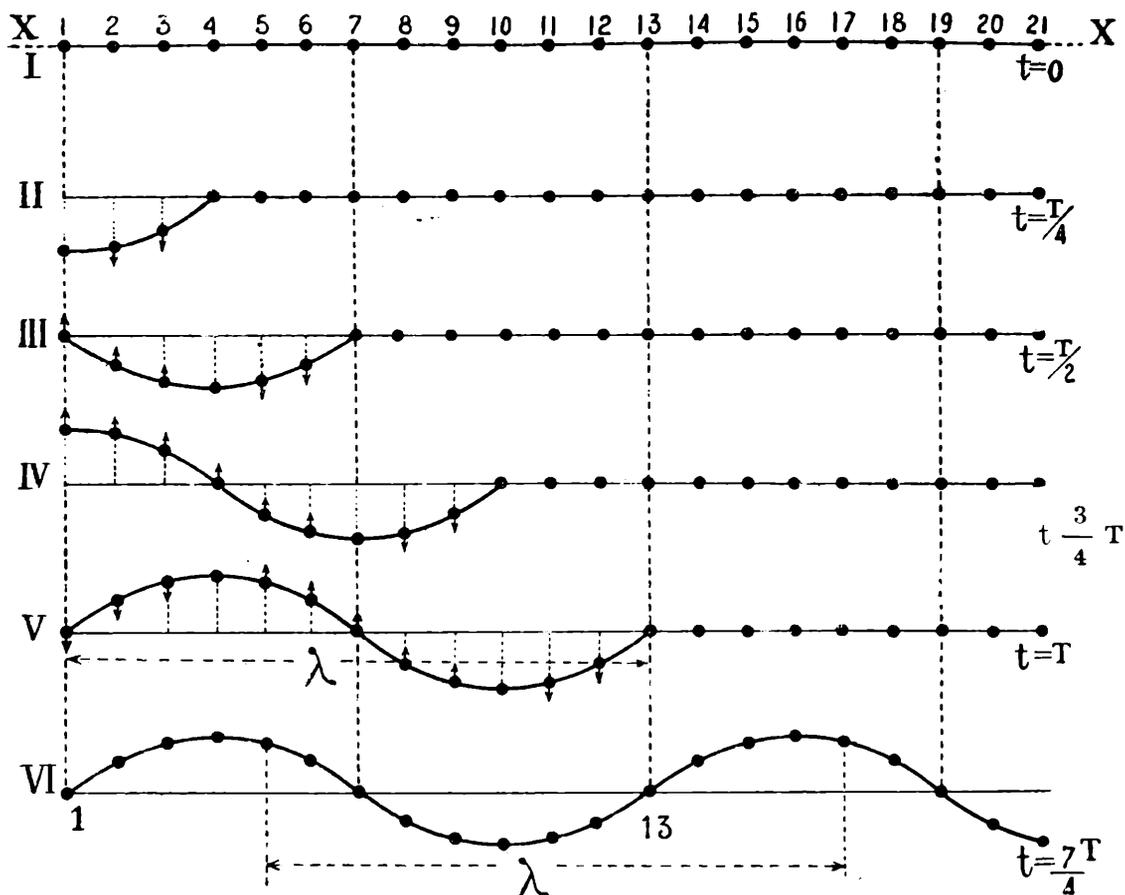


Fig. 24 a.

propagación; en la otra las masas oscilan en la misma dirección en que se propaga el movimiento.

Consideremos el primer modo de propagación. Tengamos un medio continuo y aislemos con el pensamiento cierto número de elementos iguales de masa situados sobre cierta recta xx , a distancias iguales. En la figura 241 a están representados por puntos. Si uno cualquiera de ellos es alejado de su posición de equilibrio y abandonado a

sí mismo, cumplirá un movimiento oscilatorio rectilíneo; el tiempo T de oscilación será el mismo para todos los puntos.

Supongamos que el primero de ellos comienza a oscilar en cierto instante en dirección normal a xx y que perdura en ese estado. Poco a poco se encontrarán oscilando en la misma dirección todos los demás puntos; los intervalos de tiempo transcurridos entre el comienzo de los movimientos de dos puntos consecutivos deben ser iguales, puesto que la sustancia es homogénea y las distancias son de la misma magnitud. En la figura se han dibujado estados *simultáneos* del movimiento de las partículas para el instante que se toma como momento inicial, en el que todas las partículas se encuentran en reposo, y para los instantes $\frac{T}{4}$, $\frac{T}{2}$, $\frac{3T}{4}$, T y $\frac{4T}{7}$. Se ha supuesto que el tiempo que tarda la perturbación en pasar de un punto a otro, es igual a la doceava parte de un período. Las pequeñas flechas indican el sentido momentáneo del movimiento.

Entre el estado representado por la curva I y el representado por la V el movimiento se ha propagado hasta la partícula 13; la 1 ha cumplido una oscilación completa, la 7 sólo media oscilación y la 13 recién comenzará a moverse. Esta se comporta respecto a las siguientes de la misma manera que la 1; el estado de movimiento de las partículas 13 a 25 — continuando la construcción hacia la derecha — será luego, en todo instante, *idéntico* al de las partículas 1 a 13; éstas y las partículas 2 y 14; 3 y 15, etc., tendrán exactamente la misma fase.

Es fácil ver que los elementos de masa se encuentran en todo instante distribuidos sobre una senoide (1). El movimiento se dice doblemente periódico, en el espacio y en el tiempo, pues fijando la atención en un punto el movimiento es oscilatorio en el tiempo y considerando todos los puntos en un instante de tiempo, las elongaciones se repiten periódicamente con la coordenada. En la figura 241 *b* se ha representado el estado de movimiento de todos los puntos para diversos instantes.

Si se tiene en cuenta que cada punto tiene la elongación que tenía el anterior transcurrido un intervalo de tiempo igual al que tarda la perturbación en recorrer la distancia que los separa, es evidente que *el movimiento de todos los puntos se obtiene haciendo mover una senoide con una velocidad igual a la de propagación.*

(1) Véase el número 5.

Un movimiento con estas características se denomina *ondulatorio* y se dice que el movimiento se propaga por *ondas*.

El camino recorrido por la perturbación en el tiempo de una oscilación se denomina *longitud de onda* y se indica habitualmente con la letra λ . Si se representa con v la velocidad de propagación es

$$\lambda = v T, \quad [1]$$

o, introduciendo la frecuencia,

$$\lambda = \frac{v}{n}. \quad [2]$$

Es claro que dos puntos que se encuentran a una distancia igual al largo de onda se encuentran en la misma fase o, recíprocamente, la

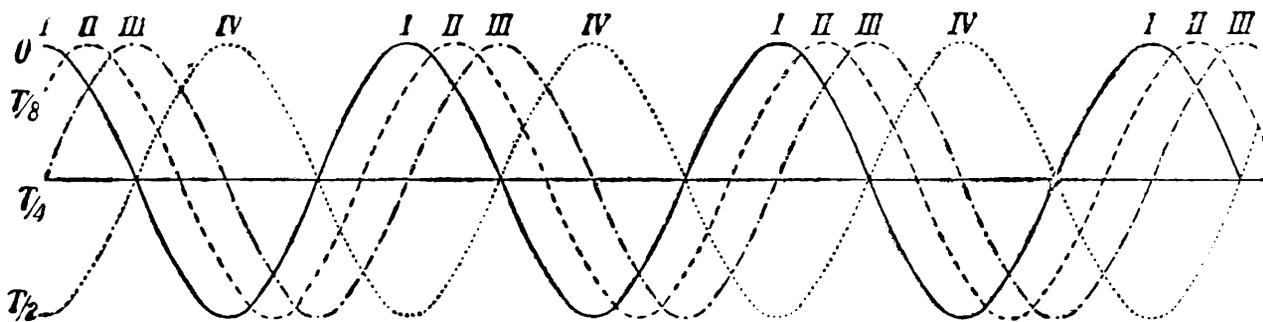


Fig. 241 a.

distancia comprendida entre dos puntos que se encuentran en la misma fase es igual a la longitud de onda. Los puntos situados a la distancia $\frac{\lambda}{2}$ se encuentran, en cambio, en fases opuestas.

Ocupémosnos ahora de las ondas longitudinales. Los elementos de masa oscilan, según dijimos, en la misma dirección en que se propaga el movimiento.

La representación del proceso se logra de una manera enteramente análoga a la del caso anterior; en lugar de elongaciones transversales se tienen elongaciones longitudinales en uno u otro sentido. Resulta así la distribución que se ve en la figura 242 donde las flechas indican el sentido momentáneo del movimiento de los puntos; en unos lugares la materia se hace más densa, esto es, se *comprime*, en otros se enrarece, es decir se *dilata*.

Conviene hacer notar aquí que se tiene dos magnitudes variables: la *velocidad* y la *presión*. Allí donde momentáneamente la presión es un máximo, la velocidad de las partículas es un mínimo, y recíprocamente.

Estas variaciones son, como en el caso anterior, periódicas en el espacio y en el tiempo.

Puede utilizarse, para representar oscilaciones longitudinales, lo que es muy cómodo, la misma representación de las transversales. Basta para ello (fig. 242) convenir que elongaciones longitudinales hacia la derecha se dibujarán transversalmente hacia arriba y elongaciones hacia la izquierda se dibujarán dirigidas hacia abajo.

La definición de longitud de onda es la misma de antes, de modo que la fórmula [1] es válida también en este caso.

Cabe preguntar ahora cuándo se produce uno u otro modo de propagación. La experiencia enseña que *en los flúidos la propagación del movimiento es siempre longitudinal* mientras que en los cuerpos

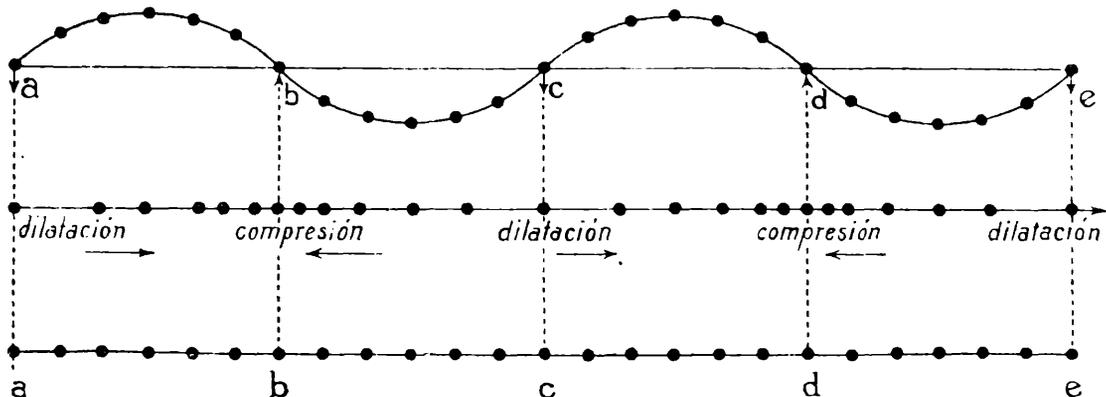


Fig. 242.

sólidos elásticos la propagación se realiza tanto por ondas longitudinales como transversales. Para una misma sustancia sólida, la velocidad de propagación de una clase de ondas es diferente de la velocidad de la otra; la de las longitudinales, que depende del módulo de Young, es mayor que la de las transversales, que depende del módulo de deslizamiento.

Existe todavía otra clase de ondas: las superficiales, llamadas en el caso de los sólidos, de Rayleigh, por haber sido este físico el que reveló teóricamente su existencia; ondas que son mantenidas también por fuerzas elásticas.

Además, existen ondas superficiales en los flúidos; de las del agua nos ocuparemos a continuación.

3. Las ondas superficiales de los líquidos. — Si se presiona momentáneamente en un punto de la superficie de una masa líquida en reposo, se origina un movimiento ondulatorio que se propaga en todas direcciones.

Los puntos más altos, *cúspides*, y los más bajos, *valles*, forman círculos cuyo centro se encuentra en el lugar del choque y que se propagan con la misma velocidad en todas direcciones; sus radios aumentan continuamente con el tiempo.

Ese movimiento puede reproducirse, sucesivamente, cierto número de veces, presionando periódicamente en el mismo punto; así pueden observarse mejor los fenómenos. En un lago, por ejemplo, sería suficiente dejar caer, en el mismo punto, de tanto en tanto, pequeños trozos de un cuerpo sólido.

Podrá observarse que las masas líquidas, mejor dicho, las partículas, no sufren, dentro de intervalos finitos de tiempo, desplazamientos apreciables; un trozo de corcho situado en un punto cualquiera se encontrará ora en el vértice de una cúspide ora en la de un valle, pero su posición media será invariable. Lo que se propaga en todas las direcciones de la superficie, es pues, tan solo el movimiento.

La causa de la producción de estas ondas (suponiendo que no sean de amplitud muy pequeña) es la fuerza de gravedad; si por una causa cualquiera el líquido asciende en un lugar por encima de la superficie libre, la presión hidrostática se hará, en las masas líquidas desplazadas, menor o mayor que la presión atmosférica y, por consiguiente, descenderán o ascenderán nuevamente; el movimiento se propaga a las masas vecinas, lo que significa que, prescindiendo del roce, la energía almacenada en un instante en una masa líquida, pasa sucesivamente a las masas cercanas.

Los hermanos Ernesto, Enrique y Guillermo Weber han investigado a fondo el movimiento ondulatorio de los líquidos alrededor del año 1825. Según ellos, el movimiento ofrece las siguientes características:

a) Las trayectorias de las partículas son elipses que se aproximan a la forma circular; con el aumento de profundidad las trayectorias se hacen, a la vez que menores, más y más alargadas, hasta que finalmente consisten en líneas rectas horizontales;

b) El movimiento se nota hasta una profundidad igual a unas 350 veces la amplitud de las ondas.

En la figura 243 se ha representado la manera cómo se produce la propagación de la onda. Los caminos de las partículas se han supuesto circulares, lo que parece ocurrir cuando el movimiento es muy regular; las partículas 1 a 15 guardan entre sí tal distancia que el tiempo que tarda la perturbación en pasar de una a otra es igual a la doceava parte del período, esto es, del tiempo que tarda un punto en describir por completo su trayectoria circular.

La *A* se refiere al instante $t = 0$ y las otras a los instantes $\frac{T}{4}$, $\frac{T}{2}$, $\frac{3T}{4}$ y T , respectivamente. En el instante representado por la curva *B* el punto *O* ha recorrido la cuarta parte de su trayectoria y la ondulación ha llegado hasta el punto 3, que en ese preciso momento

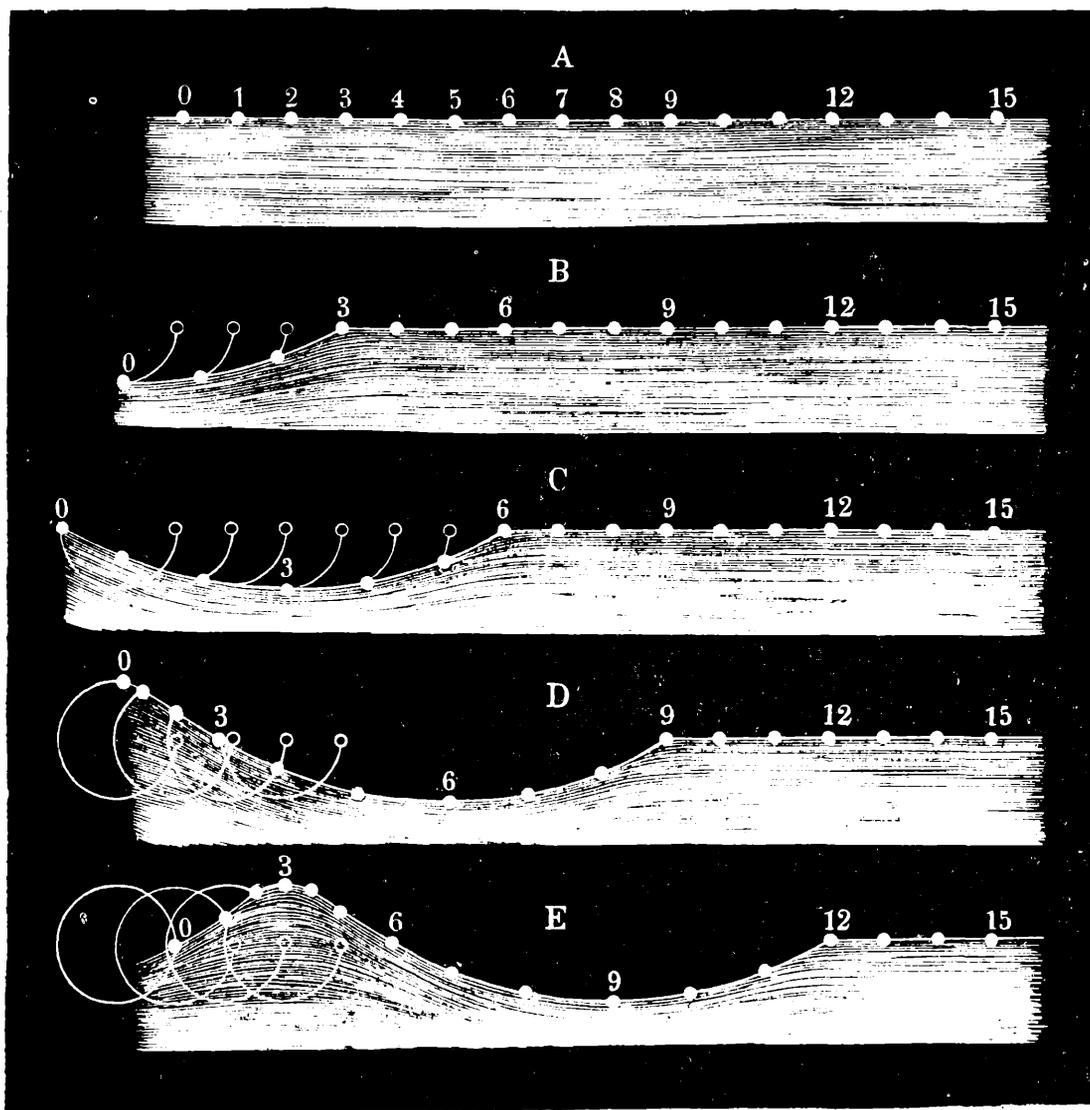


Fig. 243.

iniciará su movimiento; en el representado por *C* el punto *O* ha descrito la mitad de su camino y el movimiento se ha propagado hasta la partícula 6 recorriendo un camino que será igual a media longitud de onda. En la *E* el punto *O* ha vuelto a su posición inicial y el movimiento se ha propagado hasta el punto 12; el camino recorrido por la ondulación es el largo de onda.

Las posiciones sucesivas de las partículas 1 a 12 y de las siguientes, en el transcurso del tiempo, se obtienen sin dificultad.

En la figura 244 la curva que limita la parte con aspecto de líquido correspondiente al instante $t = 2T$, es decir, al instante en que la partícula O ha vuelto por segunda vez a su posición inicial y la 12 por primera; el movimiento se ha propagado hasta el punto 24.

Las otras tres curvas, contadas sucesivamente hacia la derecha, corresponden a instantes que distan de ese momento los intervalos de tiempo $\frac{T}{4}$, $\frac{T}{2}$ y $\frac{3T}{4}$, respectivamente.

Hemos dicho que el movimiento era mantenido por la fuerza de gravedad, lo que es exacto mientras las amplitudes no son muy pequeñas.

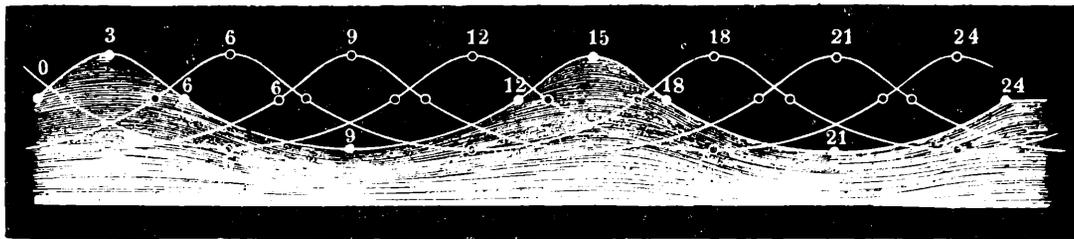


Fig. 244.

Si esto no sucede se hace sentir la tensión superficial del líquido; si las amplitudes son suficientemente pequeñas esta fuerza prima sobre la de gravedad y el movimiento ondulatorio es regido por ella.

4. Superficie de onda. Ondas esféricas y planas. — Supongamos que en cierto punto O de un medio homogéneo e isotrópico se produce una perturbación periódica.

De O partirán, en todas direcciones, ondulaciones longitudinales o transversales o ambas a la vez. Consideremos una cualquiera de ellas, que dejaremos indeterminada.

Transcurrido cierto tiempo la perturbación habrá alcanzado todos los puntos de una superficie esférica cuyo centro estará en O ; todas las partículas de esa superficie comenzarán a vibrar al mismo tiempo y se encontrarán indefinidamente en la misma fase, puesto que, por la homogeneidad y la isotropía supuesta, los períodos de las oscilaciones deben ser iguales.

Es claro que si se indica con r las distancias a partir de O , todas las superficies esféricas representadas por la ecuación

$$r = \text{constante}$$

son los lugares geométricos de puntos de la misma fase; la fase

cambia sobre cada esfera periódicamente con el tiempo y en el mismo instante la fase varía periódicamente con la distancia r . No es menester discutir mayormente esta cuestión, puesto que basta considerar la propagación del movimiento en una de las direcciones y adoptar el resultado para todas las demás.

La excitación se propaga a partir de O en forma de ondas esféricas. Según esto una onda es esférica cuando los lugares geométricos de los puntos que en un instante dado se encuentran en la misma fase, lugares que se denominan *superficies de onda*, son esferas.

El movimiento se propaga en dirección de las normales a las superficies de onda, las que en este caso, coinciden con los radios.

La onda se dice plana si las superficies de ondas son planas. A gran distancia del centro O de perturbación pequeñas partes de las superficies de ondas son, aproximadamente, planos; la porción correspondiente de la onda puede considerarse como perteneciente a una onda plana.

Por reflexión de ondas esféricas pueden obtenerse, como se verá, ondas de ese tipo.

Las líneas según las cuales se propaga la perturbación se denominan *rayos*.

5. Ecuaciones de los rayos de ondas esféricas y planas. — Las consideraciones que siguen son *válidas tanto para las ondas longitudinales como para las transversales*.

Supongamos que el proceso oscilatorio del centro O de excitación sea estacionario, es decir: sea la amplitud en O constante y el proceso oscilatorio perdure indefinidamente.

Para que esto ocurra es preciso agregar a la masa oscilante del centro O , en cada unidad de tiempo, una cantidad de energía igual a la que se propaga en el mismo tiempo en todas direcciones. Puesto que la velocidad de propagación es constante esa energía tarda el mismo tiempo en atravesar los espacios comprendidos entre capas esféricas del mismo espesor y, por consiguiente, es claro que la energía contenida en todo instante en esas capas tiene el mismo valor.

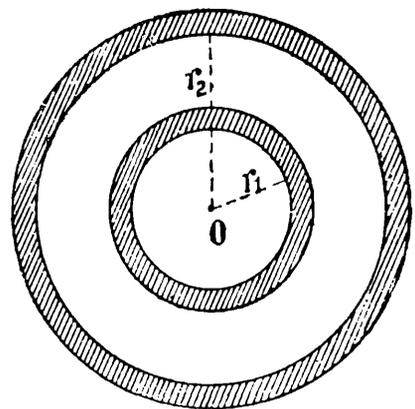


Fig. 245.

Según eso las energías que se encuentran almacenadas en un momento en las capas sombreadas de la figura 245 comprendidas entre las esferas de radio r_1 y $r_1 + dr$; r_2 y $r_2 + dr$ respectivamente, son iguales.

Las masas comprendidas en esas regiones, que indicaremos con M_1 y M_2 , se expresan por las relaciones

$$M_1 = \Sigma m_1 = \mu 4 \pi r_1^2 dr \quad [3]$$

y

$$M_2 = \Sigma m_2 = \mu 4 \pi r_2^2 dr \quad [4]$$

si se indica con μ a la masa específica. Es decir que

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}, \quad [5]$$

lo que muestra que están entre sí como los cuadrados de los radios.

Por otra parte, se ha visto en el primer tomo, página 173, que si una masa m oscila con la frecuencia n y a es la amplitud, la energía está representada por la relación :

$$E = 2 \pi^2 m n^2 a^2. \quad [6]$$

De acuerdo con esto la energía contenida en la capa 1 será

$$E_1 = \Sigma 2 n^2 m_1 n^2 a_1^2 = 2 \pi^2 n^2 a_1^2 \Sigma m_1 = 2 \pi^2 n^2 a_1^2 M_1, \quad [7]$$

pues es claro que la amplitud, que indicamos con a_1 , será la misma en toda la zona elemental considerada.

De la misma manera resulta para la otra capa

$$E_2 = 2 \pi^2 n^2 a_2^2 M_2. \quad [8]$$

Como por lo dicho $E_1 = E_2$ resulta

$$a_1^2 M_1 = a_2^2 M_2 \quad [9]$$

o

$$\frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{M_2}{M_1}, \quad [10]$$

y por la [5]

$$\frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad \text{o} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{r_2}{r_1}, \quad [11]$$

relación que nos dice *que en una onda esférica las amplitudes están, en dos lugares dados, en razón inversa de las distancias que los separan del centro de excitación.*

De acuerdo con esto, si en el punto O la amplitud es a , en los puntos situados a cierta distancia r será $\frac{a}{r}$.

Veamos ahora lo que ocurre con las fases. Supongamos que en O el movimiento está representado por la relación

$$e = a \cdot \text{sen } 2 \pi \frac{t}{T}, \quad [12]$$

indicando con e la elongación. Como la perturbación tarda el tiempo

$$\tau = \frac{r}{v} \quad [13]$$

en recorrer el camino r , si v es la velocidad, es claro que cuando O haga t unidades de tiempo que está vibrando los puntos situados a la distancia r hará solamente el tiempo $t - \tau = t - \frac{r}{v}$ y, por lo tanto, el argumento de las vibraciones de los mismos estará representado

por $2 \pi \frac{t - \frac{r}{v}}{T}$ y las elongaciones, de acuerdo con lo que antecede, por

$$e = \frac{a}{r} \text{sen } \frac{2 \pi}{T} \left(t - \frac{r}{v} \right) \quad [14]$$

o, introduciendo T dentro del paréntesis y teniendo presente que vT es la longitud de onda λ ,

$$e = \frac{a}{r} \text{sen } 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right). \quad [15]$$

Si la onda es plana, la energía que pasa a través de un elemento de superficie de uno de los planos de onda pasa en todos los demás a través de elementos de superficie idénticos; las amplitudes de las oscilaciones serán en todas partes iguales; el argumento variará de la misma manera que en el caso anterior.

Si en uno de los planos la amplitud es a y el movimiento está representado por la expresión:

$$e = a \text{sen } 2 \pi \frac{t}{T}, \quad [16]$$

el movimiento en un plano situado a la distancia r , en dirección de la propagación, será

$$e = a \operatorname{sen} 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right). \quad [17]$$

Las relaciones [15] y [17] son, respectivamente, las ecuaciones de los rayos pertenecientes a una onda esférica y a una onda plana. Con ellas se obtiene el estado de movimiento de todos los puntos en función del tiempo. Si se da a t un valor constante y se hace variar a r se tiene el estado momentáneo de todas las partículas; si la onda es plana las partículas se encuentran sobre una senoide.

Si se da a r un valor constante y se hace variar t , se tiene el movimiento de las partículas situadas a esa distancia en función del tiempo; se trata de un proceso oscilatorio sinusoidal.

En los casos anteriores se ha supuesto que la fase inicial del centro de excitación es cero; si tuviese un valor φ las ecuaciones de los rayos quedarían, como es evidente, las mismas, con el agregado de φ en el argumento.

6. El principio de Huygens-Fresnel. — En lo que antecede se ha supuesto que las perturbaciones elásticas se propagan según rectas que hemos denominado rayos: la excitación de una partícula

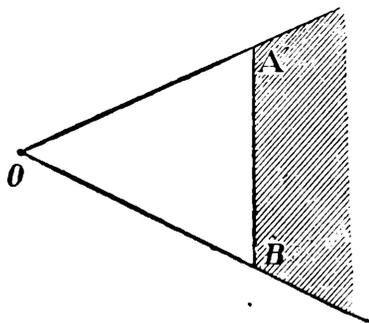


Fig. 246.

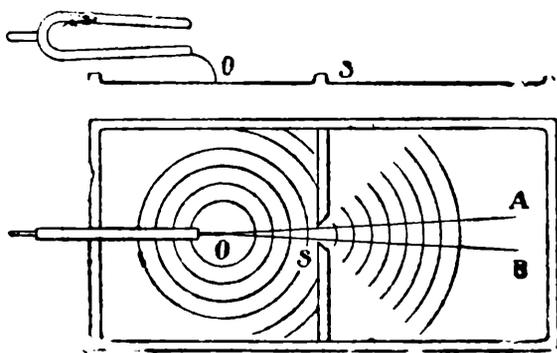


Fig. 247.

provendría, exclusivamente, de impulsos que han ido pasando, sucesivamente, por puntos que se encuentran con ella sobre una misma línea recta.

Tal suposición debe abandonarse por cuanto es imposible explicar hechos comunes de la experiencia.

Un observador, por ejemplo, que se encuentre detrás de una pantalla AB (fig. 246) logrará percibir en varias partes, desplazándose dentro de la zona sombreada, sin salir de ella, un sonido producido

en O ; si las ondas longitudinales, se propagasen en línea recta, esa región sería de silencio con respecto a los sonidos que parten de aquel punto.

Una experiencia interesante es la siguiente. Si la superficie de una masa de mercurio contenida en una cubeta relativamente extensa (fig. 247), se divide en dos partes por medio de una pared vertical provista de una abertura, y se excita con un diapasón, por ejemplo, un punto O de la superficie de una de las dos regiones, se genera un movimiento ondulatorio que se propaga a la otra a través de la solución de continuidad de la pared.

El movimiento en esta segunda región nunca queda confinada a la zona que abarcan las líneas OA y OB ; y estas ondulaciones forman círculos concéntricos alrededor de la abertura si ésta es muy pequeña con respecto a la longitud de las ondas. Los puntos de la abertura se convierten, pues, en ese caso, en nuevos centros de excitación. La penetración de las ondas en la zona que podemos llamar de sombra se denomina *difracción*.

La observación de fenómenos semejantes en la óptica hizo que Huygens (padre de las ondulaciones) formulara para los respectivos procesos oscilatorios un principio que lleva su nombre y que permite explicar satisfactoriamente esos y otros hechos.

Ese principio rige también a los procesos oscilatorios de las sustancias elásticas. Lo explicaremos aquí de una manera suscita, de acuerdo con el empleo que haremos de él en esta oportunidad, reservando para la óptica una discusión más profunda.

Huygens supone que de todo punto oscilante, cualquiera sea la causa que lo mantiene en ese estado, parten impulsos en todas direcciones.

Todo punto alcanzado por una perturbación ondulatoria se convertirá, según eso, a su vez, en un centro de emisión de ondas.

La propagación de una onda esférica se explicaría de la siguiente manera: los puntos alcanzados por la excitación que parte de O (fig. 248) en cierto instante se encuentran sobre una esfera de radio r . En ese mismo momento todos comienzan a oscilar emitiendo ondas elementales esféricas, que en el transcurso de un tiempo pequeño

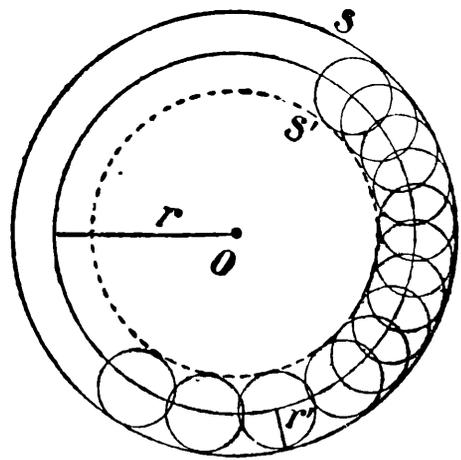


Fig. 248.

habrán recorrido el camino r' ; los puntos alcanzados por la excitación se encontrarán sobre la envolvente S de todas esas esferitas elementales, que es una esfera de centro en O ; todo sucede pues, aparentemente, como si la propagación se verificara en línea recta.

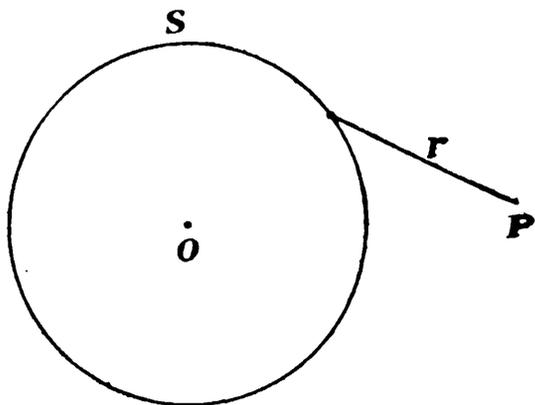


Fig. 249.

Esto no ocurre, sin embargo, así. Si S , por ejemplo (fig. 249), es la superficie de onda en cierto instante, correspondiente a una perturbación que se origina en O , la excitación en un punto P , en cierto instante t , será la superposición de los impulsos emitidos por los puntos de

la superficie de onda en los instantes $t - \frac{r}{v}$, si se indica con v la velocidad de propagación y, de una manera general, con r la distancia de esos puntos a P .

Fresnel ha sido quien ha completado el principio de Huygens con el de superposición de los movimientos o, como se dice también, de interferencias. Como terminamos de decirlo, el estado de movimiento de un punto es debido a la superposición o interferencia de los impulsos que provienen de todos los lugares de una superficie de onda.

No insistiremos en el método con el que Fresnel explica la propagación de la ondulación de un punto a otro, de O a P , por ejemplo, porque con ese procedimiento, que es elemental, la fase que se obtiene para el movimiento de P es errónea y porque así no se logra levantar esta grave objeción, que alcanza también al principio de Huygens en su forma primitiva: la experiencia enseña que las perturbaciones no se propagan jamás hacia atrás en un medio homogéneo, mientras que, según el principio, esto ocurriría; la envolvente S' (fig. 248) sería también una superficie de onda.

Kirchhoff y Voigt han formulado matemáticamente de una manera rigurosa el principio de Huygens-Fresnel, haciendo así posible explicar cualitativa y cuantitativamente todos los hechos de la experiencia; de esa fórmula resulta que la perturbación no se propaga hacia atrás.

7. Reflexión y refracción de ondas en la superficie de separación de dos medios elásticamente diferentes. — Si un movimiento ondulatorio llega a la superficie de separación de dos medios

elásticamente diferentes se observa que de los puntos de ésta parten ondas dirigidas hacia el interior de ambos medios; las que van hacia el primero se dicen *reflejadas*, las que se propagan en el segundo se denominan *refractadas*.

Supongamos que se trata de medios elásticos sólidos, que indicaremos con los números 1 y 2, y que la superficie de separación sea un plano P (fig. 250). Si en un punto O existe un proceso oscilatorio

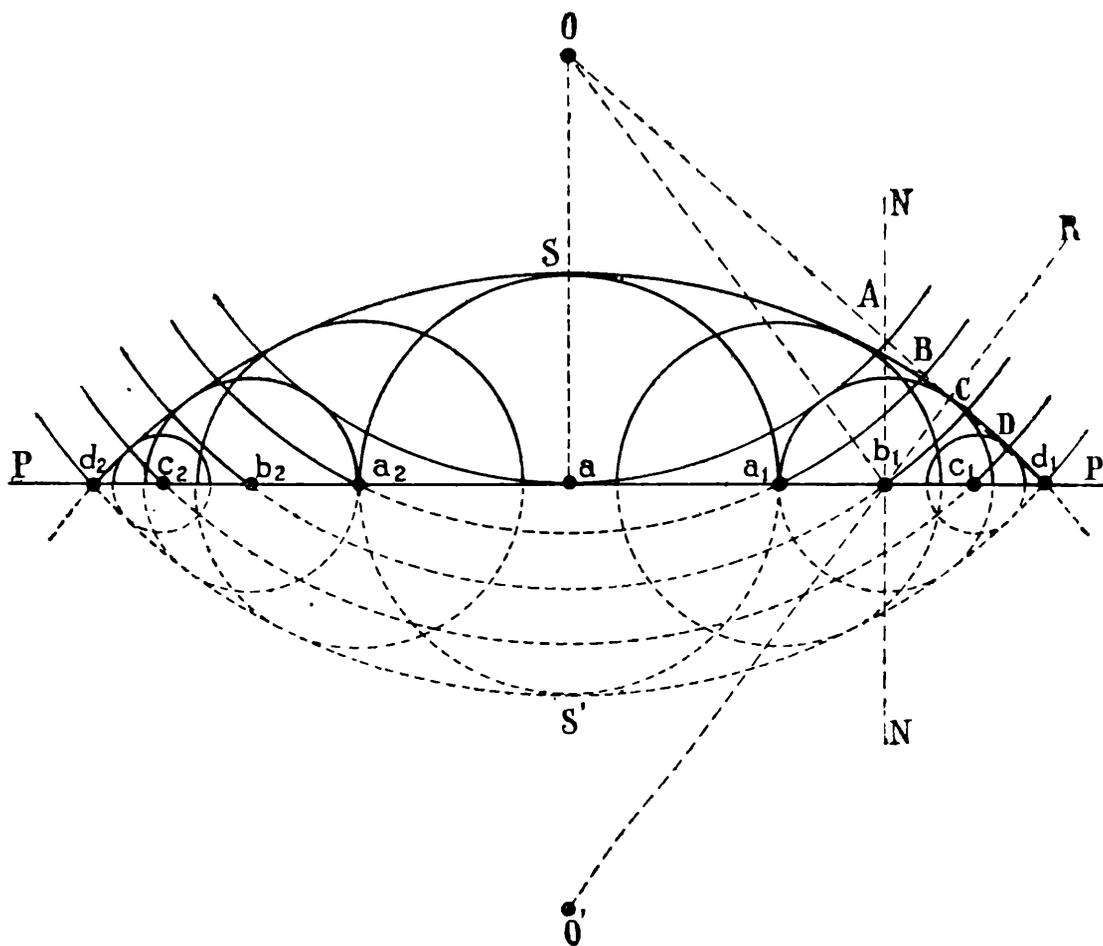


Fig. 250.

se generará una onda longitudinal y otra transversal. Cada una de éstas da lugar, al incidir sobre la superficie de separación, a dos ondas reflejadas, de las cuales una es longitudinal y otra transversal, y a dos refractadas, también una de cada especie.

Estas ondas se construyen sin dificultad aplicando el principio de Huygens. Construyamos primeramente la onda longitudinal reflejada, proveniente de la incidente de la misma clase; nos limitaremos a la construcción en un plano que pasa por el centro de excitación y es normal a la superficie de separación.

Sea Oa la normal del plano P y consideremos sobre estos puntos a_1, b_1, c_1 , etc., que se encuentren de O a distancias tales que la pertur-

bación los alcanza, uno después de otro, transcurridos intervalos iguales de tiempo a contar del momento en que la excitación llega a a ; lo mismo ocurrirá con los puntos simétricos a_2, b_2, c_2 , etc., que se encuentran del otro lado de a . Tales puntos se hallarán, por lo tanto, sobre círculos de centro en O cuyos radios sucesivos difieran en una misma cantidad .

En el instante en que la perturbación llega a los puntos d_1 y d_2 la onda elemental reflejada que parte de a debe haber recorrido, como es notorio, un camino igual a Aa_1 , es decir, habrá alcanzado todos los puntos de la semiesfera de centro a que pertenece a una esfera

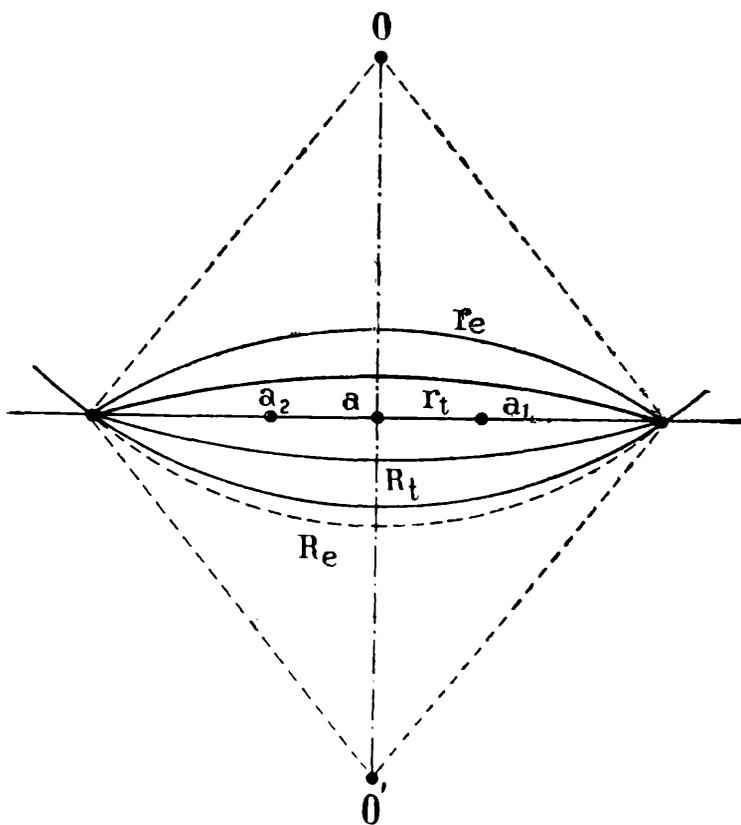


Fig. 251.

tangente a la de radio Od_1 . Las ondas elementales reflejadas que parten de a_1 y a_2 deben haber recorrido un camino igual a Bd_1 , de modo que la esfera a que pertenecen los puntos alcanzados por la excitación es tangente también a la de radio Od_1 . Lo mismo ocurre con las ondas reflejadas provenientes de los demás puntos.

La envolvente de todas ellas, que es la superficie de onda del movimiento reflejado, es

d_2Sd_1 curva idéntica que la $d_2S'd_1$ y que puede considerarse como la imagen de ésta respecto al plano P . Como la última es una calota esférica lo es también la primera; su centro será un punto O' situado del otro lado del plano P simétricamente con respecto a O , es decir, sobre la misma normal y a una distancia igual.

A un rayo incidente Ob_1 , por ejemplo, corresponde un rayo reflejado cuya dirección es la de $O'b_1$, que es con respecto al plano P , simétrico de aquél.

Si NN es la normal a la superficie de separación, al ángulo Ob_1N , que se llama *de incidencia*, será igual al Nb_1R , que se denomina *de reflexión*.

En lo que se refiere a la onda transversal reflejada, originada por la longitudinal incidente, las cosas suceden así: Como se ha dicho, la velocidad de las ondas transversales es menor que la de las ondas longitudinales; las ondas elementales transversales reflejadas por los puntos a , a_1 , a_2 , etc., habrán recorrido en el mismo tiempo considerado en el caso anterior espacios menores; la envolvente de todas ellas, vale decir, la superficie de onda de la perturbación transversal, que indicaremos con r_t , queda envuelta por la superficie de onda de la excitación longitudinal R_l en la forma que indica la figura 251. La onda transversal reflejada no será, como es evidente, esférica, ni satisfará la ley ordinaria de la reflexión; los ángulos de incidencia y de reflexión no serán iguales sino que estarán ligados por otra relación que deduciremos más adelante.

De cada uno de los puntos a , a_1 , a_2 , etc., parten también ondas elementales longitudinales y transversales hacia el interior del medio 2 constituyendo las ondas refractadas; las formas de éstas, que representamos con las letras R_l y R_t no son esféricas. En el caso representado por la figura 251 se ha supuesto que la velocidad de propagación en el segundo medio es menor que en el primero; la onda longitudinal es siempre más veloz.

Hemos considerado hasta ahora únicamente las ondas provenientes de la longitudinal incidente.

Si se consideran las provenientes de la onda transversal los resultados son análogos; de las ondas reflejadas sólo de la misma especie, esto es, la transversal, es esférica y sigue las leyes ordinarias de la reflexión.

8. Reflexión y refracción de ondas planas. — Estudiando la reflexión y refracción de ondas planas se evidencian, de una manera sencilla, algunos fenómenos de interés.

Estudiaremos los fenómenos en un plano normal al PP (fig. 252) que supondremos sea la superficie de separación de dos medios.

A fin de hacer una construcción general, supongamos que la onda reflejada es cualquiera de las dos de diferente especie que corresponden a una onda incidente. Indiquemos por esto con v la velocidad de la perturbación incidente y con v' la de la reflejada.

La superficie de la onda incidente estará representada en cierto instante, en el plano en cuestión por la línea ae ; los rayos, de los que se han trazado cinco equidistantes entre sí, le son normales e inciden bajo el mismo ángulo, que indicaremos con Θ .

Es claro que si el tiempo que tarda la perturbación en pasar de e a a_4 es τ , el tiempo empleado para pasar de d a a_3 será $\frac{3}{4} \tau$, de c a a_2 será $\frac{2}{4} \tau$, etc., en virtud de las propiedades geométricas de las transversales cortadas por las líneas paralelas, equidistantes en este caso.

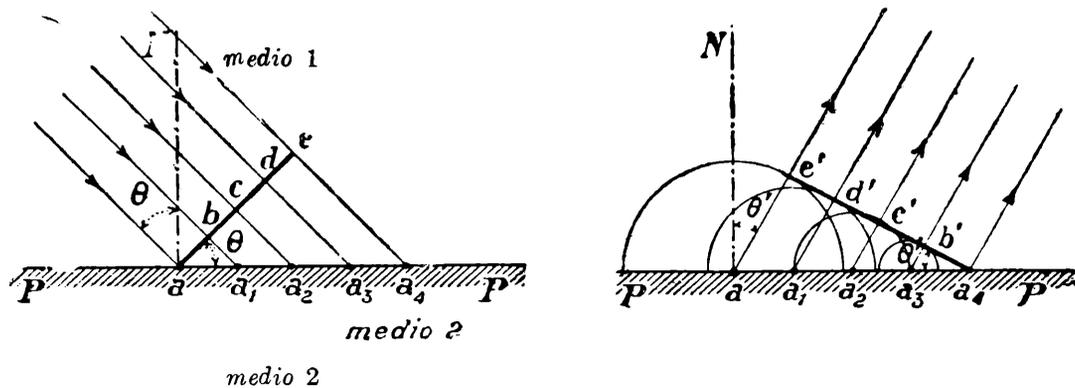


Fig. 252.

Esta observación nos permite construir la onda reflejada; lo hacemos aparte para más claridad.

Cuando el punto a haga τ segundos que está vibrando, el a_1 hará solamente $\frac{3}{4} \tau$, el a_2 $\frac{2}{4} \tau$, el a_3 $\frac{1}{4} \tau$ y el a_4 cero, es decir, ese instante corresponde al de la llegada de la excitación a a_4 .

Puesto que el medio es homogéneo es evidente que a rayos incidentes paralelos corresponden rayos reflejados también paralelos entre sí. Sea Θ' el ángulo que forman con la normal N a la superficie de separación.

En el instante en que la excitación llega a a_4 las excitaciones reflejadas que parten de los puntos a , a_1 , a_2 , etc., deben haber recorrido los caminos

$$a e' = v' \tau,$$

$$a_1 d' = \frac{3}{4} v' \tau,$$

$$a_2 c' = \frac{2}{4} v' \tau,$$

y

$$a_3 b' = \frac{1}{4} v' \tau,$$

respectivamente.

Como la relación que guardan entre sí las distancias ae' , a_1d' , etc., son iguales a las que guardan las aa_4 , a_1a_4 , etc., resulta, por

las propiedades geométricas antes enunciadas, que los puntos e' , d' , c' y b' se encuentran sobre una recta que pasa por a_4 . Luego la onda reflejada es plana.

Esa recta es, por el principio de Huygens, la envolvente de las ondas elementales que parten de a , a_1 , etc., y debe ser normal a los rayos ae' , a_1d' , etc.

Si se tiene, por otra parte,

$$ea = v \tau = a a_4 \cdot \text{sen } \Theta$$

$$e'a = v' \tau = a a_4 \cdot \text{sen } \Theta'$$

de donde

$$\frac{v}{v'} = \frac{\text{sen } \Theta}{\text{sen } \Theta'}, \quad [18]$$

relación que permite construir los rayos reflejados conocidas las velocidades y dado el ángulo de incidencia.

Se ve así que sólo para la onda reflejada de la misma clase que la incidente vale la ley ordinaria de reflexión.

En efecto, en ese caso

$$v = v',$$

y, por consiguiente,

$$\text{sen } \Theta = \text{sen } \Theta'$$

o

$$\Theta = \Theta'. \quad [19]$$

La relación [18] permite todavía deducir una consecuencia importante, relativa a la reflexión de una onda transversal incidente. De las ondas reflejadas la longitudinal tiene una velocidad mayor, es decir, es en ese caso $v' > v$, y, por consiguiente, $\Theta' > \Theta$. Existirá entonces un ángulo de incidencia Θ para el cual la onda longitudinal reflejada es *rasante*, es decir, para la cual es $\Theta = 90^\circ$. Si la onda transversal incide bajo un ángulo mayor que Θ_t no existirá ninguna onda reflejada longitudinal, sino solamente la transversal.

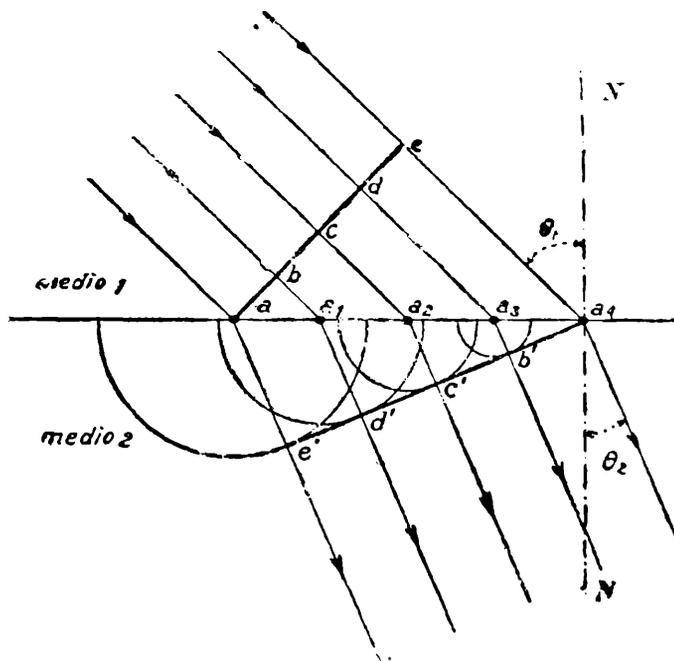


Fig. 253.

Estudiemos ahora *la refracción*. La construcción no difiere en nada de la que acabamos de emplear a propósito de la reflexión; debe tomarse, naturalmente, la velocidad que en el segundo medio tienen las ondas refractadas, pues, repitamos, a cada onda incidente corresponden dos ondas refractadas, una longitudinal y otra transversal. Si la incidente es plana, las refractadas también lo serán; en la figura 253 se ha representado gráficamente la onda incidente y una de las refractadas.

Si son v_1 y v_2 las velocidades respectivas, se tiene, lo mismo que antes

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\text{sen } \Theta_1}{\text{sen } \Theta_2}, \quad [20]$$

donde Θ_1 y Θ_2 se denominan, respectivamente, ángulos de incidencia y de refracción.

Como v_1 y v_2 son constantes para dos medios dados, la ley de refracción se enuncia diciendo *que los senos de los ángulos de incidencia y de refracción están en una relación constante*.

9. Reflexión total.— Si la velocidad de propagación de una cualquiera de las ondas refractadas en el segundo medio es mayor que la

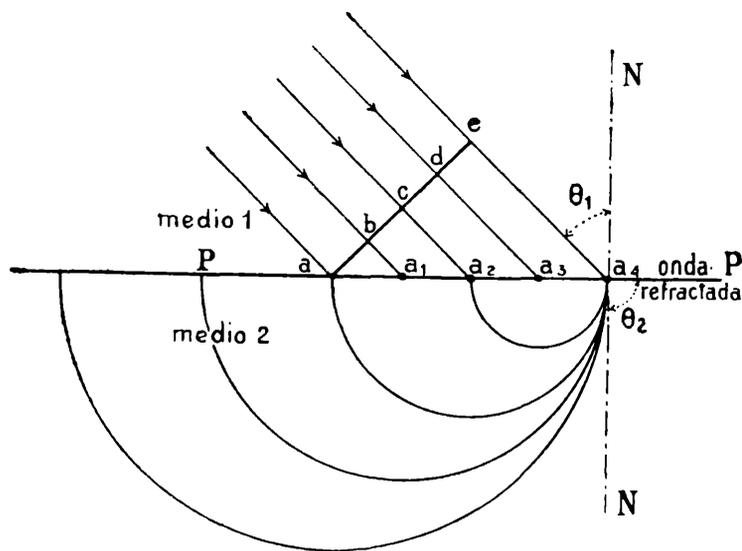


Fig. 254.

de la onda incidente en el primer medio, siempre podrá encontrarse un ángulo Θ (fig. 254), para el cual las perturbaciones que parten de e y de a (onda refractada) llegan a a_4 al mismo tiempo; si esto sucede, ocurrirá lo mismo con las que parten de a y a_1 , c y a_2 , etc.

Las superficies de onda de las excitaciones que partiendo de a , a_1 , a_2 , etc., llegan al mismo tiempo a a_4 , son círculos (en el espacio, cilindros) que se tocan en a_4 ; la superficie de onda quedará reducida a la línea de contacto de esos cilindros, mejor dicho, a una banda angosta que se propaga a lo largo de la superficie de separación.

La dirección de los rayos sería, pues, la de la recta PP ; la onda se refracta formando con la normal un ángulo Θ de 90° . El valor del ángulo de incidencia correspondiente, que indicamos con Θ_l , que se denomina *ángulo límite de refracción*, resulta de la relación

$$\frac{v_1}{v_2} = \text{sen } \Theta_l. \quad [21]$$

Si el ángulo de incidencia es mayor que Θ_l no existe una onda refractada de la clase en cuestión.

B. — VELOCIDAD DE ONDAS LONGITUDINALES Y TRANSVERSALES
EN MEDIOS HOMOGÉNEOS E ISÓTROPAS

10. **La aceleración de un elemento de masa.** — Supongamos que en un medio elástico homogéneo e isótropo se propaga una onda plana, longitudinal o transversal.

La aceleración de que está animado un elemento cualquiera de masa, en un momento dado, se obtiene, como se sabe, dividiendo la diferencia entre las velocidades correspondientes a dos instantes infinitamente vecinos por el intervalo de tiempo comprendido entre ellos.

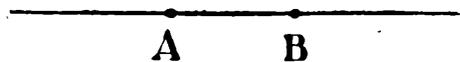


Fig. 255.

Si u_1 y u_2 son las velocidades de la masa representada por el punto A (fig. 255), en los instantes t y $t + \tau$, siendo τ muy pequeño, la aceleración en el instante t es

$$a = \frac{u_2 - u_1}{\tau}. \quad [22]$$

Consideremos ahora otro punto B que dista de A un camino tal que la ondulación tarda justamente el tiempo τ en recorrerlo. Puesto que el movimiento es oscilatorio, el punto B tiene la misma velocidad que A , τ segundos más tarde, de modo que en el instante $t + \tau$ tendrá la velocidad u_1 ; en ese mismo momento el punto A tiene la velocidad u_2 .

En lugar de la [22] puede escribirse entonces

$$a = \frac{u_B - u_A}{\tau}, \quad [23]$$

donde u_A y u_B son las velocidades de los puntos A y B en el mismo instante $t + \tau$, o, lo que es lo mismo, en el instante t , pues τ debe ser infinitamente pequeño.

Se ve así que la aceleración de un punto se obtiene, también, restando de su velocidad la que en el mismo instante posee otro muy cercano y dividiendo la diferencia obtenida por el tiempo que tarda la excitación en pasar de un punto a otro.

Si se indica con v la velocidad de propagación del movimiento es

$$\tau = \frac{AB}{v}, \quad [24]$$

y por consiguiente

$$a = v \frac{u_B - u_A}{AB}. \quad [25]$$

11. La ecuación de movimiento de un elemento de masa. —

A. OSCILACIONES LONGITUDINALES. — Para facilitar los razonamientos nos referiremos únicamente a la materia comprendida dentro de un cilindro de sección igual a la unidad, cuyas generatrices o lados sean perpendiculares a los planos de onda; esa región está limitada en el plano del dibujo (fig. 256) por las rectas SS .

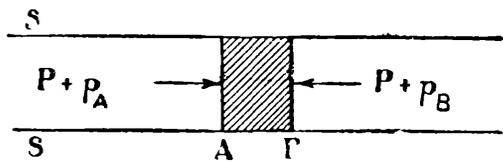


Fig. 256.

Sobre las caras laterales de un elemento de masa como el sombreado, actúan las presiones $P + p_A$ y $P + p_B$, respectivamente, donde P es la presión en el estado de equilibrio, y p_A y p_B las sobrepresiones respectivas originadas por el movimiento ondulatorio. Puesto que se ha supuesto que la sección del prisma es la unidad, esas magnitudes representan, al mismo tiempo, las fuerzas que rigen su movimiento.

Si se indica con μ la masa específica de la substancia y con AB el espesor del elemento, su masa es $\mu \cdot AB$ y, por consiguiente, por el principio de masa,

$$p_B - p_A = \mu \cdot AB \cdot a, \quad (1) \quad [26]$$

si se indica con a la aceleración. De acuerdo con el párrafo anterior, se tiene

$$a = v \frac{u_B - u_A}{AB}$$

(1) Los signos no interesan para nuestro objeto.

si u_A y u_B son las velocidades que tienen en el mismo instante los puntos situados sobre los planos que pasan por A y B , respectivamente.

Introduciendo esta relación en la [26] resulta

$$p_B - p_A = \mu v (u_B - u_A), \quad [27]$$

ecuación que se transforma fácilmente con el auxilio de relaciones que deducimos a continuación.

B. RELACIONES ENTRE LAS VELOCIDADES DE LOS ELEMENTOS DE MASA Y LAS PRESIONES. — Representamos los elementos infinitésimos de masa por puntos y supongamos que en determinado instante t las elongaciones longitudinales de dos de ellos, A y B , estén dadas por las ordenadas AA' y BB' , (fig. 257). Si la perturbación tarda el tiempo τ en pasar de A a B , el punto

B ocupará, por lo dicho más arriba, en el instante $t + \tau$ una posición B'' tal que la elongación B'' sea igual a la elongación AA' que tenía A en el instante t . El desplazamiento de B ha

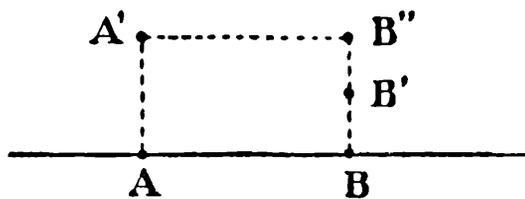


Fig. 257.

variado en el tiempo τ el camino $B' B''$ y, por lo tanto, su velocidad que indicaremos con u , en el instante $t + \tau$ o t , si, como suponemos τ es muy pequeño, será

$$u_B = \frac{B' B''}{\tau}, \quad [28]$$

o, introduciendo la velocidad v de propagación:

$$u_B = v \frac{B' B''}{A B}. \quad [29]$$

Ahora bien, $B' B''$ es el cambio de longitud o, lo que es igual, de volumen, que existe en el instante t en el elemento de longitud AB .

Si se trata de un sólido, debe ser, de acuerdo con las leyes de la elasticidad,

$$\frac{B' B''}{A B} = \frac{p_B}{E}, \quad [30]$$

donde E es el módulo de Young.

En un fluido, como la presión tiene el mismo valor en todas direcciones, se trataría de una dilatación o compresión uniforme y figuraría, en lugar del módulo de Young, el de *compresión*.

De las [29] y [30] resulta para los sólidos

$$\frac{u_B}{p_B} = \frac{v}{E}$$

y análogamente

$$\frac{u_A}{p_A} = \frac{v}{E}.$$
[31]

De estas relaciones se obtiene

$$u_B - u_A = \frac{v}{E} (p_B - p_A)$$
[32]

Introduciendo esta expresión en la [27] resulta, finalmente:

$$1 = \frac{\mu v^2}{E}$$

o

$$v = \sqrt{\frac{E}{\mu}},$$
[33]

relación que nos dice que en un sólido homogéneo e isótropo la velocidad de propagación de las ondas longitudinales es igual a la raíz cuadrada del cociente de dividir el módulo de Young por la masa específica.

En un fluido se tendría

$$v = \sqrt{\frac{\Psi}{\mu}},$$
[34]

donde Ψ es el módulo de compresión.

C. OSCILACIONES TRANSVERSALES. — Se trata en este caso solamente de cuerpos sólidos.

Las fuerzas que actúan sobre un elemento son las tensiones tangenciales de la materia que la rodea, de modo que se tendrá, en lugar de la [26]:

$$T_B - T_A = \mu \cdot A B \cdot a,$$
[35]

donde T_B y T_A son las fuerzas tangenciales aplicadas sobre los planos que pasan por A y B , respectivamente (fig. 257).

Puesto que las relaciones [25] y [26] valen tanto para ondas longitudinales como transversales, la [27] se convierte, en este caso, en

$$T_B - T_A = \mu v (u_B - u_A).$$
[36]

Esta relación se transforma enseguida por las relaciones existentes entre las velocidades de las partículas y las tensiones tangenciales.

Si en la figura AA' y BB' representan elongaciones transversales, es claro que es como antes

$$u_B = v \frac{B'B''}{AB}, \quad [37]$$

pero $B'B''$ representa ahora, evidentemente, el deslizamiento de la sección que pasa por B con respecto a la sección que pasa por A y, por consiguiente, si las deformaciones, son, como hemos supuesto, muy pequeñas, es

$$\frac{B'B''}{AB} = \varphi \quad [38]$$

si φ es el ángulo de deslizamiento (véase tomo I pág. 356) y, por consiguiente,

$$\frac{B'B''}{AB} = \frac{T_B}{\Phi}, \quad [39]$$

si Φ es el módulo de rigidez o torsión.

La [37] se convierte en

$$\frac{u_B}{v} = \frac{T_B}{\Phi}, \quad [40]$$

y se obtiene, análogamente

$$\frac{u_A}{v} = \frac{T_A}{\Phi}. \quad [41]$$

De estas relaciones y de la [36] resulta

$$v = \sqrt{\frac{\Phi}{\mu}}, \quad [42]$$

es decir que la velocidad de propagación de ondas transversales es igual a la raíz cuadrada del cociente de dividir el módulo de torsión por la masa específica.

Según estas deducciones la velocidad de propagación no depende de la frecuencia de las ondas.

En la tabla que va a continuación se dan algunos datos numéricos relativos a substancias sólidas, calculadas con las fórmulas precedentes.

Substancia	Velocidad de propagación en m/seg	
	Ondas longitudinales	Ondas transversales
Hierro	4310	2560
Acero	5560	3180
Mg	6390	3740
Latón	3620	2090
Pizarra caliza	5150	2980
Oxido de sílice	5350	3620
Opalo	3840	2000

La velocidad de propagación de ondas transversales es menor que la de ondas longitudinales, puesto que el módulo de torsión es menor que el de Young.

Es claro que las fórmulas deducidas serán válidas solamente mientras las deformaciones caigan dentro de los límites de la elasticidad perfecta, es decir, mientras sean muy pequeñas.

En el capítulo siguiente tendremos oportunidad de confrontar, en parte, los resultados experimentales con los teóricos.

C. — TEMBLORES DE TIERRA. BREVÍSIMAS NOCIONES DE SISMOMETRÍA

12. Generalidades. — La perturbación del equilibrio de masas terrestres en un punto cualquiera del interior del globo da lugar a ondas elásticas que se propagan en todas direcciones. El movimiento ocasionado por estas ondas se designa con el nombre genérico de *temblor*.

De las características de tales ondas pueden sacarse conclusiones de sumo interés relativas a la naturaleza y estado de las substancias que componen la tierra, por lo que su estudio ha sido siempre motivo de preocupación en todos los países civilizados.

Los instrumentos destinados a percibir y registrar los movimientos terrestres en un punto cualquiera se designan con el nombre de *sismómetros* o *sismógrafos*. En la sismometría moderna se exige no solamente el conocimiento del instante preciso de llegada de la perturbación, diferentes fases del movimiento, su duración y período de las

ondas, sino, muy en particular, el cálculo de los *verdaderos movimientos de la tierra en el lugar de que se trata*.

En general, consistirá en desplazamientos según tres direcciones y rotaciones alrededor de los mismo ejes. Las rotaciones son, por lo común, muy pequeñas con respecto a las traslaciones; se registran por eso los movimientos según dos direcciones horizontales normales entre sí y según la vertical. Con estos tres datos se puede determinar la dirección y amplitud del movimiento.

13. Principio de construcción de los sismógrafos. Ecuación de movimiento.

— Veamos ahora en qué consisten los sismómetros. A fin de comprender su funcionamiento y de penetrar en lo que es esencial, consideremos, primeramente, el dispositivo que se ve en la figura 258. Se trata de un péndulo constituido por una gran masa m suspendida de dos hilos, que puede oscilar, por lo tanto, únicamente, en una sola dirección. La masa lleva un índice I que inscribe sus desplazamientos con respecto al soporte sobre una cinta de papel ahumado que se mantiene en movimiento y sobre el cual se señala, a la vez, el transcurso del tiempo, de minuto en minuto, por una instalación semejante a la que se ha descrito en otra oportunidad.

El roce del índice sobre el papel es, como se comprende sin mayores explicaciones, una fuerza variable; el par de fuerzas variables que determina reacciona sobre el movimiento del péndulo modificándolo.

Si el índice I no inscribe directamente los movimientos, sino que lo hace por un juego de palancas multiplicadoras, aparecen otras fuerzas de roce que se superponen a la anterior. *A fin de anular la influencia de estas fuerzas sobre el movimiento del péndulo es que se utilizan, para formarlo, masas muy grandes.*

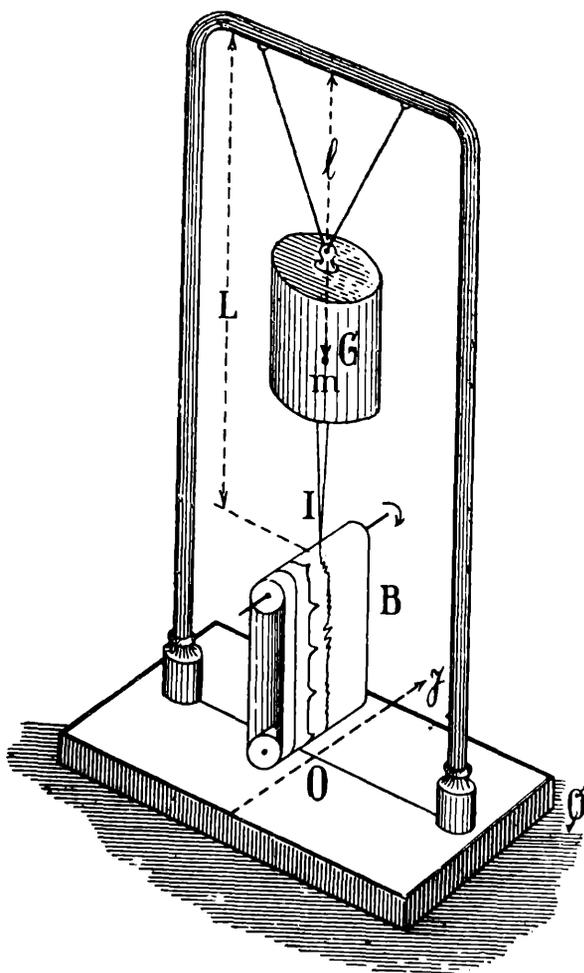


Fig. 258.

Veamos ahora cuál es el movimiento del péndulo bajo la acción de un desplazamiento periódico, que supondremos, para mayor sencillez, sinusoidal y de frecuencia n_1 , en dirección oy .

El péndulo cumplirá un movimiento que será la superposición ⁽¹⁾ de las oscilaciones forzadas de frecuencia n_1 , que carecen de amortiguamiento, de las oscilaciones propias, amortiguadas, cuya frecuencia indicaremos con n . Representaremos con n_0 la frecuencia de las oscilaciones propias, supuesto nulo el amortiguamiento.

Se puede demostrar, sin mayores dificultades, que el movimiento resultante es complicado y que de él es muy difícil, sino imposible, deducir el movimiento terrestre, que es justamente lo que interesa.

Su medida da el movimiento que obliga ejecutar al péndulo, y no, naturalmente, las oscilaciones propias de éste. Aun cuando éstas son de suyo amortiguadas, como los movimientos sísmicos son de corta duración, perduran lo suficiente para enmascarar todo el proceso.

No podemos detenernos mayormente en la discusión teórica y gráfica de esta cuestión sin salirnos del margen que corresponde a la presente obra.

De las consideraciones que preceden resulta, no obstante, claramente, que es indispensable *amortiguar* muchísimo las oscilaciones propias del péndulo ⁽²⁾ de modo que las oscilaciones propias desaparezcan en el transcurso de muy pocas oscilaciones.

En los buenos institutos sísmicos los péndulos son *casi* aperiódicos ⁽³⁾.

Discutamos ahora cuantitativamente la cuestión.

Si el movimiento terrestre está representado en la dirección oy por la expresión

$$a \cdot \cos 2 \pi n_1 t, \quad [43]$$

la ecuación de movimiento del péndulo con respecto a ejes fijos a su soporte (que cumplen el movimiento de la tierra) se obtienen en seguida, puesto que de acuerdo con la teoría del movimiento relativo (véase tomo I, página 270 y siguientes) se puede suponer el

(1) En el capítulo VIII del primer tomo se han considerado independientemente las oscilaciones propias y forzadas. Es claro que éstas coexisten, pues la ecuación diferencial [90] tiene, como solución general, la suma de la solución general de la [78] (que son las oscilaciones propias), más la solución representada por la [93] (oscilación forzada).

(2) Tal vez electromagnéticamente.

(3) Supuesto que no son astáticos, como se verá más adelante.

sistema en reposo agregando una fuerza igual al producto de la masa por la aceleración del movimiento de los ejes. Esta fuerza es, de acuerdo con la expresión [43],

$$- m 4 \pi^2 n_1^2 a \cdot \cos 2 \pi n_1 t , \quad [44]$$

y la ecuación de movimiento, supuestas pequeñas las oscilaciones, como ocurre en general, será de la misma forma de la [90] del capítulo VIII del tomo I, es decir,

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = - ky - p \frac{dy}{dt} + m 4 \pi^2 n_1^2 a \cdot \cos 2 \pi n_1 t , \quad [45]$$

donde k y p tienen la significación consignada entonces. Dejando de lado por lo supuesto, las oscilaciones propias, la solución será

$$y = B \cdot \cos (2 \pi n_1 t - \varphi) , \quad [46]$$

donde

$$B = \frac{n_1^2 a}{\sqrt{(n_0^2 - n_1^2)^2 + \left(\frac{n_1 p}{2 \pi m}\right)^2}} \quad [47]$$

y

$$\text{tang } \varphi = \frac{n_1 p}{2 \pi m (n_0^2 - n_1^2)} , \quad [48]$$

relaciones que se deducen de las fórmulas de la página 186 del tomo I, poniendo en lugar de A el valor que le corresponde en este caso, que es $4 \pi^2 n_1^2 m a$. La [47] da la amplitud del movimiento del centro de oscilación de la masa; la amplitud del movimiento del extremo del índice, que indicamos con e , será

$$e = \frac{L}{l} B = \frac{L}{l} \frac{n_1^2 a}{\sqrt{(n_0^2 - n_1^2)^2 + \left(\frac{n_1 p}{2 \pi m}\right)^2}} , \quad [49]$$

donde l y L tienen la significación que se ve en el dibujo.

Las magnitudes directamente accesibles a la medida son:

- 1º las longitudes l y L ;
- 2º la frecuencia n_1 del movimiento terrestre (que se deduce en seguida del sismograma);
- 3º la frecuencia n de las oscilaciones propias amortiguadas; y
- 4º el decrecimiento logarítmico γ de estas oscilaciones.

De las relaciones (1)

$$n_0 = n \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4 \pi^2}} \quad [50]$$

y

$$\frac{2 m}{p} = \gamma n \quad [51]$$

se calcula la frecuencia n_0 que figura en la [49] correspondiente a las oscilaciones propias sin amortiguamiento, y el término $\frac{p}{2 m}$.

Con esos datos se calcula en seguida la amplitud a del movimiento terrestre, que queda así individualizado.

Además, por el sismograma se conocen los instantes de tiempo que corresponden a las elongaciones máximas del movimiento forzado; los instantes que corresponden a los máximos del movimiento de la tierra, que es lo que interesa conocer, se calcula por la diferencia φ de fase existente entre ambos movimientos.

Si las oscilaciones propias del péndulo son casi aperiódicas, como conviene que suceda, se tiene, muy aproximadamente,

$$\frac{p^2}{4 m^2} = \frac{k}{m} = 4 \pi^2 n_0^2. \quad [52]$$

Introduciendo esta relación en la [49] resulta:

$$e = \frac{L}{l} \frac{n_1^2 a}{n_2^2 + n_1^2} = \frac{L}{l} \frac{a}{\frac{n_0^2}{n_1^2} + 1} \quad [53]$$

o introduciendo los períodos T_1 y T_0 e indicando con u al cociente $\frac{T_0}{T_1}$

$$e = \frac{L}{l} \frac{a}{\frac{T_1^2}{T_0^2} + 1} = \frac{L}{l} \frac{a}{u^2 + 1}, \quad [54]$$

fórmula mucho más simple que la anterior y que hace más fácil la determinación de la amplitud a del movimiento terrestre, pues no hay que conocer el valor exacto del decrecimiento logarítmico.

En igualdad de condiciones (de L , l , T y a) la amplitud del sismograma es tanto mayor cuanto más grande es el período T_0 de las oscilaciones propias del péndulo.

(1) Véase tomo I, pág. 181.

Un tiempo grande de oscilación puede obtenerse con péndulos verticales de gran longitud o con péndulos horizontales.

Vicentini ha construído e instalado en Pavía algunos péndulos verticales con un largo de 20 metros y con una masa de 400 kilogramos. Los péndulos de este tipo pueden moverse libremente en todas direcciones; por una combinación de palancas el desplazamiento se descompone en dos desplazamientos ortogonales.

El péndulo horizontal, que fué construído por primera vez por C. F. Zöllner y perfeccionado sucesivamente por otros, consiste en lo siguiente: Una masa m (fig. 259) es mantenida por un hilo de acero AB y se apoya mediante una barra CD en la punta de un tornillo t .

Si los puntos D y B se encuentran sobre la misma línea vertical el centro de gravedad de la masa m permanece durante su giración siempre sobre el mismo plano horizontal; todas las posiciones son, pues, de equilibrio.

Si la línea BD es, en cambio, inclinada, el centro de gravedad de la masa alcanza su posición más baja cuando los puntos B , C y D se encuentran sobre el mismo plano vertical. Esa posición será la de equilibrio estable.

El momento que tiende a hacer volver el péndulo a su posición de reposo será tanto menor cuanto menor sea la inclinación de aquella línea, inclinación que se regula por medio del tornillo t .

El tiempo de oscilación, que es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la fuerza directriz, puede hacerse así muy grande.

Existen otros tipos de sismógrafos como los del gran sismólogo Wiechert y los de Mainka, los que tan sólo mencionamos dado el objeto de este artículo.

Si el tiempo de oscilación del péndulo es muy grande con respecto a la de la onda terrestre, u es muy pequeño en comparación con la unidad y , por consiguiente,

$$e = \frac{L}{l} a . \quad [55]$$

El desplazamiento del centro de gravedad *con respecto al soporte*, que se mueve con la tierra, será, por la [49],

$$B = a ,$$

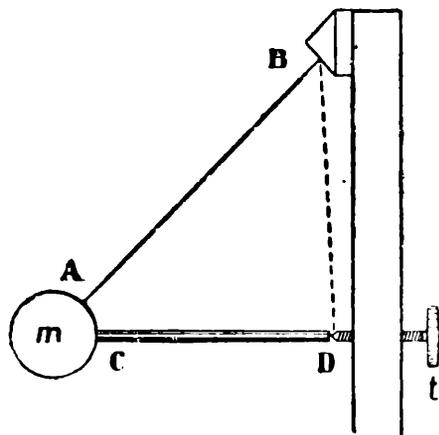


Fig. 259.

lo que significa que la masa queda inmóvil en el espacio. Un péndulo semejante se llama *astático*; los péndulos de Wiechert son de este tipo.

Nosotros hemos deducido la consecuencia de que, cuando T_0 es muy grande con respecto a T_1 , el péndulo no se mueve en el espacio, utilizando las fórmulas obtenidas para el caso de un péndulo aperiódico.

Tal resultado vale, también, si el péndulo carece de amortiguamiento. En este caso es, en efecto,

$$\frac{p}{2m} = 0,$$

y además, por lo supuesto, n_0 despreciable con respecto a n_1 , de modo que la [49] se convierte en

$$e = \frac{L}{l} a,$$

relación idéntica a la [55]. En los péndulos astáticos no hay que preocuparse, entonces, del amortiguamiento.

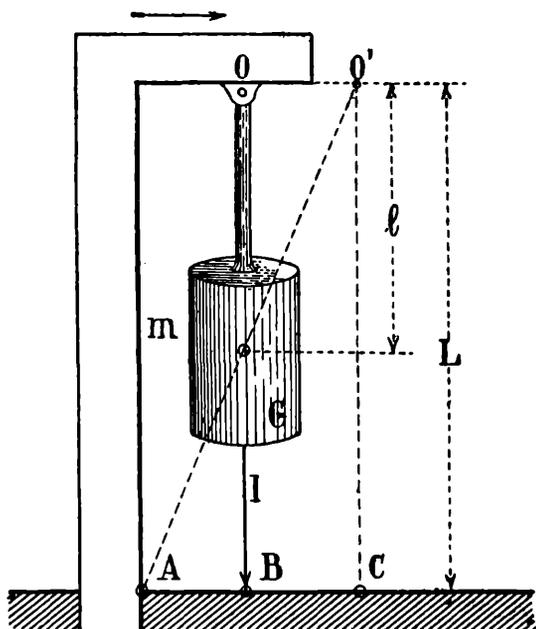


Fig. 260.

La teoría de un péndulo astático puede tratarse de una manera muy elemental.

Sea O (fig. 260) un péndulo suspendido de un soporte fijo en la tierra y supongamos que ésta oscila en dirección AC con un período muy rápido con respecto al de aquél. El centro de gravedad G de la masa m permanecerá en reposo. Si el punto O se desplace hasta O' la extremidad del índice I toca el punto A de la tierra y como el punto que antes estaba en B habrá pasado a C se sigue que si el índice acusa un desplazamiento AB el OO' se calcula por la relación geométrica

$$OO' = AC \cdot \frac{OG}{OB},$$

que no es sino la expresión [55].

En los sismógrafos destinados a la obtención del movimiento vertical se aprovecha, en general, de las oscilaciones forzadas que se

producen en una masa suspendida de un resorte. En la figura 261 se ha representado, esquemáticamente, un aparato de este tipo.

La masa m está fija a una barra que puede girar en un plano vertical alrededor del punto A ; la espiral está aplicada en B . Las oscilaciones pueden inscribirse mediante un índice I en una faja de papel ahumado, que se desplaza en dirección normal a las oscilaciones.

En lo que se refiere a los sismogramas mismos ellos ofrecen aspectos diferentes según la distancia entre el lugar de la perturbación (*hipocentro*) y el punto de observación.

Un impulso cualquiera da lugar a ondas longitudinales y transversales y además a las ondas superficiales de Rayleigh, de las cuales las primeras tienen una velocidad mayor de propagación, siguiendo luego las transversales y por fin las superficiales.

Cuanto menor es aquella distancia tanto menos difieren los instantes de llegada de esas ondulaciones y en el sismograma aparecerán más y más superpuestas.

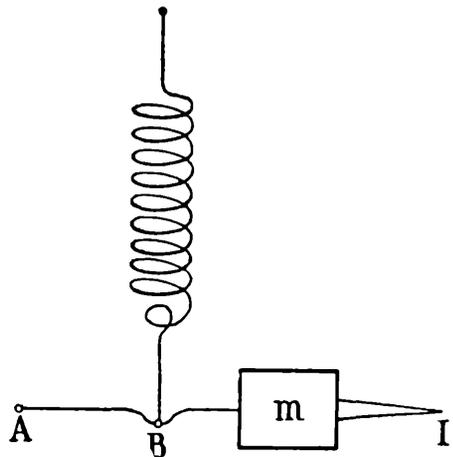


Fig. 261.

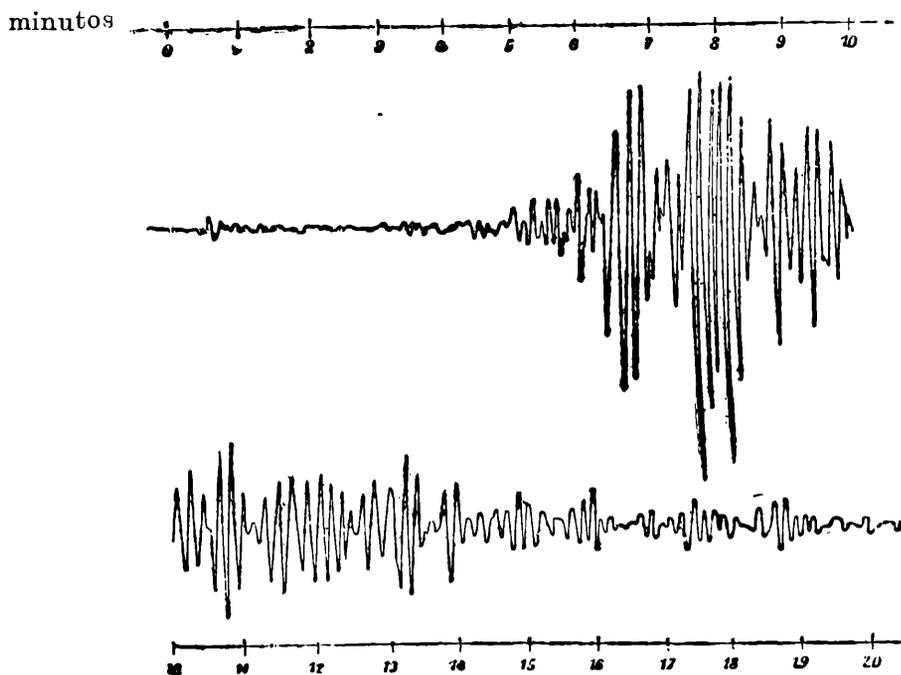


Fig. 262.

A distancias grandes, los tiempos de llegada son bastante distintos como para que los trazos del sismógrafo no se superpongan.

Las ondas longitudinales y transversales son de pequeña amplitud

y de menor tiempo de oscilación que las superficiales y constituyen lo que se llama la *prefase* o *fase inicial* del temblor. La *fase principal* corresponde a la llegada de las ondas superficiales de mayor período y de mucha mayor amplitud; sigue después lo que se llama la *cola* originada por diversas causas, entre otras, quizá, la llegada de ondas reflejadas y difractadas. En la figura 262 se ha representado un sismograma; en la fase principal pueden observarse pulsaciones debidas a que se superponen, en realidad, ondas de períodos diferentes.

Por la diferencia entre los instantes de llegada de las diferentes fases puede calcularse la distancia y el lugar del *epicentro*, es decir, la región situada en la superficie de la tierra sobre la vertical que pasa por el hipocentro.

CAPITULO XV

EL SONIDO. SU ESENCIA Y CARACTERES. INFLUENCIA DE LA VELOCIDAD DE LA FUENTE SOBRE LA ALTURA. PRINCIPIO DE DOPPLER

A. — CARACTERES DEL SONIDO. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

1. **El sonido se origina por un movimiento vibratorio de la materia.** — En el lenguaje común se designa con el nombre de sonido a la vez a las sensaciones que se reciben por el oído como a la causa externa que las determina.

Físicamente consiste en un movimiento vibratorio excitado en un cuerpo, o en una región cualquiera de una porción de materia, que se transmite hasta el oído a través de medios elásticos ponderables.

Habitualmente la excitación llega a los órganos auditivos a través del aire.

Que el sonido se origina en cuerpos oscilantes es un hecho del dominio común. *Se ve* oscilar un diapasón o una cuerda al mismo tiempo que se percibe un sonido que cesa tan pronto como el movimiento de esos cuerpos se extingue.

Un vaso al que se le ha dado un golpe con la punta de un dedo, emite un sonido; sus vibraciones no se observan a simple vista, pero pueden ponerse en evidencia acercando a sus bordes (fig. 263) la masa de un pequeño péndulo; mientras perdure el sonido será arrojada periódicamente en dirección radial.

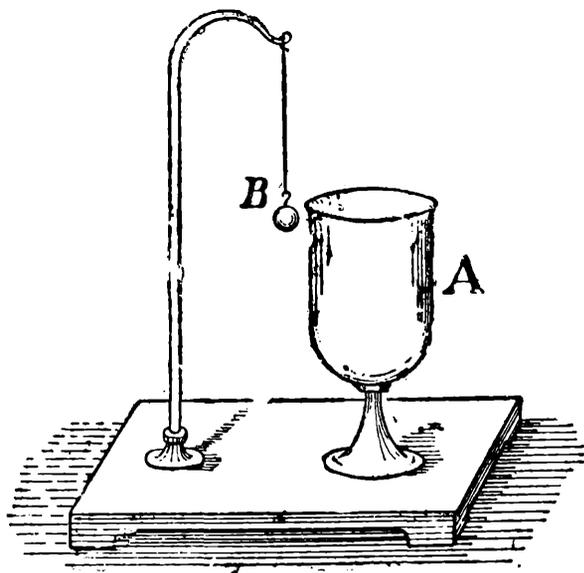


Fig. 263.

Un experimento interesante que ratifica estas conclusiones es el de Trevelyan. Una barra de cobre (fig. 264) lleva en una de sus caras

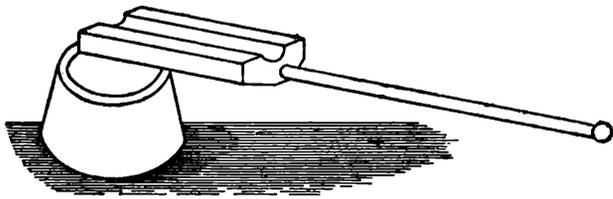


Fig. 264.

dos resaltos longitudinales prismáticos, de tal manera que su corte transversal tiene la forma que muestra la figura 265, y se prolonga en una varilla delgada de hierro que termina en una pequeña esfera.

Si se la calienta a temperatura elevada en un mechero de Bunsen y se la apoya sobre una pieza de plomo en la forma que ilustran las figuras, se percibirá en seguida, en toda la sala, un sonido. Se puede comprobar, sin dificultad, que la barra oscila transversalmente. La causa es la siguiente: tan pronto como una de las aristas de los prismas toca al plomo, pasa hacia éste una gran cantidad de calor; el plomo se dilata bruscamente en el lugar de contacto, impeliendo la barra hacia arriba, que cae del otro lado, haciendo contacto con la otra arista. Este fenómeno se reproduce sucesivamente.

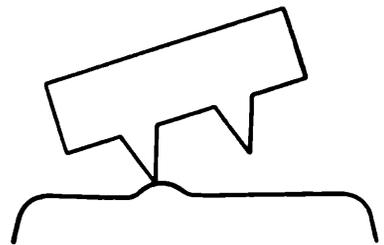


Fig. 265.

Que la propagación requiere la presencia de un medio ponderable

puede demostrarse por la experiencia siguiente, ideada por Otto de Guericke y repetida por Papin en la Sociedad Real de Londres: si se suspende en el interior de un balón, de un hilo muy delgado, una campanilla, figura 266, el sonido se hace más y más débil a medida que se extrae el aire hasta que para un vacío muy elevado no se le percibe.

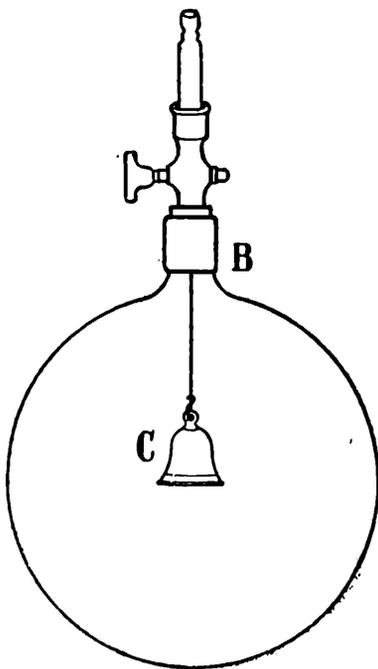


Fig. 266.

No solamente el aire transmite el sonido, sino todas las sustancias elásticas.

Si se deja entrar en el balón vacío de la experiencia anterior, un gas cualquiera, o algunas gotas de un líquido, inmediatamente se propagarán hacia el exterior las vibraciones de la campanilla. Lo mismo sucede si se llena con un líquido.

Que el sonido se propaga a través de los sólidos lo prueba el hecho de que tal ocurre a través de las paredes de vidrio del recipiente.

Muy ilustrativo es el siguiente experimento. Se sitúa un reloj sobre la mesa y se le tapa con algodón o estopa hasta que su sonido no se perciba a través del aire. Si se le toca, entonces, con uno de los extremos de una larga barra metálica, colocando el otro extremo en el oído, se oirá en seguida su tic tac. Lo mismo ocurre si se utiliza una barra de vidrio o de madera.

Se pueden mencionar también los hechos conocidos de que debajo del agua se perciben los sonidos producidos fuera y de que la marcha lejana de una cabalgadura se percibe de una manera muy nítida arrimando el oído al suelo.

2. El sonido es un movimiento ondulatorio.— Hemos dicho y probado que el sonido se origina en cuerpos que vibran y que se transmite a través de la materia ponderable. Nos falta agregar que esa propagación se realiza en forma de un movimiento ondulatorio.

Que el sonido requiere cierto tiempo en pasar de un lugar a otro, es algo que revela la experiencia diaria.

Que la substancia a través de la cual se propaga cumple, en todas partes, un movimiento oscilatorio, puede comprobarse por el siguiente experimento: si se sitúa un *péndulo elástico de Savart*, constituido, fig. 267, por un pequeño péndulo sus-



Fig. 267.

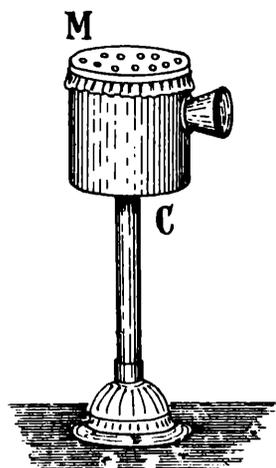


Fig. 268.

pendido de modo que su masa toque en el centro de una membrana tendida en un marco, en las proximidades de un cuerpo que emite un sonido permanente (diapason entretenido electromagnéticamente o flauta excitada por una corriente de aire), se observará que el péndulo es arrojado periódicamente por la membrana.

La explicación del hecho es sencilla. Como las oscilaciones propias de la membrana son amortiguadas, se extinguen después de cierto tiempo.

La excitación permanente del péndulo no puede provenir, entonces, de las oscilaciones propias, sino de oscilaciones forzadas. Es, por consiguiente, forzoso concluir que las masas de aire en contacto con la membrana cumplen un movimiento oscilatorio.

Más cómodo todavía es el aparato representado en la figura 268. La agitación de las pequeñas partículas situadas sobre la membrana pone en evidencia al movimiento oscilatorio.

Koenig, con mucho ingenio, dispone la membrana en contacto con la masa de gas de alumbrado que alimenta un pequeño pico mediante un dispositivo como el representado en la figura 269. Si la membrana está en reposo, la presión en la cápsula es constante, y, por consiguiente, la altura de la llama no varía; si la membrana oscila varía la presión del gas, y, por lo tanto, la longitud de la llama.

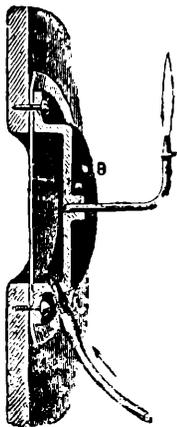


Fig. 269.

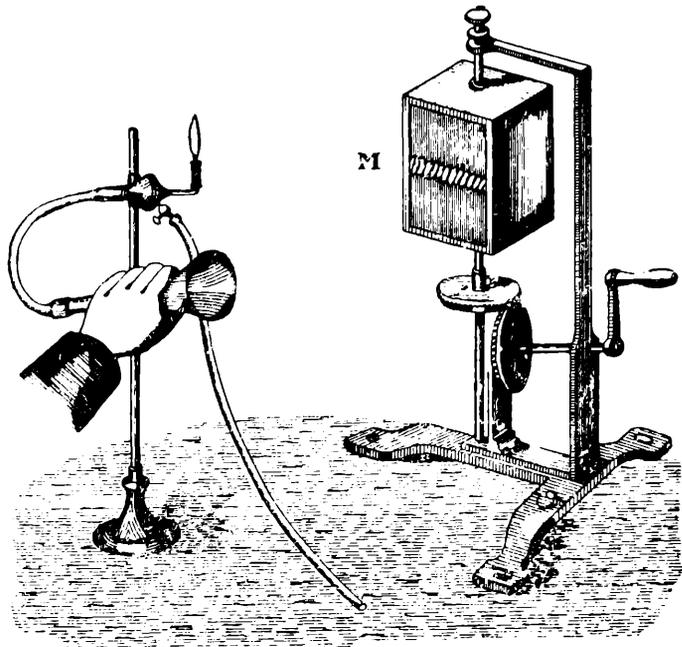


Fig. 270.

Esto no puede comprobarse a simple vista, pues por la persistencia de las impresiones luminosas en la retina, el ojo sólo puede separar imágenes que se

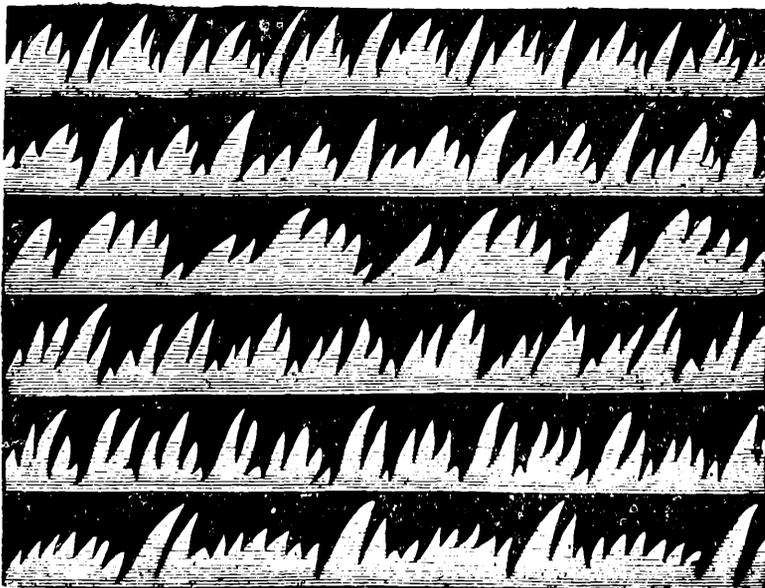


Fig. 271.

forman *en el mismo punto*, si el intervalo de tiempo entre el comienzo de ellas, es por lo menos, de un décimo de segundo. Como, en general, las oscilaciones se suceden muy rápidamente, es imposible percibir aquellos cambios de la llama.

Se recurre, por eso, a la separación de las

a la separación de las

imágenes observando la llama por reflexión en un espejo rotativo

(fig. 270). Las imágenes correspondientes a dos instantes muy

próximos aparecen así en lugares distintos de la retina.

Si no existen vibraciones, la membrana permanece quieta, y se ve en el espejo una banda de luz de contornos lisos, debido a que la altura de la llama permanece constante. Si se produce un sonido, la llama aparece como una sucesión de lenguas, ofreciendo los más variados aspectos, según las características de aquél. La figura 271 ilustra la cuestión.

Estas llamas manométricas facilitan la investigación de muchos fenómenos acústicos.

3. Las tres características de la sensación de sonido y las magnitudes físicas correspondientes.—A. INTENSIDAD.—Al comparar subjetivamente dos sonidos, decimos que uno es más o menos fuerte que el otro o, en un lenguaje menos vulgar, que uno es más o menos intenso que el otro.

La experiencia muestra que el sonido originado por un cuerpo vibrante, por una cuerda o por un diapasón, por ejemplo, es tanto más intenso cuanto mayor es la *amplitud* de las oscilaciones.

B. ALTURA.—Hablamos también de sonidos graves y agudos o de sonidos más o menos agudos. Los músicos hablan de sonidos más o menos *altos*. La experiencia enseña que la *altura* de un sonido depende de la frecuencia de las vibraciones, es decir, del número de las oscilaciones por segundo.

Esto puede ponerse en evidencia de una manera muy sencilla. Hemos indicado ya cómo pueden medirse experimentalmente las frecuencias de varillas rectas o dobladas. Tomando dos diapasones de frecuencias diferentes, se comprobará que el sonido de mayor altura corresponde al diapason de mayor frecuencia.

Puede usarse al mismo fin la rueda dentada de Savart (fig. 272). En ella el sonido es producido por la sucesión de choques de los dientes de una rueda *W*, que gira con determinada velocidad angular, contra el borde de un trozo *C* de cartulina. Cuanto más grande es la velocidad de giración, tanto mayor es la altura del sonido.

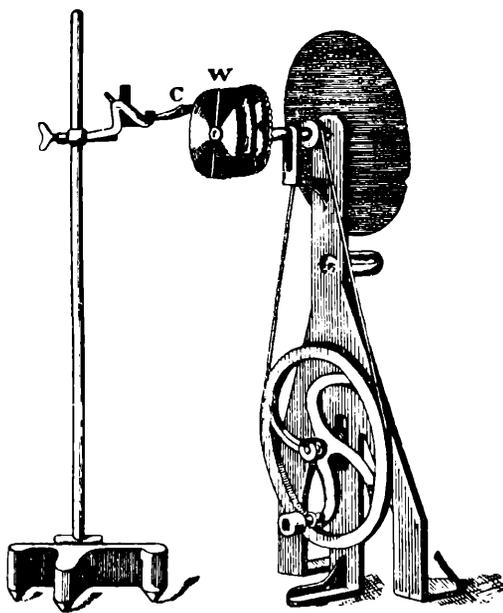


Fig. 272.

Muchos sonidos carecen de una frecuencia bien definida, como por ejemplo los producidos por el disparo de un fusil o por el estallido del trueno; se dicen en tales casos que se trata de un *ruido*.

C. TIMBRE. — El oído percibe en sonidos de la misma altura, sobre todo si provienen de cuerpos en condiciones diferentes, como por ejemplo, las cuerdas de un piano y de un violín, ciertas diferencias que se designan con el nombre de diferencias de tono o de timbre. Como se ha de poner en evidencia más adelante, las vibraciones en los cuerpos consisten en una superposición de oscilaciones de distintas frecuencias. La oscilación de frecuencia más lenta, que se llama fundamental, es, en general, la más intensa y da la altura del sonido.

Dos sonidos de la misma altura pueden diferir, entonces, en las oscilaciones que constituyen el cortejo del sonido principal.

4. **Reflexión del sonido. Eco.** — La reflexión del sonido obedece a las leyes establecidas, de una manera general, para la reflexión de ondas, en el capítulo anterior.

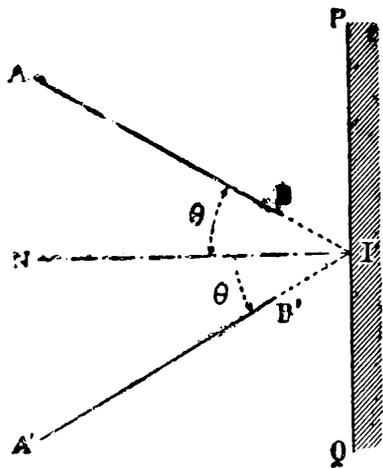


Fig. 273.

Puesto que nos referimos aquí a los fenómenos que se observan en el aire, la onda reflejada será longitudinal lo mismo que la incidente, y valdrá, por lo tanto, la ley ordinaria de la reflexión.

Tanto el fenómeno en sí como la validez de esa ley se ponen de manifiesto por el siguiente experimento. Si se hace incidir un sonido sobre una pared sólida PQ (fig. 273) bajo cierto ángulo de inclinación θ , mandándolo, por ejemplo, por el interior de un tubo representado por la línea AB , se percibirá, de la mejor manera, mediante otro tubo $A'B'$ cuando éste forme del otro lado de la normal el mismo ángulo.

Si se coloca un reloj en la proximidad de un espejo cóncavo (figura 274), en un lugar que indicaremos con P , los rayos reflejados se encontrarán en cierto punto P' que es el conjugado de P , como es fácil comprobarlo mediante la instalación que muestra la figura, desplazando convenientemente el pequeño cono receptor.

Si se coloca un reloj en la proximidad de un espejo cóncavo (figura 274), en un lugar que indicaremos con P , los rayos reflejados se encontrarán en cierto punto P' que es el conjugado de P , como es fácil comprobarlo mediante la instalación que muestra la figura, desplazando convenientemente el pequeño cono receptor.

El sonido se refleja no sólo en las paredes sólidas y lisas sino, como es evidente a la luz de las consideraciones anteriores, siempre que exista una discontinuidad en las propiedades elásticas del medio.

El sonido del trueno, por ejemplo, se refleja, como es sabido, en las nubes.

Los fenómenos de reflexión se producen también cuando varían las condiciones límites de la región donde se propaga el sonido. En un tubo abierto, por ejemplo, se producen reflexiones en sus extremos. Si las ondas reflejadas vuelven al punto de partida, determinan en el oído una sensación idéntica al sonido primitivo, pero más débil, que se designa con el nombre de *eco*.

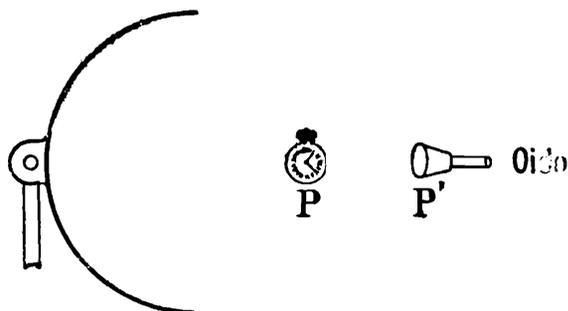


Fig. 274.

A causa de la persistencia de las impresiones sonoras, el oído no distinguirá el sonido reflejado del directo sino cuando el intervalo entre dos percepciones sea por lo menos de un décimo de segundo. La sensación del *eco* no se producirá, por lo tanto, sino cuando el tiempo total de ida y vuelta del sonido reflejado sea, por lo menos, de un décimo de segundo; la pared u objeto reflejante debe encontrarse a la distancia mínima de 17 metros. Si ese tiempo es menor que un décimo de segundo, las sensaciones se superponen en el oído, en cuyo caso se dice que se produce *resonancia*.

Cuando se trata de la voz humana, como no se pronuncian sino cinco sílabas por segundo, durando, por consiguiente, la emisión de una sílaba un quinto de segundo, más o menos, la repetición neta de una sílaba exige que la pared se encuentre a 34 metros de distancia, de dos sílabas 68 metros, y así sucesivamente.

Dos paredes puestas frente a frente una de la otra ocasionan un gran número de reflexiones sucesivas y, por lo tanto, un gran número de *ecos*.

En las salas de conferencias las reflexiones en las paredes y muebles determinan una sucesión de ecos que se superponen a los sonidos directos emitidos poco después, dificultando, a veces, la audición.

Este inconveniente puede subsanarse por medio de colgaduras.

5. Murmullo de las galerías. — La reflexión del sonido da lugar al fenómeno del murmullo de las galerías.

Particularmente interesante es el caso de la galería circular de la catedral de San Pablo.

Según Lord Rayleigh el fenómeno es debido, en este caso, a la continua reflexión de las ondas acústicas en las paredes.

Si en el punto S (fig. 275) se produce un sonido, uno de los rayos seguirá la dirección de la recta SP y será reflejado, sucesivamente, según una serie de cuerdas iguales a PP' , las que tocarán el círculo interior del radio ON ; lo mismo ocurrirá con el rayo que se propaga en dirección SQ' . Los rayos intermedios comprendidos en los ángulos QSP y $Q'SP'$ forman cuerdas menores, y se reflejan, sucesivamente, dando la vuelta a la galería de igual manera que los demás.

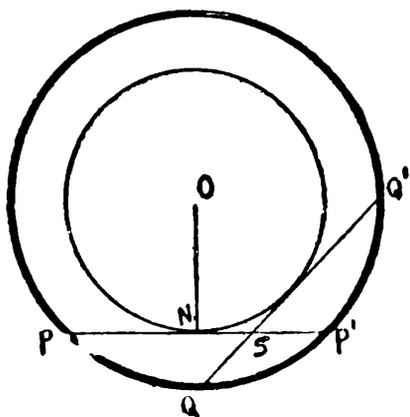


Fig. 275.

Todos los sonidos comprendidos entre las cuerdas PP' y QQ' recorren, pues, la galería, merced a las reflexiones.

Como la energía oscilatoria que se propaga a través de las aberturas laterales es muy pequeña, la intensidad es, en todas partes, de magnitud suficiente para que el sonido se perciba nítidamente.

6. Refracción del sonido. — La prueba experimental de la refracción del sonido ha sido dada por Sondhauss en el año 1852, mediante una lente hueca de Colodio llena de anhídrido carbónico (fig. 276). Rayos acústicos emitidos en un punto F situado sobre el eje principal de aquella venían a concentrarse en el foco conjugado F' , lo que podía comprobarse mediante el oído, con una llama manométrica, o utilizando el aparato representado en la figura 268.

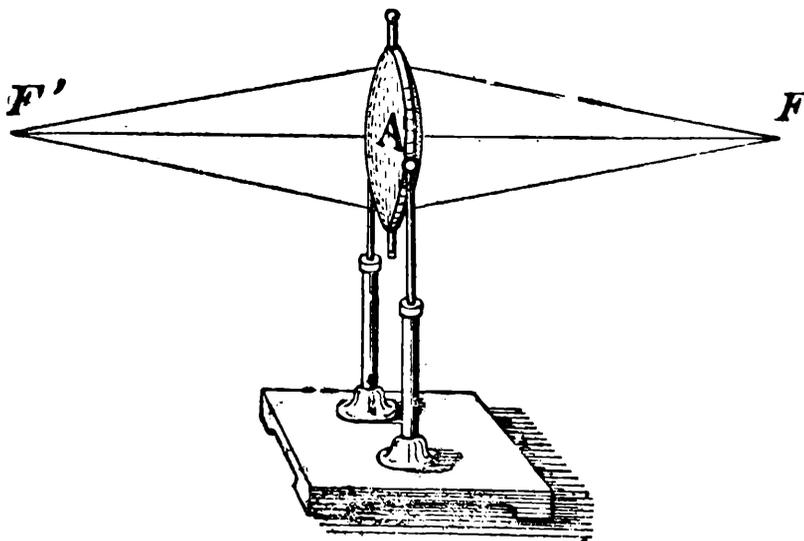


Fig. 276.

La ley que rige el proceso es la [20] de la página 270, lo que ha sido comprobado experimentalmente por Hajeck, en el año 1857, por observaciones a través de un prisma hueco, que llenaba, sucesivamente, con diferentes substancias.

B. — LA VELOCIDAD DEL SONIDO

7. Consideraciones generales. — Como la sensación de sonido es producida siempre por la excitación de la membrana auditiva por ondas longitudinales cuyas frecuencias están comprendidas, como veremos, dentro de ciertos límites, y puesto que la velocidad de propagación no depende de la frecuencia, se entiende como velocidad del sonido en una substancia cualquiera, a la velocidad con que se propagan en ella las ondas de aquella especie.

La relación [33] del capítulo XIV permite calcular su valor en cualquier materia. En la tabla de la página 276 están consignados algunos datos numéricos relativos a cuerpos sólidos.

A. GASES. 1º LA VELOCIDAD TEÓRICA DE PROPAGACIÓN. — Estudiemos ahora la velocidad del sonido en los gases, en el aire sobre todo, lo que es particularmente importante por tratarse del medio que nos transmite las vibraciones de los demás cuerpos, y por ser posible en él, fácilmente, las determinaciones experimentales.

La velocidad de propagación está dada, como ya se vió, por la fórmula

$$v = \sqrt{\frac{\Psi}{\mu}}, \quad [1]$$

donde Ψ es el módulo de compresión, es decir, la constante de proporcionalidad entre el aumento de la presión y la deformación, estando medida esta última por el cociente de dividir la disminución de volumen por el volumen total.

Newton calcula, en su *Principia*, la velocidad del sonido mediante la fórmula que precede, deducida por primera vez por él, calculando la deformación suponiendo que las compresiones y dilataciones del gas, generadas por el movimiento ondulatorio, son isotermas. Con esta suposición, si P y V son la presión y volumen inicial de una masa dada, y $P + p$ y $V - v$ sus valores durante una compresión, debe ser

$$PV = (P + p)(V - v) = PV + pV - vP - pv. \quad [2]$$

Despreciando al producto pv , dado que ambos factores son pequeños se tiene

$$pV = vP,$$

de donde

$$p = \frac{v}{V} \cdot P$$

y, por consiguiente,

$$\Psi^* = P.$$

Así, resulta

$$v = \sqrt{\frac{P}{\mu}}. \quad [3]$$

A la presión atmosférica, es decir, para

$$P = 0,014 \cdot 10^6 \frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2}$$

y a cero grado centígrado, es

$$\mu = \mu_0 = 0,001293 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$$

valores con los que se obtiene para la velocidad del sonido en el aire

$$v = 28 \cdot 10^3 \frac{\text{cm}}{\text{seg}} = 280 \frac{\text{m}}{\text{seg}},$$

mientras que las determinaciones experimentales dan un valor de $330 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$ aproximadamente. Newton explicó este desacuerdo entre su teoría y la experiencia por medio de varias suposiciones que eran, en realidad, muy poco satisfactorias.

Recién en el año 1816 Laplace descubrió la causa de esa discordancia. La suposición de Newton de que las compresiones y dilataciones eran isoterma consiste, en el fondo, en admitir que el calor producido en los lugares comprimidos pasa en seguida a los lugares vecinos, en los cuales, a causa de la dilatación, se ha producido un enfriamiento.

Como las compresiones y dilataciones se suceden muy rápidamente eso no es posible. Laplace deduce de estas consideraciones que el proceso debe ser adiabático.

Las transformaciones adiabáticas de los gases están regidas por la relación de Poisson

$$PV^k = \text{constante}, \quad [4]$$

donde P y V representan la presión y el volumen y k el cociente de dividir el calor específico del gas a presión constante por el calor específico a volumen constante. (Esto se verá en el tomo siguiente).

Diferenciando esa relación, se tiene

$$V^k dP + k P V^{k-1} dV = 0,$$

donde debe considerarse a dV como la variación de volumen ocasionada por la variación dP de la presión; si dP es positivo, dV será negativo. Entiendo a dV como una *disminución* de volumen, se tiene

$$dP = k P \frac{dV}{V}.$$

La constante de proporcionalidad entre la variación de la presión y la deformación es, según eso, kP , y por consiguiente, debe ser

$$\Psi^{\circ} = k P .,$$

con lo que resulta

$$v = \sqrt{k \frac{P}{\mu}} \quad [5]$$

Las determinaciones experimentales dan para la constante k del aire el valor 1,40, con lo que se tiene, a la presión normal:

$$v = 33170 \frac{\text{cm}}{\text{seg}} = 331,7 \frac{\text{m}}{\text{seg}},$$

resultando que concuerda satisfactoriamente con los que se obtienen por medición directa.

2º INFLUENCIA DE LA TEMPERATURA SOBRE LA VELOCIDAD DEL SONIDO EN LOS GASES. — Si se indica con V_0 el volumen de cierta masa gaseosa a la presión normal P_0 y a la temperatura de 0°C , y con V el volumen bajo la presión P y a la temperatura t , vale la siguiente relación (1):

$$P V = P_0 V_0 (1 + \alpha t), \quad [6]$$

(1) Relación que estudiaremos en el tomo de Calor; contiene las leyes de MARIOTTE y de GAY LUSSAC.

donde α es una constante que tiene casi el mismo valor en todos los gases y cuyo valor para el aire es 0,003665.

Aplicando esa relación a la unidad de masa, resulta

$$\frac{P}{\mu} = \frac{P_0}{\mu_0} (1 + \alpha t)$$

si μ y μ_0 representan las densidades en las dos condiciones dadas.

Reemplazando en la [5] se obtiene

$$v = \sqrt{k \frac{P_0}{\mu_0} (1 + \alpha t)} = v_0 \sqrt{1 + \alpha t}, \quad [7]$$

si se indica con v_0 la velocidad del sonido en el gas a la presión de una atmósfera y a cero grado.

Esta relación muestra que, dentro de los límites de validez de la [6], la velocidad del sonido no depende en los gases de la presión sino exclusivamente de la temperatura.

3º LAS DETERMINACIONES EXPERIMENTALES. — Nos ocuparemos aquí de las determinaciones directas en el aire libre.

En ellas se mide el tiempo que tarda el sonido en recorrer una distancia conocida.

La velocidad de propagación de una perturbación ondulatoria se refiere a ejes fijos en la substancia; si ésta se mueve en un sentido cualquiera, la velocidad de propagación *en ella* queda la misma, pero la velocidad con respecto a los ejes en reposo, toma un valor que se obtiene por la regla del paralelogramo.

Como en las observaciones en el aire éste se encuentra, en general, en movimiento, mientras que los lugares de observación son fijos, es necesario, para eliminar la influencia de la velocidad de la sustancia, medir tan simultáneamente como sea posible, los tiempos que tarda la excitación en recorrer una misma distancia en los dos sentidos.

Es fácil demostrar que si el cuadrado de la velocidad del viento es despreciable con respecto al cuadrado de la velocidad del sonido, cualquiera que sea la dirección de la corriente con respecto a la línea que une a los dos puntos de observación, la semisuma de esos tiempos es igual al tiempo que tarda la ondulación en recorrer esa misma distancia en el aire en reposo.

La primera determinación de la velocidad del sonido fué llevada a cabo por el padre jesuíta Mersenne, en el año 1640, quien encontró

un valor de $448 \frac{m}{seg}$; poco después, en 1656, dos miembros de la famosa Academia del Cimento, Borelli y Viviani, realizaron algunas observaciones de las que dedujeron el valor de $351 \frac{m}{seg}$.

En el año 1738 la Academia de Ciencias de París nombró una comisión, en la que figuraba Cassini, a fin de que se ocupase de su medición. Las experiencias fueron realizadas disparando durante la noche, cada media hora, cañones situados en Montmartre y en Montlhéry. Observadores situados en el observatorio de París y en Château de Lay, que se encontraban sobre la misma línea, medían, con el auxilio de péndulos, el tiempo transcurrido entre la percepción del fogonazo y la del sonido de los disparos de la estación respectivamente más lejana.

Como la velocidad de la luz es muy grande con respecto a la del sonido, puede despreciarse el tiempo que tarda en pasar de un punto a otro. Los tiempos medidos pueden considerarse, según esto, como los tiempos que tarda el sonido en recorrer en sentidos opuestos la misma distancia. Resultó, para la velocidad a cero grado, el valor de $332 \frac{m}{seg}$.

En el año 1822 el Bureau des Longitudes nombró una comisión formada por Prony, Arago, Mathieu, Humboldt, Gay Lussac y Bouvard para que se ocupase de su determinación exacta.

La distancia elegida fué la existente entre Montlhéry y Villejuif, que es de 20 kilómetros más o menos.

Se hicieron doce disparos de cañón en cada una de las estaciones, en las que se encontraban, respectivamente, tres observadores (miembros de la comisión) que medían simultáneamente, con el auxilio de cronómetros, el tiempo transcurrido entre la percepción del fogonazo y el del sonido. Resultó, para la velocidad de éste, el valor de 340,9, y como la temperatura era de $15^{\circ}C$, se sigue que, a cero grado, es

$$v_0 = 331 \frac{m}{seg}.$$

De determinaciones realizadas por Moll y Van Beck en el año 1923, cerca de Amsterdam, sobre una distancia de 17.000 metros, por un procedimiento semejante a los anteriores, resultó

$$v_0 = 332,8 \frac{m}{seg}.$$

Regnault ideó un método de medición en el que el tiempo se registra eléctricamente sobre un cronógrafo a diapasón, con el que hizo algunas determinaciones en el año 1864.

Los experimentos en el aire libre, que son los que nos interesan ahora, tuvieron lugar en el polígono de Satory, cerca de Versailles, sobre dos distancias: una de 1280 metros y otra de 2445 metros.

El sonido era producido por un fusil; un hilo situado en su boca, perteneciente a un circuito eléctrico, era cortado por el disparo, quedando registrado ese instante en el cronógrafo.

Las ondas eran recibidas por un tubo cónico cuya abertura de adelante estaba obturada por una delgada membrana de goma, la que, al comenzar a oscilar bajo la acción de aquéllas, interrumpía otro circuito eléctrico, con lo que quedaba registrado también el instante de llegada de la perturbación.

La idea de Regnault fué eliminar los errores provenientes de lo que se llama « ecuación personal » por un procedimiento electromecánico. En realidad, no logró tal cosa, pues la membrana necesita cierto tiempo para alcanzar el desplazamiento que produce la interrupción del circuito y tiene, por lo tanto, también su « ecuación ».

De sus medidas resultó:

$$\text{Sobre 1280 metros: } v_0 = 331,37 \frac{m}{seg} .$$

$$\text{Sobre 2445 metros: } v_0 = 330,71 \frac{m}{seg} .$$

Un método interesante es el ideado por Bosscha, en el año 1853, que fué utilizado posteriormente por Koenig, en París.

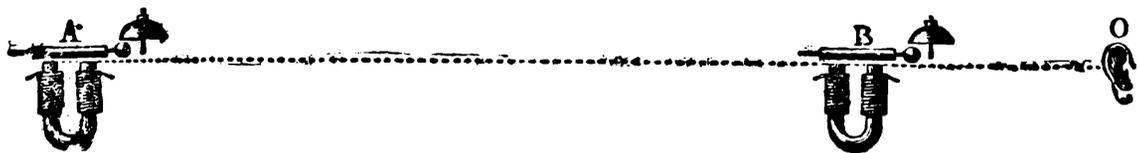


Fig. 277.

Si en dos puntos A y B (fig. 277) se tienen dos sonadores que exacta y simultáneamente dan un golpe cada segundo, el oído puesto en O percibirá golpes producidos al mismo tiempo en instantes diferentes. Si la diferencia entre los caminos OA y OB es igual al espacio que recorre el sonido en un segundo, se oirá un golpe de orden n de B simultáneamente con el orden $n + 1$ de A ; si la distancia fuese doble, coincidirán las sensaciones de golpes cuyo orden difi-

riese en dos unidades. Para la determinación es, entonces, suficiente alejar el sonador *A* hasta que se produzcan algunas de las coincidencias mencionadas u otra cualquiera.

Mediciones realizadas por métodos como los descritos al principio por Stampfer y Myrbach, en el Tirol, entre estaciones situadas a una diferencia de nivel de 1634 metros, y por Bravais y Marti, en el Faulhorn, entre lugares situados a 2079 metros, han dado el valor

$$v_0 = 332,4 \frac{m}{seg}.$$

Esto confirma el resultado obtenido más arriba, según el cual la velocidad de propagación no depende de la presión sino solamente de la temperatura.

B. EN LOS LÍQUIDOS. 1º POR EL CÁLCULO. — La fórmula [1] es, como se dijo, aplicable tanto a los sólidos como a los líquidos y a los gases. Puesto que las compresiones y dilataciones son adiabáticas, debe utilizarse el módulo de compresión adiabático.

Lo mismo que en los gases, la relación entre los módulos de compresión adiabático e isotérmico (que es el que se mide ordinariamente) es igual al cociente entre los calores específicos C_p y C_v a presión constante y a volumen constante. Indicándolos con Ψ_c y Ψ_t , respectivamente, se tiene, según eso,

$$\frac{\Psi_c}{\Psi_t} = \frac{C_p}{C_v} = k. \quad [8]$$

En la teoría del calor deduciremos relaciones que permiten el cálculo de k . En el agua, su valor es igual a la unidad a 4°C y, por lo tanto, a esa temperatura es $\Psi_c = \Psi_t$; a 15° es $k = 1,004$ aproximadamente. Como, por otra parte, el valor de Ψ_t es $2,03 \cdot 10^{10} \frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2}$, resulta de la [1]:

$$v_0 = 1425 \frac{m}{seg},$$

y a 18°

$$v = 1496 \frac{m}{seg}.$$

Las determinaciones experimentales, que mencionaremos a continuación, dan para la temperatura 8,1°C el valor

$$v = 1435 \frac{m}{seg} .$$

La concordancia no puede ser mejor.

2. LAS DETERMINACIONES EXPERIMENTALES. — En el año 1826 Colladon y Sturm determinaron experimentalmente la velocidad del sonido en el agua, por el siguiente procedimiento. En el preciso

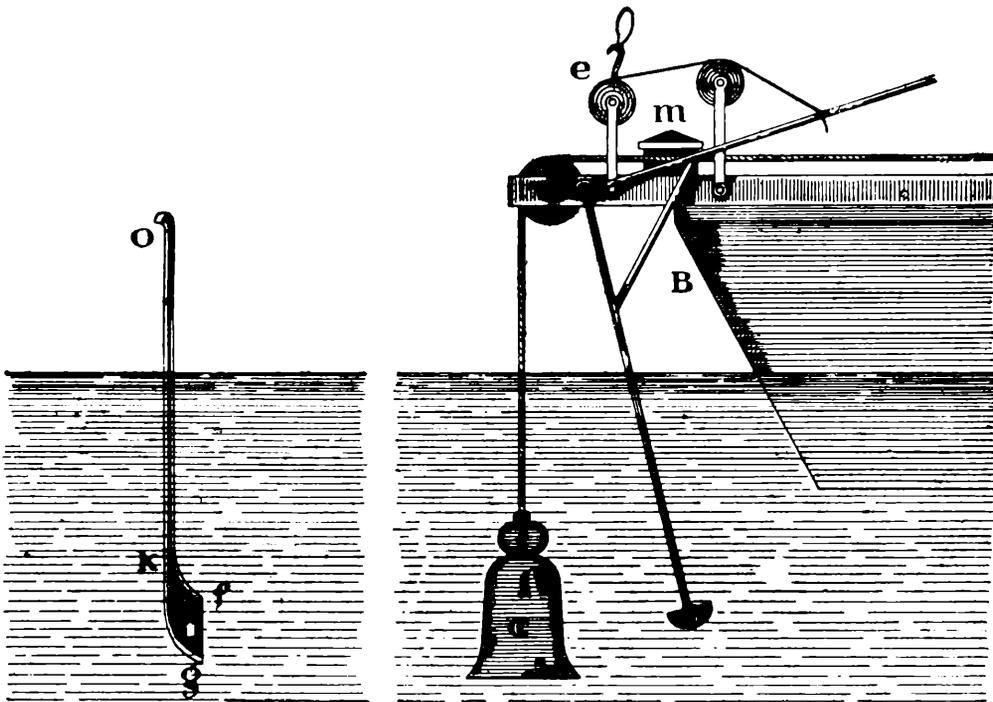


Fig. 278.

instante en que el martillo *b* (fig. 278) golpea la campana *C* situada en el seno del agua, la llama *e* enciende cierta cantidad *m* de pólvora. Un observador, situado a una distancia conocida, mide el tiempo transcurrido entre la percepción luminosa y la acústica que le transmite al oído una trompetilla de abertura *fg* vertical, sumergida en el líquido a la misma altura que la campana.

De esas observaciones resulta el valor $v = 1435 \frac{m}{seg}$ mencionado en el párrafo anterior.

8. **Velocidad del sonido en los tubos.** — Regnault se ocupó también de la determinación de la velocidad del sonido en tubos de diferentes longitudes, que alcanzaron los 4900 metros, y de distintos

diámetros: de 10,8 centímetros hasta 110 centímetros. El método de medida fué el mismo utilizado en las medidas al aire libre.

El sonido fué originado por diversos fenómenos: disparos de pistola con cargas diferentes, explosiones de mezcla de oxígeno e hidrógeno, y por medio de instrumentos musicales.

Hizo observaciones a varias presiones midiendo, además, en todos los casos, la temperatura y el estado higrométrico.

Los resultados fueron los siguientes:

1º La velocidad disminuye con la intensidad del sonido, alcanzando para sonidos débiles, un valor límite. En tubos no muy delgados este valor es casi igual a la velocidad en el aire libre;

2º El límite de la velocidad es el mismo para todas las fuentes;

3º La velocidad crece con el diámetro del tubo, alcanzando un límite superior para tubos muy anchos. Por ejemplo, para el tubo de menor diámetro (10,8 cm) se obtuvo, para un sonido débil, la velocidad $324,25 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$, y para el de 110 centímetros de diámetro el valor $330,3 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$.

Este resultado debía esperarse de antemano, pues la viscosidad del gas, que no es, por otra parte, según parece, la única causante del fenómeno, se hace sentir tanto más cuanto menor es la acción del tubo.

Los resultados de Regnault concuerdan, en parte, con los que se obtienen con una fórmula deducida por Helmholtz, teniendo en cuenta la viscosidad, y perfeccionada por Kirchoff, introduciendo las pérdidas por conductibilidad del calor.

Esa fórmula es:

$$v = v_0 \left(1 - \frac{c}{2 r \sqrt{n}} \right), \quad [9]$$

donde v_0 es la velocidad en el aire bajo las mismas condiciones, r el radio del tubo, n la frecuencia del sonido, y c una constante;

4º La velocidad es independiente de la presión.

Se obtuvo, por ejemplo, el mismo valor para presiones que variaron entre 247 milímetros, y 1267 milímetros.

Regnault da como valor definitivo de la velocidad del sonido en el aire contenido en el tubo más ancho, el siguiente:

$$v = 330,6 \frac{\text{m}}{\text{seg}}.$$

El mismo experimentador, utilizando los mismos tubos, hizo determinaciones con diferentes gases. En la tabla que va a continuación

se dan los resultados obtenidos experimentalmente y por la fórmula [5], según la cual, en dos gases a la misma temperatura y presión, es

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{k_1 \mu_2}{k_2 \mu_1}}$$

si se indican con los subíndices 1 y 2 dos gases cualesquiera :

Substancia	$\frac{v}{v_{\text{aire}}}$	$\sqrt{\frac{k_{\text{aire}} \mu}{k \mu_{\text{aire}}}}$
Hidrógeno	3,801	3,682
Anhídrido carbónico	0,8006	0,8087
Oxido de nitrógeno	0,8003	0,8100
Amoníaco	1,2271	1,3025

Alrededor del año 1888 Violle y Vautier realizaron, en Grenoble, una serie numerosa de determinaciones experimentales en dos conductos paralelos para agua de 6,35 kilómetros de largo y 70 centímetros de diámetro. Utilizaron el mismo método de medición que Regnault, pero dotando a los aparatos de membranas más sensibles.

El resultado obtenido fué

$$v = 331,15 \frac{m}{seg} .$$

C. DETERMINACIÓN DE LA FRECUENCIA

9. Métodos gráficos y estroboscópicos. — En muchos casos es posible medir directamente la frecuencia del cuerpo vibrante por los métodos gráficos y estroboscópico que se han considerado en el capítulo XIII. El sonido que emite, tiene, naturalmente, esa misma altura.

Si ello no es posible, como ocurre, por ejemplo, cuando la fuente del sonido es un pito, puede recurrirse también al método gráfico utilizando el fonógrafo de Edison, del que nos ocuparemos, a propósito de otras cuestiones, en uno de los capítulos venideros.

10. Por el tubo de Kundt. — Este es un método objetivo, extremadamente exacto y cómodo, del que nos ocuparemos más adelante.

11. **La comparación subjetiva.** — La altura de un sonido cualquiera puede determinarse comparando la sensación subjetiva que determina con la que simultáneamente produce otro sonido de altura conocida.

A. SIRENA DE SEE-BECK. — Seebeck utilizó para esta comparación el sonido que se origina por choques sucesivos en el mismo lugar de una masa gaseosa.

La pieza esencial del dispositivo que permite realizarlo es un disco circular metálico *A* (figura 279) provisto de agujeros equidistantes que, por giración, se colocan, sucesivamente, frente al orificio de un tubo *B*, por el que se escapa una corriente de aire.

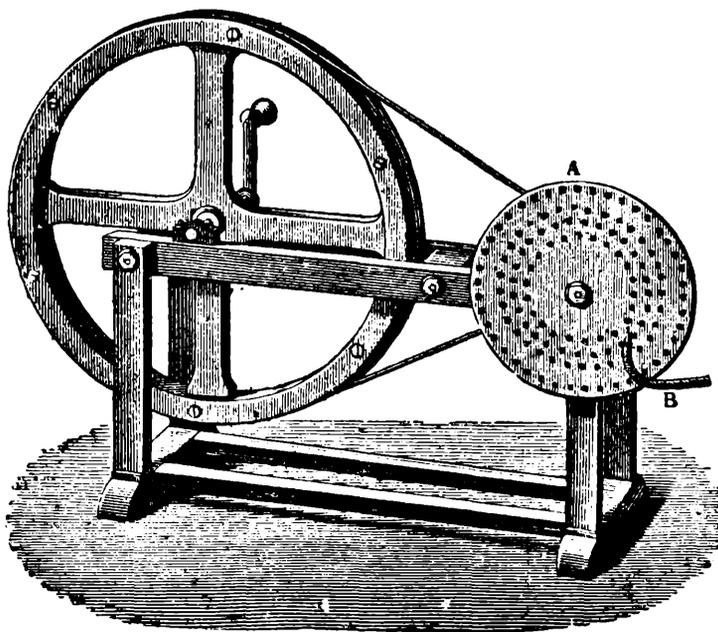


Fig. 279.

A cada coincidencia de las aberturas, el aire exterior recibe el choque del chorro, que cesa cuando el lugar del agujero es substituído por la parte llena.

La sucesión de estos choques origina un sonido cuya altura depende de la velocidad de giración del disco.

Si en un instante dado N es el número de vueltas por segundo, y si n es el número de agujeros, el número de choques y, por lo tanto, la frecuencia del sonido, será Nn .

Para determinar la altura de un sonido se regula la velocidad angular del disco hasta que el sonido emitido dé una sensación muy próxima a la de aquél.

Esto se juzga, de la mejor manera, fijando la atención en las pulsaciones. El oído se encuentra excitado en todo momento por sonidos de frecuencias diferentes; la superposición de ellos da lugar, como ya se vió, a una oscilación cuya amplitud varía periódicamente con el tiempo, siendo este período tanto mayor cuanto menor es la diferencia de los períodos. Cuando las pulsaciones son muy lentas, las frecuencias son muy próximas. Si en ese momento el sonido emitido por la sirena tiene la frecuencia $n_1 + nN$, y M es el número de

pulsaciones que se han contado durante cierto intervalo t de tiempo, la frecuencia buscada tendrá el valor

$$n_0 = n N \pm \frac{M}{t},$$

como resultado de las consideraciones del párrafo 2b del capítulo XIII.

B. LA SIRENA DE CAGNIARD DE LATOUR. — En esta sirena el movimiento del disco móvil se produce por la corriente misma de aire que se escapa a través de orificios practicados en un disco fijo, paralelo y muy próximo al móvil, como enseña la figura 280. El número de aberturas de ambos discos es el mismo y están dispuestas simílicamente, de modo que si un par de ellas coinciden, coinciden todas las demás.

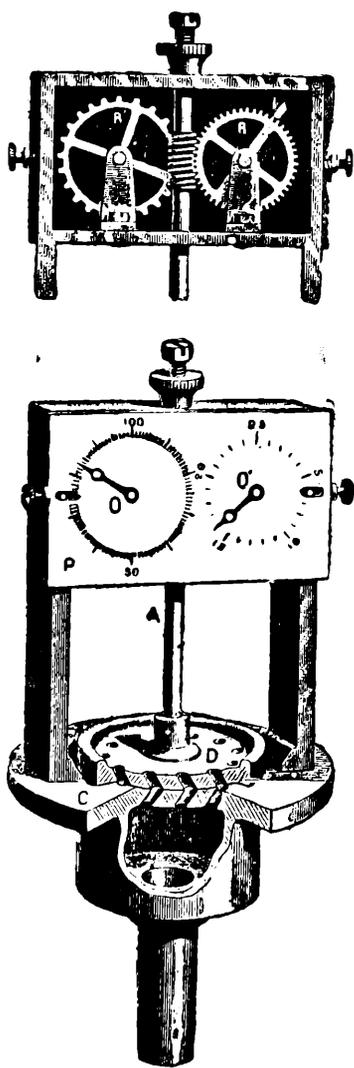


Fig. 280.

Las perforaciones practicadas en planos normales a los radios están inclinadas entre sí, de suerte que, cuando se enfrentan, la corriente de aire, debiendo cambiar de dirección, comunica al disco cierto impulso rotativo, que es tanto mayor cuanto mayor es el número de agujeros.

Cada vez que un agujero móvil enfrenta uno de los fijos, el aire exterior recibe un impulso en ese lugar; la altura del sonido que se genera será igual al producto del número N de revoluciones por segundo por el número n de agujeros. Como las coincidencias se producen simultáneamente en todos los agujeros, los sonidos *de la misma altura* que se generan en los lugares situados sobre las aberturas fijas, no tienen ninguna diferencia de fase; lo mismo ocurrirá con las excitaciones que se producen en el oído, las que se reforzarán recíprocamente.

El número de agujeros del disco fijo permite, entonces, aumentar la fuerza motriz al mismo tiempo que la intensidad del sonido.

En lo que se refiere a la determinación experimental de la altura de un sonido dado, poco hay que agregar después de lo dicho en el párrafo anterior.

Siendo menester conocer el número de revoluciones por segundo, la sirena lleva un dispositivo que permite contar el número de rotaciones que se cumplen en cierto tiempo. Un tornillo sin fin A , que se mueve con el disco, engrana en una rueda R que gira en un diente por cada vuelta de aquél. Cada vez que esta rueda da una vuelta completa, un apéndice lateral I , fijo a ella, encuentra la rueda R' y la hace girar exactamente en un diente. Si el número de dientes de R es 100, la aguja que lleva R' indica en cada uno de sus desplazamientos una centena de vueltas.

La regulación de la velocidad mediante la corriente de aire es dificultosa. Por esto, Cagniard de Latour agregaba al eje un regulador centrífugo a aletas; otros han utilizado un regulador electromagnético aprovechando las corrientes de Foucault, Helmholtz, en cambio, usó siempre en sus investigaciones un motor eléctrico; la corriente de aire producía, solamente, el sonido. Obtuvo así notas de una constancia perfecta.

Es interesante mencionar que la sirena de Cagniard de Latour produce también sonidos, si estando enteramente sumergida en agua, se la acciona por medio de una corriente del mismo fluido.

12. Límites de los sonidos perceptibles. — La experiencia enseña que para que un movimiento vibratorio que llega hasta el oído produzca una sensación sonora, debe tener una frecuencia comprendida dentro de ciertos límites que varían de un ser a otro. Así, por ejemplo, existen muchas personas que no perciben los agudos estridentes del grillo ni el piar de los gorriones.

Los distintos experimentadores han obtenido límites bastante diferentes. La dificultad reside en que no es fácil la producción de sonidos bien *puros*, esto es, desprovistos de armónicas; ha ocurrido que cuando el observador creía percibir el sonido de menor frecuencia o fundamental, percibía, en realidad, uno de los que forman su cortejo.

Savart ha deducido, de experiencias que realizara con su rueda dentada, para el límite superior, el valor de 24.000 oscilaciones por segundo.

Despretz, utilizando diapasones construídos por Marlove, encontró el valor de 36.864, y Appun 40.960. Koenig ha encontrado, en cambio, utilizando las vibraciones longitudinales de las barras, el valor 16.384. Este último no halló persona alguna que pudiese percibir el movimiento ondulatorio producido por una barra que vibraba con la frecuencia 24.576.

Los diapasones y barras ofrecen el grave inconveniente de que oscilan, a la vez, longitudinalmente y transversalmente.

Determinaciones relativamente modernas efectuadas con el pito ideado por Galton, que produce vibraciones de una frecuencia hasta de 50.000, enseñan que el límite superior es muy próximo a 16.000. Las ventajas del empleo de esta fuente de sonido consiste en que se pueden producir sonidos muy intensos, constantes, y bastantes puros.

En las medidas llevadas a cabo con ese pito, la frecuencia se ha medido objetivamente, produciendo ondas estacionarias en el tubo de Kundt. Se revelaba así la existencia de un intenso movimiento ondulatorio, cuando el oído no percibía absolutamente nada.

El límite inferior corresponde a una frecuencia que va de 16 a 20 oscilaciones por segundo.

D. — INFLUENCIA DEL MOVIMIENTO DE LA FUENTE O DEL OBSERVADOR SOBRE LA ALTURA DEL SONIDO. PRINCIPIO DE DOPPLER

13. Generalidades. — Es un hecho de la experiencia diaria que si un cuerpo que emite un sonido se mueve con respecto al observador, la altura que éste percibe es mayor que la correspondiente al estado de reposo relativo. Todo el mundo ha podido observar durante el pasaje de una locomotora, que la frecuencia del sonido del pito parece aumentar al acercarse y disminuir al alejarse aquélla.

Doppler ha sido quien ha aplicado y calculado este fenómeno por primera vez en el año 1842.

Si la fuente se acerca al observador, de las ondas emitidas en un segundo, a partir de cierto instante, deben llegar a un mismo punto (el oído u otro medio objetivo de observación), a partir del instante en que llega la primera, en un intervalo menor que un segundo, puesto que el camino que debe recorrer disminuye de impulso a a impulso.

El número de impulsos recibidos por segundo es, pues, mayor, y el sonido aparece como si fuese de más altura.

Lo contrario ocurre si la fuente se aleja. El mismo fenómeno se produce si la fuente está quieta y el observador se mueve.

Estos fenómenos se calculan muy fácilmente.

A. LA FUENTE SE MUEVE. — Supongamos, para más sencillez, que la fuente se mueve con la velocidad u sobre una línea recta, y que el observador se encuentra en un punto cualquiera de ella. Sea (fig.

281) F la posición de la fuente en cierto instante t , O la del observador y el movimiento ocurra en el sentido que muestra la flecha.

Después de un segundo, es decir, en el instante $t + 1$, la fuente se encontrará en un



Fig. 281.

punto tal como el F' , si $FF' = u$, habiendo emitido durante ese camino n ondas, si n es la frecuencia verdadera del sonido.

La primera de esas n ondas, emitida desde F , llega al punto O en el instante

$$t' = t + \frac{FO}{v}$$

si v indica, como hasta ahora, la velocidad de propagación del sonido; la enésima, que parte de F' , llegará en el instante

$$t'' = t + 1 + \frac{F'O}{v} = t + 1 + \frac{FO}{v} - \frac{FF'}{v}$$

o

$$t'' = t + 1 + \frac{FO}{v} - \frac{u}{v}.$$

Las n ondas llegan a O dentro del intervalo τ de tiempo dado por la relación

$$\tau = t'' - t' = 1 - \frac{u}{v}.$$

En un segundo llegan al oído, por lo tanto, un número n' de ondas dado por la expresión

$$n' = \frac{n}{1 - \frac{u}{v}}. \quad [10]$$

Si la fuente se acerca al observador, como se ha supuesto, será, pues, $n' > n$ y el sonido aparece como de mayor altura.

Si la fuente se aleja de O con la velocidad u , se obtiene, por la misma deducción, bastando cambiar u por $-u$, la relación

$$n'' = \frac{n}{1 + \frac{u}{v}}. \quad [11]$$

El sonido aparece, pues, en este caso, como de menor altura.

B. LA FUENTE ESTÁ EN REPOSO Y EL OBSERVADOR SE MUEVE. — Supongamos que el observador se mueve hacia la fuente, supuesta fija en F (fig. 282), con la velocidad u ; en un segundo pasará de una posición tal como O a la

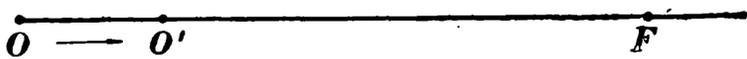


Fig. 282.

posición tal como O a la O' , siendo $OO' = u$.

Un impulso que llega al observador, mientras se encuentra en O , en el instante t' , debe haber sido emitido de F en el instante

$$t_1 = t' - \frac{FO}{v}$$

mientras que el que llega cuando se encuentra en O' , en el instante $t + 1$, debe haber partido de F en el instante

$$t_2 = t' + 1 - \frac{FO'}{v}.$$

El número de impulsos que llegan al observador mientras pasa de O a O' , es decir, en un segundo, son todos emitidos de F en el intervalo de tiempo

$$t_2 - t_1 = 1 + \frac{FO - FO'}{v} = 1 + \frac{OO'}{v} = 1 + \frac{u}{v}.$$

Como F emite n ondas por segundo, en el tiempo $t_2 - t_1$ emite un número

$$n' = n \left(1 + \frac{u}{v} \right) \quad [12]$$

que es la frecuencia que se percibe. La altura del sonido parece, pues, mayor.

Si el observador se aleja de la fuente, se obtiene, cambiando u por $-u$:

$$n'' = n \left(1 - \frac{u}{v} \right), \quad [13]$$

lo que demuestra que la altura del sonido aparece disminuída.

Llama a primera vista la atención que para la misma velocidad relativa los resultados son diferentes, según que sea la fuente o el observador el que se mueve.

Existe una contradicción que es sólo aparente, pues, en realidad, hay que considerar la posición relativa no de dos sino de tres elemen-

tos: la fuente, el observador y el medio. En los casos considerados se encuentra en reposo, una vez el observador y el medio, y otra la fuente y el medio.

Al primero sería equivalente otro en el cual el centro de excitación estuviese en reposo y el observador y el medio se moviesen en sentido contrario con la misma velocidad.

Al segundo caso, sería equivalente uno en el que el observador estuviese en reposo y la fuente y el medio se desplazasen.

14. Experimentos y comprobaciones experimentales.—Fizeau ha ideado una experiencia por la cual se puede mostrar de una manera muy simple, el fenómeno de Doppler. Produce, para ello, el sonido de una manera inversa a la utilizada por Savart en su rueda dentada; la cartulina gira fija a una polea (fig. 283) y choca con dientes fijos situados horizontalmente. La experiencia resulta de la mejor manera situando dos series de dientes idénticos en posiciones opuestas.

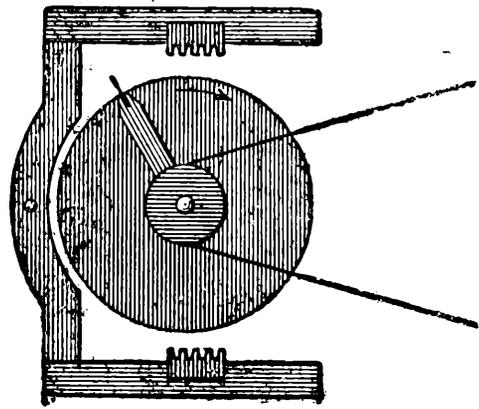


Fig. 283.

Si la polea gira en el sentido indicado en el dibujo, un observador situado a la derecha notará el sonido que se produce en los dientes de arriba más agudo que el producido abajo; lo contrario ocurre si se coloca a la izquierda.

Koenig ha recurrido, para mostrar el mismo fenómeno, a una experiencia muy sencilla a la par que ingeniosa: se toman dos diapasones de la misma frecuencia y se les somete, por extensiones y pliegues repentinos de los brazos, a un movimiento de vaivén alternado; cuando un diapasón se aleja del cuerpo, el otro se acerca. Se perciben en seguida pulsaciones, porque los sonidos correspondientes que percibe el oído difieren, a causa de aquel fenómeno, de la frecuencia verdadera.

Las fórmulas deducidas anteriormente han sido comprobadas experimentalmente por Buys Ballot, por medidas realizadas en el camino de hierro de Utrech a Maarsen, en el año 1845, y por M. Scott Russell, en la misma época.

M. Vogel retomó las experiencias de Buys Ballot, en el año 1876, efectuando una serie de observaciones en el camino de hierro que va de Colonia a Munden. Sus medidas ratifican las anteriores.

E. — INTENSIDAD DEL SONIDO

15. Definición. Fórmula de Rayleigh. — Se define como intensidad del sonido en un punto, a la energía mecánica vibratoria que pasa en un segundo a través de una superficie de un centímetro cuadrado colocada en él, normalmente a la dirección de los rayos acústicos.

Si consideramos una onda plana, esa energía es la que se encuentra contenida en un paralelepípedo rectangular de un centímetro cuadrado de sección y de una longitud numéricamente igual a la velocidad v del sonido. Si M es la masa, que supondremos de aire, contenida dentro de esa figura, a la amplitud de las oscilaciones y n la frecuencia, la energía vibratoria tiene el valor

$$E = 2 \pi^2 n^2 a^2 M , \quad [14]$$

según se ha visto en el primer tomo.

Eliminemos la amplitud, introduciendo la velocidad máxima, que indicaremos con u , de las masas gaseosas. Es

$$u_m = 2 \pi a n , \quad [15]$$

pues la velocidad de un móvil que se mueve uniformemente sobre un círculo de radio a con la frecuencia $n = \frac{1}{T}$ es

$$\frac{2 \pi a}{T} = 2 \pi a n , \quad [16]$$

velocidad que es igual a la máxima del movimiento de sus proyecciones sobre uno cualquiera de sus diámetros.

Es, además,

$$M = v \mu , \quad [17]$$

si μ es la masa específica del aire, pues el volumen del paralelepípedo es, por lo supuesto, igual a v .

Introduciendo en la [14] las relaciones [15] y [17], resulta

$$E = 2 \pi^2 \mu n^2 a^2 v = \frac{1}{2} \mu v u_m^2 . \quad [18]$$

Por las relaciones [13] de la página 274, se tiene:

$$\frac{u_m}{p_m} = \frac{v}{\Psi^*} = \frac{v}{kP}, \quad [19]$$

donde p_m es la variación máxima de la presión cuyo valor es P , y k la relación entre los calores específicos a presión y volumen constante.

Eliminando u , entre las [18] y [19] se obtiene, finalmente,

$$E = \frac{1}{2} \mu \frac{v^2}{k^2} \left(\frac{p_m}{P} \right)^2 \quad [20]$$

que es la fórmula de Lord Rayleigh.

La energía contenida en un centímetro cúbico, que indicaremos con J , es

$$J = \frac{E}{v} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{v}{k} \right)^2 \left(\frac{p_m}{P} \right)^2. \quad [21]$$

Todas las magnitudes que figuran en la [21] son accesibles a la medición directa y se puede determinar así, por la medida de p_m , la intensidad del sonido en un lugar cualquiera.

Se ha hecho la deducción suponiendo planas a las ondas; el mismo resultado se obtiene, naturalmente, para ondas esféricas, en cuyo caso debe efectuarse, para calcular E , una integración, puesto que la amplitud varía con la distancia.

En la definición objetiva de la intensidad del sonido queda precisada la influencia de la amplitud del movimiento.

16. Métodos de medida. — A. METODO DE M. WIEN. — No entraremos en todos los detalles de este método; indicaremos solamente, en líneas generales, el procedimiento.

M. Wien toma un resonador esférico (fig. 284), cuya abertura, un poco agrandada, cierra con una cápsula de un barómetro aneroide cuya frecuencia sea muy próxima al sonido fundamental de aquél.

Si inciden ondas sonoras, la cápsula vibra; las oscilaciones se transmiten, por el dispositivo que se ve en el dibujo, a una delgada varillita de acero que lleva un pequeño espejo S . Las observaciones se realizan enfocando con un telescopio, a través del espejito S , una ranura luminosa; si el sistema vibra, ésta aparece como si fuese una banda.

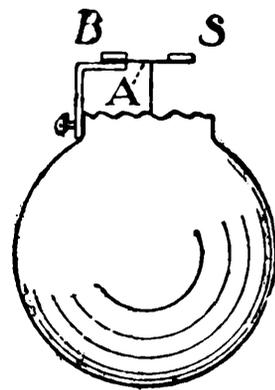


Fig. 284.

Este ensanchamiento debe ser, de acuerdo con la teoría de las oscilaciones forzadas proporcional a la *amplitud de la variación de la presión*, vale decir, a p_m .

M. Wien determina experimentalmente el factor de proporcionalidad comparando ese resonador con otro idéntico, cerrado con una membrana cuya frecuencia sea mucho mayor que la de su nota fundamental ⁽¹⁾.

B. MÉTODO DE LORD RAYLEIGH. — Lord Rayleigh ha mostrado que un disco que se encuentra en un medio donde se propagan ondas acústicas, tiende a colocarse normalmente a la dirección de los rayos.

La teoría enseña que en un disco circular delgado de radio r (unos dos milímetros), que forma con la dirección de los rayos el ángulo Θ , está sometido a un momento

$$\mathcal{M} = \frac{8}{3} \pi^2 \mu n^2 a^2 r^3 \cdot \text{sen } 2 \Theta . \quad [22]$$

Introduciendo en la [18] el valor de $\pi^2 \mu n^2 a^2$, que resulta de esta última, se obtiene para la intensidad del sonido el valor

$$E = \frac{3}{4} \frac{\mathcal{M}}{r^3} \frac{v}{\text{sen } 2 \Theta} . \quad [23]$$

La determinación experimental se puede hacer utilizando como disco circular un espejito suspendido de un fino hilo de cuarzo. La fuerza directriz D se determina por el procedimiento indicado en la página 352 del primer tomo.

El ángulo φ en que gira el sistema bajo la acción de las ondas se mide con antejo y escala; el valor de \mathcal{M} es, como se sabe, $D\varphi$. El valor de A se determina también ópticamente. Con estos datos se calcula en seguida el valor de E .

Existen algunos otros métodos, sobre los que no nos ocuparemos para no salir del margen que corresponde a la presente obra.

17. La intensidad fisiológica o subjetiva. — La excitación que producen las ondas acústicas en la membrana auditiva depende, naturalmente, de la amplitud de las oscilaciones del medio elástico. Λ

⁽¹⁾ Véase, por ejemplo, WINKELMANN, *Handbuch der Physik, Zweiter Band Akustik*.

esa excitación corresponde una sensación cuya intensidad denominamos intensidad fisiológica o subjetiva.

De esto se sigue, necesariamente, que la intensidad fisiológica depende de la intensidad objetiva, puesto que ésta es función de la amplitud.

Nuestro lenguaje se ha tornado menos preciso, pues estamos abandonando el terreno de la física para entrar en el de la psicología.

En la psicología la dependencia de que venimos ocupándonos está regida por la llamada ley de Weber y Fechner, muy discutida por filósofos y psicólogos.

Esta ley dice: El valor absoluto de la intensidad de una sensación aumenta en cantidades iguales muy pequeñas, si la excitación es incrementada en valores relativos iguales entre sí y muy pequeños.

Supongamos que en un instante dado a la excitación E corresponde la sensación S . Si E aumenta en una magnitud dE (diferencial de E) muy pequeña, su incremento relativo es $\frac{dE}{E}$.

Si dS (diferencial de S) es el aumento muy pequeño de la sensación, la ley se formula matemáticamente por la relación

$$dS = c \frac{dE}{E}, \quad [24]$$

donde c es una constante. En efecto, si se parte de dos pares de valores correspondientes de la sensación y de la excitación, que indicaremos con E_1 y S_1 , E_2 y S_2 , y se incrementan las excitaciones en cantidades relativas iguales, es decir, de modo que sea

$$\frac{dE_1}{E_1} = \frac{dE_2}{E_2}, \quad [25]$$

los incrementos dS_1 y dS_2 de las sensaciones, debe ser, de acuerdo con la enunciación de la ley, iguales, esto es

$$dS_1 = dS_2, \quad [26]$$

lo que es posible únicamente si dS_1 y dE_2 admiten la misma constante de proporcionalidad con el incremento relativo, correspondiente, de la excitación.

En la prueba subjetiva de esta ley no se comprueba que dos diferencias de sensaciones sean iguales, sino que se admiten, en realidad, como iguales.

18. Sensibilidad del oído. — El oído humano percibe movimientos ondulatorios de amplitudes pequeñísimas.

Lord Rayleigh ha realizado el experimento siguiente: produjo, por medio de un pito, un sonido de 2730 vibraciones, mediante un chorro de aire de 196 centímetros cúbicos por segundo, proveniente de una masa gaseosa mantenida a la sobrepresión de 9,5 centímetros de agua; el sonido se percibía hasta la distancia de 820 metros.

La amplitud teórica a esta distancia se calcula fácilmente. El trabajo gastado por segundo para hacer sonar el pito en gramos por centímetro era, de acuerdo con los datos dados,

$$A = 9,5 \times 196 \text{ gr} \cdot \text{cm} \text{ (1)}$$

o en ergs

$$A = 9,5 \times 196 \times 981 \text{ erg}.$$

Por otra parte, la energía vibratoria que pasa por segundo a través de una superficie esférica de radio R es

$$E = 4 \pi R^2 E ,$$

si E es lo que pasa a través de un centímetro cuadrado o, lo que es lo mismo, la intensidad del sonido a la distancia R .

Se tiene, entonces,

$$E = 8 \pi^3 \mu R^2 n^2 a^2 v , \quad [27]$$

magnitud que debe ser igual a A . Despejando a y escribiendo para μ , n y v sus valores, y para R el valor $820 \cdot 10^2$ centímetros, resulta

$$a = 8,1 \cdot 10^{-8} \text{ cm} \quad [28]$$

como amplitud del movimiento vibratorio que percibe todavía el oído humano. En la deducción se supone que todo el trabajo gastado por la dilatación del gas se convierte en energía acústica, lo que no ocurrirá; la amplitud perceptible será, pues, todavía menor.

(1) Como se verá en el volumen siguiente, lo que por otra parte es muy sencillo de probar, el trabajo que hace un gas al dilatarse es igual a la presión exterior por el incremento del volumen.

En otra experiencia, Rayleigh utilizó un diapasón cuyo decrecimiento logarítmico conocía; dada una amplitud inicial era suficiente medir el tiempo para el cual dejaba de percibirse el sonido. Por ese método encontró, para una frecuencia de 256, el valor $a=12,7 \cdot 10^{-8}$ cm y aproximadamente lo mismo, para la frecuencia de 512. Este resultado ha sido confirmado por experiencias realizadas en el año 1907.

M. Wien, utilizando otros métodos, ha encontrado para el mínimo perceptible de la amplitud, valores mucho menores y que ese valor disminuye rápidamente si aumenta la altura.

CAPITULO XVI

SUPERPOSICION DE ONDAS. ONDAS ESTACIONARIAS VIBRACIONES DE LAS CUERDAS, DE LAS BARRAS, DE LOS TUBOS Y DE LAS PLACAS

A. — SUPERPOSICIÓN DE ONDAS. ONDAS ESTACIONARIAS

1. Superposición de ondas de la misma frecuencia que se propagan en igual dirección y sentido.—Si en un medio elástico se propagan dos ondulaciones en la misma dirección, el movimiento resultante se obtiene por el principio de superposición.

Tal principio es válido, como se desprende de las consideraciones de la página 94 del tomo I, siempre que la fuerza elástica que actúa sobre las partículas, correspondiente a la suma de los desplazamientos componentes, sea igual a la suma de las fuerzas que originan cada uno de ellos por separado; idéntica cosa ocurre, como es notorio, con las aceleraciones.

Esto sucede siempre que la deformación caiga dentro de los límites de perfecta elasticidad, lo que supondremos en lo sucesivo. La velocidad de propagación será, además, como consecuencia de esto, una constante, independiente de la amplitud y de la frecuencia, definida por el módulo de elasticidad respectivo de la substancia.

El movimiento de uno cualquiera de los puntos es la suma — en el caso opuesto, algebraica — de los movimientos que le imponen cada una de las ondas componentes, vale decir, las elongaciones resultantes son, en todo instante, iguales a la suma de las elongaciones que originarían las perturbaciones componentes si actuaran solas.

Puesto que, según se vió en el capítulo XIII, dos oscilaciones simples paralelas de la misma frecuencia originan una oscilación también sinusoidal y del mismo período, y cuya amplitud depende de la diferencia de fase, se sigue:

1º Que dos ondas sinusoidales de igual longitud que se propagan en la misma dirección y sentido dan, por superposición, una onda sinusoidal de igual longitud que se propaga en la misma dirección.

2º Que la amplitud de la ondulación resultante depende, esencialmente, de la diferencia de las fases, siendo igual a la suma de las amplitudes de las ondas componentes cuando esa diferencia es cero, e igual a la diferencia de las mismas cuando esa diferencia es π .

Estos resultados son evidentes, pues si las ondas simples no son sino la propagación del movimiento oscilatorio de un punto, la onda resultante puede considerarse también, por lo que precede, originada por un movimiento oscilatorio de igual frecuencia de un elemento material.

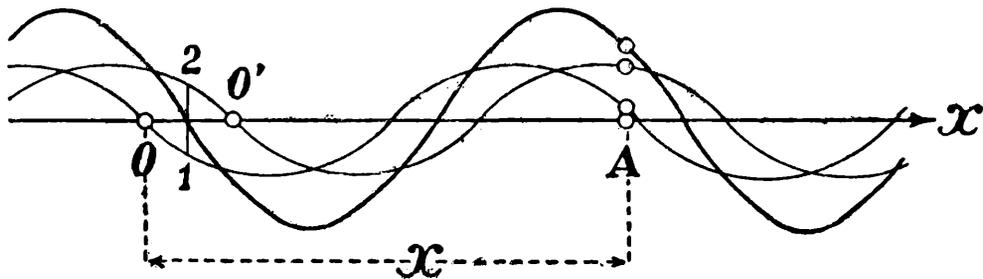


Fig. 285.

Discutamos ahora el problema matemáticamente. Representen los trazos delgados (fig. 285) las ondas componentes, que para mayor sencillez, se han supuesto planas; sean, además, desiguales sus amplitudes.

Si se empieza a contar el tiempo, en lo que a la onda 1 se refiere, a partir del instante en que el punto O pasa por la posición de reposo, el estado de movimiento de un punto A cualquiera, en el instante t , estará representado por la ecuación del rayo

$$y_1 = a_1 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) = a_1 \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \quad [1]$$

si a_1 es la amplitud del movimiento, T el período, λ el largo de onda y v la velocidad de propagación.

Si en lo que atañe a la onda 2 se empieza a contar el tiempo a partir del momento en que el punto O' pasa por la posición de reposo, la elongación de A , en el instante t , estará dada por la ecuación

$$y_2 = a_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{O'A}{v} \right).$$

Si se escribe

$$OO' = d$$

se tiene

$$y_2 = a_2 \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x-d}{v} \right)$$

o

$$y_2 = a_2 \cdot \text{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x-d}{\lambda} \right). \quad [2]$$

La magnitud d se llama *diferencia de marcha* de ambas ondas, que proviene de la desigualdad de las fases de las oscilaciones componentes, siendo igual al camino en que se propaga la excitación en el intervalo de tiempo que corresponde a su diferencia. En efecto, la diferencia de las fases de las oscilaciones de un punto cualquiera — pues para todos tiene el mismo valor — es

$$\frac{2\pi d}{\lambda} = \frac{2\pi d}{v T} \quad [3]$$

en fracciones de π . El tiempo que es menester para que el punto describa ese argumento es

$$\tau = \frac{d}{v}, \quad [4]$$

lo que resulta teniendo presente que se requiere el tiempo T para describir el ángulo 2π . Esa relación muestra, al mismo tiempo, que, como se dijo, la diferencia de marcha d es el camino que recorre una de las perturbaciones en el tiempo τ .

Por el principio de superposición la onda resultante estará representada por la expresión

$$y = y_1 + y_2 = a_1 \cdot \text{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + a_2 \cdot \text{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x-d}{\lambda} \right) \quad [5]$$

que se convierte, fácilmente, en

$$y = \left(a_1 + a_2 \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} \right) \cdot \text{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + a_2 \cdot \text{sen} 2\pi \frac{d}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Si se escribe

$$a_1 + a_2 \cdot \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = A \cdot \cos 2\pi \frac{D}{\lambda} \quad [6]$$

$$a_2 \cdot \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} = A \cdot \sin 2\pi \frac{D}{\lambda},$$

es decir,

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cdot \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} \quad [7]$$

y

$$\sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{a_2}{A} \cdot \sin 2\pi \frac{d}{\lambda}, \quad [8]$$

resulta

$$y = A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - D}{\lambda} \right). \quad [9]$$

Puesto que, por la constancia de d , A y D , son constantes, como se desprende de las relaciones [7] y [8], la ecuación [9] dice que la ondulación resultante es también sinusoidal y del mismo período que las componentes.

Su amplitud depende de la diferencia de marcha. Si $\cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = +1$, lo que sucede si $d = 0, \pm \lambda, \pm 2\lambda, \pm 3\lambda$, etc., es $A = a_1 + a_2$. Si $\cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = -1$, lo que ocurre cuando $d = \pm \frac{\lambda}{2}, \pm \frac{3\lambda}{2}, \pm \frac{5\lambda}{2}$, etc., resulta $A = a_1 - a_2$.

Podemos decir, por lo tanto: *Las amplitudes se suman si la diferencia de marcha es un número entero de medios largos de onda y se restan si esa diferencia es un número impar de medias ondas.*

Si las amplitudes son iguales, esto es si $a_1 = a_2 = a$, se tiene, en el primer caso, $A = 2a$, y en el segundo, $A = 0$. Cuando ocurre lo último se habla de *interferencia* de las ondas. El trazo grueso de la figura representa la onda compuesta.

Las consideraciones que preceden valen, como es evidente, tanto para ondas transversales como longitudinales.

2. Determinación de la velocidad del sonido por el tubo de Quincke. — Los resultados precedentes han sido utilizados por Quincke, siguiendo el ejemplo de Norremberg, en la determinación de la velocidad del sonido en los gases.

En la figura 286 está representado el tubo de interferencia que construyera a tal propósito. La longitud de una de sus ramas, la *B*, puede variarse, dentro de ciertos límites.

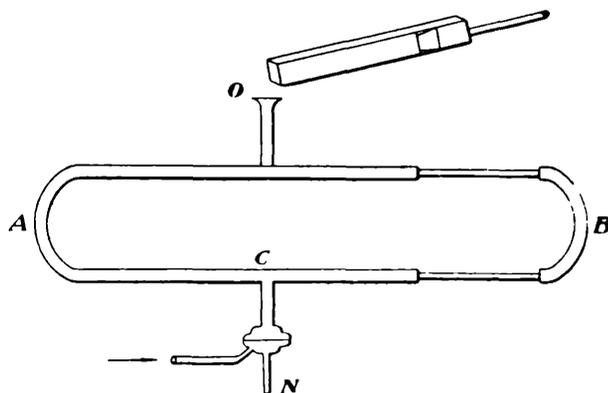


Fig. 286.

Una ondulación generada con un tubo de órgano, o por un diapasón, en la boca del tubo lateral *O*, se divide en dos ondulaciones que se propagan, respectivamente, por las ramas *OAC* y *OBC*.

Parte de estas ondas penetran en el otro tubo lateral situado en *C*; nos interesa la superposición de ellas en ese lugar (pues en todo el interior del tubo se producirá tal proceso).

Si la diferencia de marcha, que está dada por la diferencia de las longitudes de las ramas del tubo, es un número impar de medias ondas, la amplitud de las vibraciones en *C* será un mínimo; cero si las dos ondulaciones son idénticas.

En las determinaciones se procede como sigue: se dota al tubo *C* de una llama manométrica *N* que se observa con un espejo rotatorio mientras se excita constantemente el punto *O* y se mueve el tubo lateral *B* hasta lograr un mínimo; se continúa en la determinación de mínimos tanto como lo permita el tubo *B*. El desplazamiento de éste entre dos de ellos da la media onda y si se conoce la frecuencia *n* de la fuente excitadora se determina la velocidad de propagación por la fórmula

$$v = n\lambda.$$

Es posible, también, hacer observaciones conectando con *C* un tubo de goma que se lleva hasta el oído.

3. Superposición de ondas de igual frecuencia que se propagan en la misma dirección pero en sentido contrario. — Si dos ondas, que supondremos planas, de igual frecuencia, se propagan en la misma dirección, pero en sentido contrario, la diferencia de mar-

cha varía periódicamente, puesto que se encuentra dentro de intervalos iguales de tiempo, por la constancia de sus velocidades, en las mismas posiciones relativas. Es evidente, además, como consecuencia de esto mismo, que la amplitud de la onda resultante variará también periódicamente con el tiempo.

Sus características pueden ponerse en evidencia con el auxilio de una construcción gráfica. En la figura 287 se han representado, en instantes separados por intervalos de tiempos iguales a la doceava parte de un período, dos ondulaciones de la misma frecuencia y amplitud y la correspondiente ondulación resultante.

La I representa las ondas en el momento de alcanzar cierto punto O ; la diferencia de marcha es $\frac{1}{2} \lambda = \frac{6}{12} \lambda$, pues sería menester desplazarlas relativamente media onda para que se superpusiesen. Entre la posición I y II ha transcurrido el tiempo $\frac{1}{12} T$, si T es el período de oscilación: una de las ondas ha avanzado en un sentido el camino $\frac{1}{12} T v = \frac{1}{12} \lambda$, y la otra el mismo camino en sentido contrario; luego, la diferencia de marcha ha disminuído en $\frac{2}{12} \lambda$, reduciéndose, por consiguiente, a $\frac{6}{12} \lambda - \frac{2}{12} \lambda = \frac{4}{12} \lambda = \frac{1}{3} \lambda$. Por suma de las ordenadas se obtiene el movimiento resultante mn .

Las III, IV, V etc., que las siguen se refieren a instantes posteriores separados por el mismo intervalo de tiempo que las precedentes; la diferencia de marcha varía en $\frac{2}{12} \lambda$ de una a otra, pero sus valores absolutos están siempre comprendidos entre media onda y cero.

En las IV, por ejemplo es cero; las ondas, supuestas de la misma amplitud, se cubren, y la amplitud de la onda resultante es el doble que la de las componentes. En la VII las ondas ocupan posiciones tales que la diferencia de marcha es, nuevamente, una media onda; el movimiento resultante está representado por la recta MN , vale decir, los movimientos de todos los puntos se han anulado momentáneamente. En la X y XVI las ondas se cubren otra vez (diferencia de marcha cero) originando un movimiento de doble amplitud que el de las competentes, mientras que en las XIII y XIX, los movimientos se anulan nuevamente entre sí; la diferencia de marcha es, como en el caso de la VII media onda.

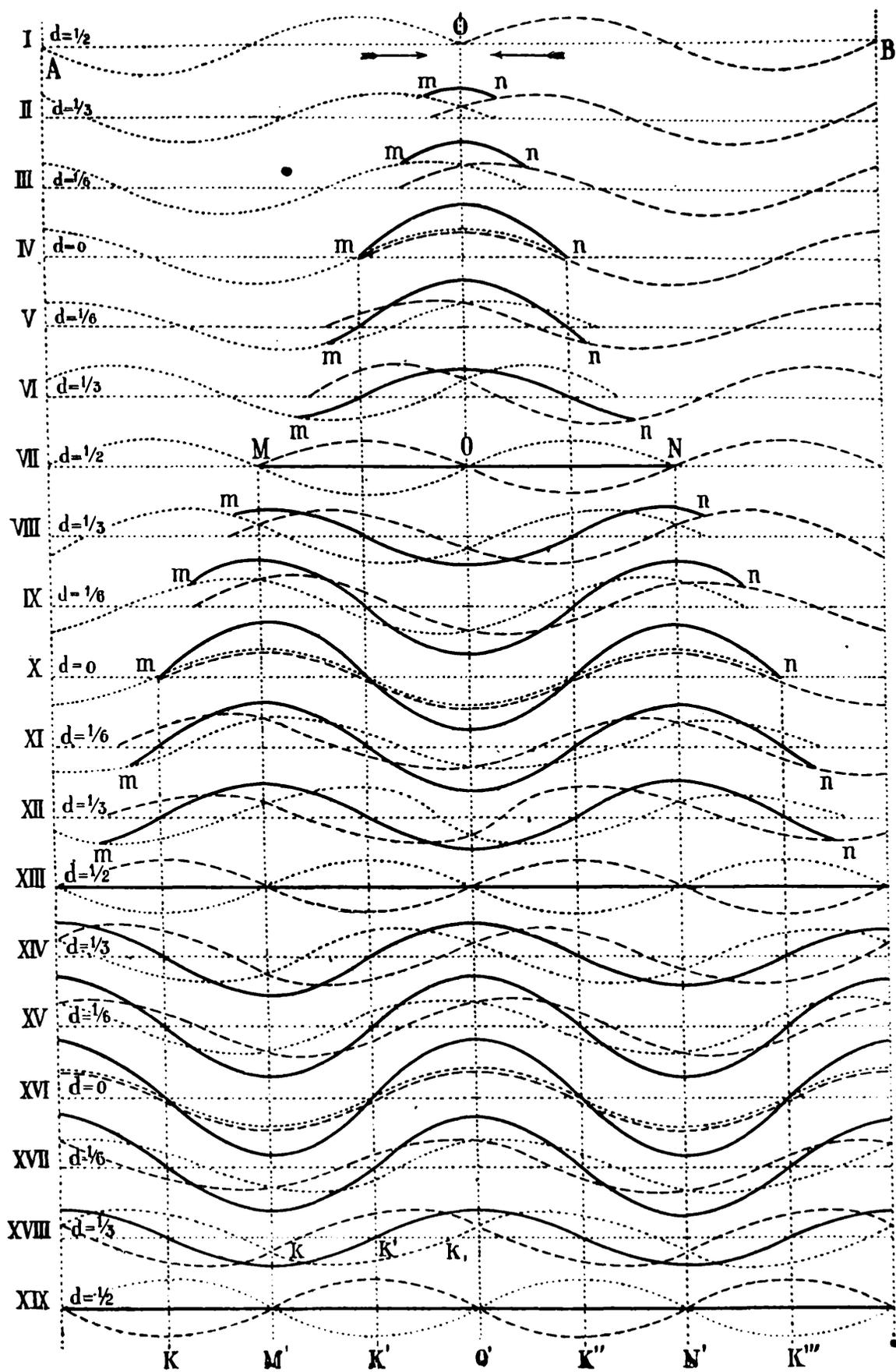


Fig. 287.

De la observación de las figuras resulta que el movimiento compuesto posee el siguiente carácter esencial:

Que no sólo varían las elongaciones de los puntos periódicamente con el tiempo, sino que también las amplitudes varían en la misma forma coordenada.

En esta segunda característica estriba una diferencia esencial con las ondas que antes hemos discutido, y se las llama *progresivas* porque todos los puntos pasan sucesivamente por las mismas fases y elongaciones (supuestas planas las ondas), a causa de que la amplitud del movimiento es en todas partes igual.

En el caso de que venimos ocupándonos los puntos K, K', K'' y K''' se encuentran siempre en reposo; se designan con el nombre de *nodos*.

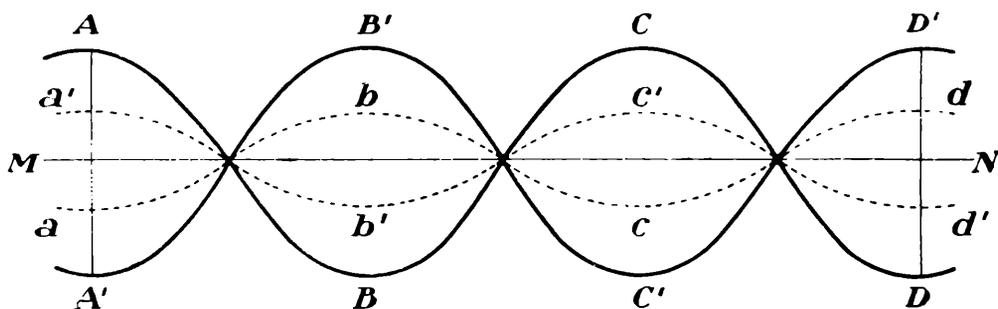


Fig. 288.

Todos los demás oscilan con diferentes amplitudes. Los puntos M', O', N' , etc., a los que corresponde la mayor amplitud, se les llama *vientres* del movimiento.

La ondulación es, pues, de tal naturaleza, que los nodos y vientres ocupan indefinidamente las mismas posiciones. Las ondas así caracterizadas se denominan *estacionarias*.

La figura muestra, también, que la longitud de la onda resultante es el doble de la distancia entre dos nodos o vientres e igual a la longitud de las ondas componentes.

Para resumir diremos, todavía, que todo ocurre como si la sinusoide $ABCD$ de la figura 288 pasara por las posiciones $abcd, MN$ y $a'b'c'd'$, hasta alcanzar la posición $A'B'C'D'$, simétrica de $ABCD$ con respecto a la línea MN de propagación para volver luego a adoptar, sucesivamente, las mismas posiciones marchando en sentido contrario.

Todos los puntos pasan al mismo tiempo por la posición de reposo alcanzando los de los vientres también simultáneamente la máxima elongación.

Si las amplitudes de las ondas no fuesen iguales puede descomponerse la de mayor amplitud en dos ondas una de las cuales fuere

idéntica a la otra. El problema consistiría en superponer a la onda estacionaria formada por las dos iguales que marchan en sentido contrario, la onda progresiva proveniente del exceso de la más amplia sobre la restante.

Resulta que los puntos no pasan simultáneamente por la posición de reposo como en el movimiento estacionario puro; los vientres y los nodos no ocupan tampoco posiciones fijas sino que están animados de un movimiento de propagación. En la figura 289 se ha represen-

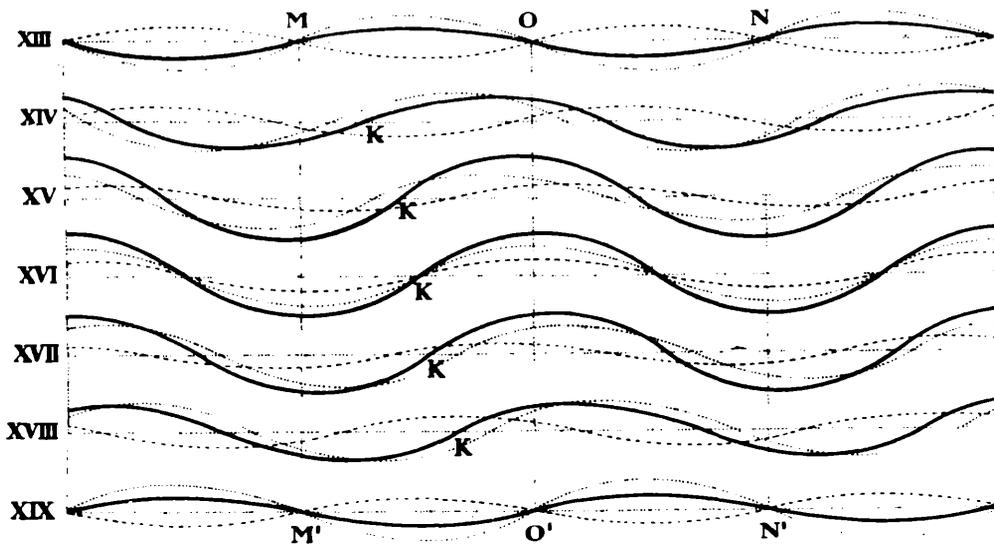


Fig. 289.

tado el caso de dos ondas cuyas amplitudes están en la relación 1:2. Las cifras romanas indican que los instantes de tiempo son los que corresponden a los mismos números de la figura 287.

Las consideraciones precedentes son válidas ya se trate de ondas transversales o longitudinales; la representación utilizada en las figuras precedentes describe también el movimiento proveniente de ondas longitudinales si se utiliza la convención establecida en la página 255. Los nodos de una onda estacionaria pura son, en ese caso, alternativamente nodos de compresión y de dilatación.

No insistimos sobre este asunto, del que nos hemos de ocupar nuevamente con el motivo de las oscilaciones longitudinales de barras y tubos.

4. Discusión matemática. — El movimiento resultante de dos ondas de igual amplitud que se propagan en la misma dirección, pero en sentido contrario, se deduce matemáticamente, sin mayores dificultades.

Empecemos a contar el tiempo desde el instante representado por la figura 287 I y las distancias, que indicaremos con x , a partir del punto O .

La ecuación de la que se propaga de izquierda a derecha, que consideraremos el sentido positivo de las x , será

$$y_1 = a \cdot \text{sen } 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \quad [10]$$

si se indica con a la amplitud y con T y λ el período y la longitud de onda, respectivamente.

La onda que se propaga en sentido contrario estará representada por

$$y_2 = a \cdot \text{sen } 2 \pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right), \quad [11]$$

pues si consideramos a esta dirección como el sentido positivo de cierta coordenada u , contada a partir de O , la ecuación sería

$$y_2 = a \cdot \text{sen } 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{u}{\lambda} \right),$$

y puesto que u y x estarían ligadas por la relación $u = -x$, resulta la [11].

El movimiento resultante está dado por la expresión

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = a \cdot \text{sen } 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + a \cdot \text{sen } 2 \pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \\ &= a \cdot \text{sen } 2 \pi \frac{t}{T} \cdot \cos 2 \pi \frac{x}{\lambda} - a \cdot \cos 2 \pi \frac{t}{T} \cdot \text{sen } 2 \pi \frac{x}{\lambda} + [12] \\ &\quad + a \cdot \text{sen } 2 \pi \frac{t}{T} \cdot \cos 2 \pi \frac{x}{\lambda} + a \cdot \cos 2 \pi \frac{t}{T} \cdot \text{sen } 2 \pi \frac{x}{\lambda}, \end{aligned}$$

de donde

$$y = 2 a \cdot \cos 2 \pi \frac{x}{\lambda} \cdot \text{sen } 2 \pi \frac{t}{T}. \quad [13]$$

La discusión de esta ecuación muestra el carácter del movimiento. Se ve que es periódico, siendo su período igual al de las componentes.

La amplitud $2a \cdot \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$ es una función periódica de la distancia x al

punto O que se ha elegido como origen. Para todos los puntos para los cuales

$$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0$$

o

$$x = \pm \frac{\lambda}{4}, \pm \frac{3\lambda}{4}, \pm \frac{5\lambda}{4}, \text{ etc.},$$

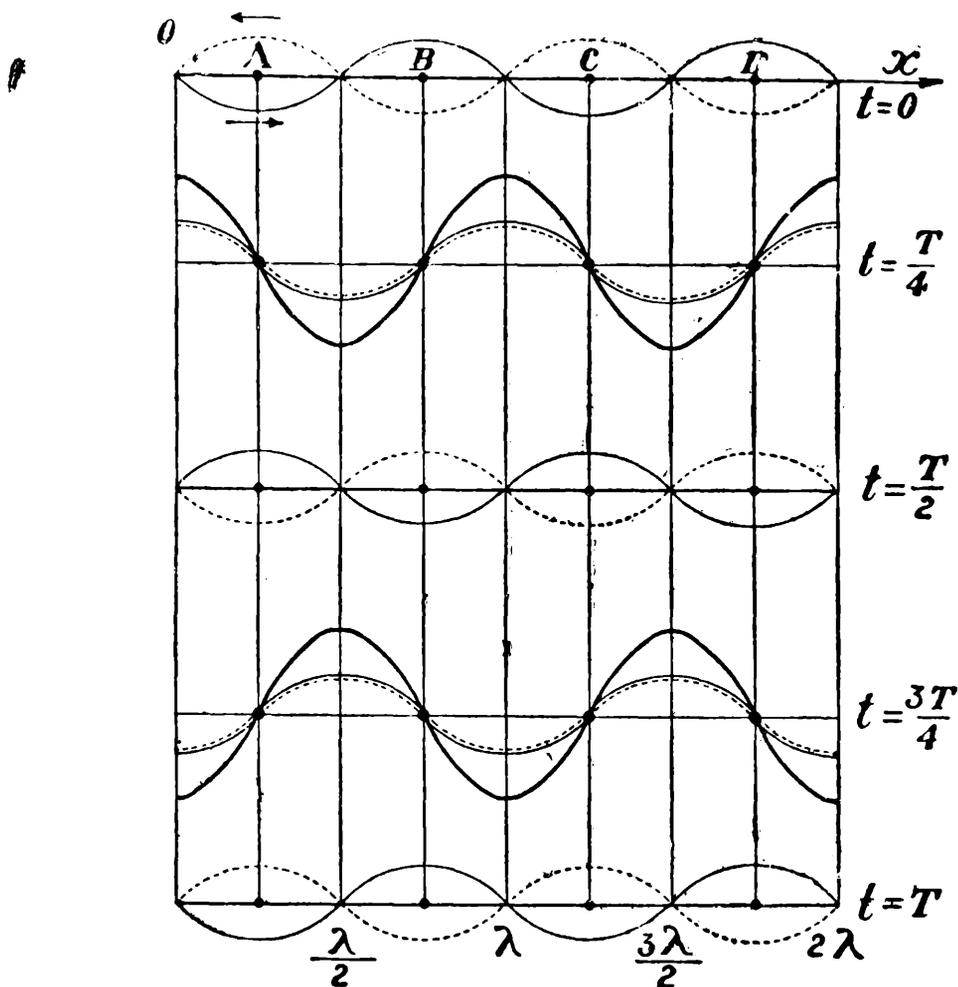


Fig. 290.

la amplitud es nula, es decir, la elongación constantemente cero. Esos puntos son los nodos. Los puntos para los cuales

$$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm 1$$

o

$$x = \pm \frac{\lambda}{2}, \pm \frac{3\lambda}{2}, \pm \frac{5\lambda}{2}, \text{ etc.},$$

son los que oscilan con mayor amplitud y a los cuales hemos denominado vientres.

En la figura 290 se han representado los estados de movimiento de los puntos situados a la derecha de O para distintos instantes de tiempo. Como es notorio, se trata, en realidad, de las mismas curvas que da la figura 287.

Es claro que también representan ondas estacionarias expresiones de la forma

$$y = a \operatorname{sen} 2 \pi \frac{x}{\lambda} \cdot \operatorname{sen} 2 \pi \frac{t}{T}$$

y las que se obtienen substituyendo el seno de $2 \pi \frac{t}{T}$ por el coseno.

5. Superposición de ondas de frecuencias diferentes. Teorema de Fourier. — Si las frecuencias de las oscilaciones no son iguales, se obtienen, por el principio de superposición, los más variados tipos de ondulaciones. Las figuras 291 representan ondas compuestas por otras de longitudes diferentes; las longitudes, amplitudes y diferencia de fase se encuentran indicadas debajo de cada dibujo.

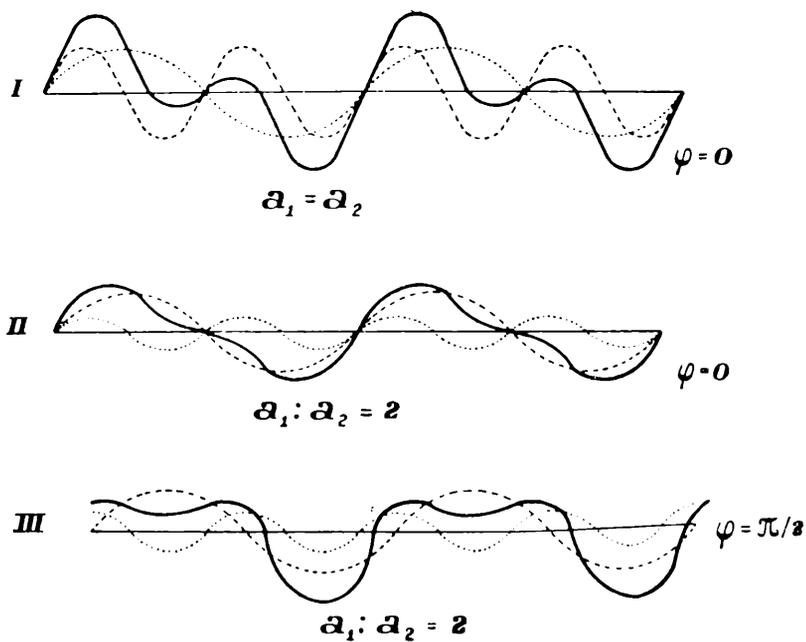


Fig. 291.

Recíprocamente, dada una ondulación cualquiera se puede descomponer, por el teorema de Fourier, en una suma de perturbaciones simples sinusoidales. La figura 240, por ejemplo, puede considerarse como la representación de las ondas simples que componen una ondulación que se proponga en cierta dirección; como se dijo en aquella oportunidad, esa onda sería la que corresponde a una oscilación que estuviese representada por la misma línea.

Se ha elegido como ejemplo un movimiento de ese tipo, cuya velocidad varía linealmente con el tiempo, porque es el que corresponde a algunos de los puntos de una cuerda, cuyos movimientos estudiaremos en breve.

B. — MOVIMIENTO ONDULATORIO TRANSVERSAL DE LAS CUERDAS

6. Movimiento ondulatorio de una cuerda tendida. — Representa la recta AB (fig. 292) un segmento lineal de una substancia; sea completamente flexible y designémosle con el nombre de *cuerda*.

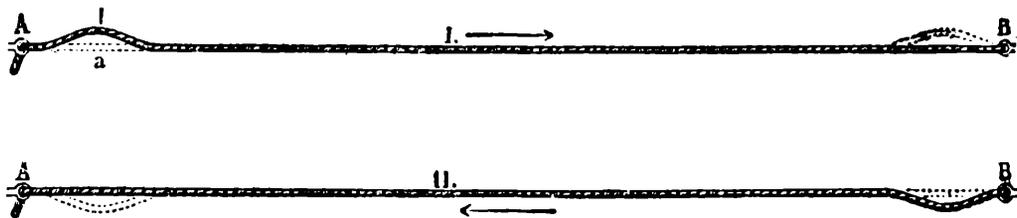


Fig. 292.

Se trata, por el momento, de describir el movimiento que se produce si en uno cualquiera de sus puntos se da un golpe de dirección transversal; algunos elementos de masa reciben un impulso que les comunica cierta velocidad en dirección normal a la AB , alejándolas de sus posiciones de reposo.

Supongamos, primeramente, por razones de simplicidad, que el golpe se aplica en la inmediata cercanía del punto A , que es fijo, lo mismo que B . La deformación local esté representada por el trazo curvo. Se observa que la deformación cambia de lugar moviéndose con movimiento uniforme hacia el otro extremo B , alcanzado el cual vuelve hacia atrás pero invirtiéndose, es decir, que si su concavidad estaba anteriormente dirigida hacia arriba, lo estará ahora hacia abajo. Se dice que el movimiento ha sufrido una *reflexión*. Alcanzado el punto A ocurre exactamente el mismo fenómeno, esto es, nueva inversión, y cambio en la dirección de propagación. Este proceso se continúa hasta la extinción total de la energía mecánica almacenada, por roce.

Fijemos por un momento nuestra atención en el movimiento real de un punto a cualquiera. Su movimiento comienza en el preciso instante en que la deformación llega hasta él y dura un intervalo de tiempo igual al que tarda aquélla en pasar; el punto se mueve transversalmente en cierto sentido hasta alcanzar una elongación máxima, luego hacia atrás hasta llegar nuevamente a la posición de reposo, en la que perdura hasta el próximo pasaje de la perturbación, du-

rante el cual se moverá en la misma forma recientemente indicada pero en sentido contrario, por la inversión de la deformación. Como la velocidad de propagación es, como se dijo, constante, se sigue que el punto repite periódicamente idéntico movimiento.

El proceso posee, pues, todas las características de los movimientos ondulatorios antes descriptos.

En lo que atañe a la velocidad de propagación, la teoría enseña que su valor está dado por la fórmula

$$v = \sqrt{\frac{T}{m}}, \quad [14]$$

si T representa la tensión de la cuerda y m la masa de la unidad de longitud.

Los hermanos Weber, ya mencionados en otra oportunidad, han probado experimentalmente su validez en una cuerda de 1657 centímetros de longitud, en la que un centímetro pesaba 0,0313 gramos, y cuya tensión correspondería a 603,48 gramos. La velocidad de las ondas debería ser, según esto,

$$v = \sqrt{981 \cdot \frac{603,48}{0,0313}} = 4349 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}.$$

Las determinaciones experimentales dieron el valor

$$v = 4321 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$$

que concuerda satisfactoriamente con el teórico.

7. La reflexión de la onda.—La reflexión de la onda, en los puntos fijos A y B de la cuerda, es tan rápida que la observación experimental de todas las fases del proceso es dificultosa, aunque posible.

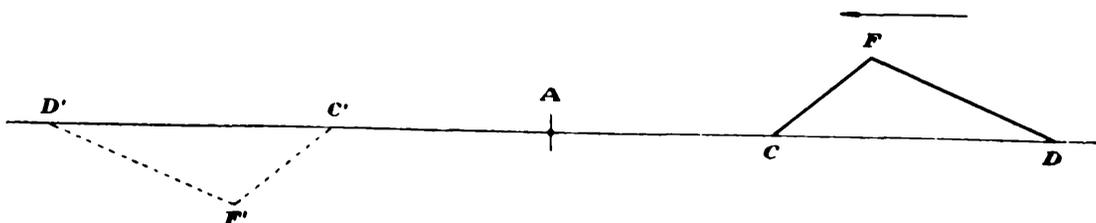


Fig. 293 a.

La teoría conduce a una construcción que lo describe en forma asaz sencilla.

Si CFD es (fig. 293a) una deformación que se propaga acercándose al punto fijo A se imagina que sobre la cuerda prolongada idealmente hacia la izquierda se propaga hacia el mismo punto, con igual velocidad, una deformación idéntica $C'F'D'$, pero invertida y simétricamente situada respecto a A .

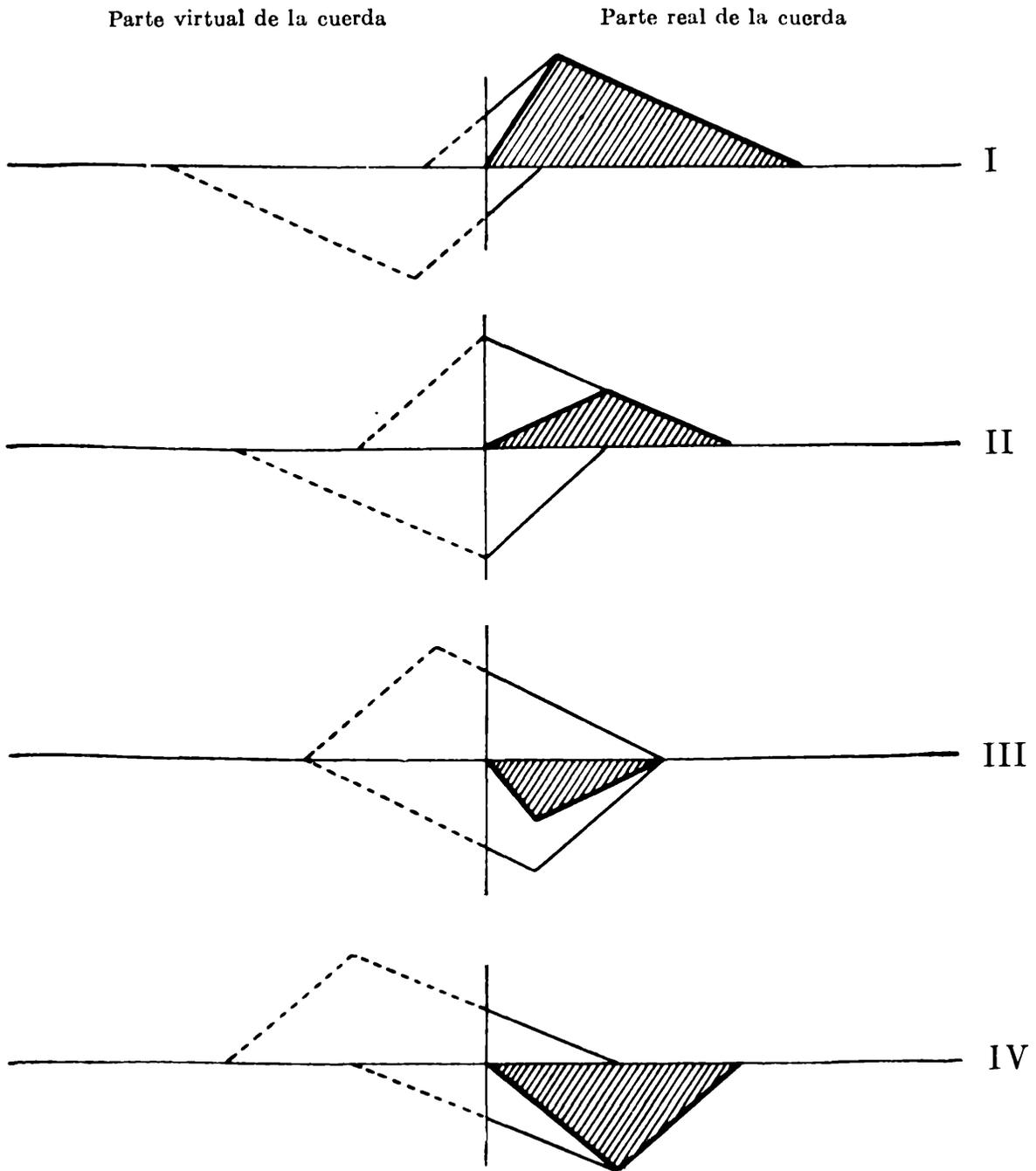


Fig. 293 b.

Los puntos correspondientes de ambas deformaciones alcanzan simultáneamente al punto A ; como las elongaciones son iguales y opuestas se anulan, con lo que queda satisfecha la condición de que el punto A es fijo. La figura 293b da algunas de las fases del proceso; la parte sombreada representa la deformación real que se produce en la cuerda por la superposición de las dos ondas.

8. Descripción completa del movimiento. — Con estos elementos se puede describir por completo el movimiento que se origina por un golpe, en una cuerda tendida entre dos puntos fijos, en uno cualquiera de sus puntos.

Sea CED (fig. 294) la deformación inicial, la que se ha dibujado, para más claridad, con ordenadas exageradas. Como se dijo en el párrafo primero, se generan en seguida dos deformaciones idénticas que se propagan en sentido contrario. Se obtienen, como es sabido,

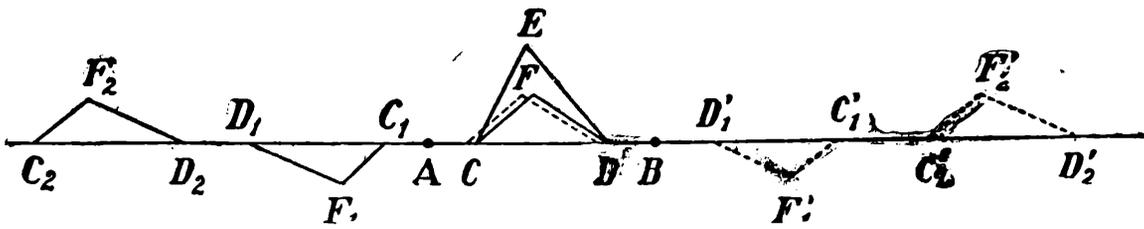


Fig. 294.

dividiendo en dos partes iguales las ordenadas de la deformación dada; sea la CFD , representada por la línea llena, que supondremos se propaga de izquierda a derecha, y la punteada, que indicaremos con $C'F'D'$, que está en realidad, debajo de CFD y que se propagará en sentido contrario que ésta. El movimiento queda descrito por la siguiente construcción: se dibuja una deformación $C_1'F_1'D_1'$, simétrica de CFD con respecto al punto fijo B de la cuerda; una $C_1F_1D_1$ simétrica de $C'F'D'$ con respecto al punto fijo A ; luego la $C_2'F_2'D_2'$ simétrica de $C_1F_1D_1$ con respecto a B ; $C_2F_2D_2$ simétrica de $C_1'F_1'D_1'$ respecto a A , y así sucesivamente. Se obtiene de esta manera dos trenes de ondas, formados, uno por las de línea llena y otro por las de líneas punteadas, las que se suponen en movimiento en sentidos opuestos con la velocidad dada por la [14], mientras que la forma y distribución queda invariada. El estado de movimiento de la cuerda en cierto instante queda dado superponiendo las curvas llenas y punteadas que en el mismo instante se encuentran entre A y B .

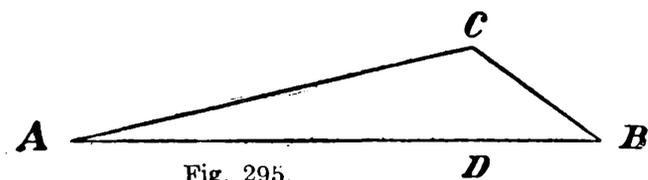


Fig. 295.

9. Vibraciones de las cuerdas. — Si la deformación abarca toda la cuerda, como en el caso de la figura 295, lo que ocurre, por ejemplo, en una cuerda de guitarra, que es desviada de su posición de reposo tomándola por uno de sus puntos, el movimiento se describe en forma enteramente análoga.

Se prolonga, idealmente, la cuerda en los dos sentidos y se dibujan dos ondas idénticas (fig. 296a y b), que se obtienen dividiendo la deformación inicial dada (fig. 295) en dos deformaciones iguales, y continuando el dibujo simétricamente a uno y otro lado de la línea. Esas ondas deben suponerse moviéndose en sentido opuesto con ve-

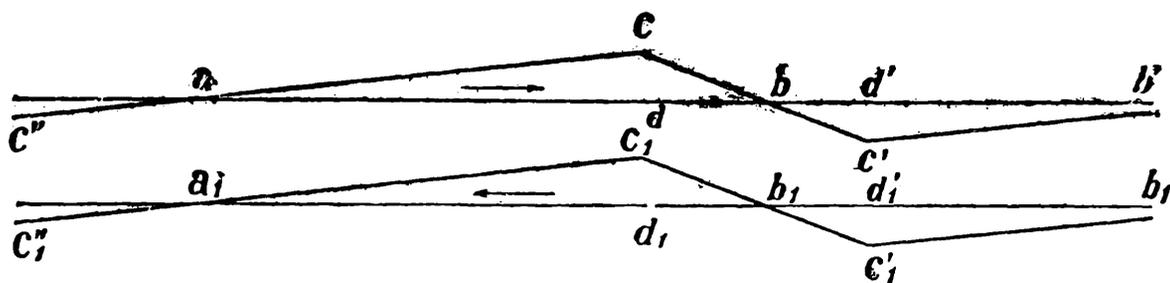


Fig. 296 a y b.

locidades iguales. El movimiento de la cuerda se obtiene superponiendo los trazos de ambas curvas que, en el instante que se considere, se encuentren entre *A* y *B*.

En la figura 297 se han representado algunas de las formas que adopta una cuerda ⁽¹⁾ dentro de un período; corresponden a instantes de tiempos separados por intervalos iguales a la doceava parte de un período. Es posible la observación directa por medio de métodos estroboscópicos. Mientras la rigidez y el roce no se hacen sentir, la cuerda adopta realmente las formas angulosas que indica la teoría.

Como, por otra parte, según el teorema de Fourier, la deformación dada puede descomponerse en una serie de deformaciones sinusoidales, se sigue que el movimiento de una cuerda queda representado por superposición de trenes idénticos de ondas sinusoidales de diferente frecuencia que se propagan en sentido contrario, con la misma velocidad. Tales ondas

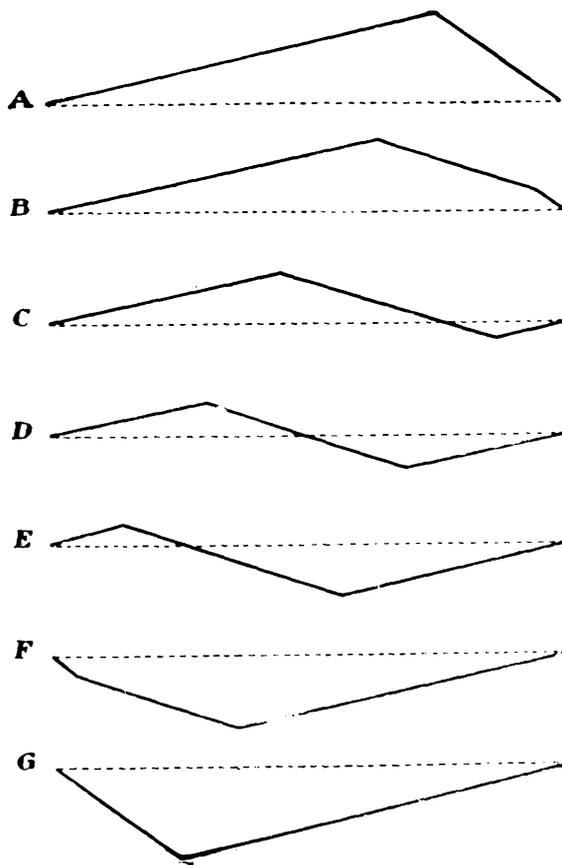


Fig. 297.

(1) Esto corresponde al caso en que la cuerda tiene en el instante inicial la forma dada por la figura 295, y se la abandona a sí misma sin ningún impulso.

se obtienen descomponiendo la deformación dada en ondas sinusoidales y cada una de éstas en dos componentes idénticas, de las que una formará parte de uno de los trenes, y la restante parte del otro.

Cada par de las ondas así formadas da lugar a una onda estacionaria, y el movimiento de la cuerda, consiste, entonces en la superposición de un sistema de ondas estacionarias.

La onda cuya longitud λ_1 es doble del largo L de la cuerda, se llama fundamental; las restantes cuyos largos de onda deben ser

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{2}{2} L = \frac{1}{2} \lambda_1 \\ \lambda_3 &= \frac{2}{3} L = \frac{1}{3} \lambda_1 \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

o, de una manera general,

$$\lambda_k = \frac{2}{k} L = \frac{1}{k} \lambda_1, \text{ etc.}, \tag{15}$$

se denominan *armónicas*. Puesto que la velocidad de propagación es independiente de la frecuencia, dado que depende tan sólo de la tensión y de la masa de la unidad de longitud, se sigue que si n_1 es la frecuencia de la onda fundamental, la de las armónicas serán, respectivamente, $n_2 = 2n_1$; $n_3 = 3n_1$; $n_4 = 4n_1$; etc. Aun cuando en lo que precede están contenidas todas las particularidades del movimiento oscilatorio de las cuerdas, conviene, sin embargo, formular expresamente sus leyes. Como ordinariamente las cuerdas de los instrumentos musicales son circulares, la masa de la unidad de longitud es

$$m = \pi r^2 \rho,$$

si r es el radio y ρ la densidad del material, con lo que la relación [14] se escribe

$$v = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{T}{\pi \rho}}, \tag{16}$$

y por la relación general

$$n = \frac{v}{\lambda}$$

se obtiene, introduciendo los resultados precedentes, para la frecuencia de una cualquiera de las vibraciones de subíndice k , la expresión:

$$n_k = \frac{1}{r\lambda_k} \sqrt{\frac{T}{\pi \rho}} \quad [17]$$

o

$$n_k = \frac{k}{2rL} \sqrt{\frac{T}{\pi \rho}}, \quad [18]$$

de donde se infiere:

1º *Que las frecuencias de las vibraciones de una cuerda son proporcionales a la raíz cuadrada de la tensión e inversamente proporcionales a su longitud;*

2º *Que la frecuencia de las vibraciones de cuerdas diferentes del mismo material son inversamente proporcionales a sus radios; y*

3º *Que la frecuencia de las vibraciones de cuerdas de materiales diferentes son inversamente proporcionales a las raíces cuadradas de sus densidades.*

Estas leyes fueron establecidas experimentalmente por Mersenne (1588-1648). El problema fué tratado matemáticamente por Taylor, alrededor del año 1716, quien lo resolvió en parte. En el año 1759, Lagrange dió una solución general que terminó con las discusiones que motivara durante un tiempo relativamente largo.

La ecuación de la onda estacionaria fundamental es de la forma

$$y = a_1 \cdot \text{sen } 2\pi \frac{x}{\lambda_1} \cdot \text{sen } 2\pi \frac{t}{T_1} \quad [19]$$

si a_1 es la amplitud y T_1 el período, o, por la [15],

$$y = a_1 \cdot \text{sen } \frac{\pi x}{L} \cdot \text{sen } 2\pi \frac{t}{T_1}, \quad [19']$$

puesto que la amplitud $a_1 \cdot \text{sen } \frac{\pi x}{L}$ se anula solamente para $x = 0$ y

$x = L$, y alcanza un valor máximo para $x = \frac{1}{2} L$.

La ecuación de la primer armónica será

$$y = a_2 \cdot \text{sen } 2\pi \frac{x}{\lambda_2} \cdot \text{sen } 2\pi \frac{t}{T_2}, \quad [20]$$

o, por la [15], y teniendo presente que, por la [18], $T_2 = \frac{1}{2}T_1$:

$$y = a_2 \cdot \text{sen } 2\pi \frac{x}{L} \cdot \text{sen } 4\pi \frac{t}{T_1}, \quad [20']$$

pues la amplitud $a_2 \cdot \text{sen } 2\pi \frac{x}{L}$ es cero para $x = 0$, $x = \frac{L}{2}$ y $x = L$, y tiene un valor máximo para $x = \frac{L}{4}$ y $x = \frac{3}{4}L$.

De una manera general, la oscilación del subíndice k queda representada por la expresión

$$y = a \cdot \text{sen } k\pi \frac{x}{L} \cdot \text{sen } k 2\pi \frac{t}{T_1}, \quad [21]$$

y todo movimiento de la cuerda quedará representado por una suma de expresiones de este tipo.

10. Comprobaciones experimentales. — Para las comprobaciones experimentales, se utiliza ordinariamente el aparato que se ve en la figura 298, que se designa con el nombre de sonómetro.

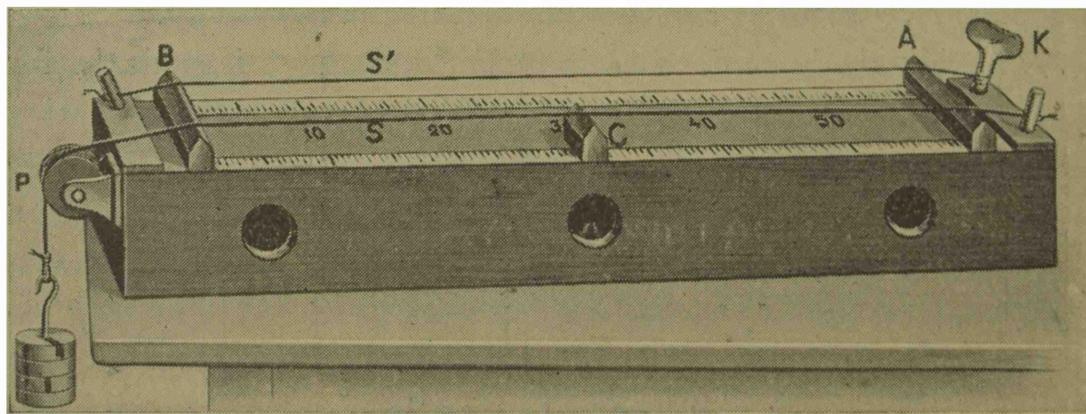


Fig. 298.

La longitud de la cuerda puede variarse mediante dos puentes A y B y la tensión modificando la carga P que pende de uno de sus extremos. Midiendo las alturas de los sonidos que emite en diversas condiciones, se comprueba la exactitud de la fórmula [18].

Los sonidos armónicos pueden percibirse recurriendo a la experiencia de Sauveur. Puesto que, como ya se vió, puede decirse que el

movimiento de una cuerda consiste en la superposición de ondas estacionarias de longitudes dadas por la relación

$$\lambda_k = \frac{2}{k} L \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \dots ,$$

que están representadas con amplitud arbitraria en la figura 299, se sigue que si se toca con una pluma, o con el dedo, el punto medio de

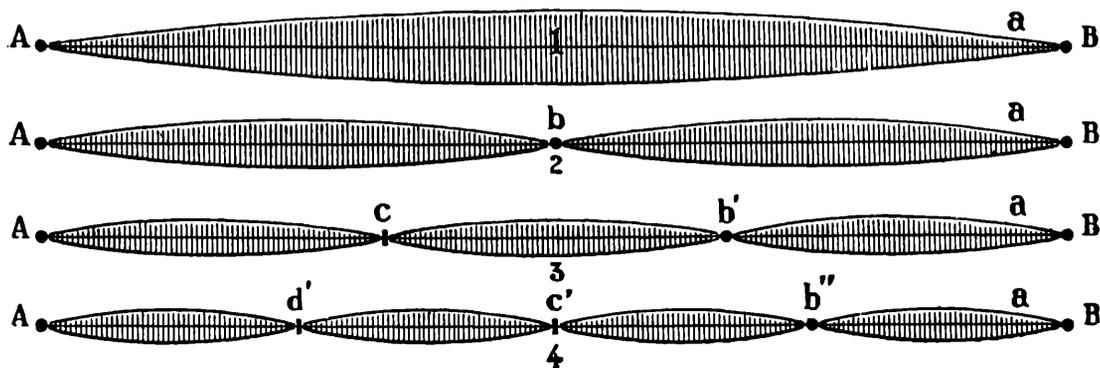


Fig. 299.

la cuerda, se extinguen todos los movimientos que no tengan un nodo en ese punto; quedará, pues, la primer armónica, a la que corresponde el subíndice $k = 2$ y las de índice 4, 6, etc.; como la más amplia es

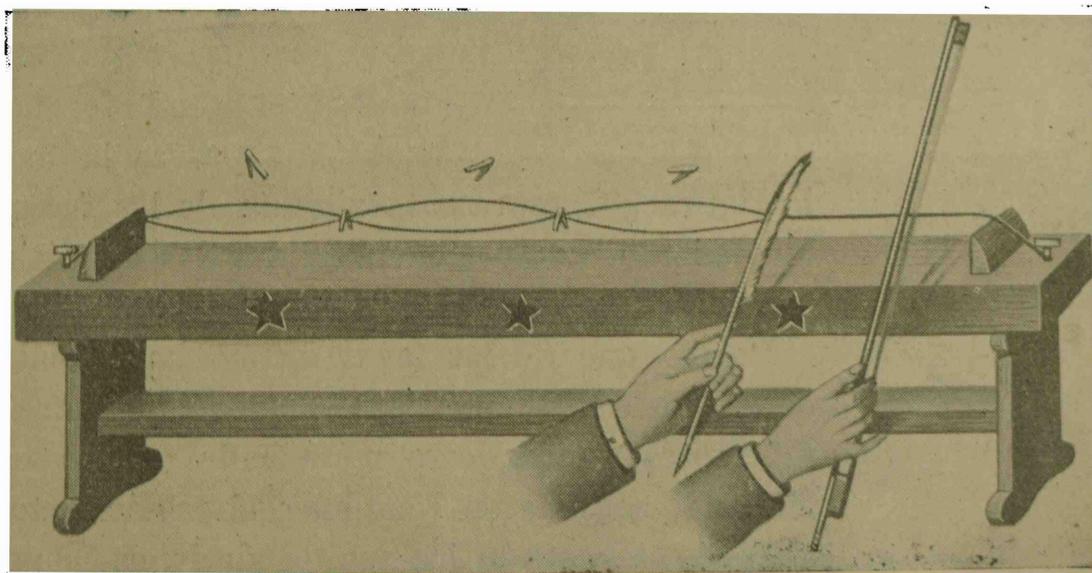


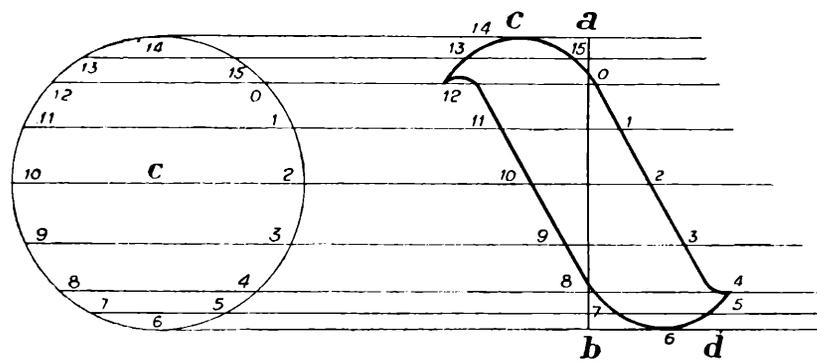
Fig. 300.

la primera, dará la altura del sonido. Si se toca en un punto situado a la tercera parte de la longitud de la cuerda, a partir de uno de sus extremos, quedará la onda estacionaria de subíndice $k=3$ y las de 6, 9, etc., y así sucesivamente. El oído puede percibir así las alturas de las distintas oscilaciones componentes; la de más densidad, vale decir,

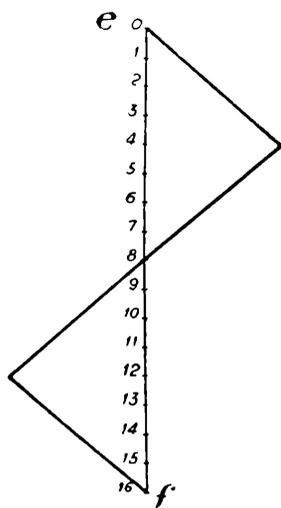
la más amplia, es la fundamental, y determina la altura del sonido.

Objetivamente, se revela la existencia de nodos y vientres fijos utilizando esta misma experiencia un tanto modificada. Se mantiene el contacto de la cuerda con la mano en cierto punto, el b'' , por ejemplo, que dista de B una distancia igual a la cuarta parte del largo de la cuerda, desde antes de excitarla, y se ubican caballetes de papel, con los que se observan en la figura 300, en c' , d' y en los lugares intermedios. Si se hace vibrar el segmento Bb'' , los jinetillos ubicados en c' , d' quedan en sus posiciones, mientras que los restantes son arrojados. Conviene hacer notar que en esta experiencia aparecen también las armónicas que corresponden al segmento de cuerda que se excita; pero como son menos amplias que la fundamental (que corresponde al mismo segmento), los fenómenos que se observan son determinados por la onda estacionaria que a ésta corresponde.

Una comprobación experimental que abarca todos los aspectos del fenómeno, lo brinda la observación estroboscópica de la cuerda; como ya se dijo, resulta que aquélla vibra efectivamente en la forma que prevee la teoría;



la observación estroboscópica de la cuerda; como ya se dijo, resulta que aquélla vibra efectivamente en la forma que prevee la teoría;



la figura 297 representa algunas de las fases del movimiento (supuesto cumplidas las condiciones que indica la nota de la página 333).

Fig. 301.

Puesto que de las leyes de movimiento de la onda puede deducirse la manera cómo vibran los diferentes puntos, otro método de prueba experimental consiste en componer el movimiento oscilatorio de uno de los puntos de la cuerda, con otro simple conocido; es fácil, luego, analizando el movimiento resultante, deducir las características de aquél.

Esto lo ha realizado Helmholtz mediante el microscopio a vibración mencionado en la página 245. En la figura 301 está representado por el trazo grueso, cerrado, cd , el movimiento compuesto que se obtiene por la superposición de las oscilaciones

del diapasón con las de la misma frecuencia del punto medio de una cuerda de violín excitada por el arco ⁽¹⁾.

La línea ab representa la vibración del diapasón; puesto que es armónica se obtienen los segmentos que corresponden a intervalos iguales de tiempo, trazando un círculo de diámetro ab y líneas que sean normales a éste por puntos equidistantes de la circunferencia. Las posiciones del punto de la cuerda, en tales instantes, son las intersecciones de esas rectas con la curva resultante cd .

La curva quebrada de más abajo, representa, en otra escala, las elongaciones de la cuerda en función del tiempo; como es notorio, la velocidad del punto es constante, con excepción de los instantes que corresponden a los vértices, donde es discontinua, lo que prevee la teoría.

11. La teoría de las cuerdas vibrantes ⁽²⁾. — A. LA ECUACION DE MOVIMIENTO. — La teoría de las cuerdas vibrantes se debe a Taylor, Bernoulli, D'Alembert, Euler y, sobre todo, a Lagrange.

Para establecerla, se supone que la cuerda es perfectamente flexible, lo que equivale a suponer que su sección transversal es lo suficientemente pequeña como para que desaparezca por completo su rigidez.

En general, se discute tan sólo el caso en que las determinaciones son de amplitud tan reducida que las fuerzas elásticas variables que originan sean despreciables con respecto a la tensión permanente T de la cuerda.

En ese caso, que pasamos a discutir, el ángulo que forma, en todo instante, un elemento

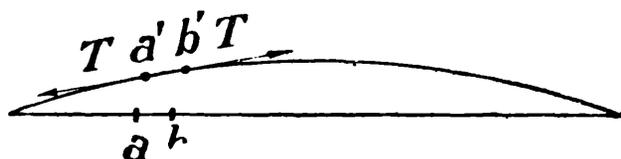


Fig. 302.

cualquiera de la cuerda con su posición inicial, puede considerarse de pequeñez suficiente como para despreciar las potencias superiores a la primera.

Sea (fig. 302) $a'b'$ la posición de un elemento ds , que se encuentra en ab en el estado de equilibrio, en cierto instante. En sus extremi-

⁽¹⁾ En este caso, en el momento inicial la cuerda tiene la deformación cero, y por la acción del arco se arrojan los puntos tocados con cierta velocidad.

⁽²⁾ Aprovechamos la oportunidad que brinda el movimiento transversal de las cuerdas, para establecer y resolver un tipo de ecuación diferencial que tiene en la física la más grande importancia.

dades actúan, por lo supuesto, dos fuerzas iguales a T , pero no directamente opuestas y que no se harán, por lo tanto, equilibrio. Si indicamos con x la dirección de la cuerda y con y la dirección normal del plano del papel, en el que suponemos tiene lugar la vibración, esas fuerzas admiten una componente según la última dirección, componente que rige el movimiento transversal que estudiamos.

Si α es el ángulo que forma la tangente a la cuerda en a' con x , y α' el que forma la tangente en el b' con la misma dirección, la fuerza que solicita al elemento en la dirección y , es

$$F = T (\text{sen } \alpha - \text{sen } \alpha') = T \cdot d \text{sen } \alpha, \quad [22]$$

puesto que si los puntos $a'b'$ son, como se ha supuesto, infinitamente cercanos, la magnitud entre paréntesis es el diferencial del seno.

Como además, es α infinitamente pequeño, puede ponerse la tangente, que está expresada por $\frac{dy}{dx}$, en lugar del seno, con lo que la [22] se convierte en

$$F = T \cdot d \frac{dy}{dx} = T \frac{d^2 y}{d x^2} dx. \quad [23]$$

Si m es la masa de la unidad de longitud de la cuerda, la del elemento considerado será $m \cdot dx$, y, por consiguiente, según el principio de masa:

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{T}{m} \frac{d^2 y}{d x^2}, \quad [24]$$

se obtiene la expresión

$$v^2 = \frac{T}{m}, \quad [25]$$

o, introduciendo una constante v definida por la relación

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = v^2 \frac{d^2 y}{d x^2}, \quad [26]$$

que es llamada ecuación de la cuerda vibrante. Como es notorio, las derivadas son, en realidad, parciales.

B. INTEGRACIÓN POR SERIES TRIGONOMÉTRICAS. — Tratemos de hallar soluciones de la [26]. Probemos si es posible satisfacerla por un movimiento vibratorio armónico, vale decir, por una función sinusoidal

$$y = a \operatorname{sen} 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \varphi \right). \quad [27]$$

Substituyamos este valor en la [26]. Resulta la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 a}{d x^2} = - \left(\frac{2 \pi}{v T} \right)^2 a, \quad [28]$$

lo que significa que la [27] es una solución de la ecuación dada si la amplitud a es una cualquiera de las soluciones de esta última.

El integral de la [28] es

$$a = A \cdot \operatorname{sen} 2 \pi \frac{x}{v T} + B \cdot \operatorname{cos} 2 \pi \frac{x}{v T} \quad [29]$$

donde A y B son constantes arbitrarias. La constante v antes introducida es, entonces, la velocidad de propagación y, por consiguiente, vT es el largo de onda λ .

Ahora bien, como la amplitud del movimiento debe ser constantemente nula en los puntos fijos extremos, cuyas coordenadas son $x = 0$ y $x = L$, si se indica con L el largo de la cuerda, lo que se manifiesta matemáticamente escribiendo

$$a = 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = L, \quad [30]$$

resulta de la [29]

$$B = 0 \quad [31]$$

y

$$\operatorname{sen} 2 \pi \frac{L}{\lambda} = 0,$$

o

$$2 \pi \frac{L}{\lambda} = k \pi \quad , \quad k = 1, 2, 3, \text{ etc.} \quad [32]$$

condición que significa que son posibles todas aquellas ondas cuya longitud está dada por la relación

$$\lambda_k = \frac{2}{k} L, \quad [33]$$

como ya habíamos establecido anteriormente.

Resulta para las frecuencias

$$n_k = \frac{v}{\lambda_k} = v \frac{k}{2L}; \quad k = 1, 2, 3, \text{ etc.} \quad [34]$$

y, por consiguiente, de una manera general,

$$n_k = kn_1 \quad [35]$$

o, introduciendo los períodos,

$$T_k = \frac{T_1}{k}, \quad [36]$$

donde el subíndice se refiere a la onda fundamental. El movimiento de la cuerda consiste, pues, por las relaciones [27], [29], [31] y [36] en la superposición de un sistema de ondas estacionarias, representada por la expresión

$$y = \Sigma A_k \cdot \text{sen} \frac{k \pi x}{L} \cdot \text{sen} 2 \pi k \left(\frac{t}{T_1} - \theta_k \right), \quad [37]$$

donde θ_k y A_k son constantes para cada oscilación, resultado que establecimos ya en la página 336.

La [37] es la representación más general del movimiento de una cuerda; satisface ya las condiciones límites que provienen del hecho de que los puntos extremos son fijos.

La solución de un caso dado se obtiene introduciendo las condiciones iniciales. Si, por ejemplo, en el instante inicial la deformación de la cuerda es la de la figura 295, el problema consiste en determinar los A_k y θ_k de modo que la serie

$$y = \Sigma A_k \cdot \text{sen} 2 \pi k \theta_k \cdot \text{sen} \frac{k \pi x}{L},$$

a la que se reduce la [37] para $t = 0$, represente la línea ACB ; la solución se alcanza mediante los conocidos desarrollos de Fourier.

En el caso de una cuerda de violín excitada por el arco es $y = 0$ para $t = 0$, pero la velocidad, vale decir $\frac{dy}{dt}$, es para $t = 0$ cierta función de x que debe representarse por la serie que resulta de derivar la [37] con respecto al tiempo e introduciendo en el resultado la expresión $t = 0$.

En las expresiones [19] a [21] no figuran las θ_k porque se han considerado cada una de las oscilaciones por separado, eligiendo

en cada una de ellas, como origen del tiempo, el instante en que la cuerda pasa por la posición de reposo.

C. — VIBRACIONES LONGITUDINALES DE LAS CUERDAS
Y DE LAS BARRAS

12. Vibraciones longitudinales de las cuerdas y de las barras. — Se designa, en acústica, con el nombre de barras a varillas rígidas. Tanto las cuerdas como las barras puede hacérselas vibrar longitudinalmente, por la acción de tracciones rítmicas aplicadas en el sentido de la longitud.

El movimiento longitudinal más general de una cuerda o de una barra consiste, lo mismo que en el caso de las vibraciones transversales de las cuerdas, en la superposición de un sistema de ondas estacionarias, longitudinales en este caso, que resultan de la interferencia de ondas de la misma frecuencia y amplitud que se propagan en sentido opuesto, con la velocidad

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

propia de tales ondas, donde, como es sabido, E representa el módulo de Young y ρ la densidad de la substancia.

Sus longitudes quedan determinadas por las condiciones de los extremos.

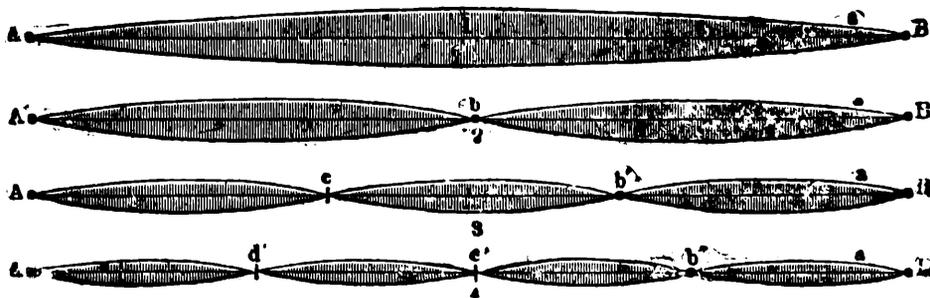


Fig. 303.

A. LOS DOS EXTREMOS SON FIJOS. — Si se trata de una cuerda, por ejemplo, los dos extremos deben ser siempre fijos, en cuyo caso son posibles todas aquellas ondas estacionarias tales como las de la figura 303, cuya longitud guarde con el largo L de la cuerda la relación,

$$\lambda_k = \frac{2}{k} L ; k = 1, 2, 3, \text{ etc.} \quad [33]$$

Lo mismo ocurrirá con la barra en tales condiciones.

Las armónicas tienen, pues, como es notorio, las frecuencias $2n_1$, $3n_1$, $4n_1$, etc., si n_1 es la frecuencia de la oscilación fundamental.

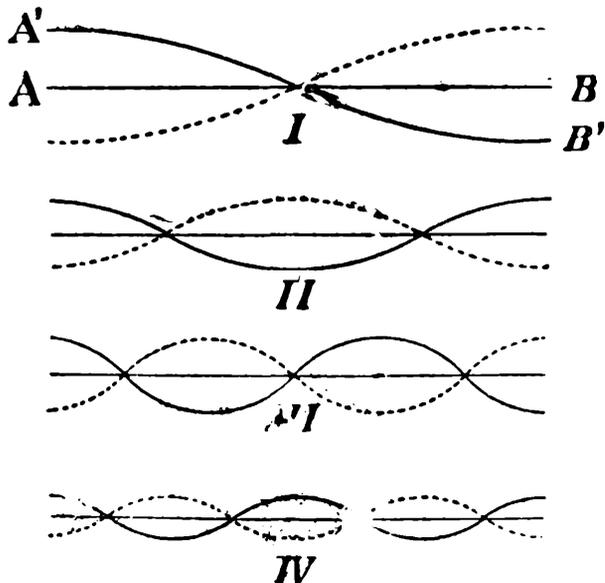


Fig. 304.

Si se indica con x la distancia de una sección cualquiera de la cuerda o barra a uno de sus extremos y con y la elongación de un punto situado en ella, la ecuación de una cualquiera, de las ondas será exactamente de la misma forma que la establecida a propósito de las vibraciones transversales de las cuerdas en la página 335.

B. LOS DOS EXTREMOS SEAN LIBRES. — Los extremos serán

máximos del movimiento, es decir vientres; son, por lo tanto, posibles todas aquellas ondas estacionarias que cumplan esa condición y que están representadas en la figura 304. Sus longitudes estarán dadas también por la [33].

La frecuencia de la oscilación de subíndice k se deduce de la relación

$$n_k \lambda_k = v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad [38]$$

Por la [33] resulta

$$n_k = \frac{k}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad [39]$$

de suerte que se tiene, para la oscilación fundamental:

$$n_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad [40]$$

y para las armónicas

$$n_2 = 2 n_1 \quad ; \quad n_3 = 3 n_1 \quad ; \quad \dots \quad ; \quad n_k = k n_1 \quad ; \quad [41]$$

es decir, existirán todas aquellas cuyas frecuencias sean múltiplos enteros de la frecuencia de aquélla.

Para excitar la nota fundamental se puede fijar la barra en su punto medio. Podrán aparecer además todas las armónicas que tienen un nodo en ese punto y que son aquellas cuyos subíndices k tienen los valores 3, 5, etc. La ecuación de la onda estacionaria fundamental será, indicando con y la elongación longitudinal y con x la distancia a uno de sus extremos:

$$y = a_1 \cdot \cos \frac{\pi x}{L} \cdot \text{sen } 2 \pi \frac{t}{T_1}, \quad [42]$$

si T_1 representa el período. En efecto, la amplitud $a_1 \cdot \cos \frac{\pi x}{L}$ alcanza el valor máximo para $x = 0$ y $x = L$, anulándose, en cambio, tan sólo para $x = \frac{L}{2}$, donde existirá un nodo. Si se fija la barra en un punto

que se encuentra, de uno de sus extremos, a una distancia igual a la cuarta parte de su longitud, se excitará la primer armónica y quizás también otras superiores cuyos nodos se hallen en ese punto. La ecuación de la primera es

$$y = a_2 \cdot \cos \frac{2 \pi x}{L} \cdot \text{sen } 2 \pi n_2 t$$

o, puesto que $n_2 = 2n_1$:

$$y = a_2 \cdot \cos \frac{2 \pi x}{L} \cdot \text{sen } 4 \pi n_1 t = a_2 \cdot \cos \frac{2 \pi x}{L} \cdot \text{sen } 4 \pi \frac{t}{T_1}. \quad [43]$$

En efecto, la amplitud es máxima para $x = 0$ y $x = L$ y además para $x = \frac{L}{2}$; es nula, en cambio, para $x = \frac{1}{4} \cdot L$ y $x = \frac{3}{4} L$.

Para excitar la armónica de orden k hay que fijar un punto situado a la distancia $\frac{1}{k} \frac{L}{2}$ de uno de los dos extremos y el movimiento que a ella corresponde se representa por la relación

$$y = a_k \cdot \cos \frac{k \pi x}{L} \cdot \text{sen } k 2 \pi \frac{t}{T_1}. \quad [44]$$

C. UN EXTREMO FIJO Y EL OTRO LIBRE. — En este caso pueden existir todas aquellas ondas estacionarias que tengan un nodo del movimiento en el extremo fijó y un vientre en el extremo libre, es decir,

tales como las representadas en la figura 305. Sus longitudes obedecerán a la relación

$$L = (2k - 1) \frac{\lambda}{4},$$

$$k = 1, 2, 3, \text{ etc.},$$
[45]

es decir, en la barra existe siempre un número impar de cuartos de onda.

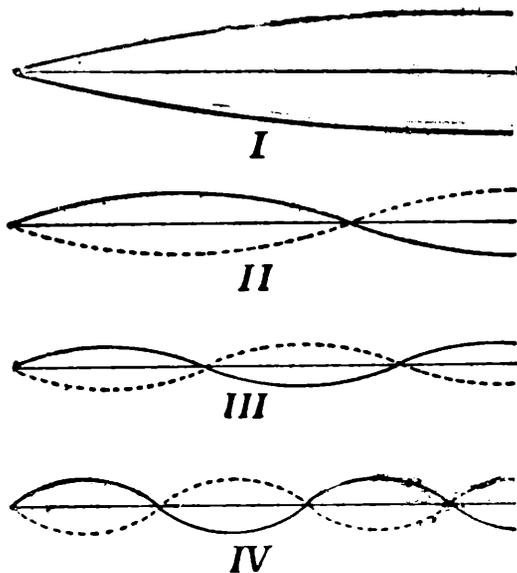


Fig. 305.

La frecuencia de la oscilación de orden k , será, por la relación

$$n_k \lambda_k = v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

y por la [45]

$$n_k = \frac{2k - 1}{4L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad [46]$$

La frecuencia de la oscilación fundamental ($k = 1$) es:

$$n_1 = \frac{1}{4L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

de la primer armónica ($k = 2$) es:

$$n_2 = \frac{3}{4L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 3 n_1;$$

de la segunda armónica ($k = 3$) es:

$$n_3 = \frac{5}{4L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5 n_1,$$

o, de una manera general,

$$n_k = (2k - 1) n_1. \quad [47]$$

Las armónicas posibles son, según esto, todas aquellas cuyas frecuencias son 3, 5, 7, etc., veces mayores que la frecuencia de la fundamental. La ecuación de ésta será, si el origen de las x coincide con el punto fijo, de la forma

$$y = a_1 \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{2L} \cdot \text{sen} 2\pi \frac{t}{T_1}, \quad [48]$$

pues esta expresión tiene un valor cero para $x = 0$ y un valor máximo para $x = L$; el largo de la barra es, por lo tanto, un cuarto de onda.

En general, la oscilación de subíndice k estará representada por la expresión

$$y = a_k \cdot \text{sen} (2k - 1) \frac{\pi x}{2L} \cdot \text{sen} 2\pi (2k - 1) \frac{t}{T_1}. \quad [49]$$

Como ya se ha hecho notar en otra oportunidad, los lugares que son vientres del movimiento son nodos de la compresión, y los nodos del movimiento son vientres de la compresión, mejor dicho son, alternativamente, cada medio período, vientres de compresión o de dilatación.

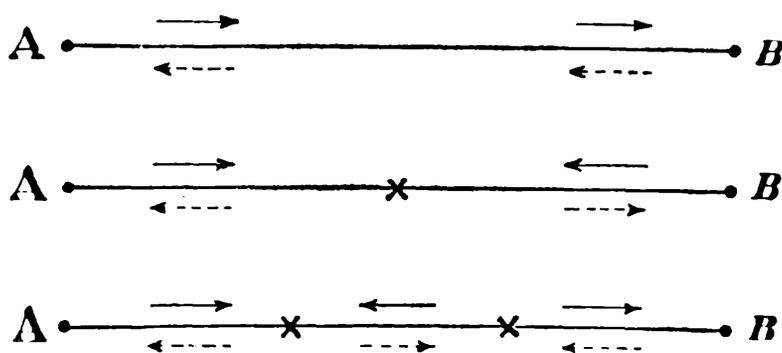


Fig. 306.

Esto se pone en evidencia representando por medio de flechas (figura 306) los sentidos del movimiento. La I corresponde a la oscilación fundamental de una cuerda o barra a extremos fijos. Todas las secciones se mueven, en ese caso, simultáneamente en el mismo sentido, el que cambia en instantes de tiempo separados por intervalos iguales a medio período.

Cuando los elementos de masa se mueven hacia B , aumenta la densidad en los puntos vecinos a éste y disminuye en los próximos a A ; cuando el movimiento cambia de sentido ocurre lo mismo con las variaciones de la densidad. El punto medio de la barra o cuerda constituye el límite de separación entre los elementos comprimidos y dilatados; la materia conserva allí, por lo tanto, su densidad normal o, en otras palabras su compresión no varía. El movimiento es allí, en cambio, mucho más amplio que en otros lugares. El punto medio es, pues, vientre del movimiento y nodo de la compresión, y los extremos nodos del movimiento y vientres de la compresión.

Las figuras II y III representan la primera y segunda armónica, respectivamente, a las que puede aplicarse sin dificultad el razonamiento precedente.

Los sentidos de los movimientos indicados por las flechas se deducen en seguida de las figuras 303 teniendo presente la convención establecida en la página 255.

Es claro que estas mismas consideraciones son aplicables a barras cuyos extremos estén sujetos a otras condiciones, cualesquiera que éstas sean.

Las tensiones elásticas que se despiertan por un movimiento vibratorio longitudinal son de consideración; es posible, por ejemplo, producir la ruptura de un barra de vidrio.

Savart ha medido la amplitud del movimiento oscilatorio de barras mediante un esferómetro, y encontrado que el alargamiento corresponde a tensiones de varios millares de kilogramos. Se trata, en realidad, como veremos más adelante, de oscilaciones producidas por resonancia.

La existencia de los alargamientos puede hacerse ostensible apoyando en el extremo de la barra una bolilla de marfil suspendida de un hilo; tan pronto como se excitan las vibraciones es arrojada bruscamente de su posición.

D. — VIBRACIONES TRANSVERSALES DE LAS BARRAS. DIAPASÓN

13. Vibraciones transversales de las barras. — El movimiento vibratorio transversal de barras no puede describirse por el método establecido en el párrafo 9, que es aplicable, como se vió, al movimiento longitudinal.

La teoría, que por requerir métodos analíticos demasiado elevados no consideramos, evidencia todas las características del movimiento, tal cual se revelan en la experiencia.

Indicaremos, pues, los resultados relativos a dos condiciones distintas de los extremos.

A. LOS DOS EXTREMOS SEAN LIBRES. — En este caso son posibles todas las oscilaciones cuyas frecuencias están dadas por la relación

$$n_k = \frac{1}{2\pi} \frac{ab}{L^2} m_k^2 \quad [50]$$

siendo

$$a^2 = \frac{E}{\rho} \quad [51 a]$$

y

$$b^2 = \frac{I}{S}, \quad [51 b]$$

donde E y ϱ tienen la misma significación que en los párrafos precedentes, I es el momento de inercia de la sección S de la barra, que se supone constante y pequeña con respecto a su longitud L , y m una cualesquiera de las raíces de la ecuación trascendente ⁽¹⁾:

$$\cos m \cdot \cosh m = 1 \quad [52]$$

Las soluciones de esta ecuación son

$$3,011 \frac{\pi}{2}, \quad 5,000 \frac{\pi}{2}, \quad 7,000 \frac{\pi}{2}, \quad \dots, \quad (2k + 1) \frac{\pi}{2},$$

de suerte que las frecuencias están dadas, aproximadamente, por la relación

$$n_k = \frac{\pi}{2} \frac{ab}{L^2} \frac{(2k + 1)^2}{4}, \quad [53]$$

lo que es tanto más exacto cuanto mayor es k .

De aquí resulta, entonces, que las frecuencias de las oscilaciones transversales de una barra a extremos libres son proporcionales a la raíz cuadrada del módulo de Young de la substancia y del radio de giración ⁽²⁾ de la sección, y, por lo tanto, del espesor, e inversamente proporcionales al cuadrado de la longitud.

Los nodos se encuentran situados, a contar de uno cualquiera de los extremos, tomando la longitud de la barra como unidad, en las posiciones que se dan en la tabla que va a continuación, donde nos limitamos a las tres primeras oscilaciones:

k	n_k	Número de nodos	Posiciones de los nodos en fracciones del largo de la barra
1	n_1	2	0,224; 0,776
2	$2,76 n_1$	3	0,132; 0,500; 0,868
3	$5,40 n_1$	4	0,094; 0,357; 0,643; 0,906

⁽¹⁾ Se indica, como de costumbre, con el símbolo $\cosh m$ al coseno hiperbólico de m .

⁽²⁾ Pues b^2 es el radio de giración de la sección. Véase tomo I, páginas 363 y 203.

Para obtener las distintas frecuencias se puede fijar la barra en el primer nodo haciendo oscilar transversalmente el extremo más corto. La figura 307 ilustra la cuestión.

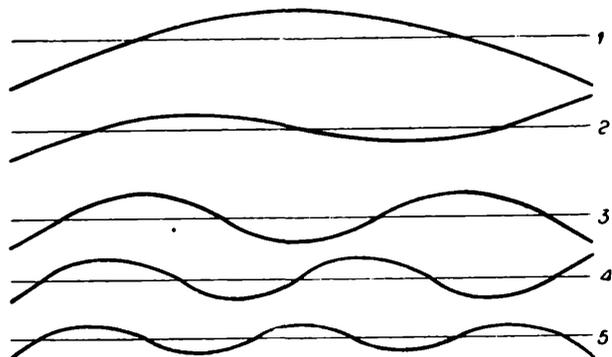


Fig. 307.

B. UN EXTREMO FIJO Y EL OTRO LIBRE. — Las frecuencias están dadas por la misma relación [50] pero las m_k son las raíces de la ecuación

$$\cos m \cdot \cosh m = -1 \quad [54]$$

que son

$$1,194 \frac{\pi}{2}, 2,989 \frac{\pi}{2}, 5,000 \frac{\pi}{2}, 7,000 \frac{\pi}{2}, \dots, (2k - 1) \frac{\pi}{2},$$

de suerte que las frecuencias de las oscilaciones posibles de la barra están dadas, con muy buena aproximación, si se exceptúan las dos primeras, por la fórmula

$$n_k = \frac{\pi}{2} \frac{ab}{L^2} \frac{(2k - 1)^2}{4} \quad [55]$$

Las frecuencias de las oscilaciones fundamentales de una misma barra, en las dos condiciones discutidas, guardan la relación

$$\frac{n_1 \text{ (libre-libre)}}{n_1 \text{ (fijo-libre)}} = \frac{(3,011)^2}{(1,194)^2} = 6,36,$$

es decir, en el primer caso, el sonido es casi seis veces y media más alto.

El número de nodos y sus posiciones para las diferentes frecuencias están consignados en la tabla que sigue:

k	n_k	Número de nodos	Posición de los nodos, a contar desde el extremo libre, en fracciones del largo de la barra
1	n_1	1	1 (punto fijo)
2	$6,26 n_1$	2	1; 0,226
3	$17,5 n_1$	3	1; 0,5; 0,132
4	$34,3 n_1$	4	1; 0,644; 0,356; 0,094

En la figura 308 se han representado gráficamente estados de movimientos correspondientes a las cuatro primeras oscilaciones.

Savart ha comprobado por mediciones directas, la exactitud de las predicciones de la teoría.

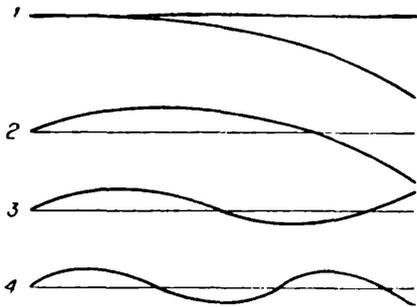


Fig. 308

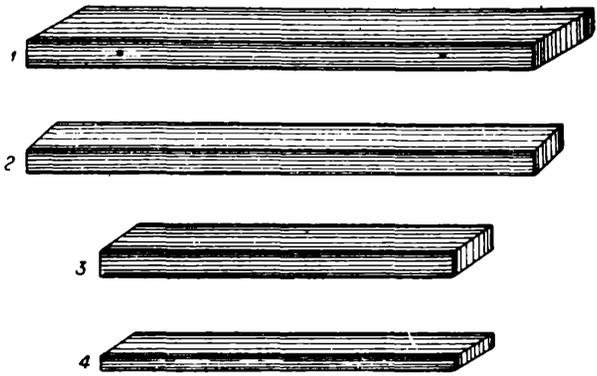


Fig. 309.

De acuerdo con lo que precede se comprende por qué los sonidos emitidos por reglillas de madera (fig. 309) de la misma sección, pero de distinta longitud son tan diferentes. Pueden arrancarse de ellas todas las notas de una escala determinada.

14. El diapasón. — El diapasón consiste en una barra de acero plegada en forma de horquilla que se continúa, en el lugar del pliegue, en otra pequeña barra metálica, destinada a llevar un mango o a permitir su fijación adecuada.

Se le puede hacer vibrar de diferentes maneras, ya sea golpeándolo con un martillo dotado de una pieza de goma, excitándolo con un arco de violín o alejando sus ramas mediante un cuerpo apropiado y abandonándolas luego a sí mismas.

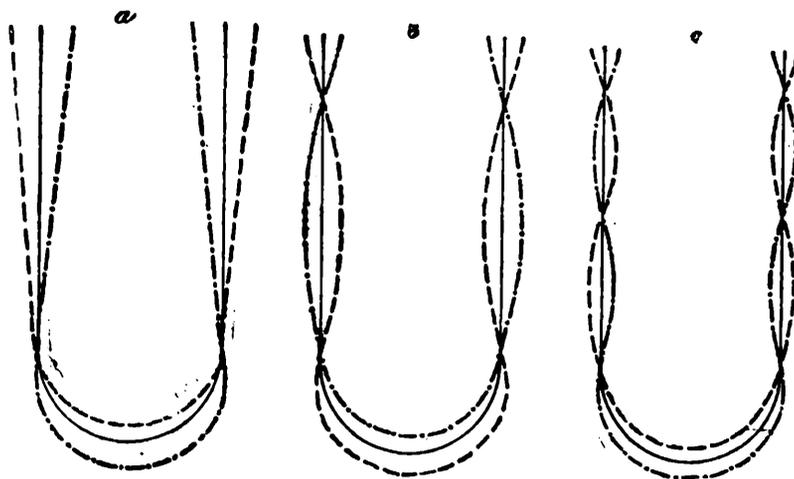


Fig. 310.

La experiencia revela que los nodos del sonido fundamental se encuentran muy cerca del lugar de la dobladura (fig. 310), de modo que cada una de las ramas vibra, aproximadamente, como

una barra cuyos extremos son: fijo el uno y libre el otro. Las figuras *b* y *c* representan oscilaciones que, bajo la suposición precedente, pueden considerarse como las dos primeras armónicas.

Las frecuencias se encuentran pues, en la relación establecida en el párrafo *b*, de la sección anterior.

Esto es tan solo aproximado, como es notorio; la experiencia evidencia que dos diapasones que dan la misma nota fundamental pueden diferir en las alturas de sus armónicas, lo que se hace ostensible excitándolos y extinguiendo en uno de ellos la oscilación fundamental; se percibirán, en seguida, pulsaciones provenientes de las primeras armónicas.

Para todas las oscilaciones ocurre que las masas de las ramas que podemos llamar homólogas se mueven en todo momento en sentido contrario, vale decir, se acercan o se alejan, generando así un enérgico movimiento vibratorio de las masas de aire que las circundan.

La oscilación fundamental es no solamente de una amplitud mayor que la de las armónicas sino también mucho menos amortiguada, de suerte que, transcurrido un tiempo muy corto, es la única que perdura. Se tiene así la posibilidad de emitir sonidos bien puros, lo que constituye una ventaja apreciable.

La frecuencia de las oscilaciones de un diapasón, que por lo que precede es la de la nota fundamental, es sensible a los cambios de temperatura, por las modificaciones que esto determina en la elasticidad de la substancia. Según mediciones de M. Leod y Clarke, realizadas utilizando el método estroboscópico, descrito en la página 247, la frecuencia varía con la temperatura según la relación

$$n_t = n_0 (1 - 0,00011 t), \quad [56]$$

donde n_0 representa la frecuencia a 0°C , t la temperatura y n_t la frecuencia a t grados.

Como diapasón normal se ha elegido en un congreso celebrado en Viena en el año 1885, un diapasón a cuyo sonido fundamental corresponde una frecuencia de 435 oscilaciones dobles, a 15°C .

Que la parte curva del diapasón vibra en la forma que ilustran las figuras puede comprobarse apoyando su base sobre el borde de una copa, por ejemplo; se percibirá en seguida un sonido proveniente de las oscilaciones que excitan en ella sus impulsos.

La energía que se desprende por segundo del diapasón, a través de la masa de aire que lo circunda, es relativamente a la que tiene

almacenada, pequeña, lo que significa que las ondas acústicas que en su movimiento generan son de amplitud reducida.

Se aprovecha su energía vibratoria para producir ondas acústicas intensas, recurriendo al fenómeno de la resonancia, que se ha estudiado ya en el primer tomo, y sobre el cual hemos de volver más adelante.

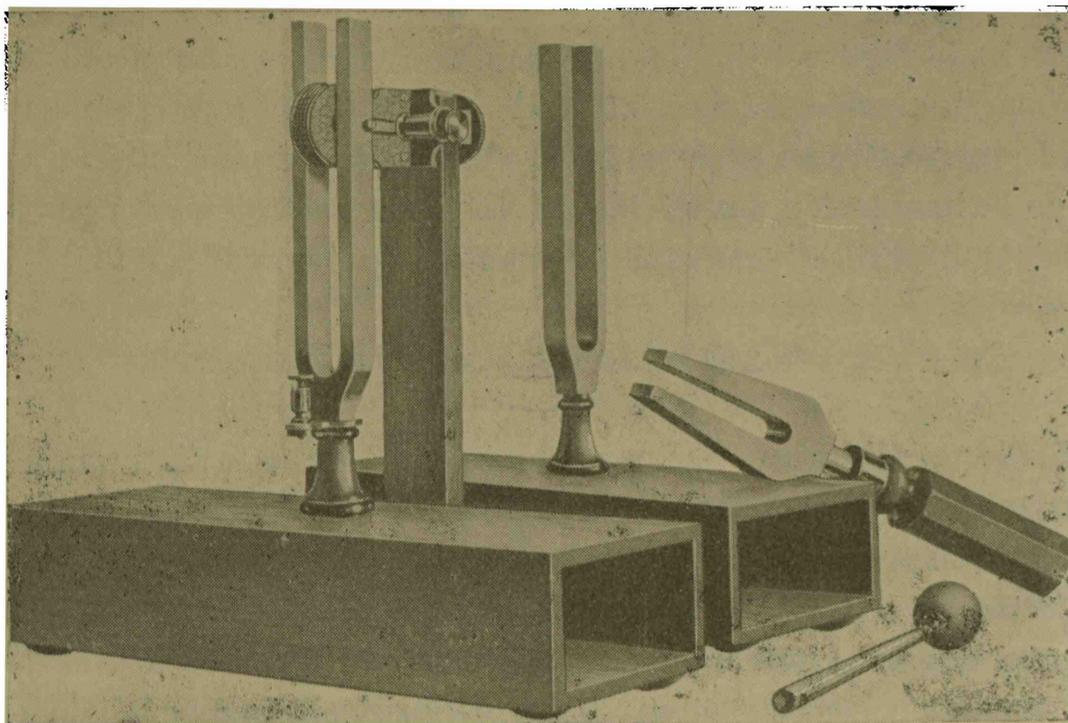


Fig. 311.

Se le monta, a ese fin, en una caja, que ordinariamente es de madera, de corte rectangular, abierta por uno de sus extremos (fig. 311), cuya longitud es, muy aproximadamente, igual a la cuarta parte del largo de onda de la oscilación fundamental. La caja transmite los impulsos de aquél a la masa de aire que contiene, la que vibra intensamente a causa de la coincidencia de los períodos propios. Este efecto se aumenta si se logra que la frecuencia de las vibraciones propias *de la caja misma* sea próxima a la frecuencia de las del diapasón; sus movimientos serán así más amplios y mayor, por consi-

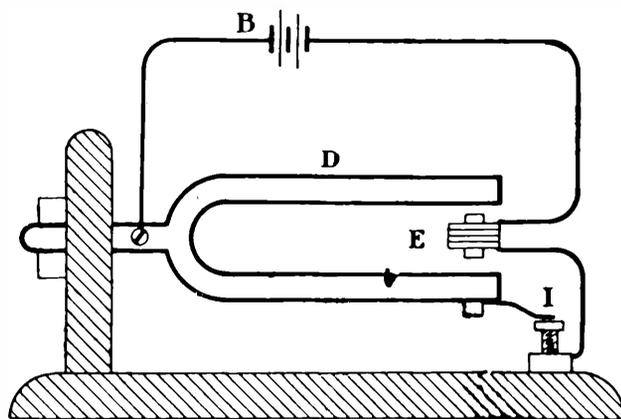


Fig. 312.

guiente, la excitación de la columna de aire. Esas frecuencias no deben ser iguales ni demasiado próximas, pues si tal ocurre el movimiento vibratorio de la caja puede llegar a ser suficientemente enérgico como para reaccionar sobre el diapasón y alterarle su período.

En muchas determinaciones es indispensable mantener las oscilaciones de un diapasón y, a menudo, es necesario que la amplitud sea constante. En tales casos se le excita electromagnéticamente mediante dispositivos como el que se ve en uno de los diapasones de la figura 311 y en la figura 312. Cuando una de las ramas ha alcanzado la máxima elongación, hacia afuera, cierra, mediante una lámina metálica *I*, cuyo extremo es de platino, el circuito de una batería, originando la imantación del núcleo del pequeño electroimán, cuyos polos traccionan, respectivamente, la rama a la que enfrentan.

E. — VIBRACIONES DE LAS PLACAS Y DE LAS MEMBRANAS

15. Generalidades. — Los mismos caracteres que distinguen a las cuerdas de las barras diferencian las membranas de las placas. Idealmente la membrana es una lámina sólida, infinitamente delgada y perfectamente flexible, sometida a una tensión suficientemente grande para que los cambios que se originan por las pequeñas deformaciones en que consiste el movimiento vibratorio no la modifiquen de una manera sensible.

No es menester definir lo que se entiende por placa.

Los movimientos vibratorios de estos cuerpos han sido motivo de numerosísimos trabajos teóricos y experimentales.

Han existido grandes discrepancias, en lo que se refiere al movimiento de las placas de forma rectangular. Si bien los diversos investigadores estaban de acuerdo en lo que atañe a la ecuación del movimiento, que no depende, naturalmente, de la forma de la placa, disentían en la elección de las condiciones límites que corresponden al contorno. Se impusieron las establecidas por Kirchhoff, porque los resultados obtenidos concordaban mejor con los de la experiencia. Recientemente, Ritz ha demostrado, sin embargo, que algunas de las condiciones establecidas por Kirchhoff eran erróneas.

En las placas de borde circular las condiciones límites no han motivado discusión alguna y, por otra parte, las características evidenciadas por la teoría están en perfecta concordancia con las que revela la experiencia.

Las membranas no podían ofrecer dificultades de la misma índole

que las placas, puesto que sus bordes deben ser, necesariamente fijos, lo que constituye una condición de contorno perfectamente definida.

16. Vibraciones de las membranas. — En las membranas, lo mismo que en las cuerdas, el movimiento está regido por la componente normal de la tensión, que aparece tan pronto como se las deforma.

En el movimiento más simple, que es el de la oscilación fundamental, todos los puntos de la membrana se mueven simultáneamente hacia el mismo lado.

Esta oscilación va acompañada, en general, de un cortejo numeroso de oscilaciones de frecuencias más elevadas.

Los movimientos que a cada una de éstas corresponden se distribuyen sobre la membrana dividiéndola en zonas, más numerosas cuanto mayor es la frecuencia, y de tal modo que dos regiones vecinas se mueven siempre en sentido contrario, estando separadas, por consiguiente, por *líneas de reposo o nodales*.

El movimiento de las distintas partes de la membrana puede hacerse ostensible, de manera muy llamativa, desparramando sobre ella arena muy fina; en los vientres, los granos son arrojados periódicamente hacia arriba, corriéndose poco a poco hacia los lugares de reposo, con lo que quedan diseñadas, por montículos, las líneas nodales. Se trata de un movimiento estacionario que proviene de la superposición de oscilaciones de diferente frecuencia y dirección.

Por ser las membranas circulares de uso frecuente, en instrumentos de música y en la técnica, daremos algunos datos referentes a su movimiento, cuya descripción teórica es obra de Kirchhoff y que concuerda, como ya se dijo, con los resultados experimentales, como lo ha comprobado Bourget.

Si la membrana es, como se supone en teoría, homogénea, del mismo espesor y está uniformemente tendida, las líneas nodales son círculos, o diámetros que forman entre ellos ángulos iguales, o combinaciones de ambos sistemas. En la figura 313 están representados algunos casos con indicación de la altura de la nota, tomando la fundamental como unidad, y la relación entre los radios de los nodales circulares con el radio de la membrana.

La frecuencia de la nota fundamental está dada por la relación

$$n_1 = \frac{0,764}{2r} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad [57]$$

donde T representa la tensión, ρ la densidad de la substancia y r el radio.

En el oído humano las vibraciones exteriores inciden primeramente sobre la membrana del tímpano, cuya tensión puede ser variada dentro de grandes límites merced a un sistema de huesecillos y de

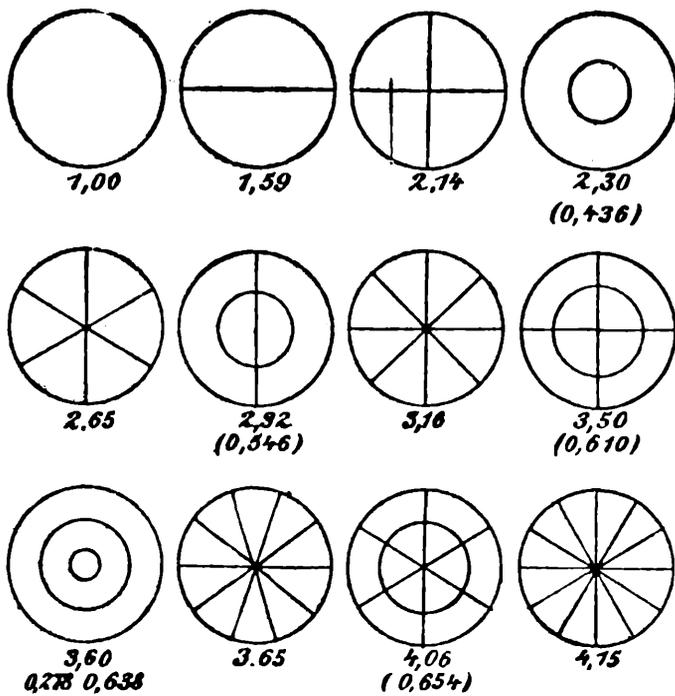


Fig. 313.

músculos, con lo que se modifica la frecuencia de su oscilación propia hasta que sea igual a la del sonido exterior. En esta acomodación consiste el proceso que se denomina *aguzar el oído*. Se explica así por qué el tímpano parece apto a vibrar, dentro de ciertos límites, al unísono de cualquier sonido.

El conocido hecho de la agudeza extraordinaria que tiene el oído de algunos animales para percibir ruidos de otros seres que les son peligrosos, como por ejemplo

el de los caballos para el ruido que produce el deslizamiento de las víboras, revela, quizá, a la vez que un acomodamiento permanente a su período fundamental, una mayor sensibilidad para los mismos de los órganos nerviosos, originada como medio de defensa.

17. Vibraciones de las placas. — Una placa de vidrio o de metal puede hacerse vibrar con tonos muy diferentes según la manera y la ubicación del punto en que se excita, y según los lugares que, por estar fijos o en contacto con otros cuerpos (con los dedos por ejemplo), deban permanecer en reposo y pertenecer, por consiguiente, a líneas nodales.

Para hacer vibrar una placa es menester fijar, por lo menos, uno de sus puntos, con auxilio de una prensa (fig. 314), cuyas pinzas estén recubiertas de sendas piezas cónicas de corcho.

Chladni (1756-1827), que ha sido el primero en estudiar tales vibraciones, y a quien se debe la idea de revelar objetivamente sus características mediante arena muy fina, recomienda utilizar, para excitarlas, el arco de violín en toda su extensión y que, al fin, des-

pués de haber aumentado la energía del movimiento, sea retirada bruscamente, para que la placa siga vibrando libremente.

Se puede arrancar a la misma placa infinidad de sonidos de tonos diferentes, como ya se dijo, obteniéndose así variadísimas figuras. Las zonas en que se divide la placa al vibrar, y, por consiguiente, el número de líneas nodales, es tanto más grande cuanto mayor es la frecuencia del sonido que emiten.

La experiencia enseña que a una figura dada corresponde siempre el mismo sonido pero que la recíproca no es válida, correspondiendo a un mismo sonido, en general, figuras diferentes.

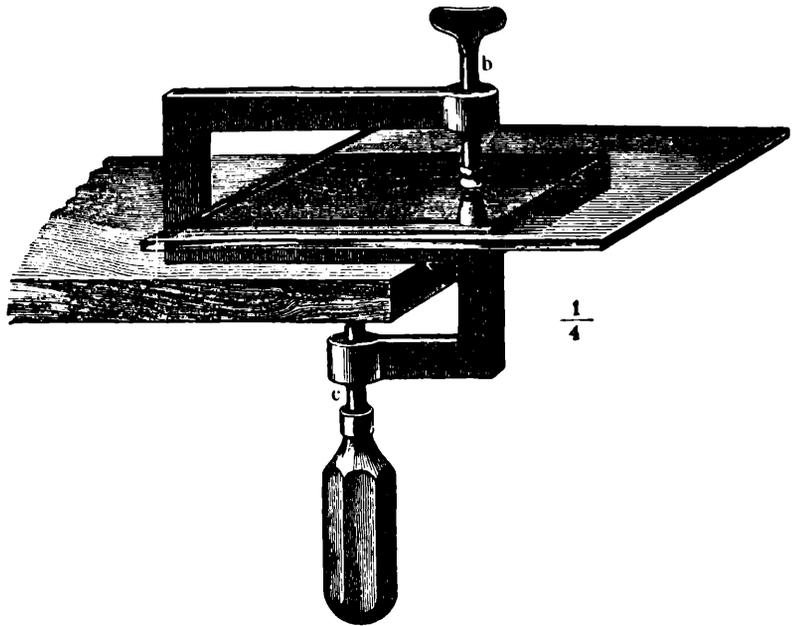


Fig. 314.

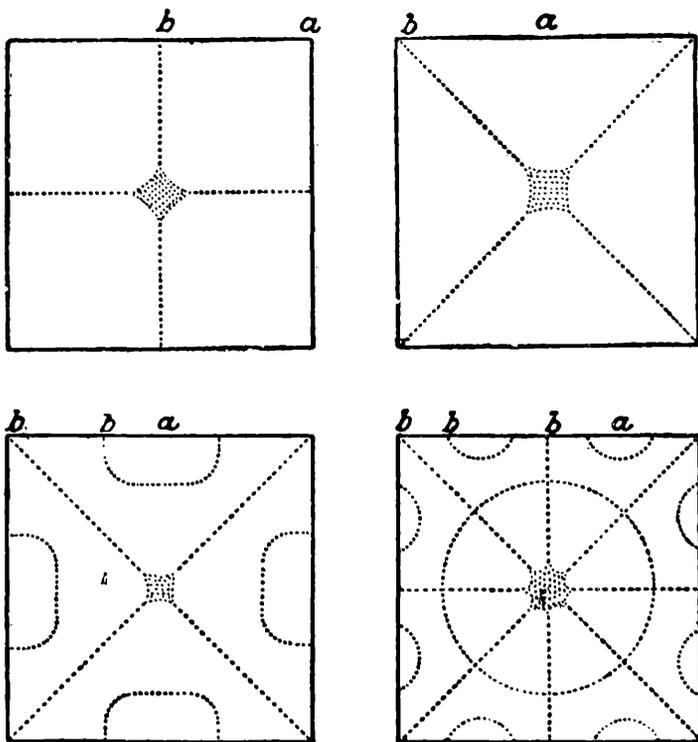


Fig. 315.

Esto es explicable, pues sonidos de la misma altura pueden diferir en el cortejo de los sonidos superiores que los acompañan.

En las figuras 315 se han representado diferentes figuras de Chladni, como se las llama. Se refieren a placas rectangulares fijadas en su punto medio; los lugares indicados con *a* son los de excitación y los señalados con *b* aquellos que están, como el centro, impedidos de vibrar, por ser mantenidos en contacto con otros cuerpos los dedos, por ejemplo.

Wheatstone ha ideado una explicación que sin ser, ni con mucho,

rigurosa, da cuenta, por lo menos en sus caracteres generales, del mecanismo del proceso, en las placas rectangulares.

Consideremos, para mayor sencillez, el movimiento de la placa cuadrangular. Wheatstone supone que en las dos direcciones de sus pares de lados vibra como barras a extremos libres; la superposición de las oscilaciones correspondientes a tales direcciones originarían las diferentes vibraciones.

Supongamos, por ejemplo, que la placa vibra en una dirección de modo que las líneas ab y cd (fig. 316) son nodos y en la otra de

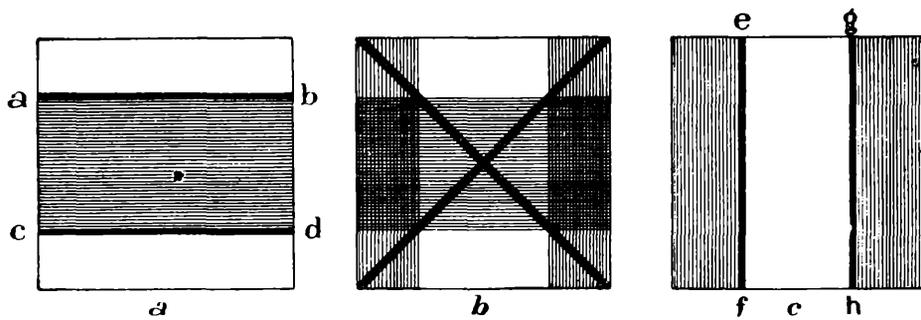


Fig. 316.

suerte que lo sea ef y hg (fig. 316 c); vibren, además, las partes homólogas simultáneamente en sentido contrario, por lo que se las sombrea diferentemente; cuando las partes sombreadas, por ejemplo, se mueven hacia abajo, las claras lo hacen hacia arriba.

Si actúan ambos movimientos al mismo tiempo el movimiento resultante se obtiene superponiéndolos (fig. 316 b); los lugares en que coinciden los sombreados se moverán, como es notorio, en sentido contrario que aquellos en que coinciden los claros.

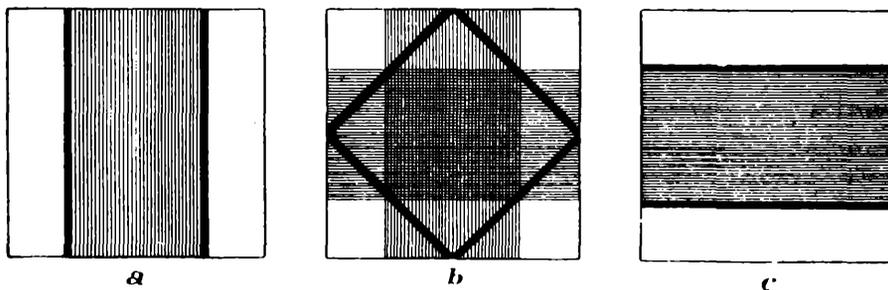


Fig. 317.

Los lugares en que se superponen los sombreados con los claros los movimientos son opuestos y se debilitan; se anulan en aquellos puntos que por ser homólogos los movimientos son de la misma amplitud. Resultan, pues, lo que es notorio, dos líneas nodales, que son las diagonales del cuadro, como enseña la figura 316 b .

Si los movimientos componentes se producen de modo que las regiones homólogas se mueven simultáneamente en el mismo sentido, es decir, sin diferencia de fase, como está representado en las figuras 317 *a* y *c*, la línea nodal es un cuadrado (fig. 317 *b*).

En las placas circulares las líneas nodales son, como en las membranas de la misma forma, diámetros que forman entre sí ángulos iguales, círculos concéntricos con ella o combinaciones de ambos sistemas.

Una placa circular puede excitarse apoyándola sobre los vértices de piezas cónicas de corcho sobre puntos que formen un círculo concéntrico con ella, o fijando su punto medio (fig. 318) y frotándola

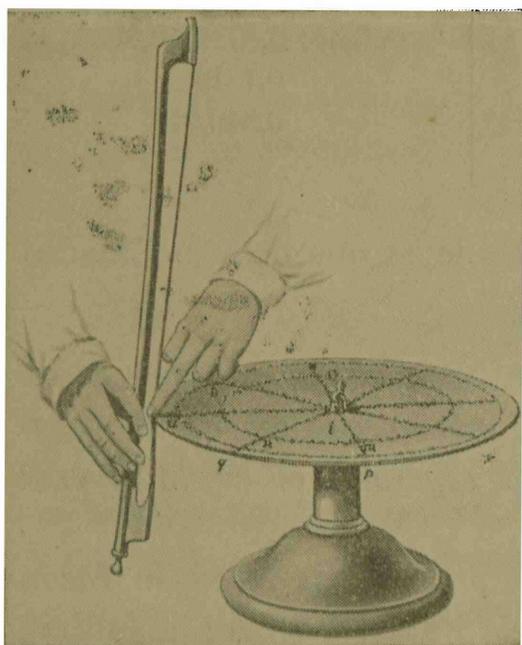


Fig. 318.

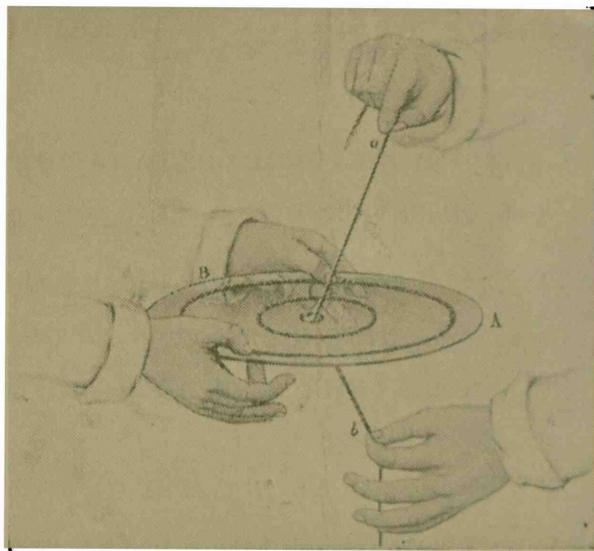


Fig. 319.

en su borde con un arco, o disponiéndola como en el primer caso, sosteniéndola con las manos y frotando en el borde de un pequeño orificio practicado en su centro (fig. 319) con un haz de crines.

Los resultados de la teoría, debida a Kirchhoff, concuerdan, muy exactamente, con los de la experiencia, como lo han evidenciado los trabajos experimentales que realizara Strehlke bajo su dirección.

La teoría enseña, por ejemplo, y la experiencia lo comprueba, que en el caso de líneas nodales de una sola clase, círculos o diámetros, las frecuencias son proporcionales al cuadrado del número de líneas de tal especie y que si se trata de figuras mixtas la frecuencia es proporcional a $(d + 2c)^2$, donde d es el número de diámetros y c el número de círculos. Estas leyes habían sido deducidas empíricamente por Chladni.

Un resultado de la teoría, fácil de verificar, es el que se refiere a la distribución de las líneas nodales. En las tablas que van a continuación están consignados, en fracciones del radio de la placa, los valores de los radios de los círculos nodales dados por la teoría, correspondientes a casos diferentes, y los valores experimentales obtenidos por Strehlke.

Número de		Radios de los círculos nodales en fracciones del radio de la placa	
Círculos	Diámetros	Valores teóricos	Valores experimentales
1	0	0,6806	0,6782
2	0	0,3915; 0,8420	0,3913; 0,8415
3	0	0,2568; 0,5915; 0,8938	0,2563; 0,5911; 0,8936
1	1	0,7814	0,7812
1	3	0,8452	0,840

La teoría ha comprobado también otras leyes que dedujo Chladni de sus observaciones y que son:

1º *Las frecuencias de placas de la misma substancia, correspondientes a figuras idénticas o, lo que es lo mismo, que vibran idénticamente, están entre sí en razón directa del espesor y en razón inversa de la superficie;*

2º *En placas de materia diferente las frecuencias están en razón directa de la raíz cuadrada del módulo de Young y en razón inversa de la raíz cuadrada de la densidad.*

Estos resultados de Chladni y de Kirchhoff han sido comprobados por Mercadier.

F. — VIBRACIONES DE LOS TUBOS

18. Las oscilaciones de un tubo labial. — En la figura 320 se ha representado la mitad de un tubo de este tipo, que se utiliza como fuente de sonido en los órganos.

Se construyen de madera y también metálicos, en cuyo caso se les da la forma circular, pudiendo ser el extremo superior abierto, como en el dibujo, o cerrado.

El extremo inferior del tubo ha de ser, necesariamente, cierta sección transversal que pasa por la abertura inferior lateral, limitada por el borde *ab* del labio; ese extremo es, pues, abierto.

Si se insufla aire a través del conducto inferior, la corriente sale por la angosta abertura cd que deja libre la pieza prismática interior visible en la figura y cae sobre el labio ab ; el chorro es allí dividido y desviado, generándose un proceso oscilatorio complejo, un chirrido, que se percibiría a no estar el tubo. Esas oscilaciones excitan las masas gaseosas contenidas en él, las que comienzan en seguida a emitir sus tonos propios.

A. EXTREMO SUPERIOR ABIERTO. — Los dos extremos son, entonces, por lo que se advirtió, abiertos. El tubo se comporta exactamente como una barra que vibra longitudinalmente, a extremos libres; éstos son, pues, vientres del movimiento y nodos de la compresión. Son posibles, por consiguiente, todas aquellas ondas que satisfagan esta condición, es decir, tales que sus longitudes cumplan con la relación

$$\lambda_k = \frac{2}{k} L, \quad k = 1, 2, 3, \text{ etc. ,}$$

si L es el largo del tubo. Las figuras 321 representan esquemáticamente, esas oscilaciones.

Las frecuencias de las armónicas guardan, por lo tanto, con la frecuencia n_1 de la oscilación fundamental, la relación, ya establecida:

$$n_k = kn_1.$$

En todos aquellos lugares donde el movimiento es un máximo, la presión sufre variaciones mínimas, nulas, mejor dicho.

B. EXTREMO SUPERIOR CERRADO. — El tubo se comporta en este caso como una barra excitada longitudinalmente estando fijo un extremo y libre el otro. El extremo cerrado es un nodo del movimiento y un vientre de la presión.

Son posibles todas aquellas ondas (fig. 322) cuyas longitudes satisfagan la expresión

$$L = (2k - 1) \frac{\lambda_k}{4}, \quad k = 1, 2, 3, \text{ etc.}$$

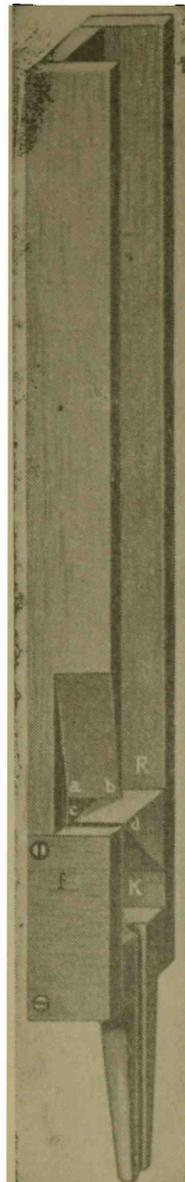


Fig. 320.

Las frecuencias de las armónicas se deducen de la frecuencia n_1 de la nota fundamental por la relación

$$n_k = (2k - 1) n_1.$$

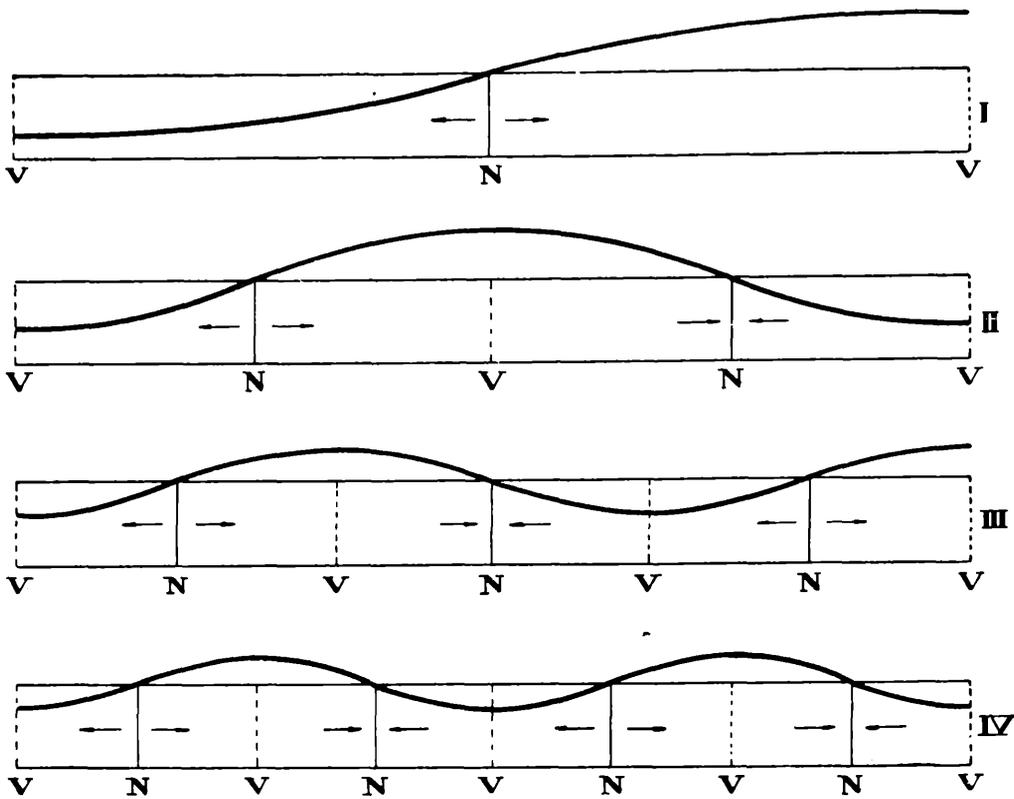


Fig. 321.

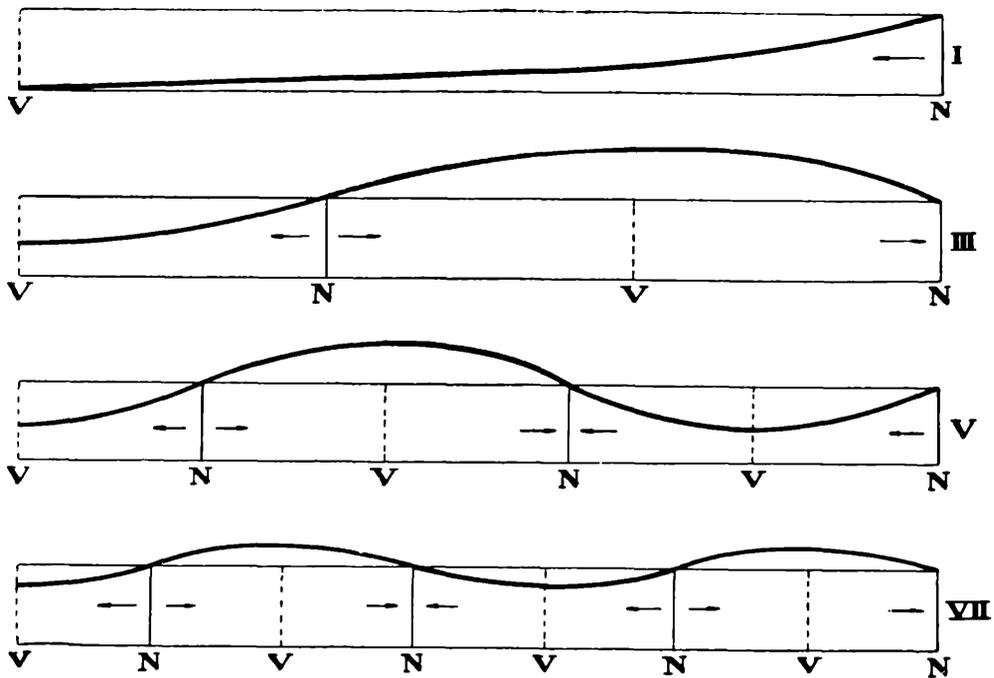


Fig. 322.

Es claro que tanto en este caso como en el anterior se puede calcular, con bastante aproximación, la frecuencia n_1 , puesto que está dado λ_1 y se conoce la velocidad de propagación, que es la del sonido.

19. **Comprobaciones experimentales.** — Con el auxilio de las llamas manométricas puede estudiarse experimentalmente el movimiento de la masa de aire de los tubos.

La figura 323 representa un tubo, cuya dimensión transversal es cinco veces y la longitudinal diez veces mayor que la dibujada, provisto de tres cápsulas de Koenig.

Si se excita la nota fundamental por resonancia, (véase el capítulo siguiente) las tres llamas, y particularmente la del medio, examinadas a través de un espejo rotativo, aparecen con un contorno bordeado, pues los vientres de la presión se encuentran en los nodos del movimiento; en el punto medio, pues, la presión sufre las variaciones más grandes y los extremos la variación cero, y, por consiguiente, en los puntos intermedios la presión también es variable, lo que explica la agitación de todas las llamas.

Si el tubo da la primer armónica, la llama *a* permanece en reposo, pues en el punto medio del tubo se tendrá ahora un vientre del movimiento y, por consiguiente, un nodo de la presión, mientras que la *b* y *c* oscilan.

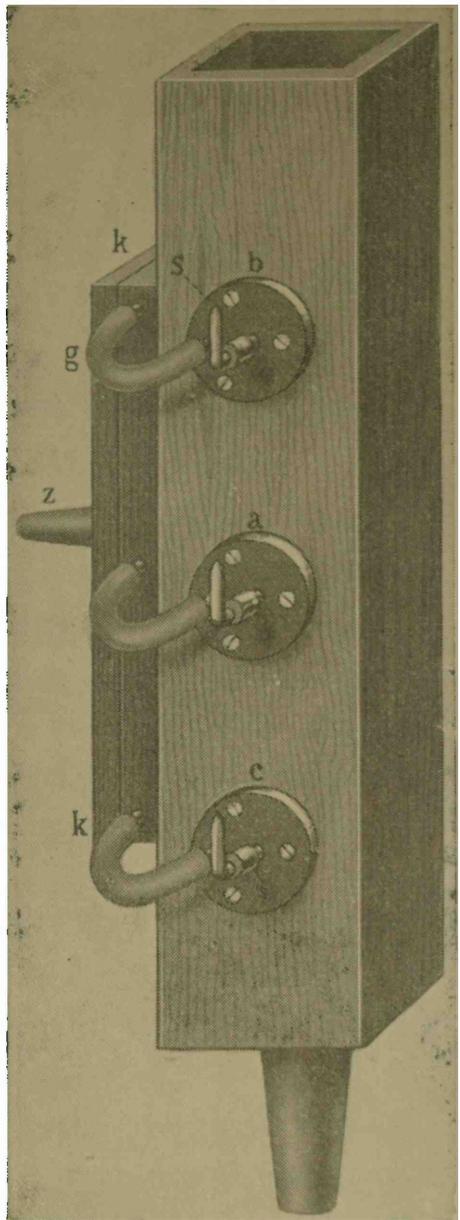


Fig 323.

CAPITULO XVII

RESONANCIA EN LOS MEDIOS CONTINUOS. ANALISIS DE LOS SONIDOS. ESCALAS MUSICALES

1. Consideraciones generales. — En el primer tomo nos hemos ocupado ya, con detenimiento, de las oscilaciones forzadas.

Según se vió, si un cuerpo es impulsado por fuerzas periódicas provenientes de otro cuerpo oscilante, comienza a vibrar con la frecuencia de éste, la amplitud de las oscilaciones, que se denominan forzadas, es tanto mayor cuanto menor es la diferencia de las frecuencias de los cuerpos. Cuando son iguales, la amplitud alcanza el valor máximo y se dice que existe resonancia entre los movimientos de los sistemas. Fenómenos semejantes se producen en la acústica.

Si se tiene, por ejemplo, dos diapasones que emiten la misma nota, montados en sendas cajas de resonancia abiertas, puestos uno frente a otro de modo que las aberturas se miren, y se excita uno de ellos, se percibirá, aun extinguiendo las oscilaciones del primero, que el otro también vibra. Las ondas acústicas que parten de su caja inciden sobre la masa de aire del otro y la ponen en vibración; esta masa absorbe la energía mecánica de las oscilaciones incidentes y entrega parte a la masa misma de su diapason, que la almacena poco a poco, aumentando la amplitud de sus oscilaciones, hasta que se hacen distintas. A su vez, emite energía en las ondas que en su movimiento se generan.

Se dice entonces que el diapason resuena y se le da, también, el nombre genérico de *resonador*.

Si además de ese resonador de la misma frecuencia se tienen otros de frecuencias vecinas, mayores o menores, se observará que también vibran, pero con menor energía. De la misma manera, si se tienen dos pianos, uno frente del otro, con la tapa abierta, y se hace sonar una nota de uno de ellos se percibirá que el otro emite la misma nota.

Antes de continuar con los fenómenos de resonancia, determinados por ondas que se propagan a través del aire, ocupémosnos de la resonancia de cuerdas y de barras.

2. Ondas estacionarias obtenidas en cuerdas por resonancia.
Dispositivo de Melde. — Supongamos que una cuerda AB (fig. 324), cuyo punto B es fijo, se mantiene bajo cierta tensión T ; una

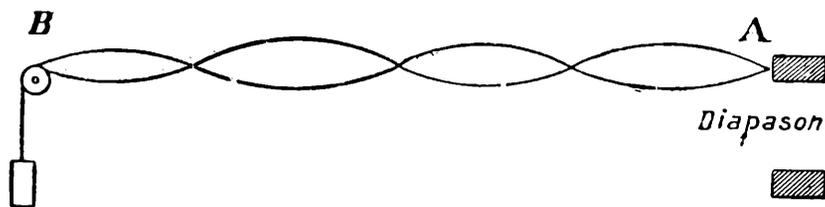


Fig. 324.

deformación transversal cualquiera se propagará en ella, como ya se sabe, con cierta velocidad definida por esa tensión. Si el punto A es sometido, con el auxilio de un diapason por ejemplo a un movimiento transversal, partirán de él, en general, ondas de la misma frecuencia, que se propagan a lo largo del hilo y se reflejan en el extremo; se generarán, pues, ondas estacionarias.

Estas ondas se hacen ostensibles para todas aquellas tensiones de la cuerda, tales, que los largos de ondas que corresponden al producto del período del diapason por la velocidad de propagación que tales

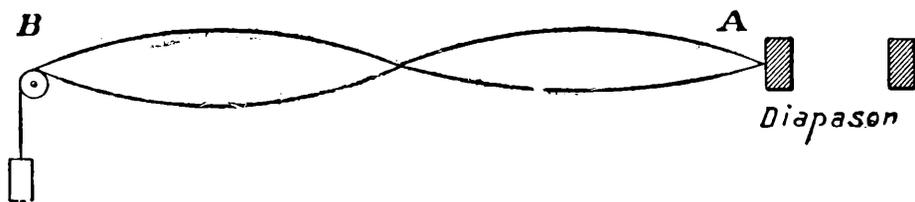


Fig. 325.

tensiones originan, quepan en la cuerda AB un número tal de veces que los puntos A y B sean nodos.

Si la tensión es tal que la frecuencia del diapason multiplicada por la velocidad de propagación es el doble que el largo de la cuerda, ésta oscilará como indica la figura 303 I; si es igual, oscila como enseña la II; si es $\frac{2}{3}$ como muestra la III, y así sucesivamente. En todos los casos, pues, una de las oscilaciones propias de la cuerda es de la misma frecuencia que la del diapason, y su amplitud es exaltada por ésto; se trata, por lo tanto, de un fenómeno de resonancia.

También es posible excitar oscilaciones transversales estacionarias forzadas, de la misma frecuencia, por tracciones periódicas longitudinales, producidas, por ejemplo (fig. 325), por un diapasón.

La frecuencia de las oscilaciones es, en este caso, solamente la mitad de las del diapasón. Los extremos de la cuerda son realmente nodos.

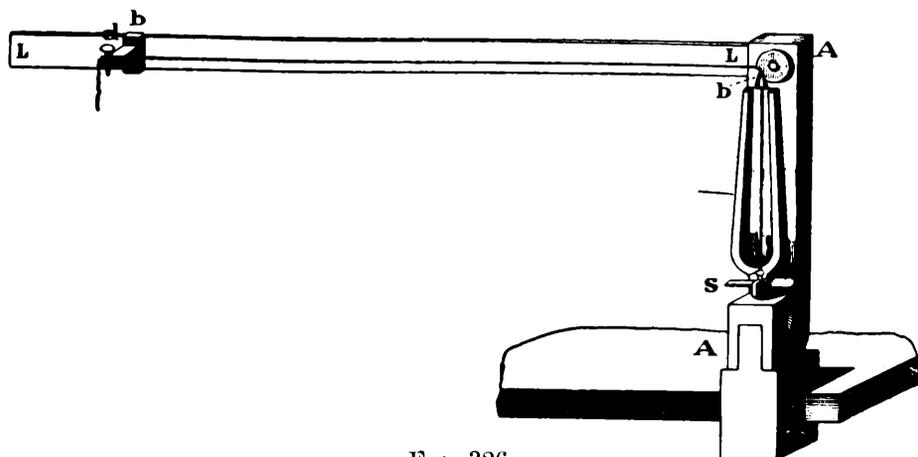


Fig. 326.

Melde ha ideado el dispositivo que se ve en la figura 326 con el cual pueden excitarse, tanto por movimientos transversales como longitudinales, tales ondas estacionarias; la longitud del hilo puede variarse mediante la corredera *b*, y su tensión se regula con la clavija *S*.

3. Excitación de barras por resonancia. — Las barras se excitan fácilmente por resonancia. Si se toma con ambas manos la base del dispositivo que aparece en la figura 327 y se le somete a un movimiento rítmico transversal de vaivén, se observará que para cierto ritmo oscila, con amplitud ostensible, la barra *A*, ofreciendo el aspecto que corresponde a la existencia de un cuarto de onda estacionaria. Tal ocurre, naturalmente, cuando la frecuencia del movimiento de nuestras manos coincide con la frecuencia propia de su oscilación fundamental. Si se aumenta paulatinamente la rapidez del movimiento de vaivén, se debilitan aquellas oscilaciones hasta la extinción, alcanzándose, luego, un ritmo con el cual se hacen ostensibles las vibraciones de *B*; en este instante concuerdan las frecuencias de la fuerza exterior y de la vibración fundamental propia de esa barra; y siguiendo así pueden excitarse, sucesivamente, la *C* y la *D*. Es claro que será posible excitar también las armónicas de todas las barras.

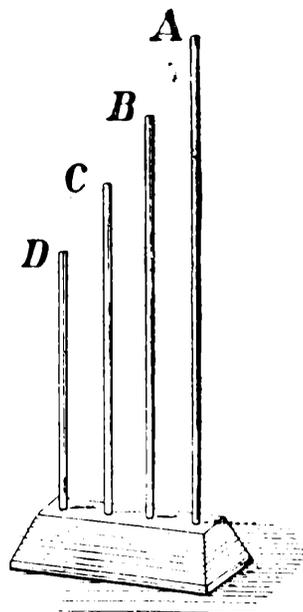


Fig. 327.

Este fenómeno de resonancia ha sido aprovechado por Frahm en la construcción de un aparato destinado a determinar la frecuencia de corrientes alternadas.

El principio es el siguiente: una lengüeta de acero AB (fig. 328), está fija por su base a una planchuela P , en la que se adapta también una barra H de hierro dulce, la que es atraída periódicamente por un electroimán E por el que circula una corriente alternada; este movimiento se transmite a la lengüeta a través de la pieza P , la que oscila, con amplitud visible, ofreciendo el aspecto que se ve en el dibujo, cuando la frecuencia de las tracciones del electroimán y de las oscilaciones propias de la barra coinciden.

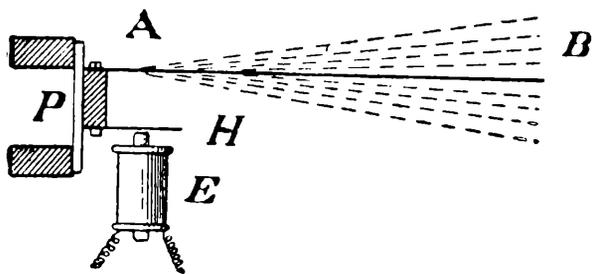


Fig. 328.

Es fácil mostrar el fenómeno con una instalación improvisada, utilizando como lengüeta un segmento de unos 15 centímetros de una sierra de 15 milímetros de ancho, más o menos, fijada en una prensa por uno de sus extremos. El electroimán, que se conecta con un pequeño alternador, se hace actuar directamente sobre ella.

Se puede excitar, sin mayores dificultades, también, la primera armónica y aun la segunda.

La excitación de vibraciones longitudinales intensas en barras mediante el roce con un paño espolvoreado con brea en polvo sólo es posible siguiendo con la mano el ritmo de las vibraciones excitadas; si esto no ocurre, el sonido no adquiere una amplitud de consideración. Es éste, pues, un nuevo ejemplo de resonancia.

4. Resonancia en los tubos. Medición de la velocidad del sonido por el método de Quincke. — En la experiencia de los diapasones, mencionada más arriba, las masas de aire confinadas en las cajas de resonancia suenan, una bajo la influencia de las oscilaciones que le transmite su propio diapason y la otra por la acción de las ondas acústicas por la excitación de la primera.

Un experimento de mucho interés, por cuanto se perciben en él, además, las excitaciones que corresponden a las frecuencias vecinas a la de la fuerza exterior, consiste en excitar con un diapason oscilante (fig. 329) la masa de aire contenido en una probeta mientras se vierte en ésta agua, con lo que se modifican los períodos propios de la columna gaseosa. Si la probeta es lo suficientemente profunda, se

percibe de tanto en tanto, para diversos niveles del agua y mientras éste varía, un sonido que aumenta la intensidad, alcanza un máximo y luego disminuye hasta extinguirse. Los niveles del líquido que corresponden a las máximas amplitudes del sonido son tales que distan de la boca de la probeta un número impar de cuartos de onda, como se comprende sin dificultad recordando las características de las ondas estacionarias de los tubos.

Las dimensiones de las probetas comunes son tales que, con diapasones de frecuencia media, cabe tan sólo un cuarto de onda; la intensidad del sonido es, en cambio bastante grande.

Quinke ha ideado un dispositivo (fig. 330) que permite variar cómodamente el nivel del líquido de la probeta, por desplazamiento de un recipiente con el cual está en conexión mediante un tubo de goma, y determinar con exactitud los niveles que corresponden a los máximos del sonido.

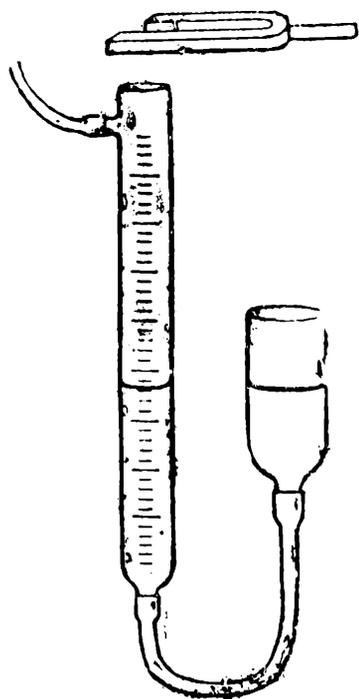


Fig. 330.

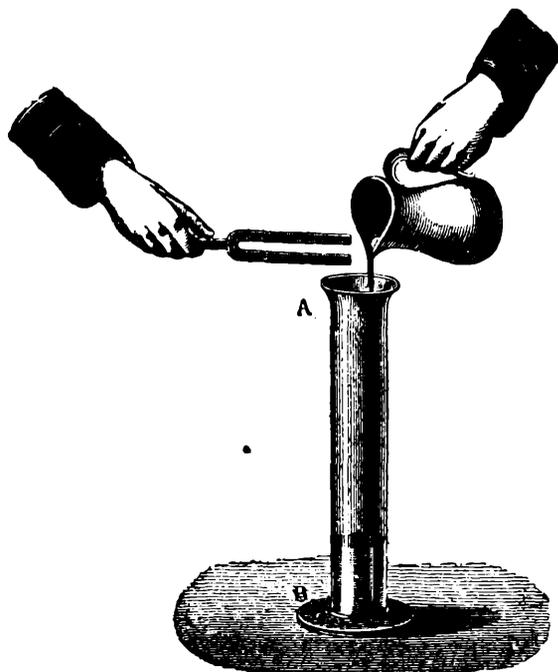


Fig. 329.

Esto se logra llevando hasta el oído la extremidad libre de un tubo flexible que se comunica con la probeta mediante una prolongación lateral abierta, de que está dotada en la proximidad de su embocadura. La velocidad del sonido se calcula, determinando la frecuencia del diapason, por algunos de los métodos ya indicados, y la longitud de la onda, que se deduce en seguida de las distancias entre los niveles a que nos hemos referido recientemente.

5. El tubo de Kundt. — Kundt revela objetivamente la existencia de las ondas estacionarias en los tubos de una manera asaz ingeniosa, aprovechando los fenómenos de resonancia.

La columna de aire contenida en un tubo TT (fig. 331), se excita con las vibraciones longitudinales de una barra ab , fija en su punto medio, mediante un disco liviano d de que se dota a uno de



Fig. 331.

sus extremos. Las compresiones y dilataciones que así se originan generan un movimiento ondulatorio forzado en las masas de aire del tubo.

Por desplazamiento del pistón P se logra que la frecuencia de una de las oscilaciones propias del tubo coincida con la frecuencia de las oscilaciones de la barra, con lo que el tubo resuena. Sus oscilaciones se hacen visibles situando en toda su longitud polvo de corcho o de licopodio; en los nodos n del movimiento las partículas quedan en reposo y en los vientres sus movimientos son vivísimos. Como en las medidas conviene que las posiciones de los nodos queden definitivamente ubicadas, se gira el tubo alrededor de su eje longitudinal, para que las partículas no queden distribuídas a lo largo de la generatriz más baja, sino de otro, de modo que tengan posibilidad de deslizarse por la inclinación de la pared, al menor movimiento. Cuando el tubo resuena, las partículas caen hacia abajo en los lugares de los vientres del movimiento y quedan en sus posiciones



Fig. 332.

primitivas en los nodos n (fig. 332). Por la medida de la distancia entre dos nodos, que comprende entre sí cierto número de ellos, se calcula en seguida la longitud de la onda.

Con este método es posible calcular la velocidad v del sonido en el aire del tubo si se conoce la frecuencia de las oscilaciones de la barra, o la velocidad u de propagación de las ondas longitudinales en ésta, si se conoce v .

Refirámonos a este último caso. Puesto que la frecuencia de las oscilaciones del aire y de la barra son iguales, resulta, si l es la distancia entre dos nodos y L el largo de la barra:

$$\frac{u}{v} = \frac{L}{l}, \quad [1]$$

pues L y l son, como es notorio, las semilongitudes de las ondas de la barra y del tubo, respectivamente, de donde por [7] de la página 296, se obtiene, finalmente:

$$u = v_0 \sqrt{1 + \alpha t} \frac{L}{l} \frac{m}{\text{seg}}. \quad [2]$$

Si se conoce la densidad de la substancia se puede calcular también el módulo de Young, pues por la relación precedente y la ecuación

$$n = \sqrt{\frac{E}{\mu}} \text{ resulta}$$

$$E = \frac{u^2 \rho}{9810} \frac{\text{kg-peso}}{\text{mm}^2}. \quad [3]$$

Las ondas estacionarias de que venimos ocupándonos pueden mostrarse también, de una manera muy bonita, por las alturas de pequeñas llamas de gas alumbrado que se escapa de minúsculos agujeros practicados a lo largo de las generatrices de un tubo metálico que se alimenta en su punto medio con aquel fluido. El tubo se excita cerrando uno de sus extremos con una membrana de goma, sobre la que se hacen incidir las vibraciones de un tubo de órgano. La afinación se realiza por desplazamiento de un tubo cerrado que enchufa en el otro extremo. En los vientres de la presión las llamas aparecen, a simple vista, más largas, disminuyendo la altura hacia los dos nodos. Es claro que observadas en un espejo rotativo aparecen a contorno bordeado.

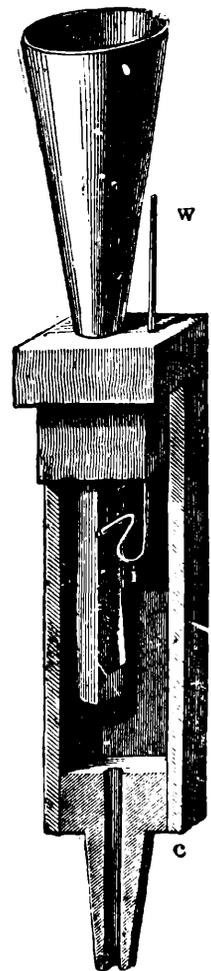


Fig. 333.

6. Los tubos a lengüeta.—La figura 333 representa un tubo de este tipo. La corriente de aire que se insufla por el conducto axial inferior desplaza una lengüeta metálica (fig. 334), la que comienza a oscilar con su frecuencia propia, originando oscilaciones forzadas en la masa de aire del tubo cónico. Si las frecuen-

cias propias de ambos sistemas son poco diferentes el sonido se hace muy intenso.

La frecuencia de las oscilaciones de la lengüeta puede variarse con el auxilio de la varilla metálica que se ve en el dibujo, en forma que descubrirá el lector sin necesidad de mayores explicaciones.

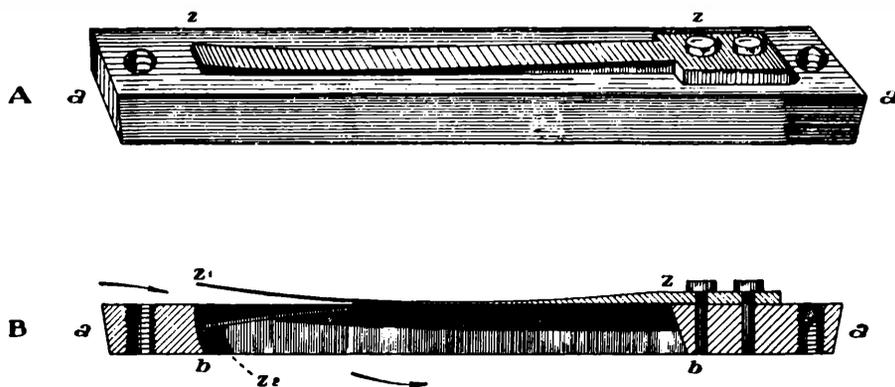


Fig. 334.

7. Llamas armónicas. — Si se sitúa una llama de hidrógeno (figura 335), o también de gas o acetileno en el interior de un tubo abierto, se percibe, en general, un tono muy intenso, proveniente de un movimiento oscilatorio de las masas gaseosas de éste. Se comprueba, por otra parte, que la altura del sonido depende de la longitud del tubo.

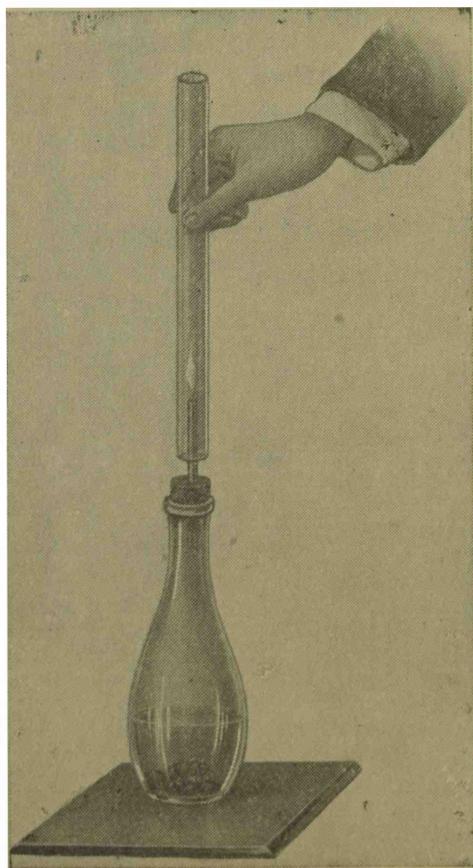


Fig. 335.

Observada la llama a simple vista no ofrece nada de particular; su altura parece constante, notándose, cuando más, un ligero movimiento de titilaje.

Si se le observa, en cambio, a través de un espejo rotativo, se revela que su altura sufre variaciones periódicas de consideración; su longitud crece hasta un máximo para decrecer luego hasta la extinción casi completa.

El proceso consiste en lo siguiente: el desplazamiento de las masas gaseosas en el interior del tubo, por el calor de la llama, origina un movimiento

oscilatorio que se mantiene y aumenta de amplitud en seguida a causa de la resonancia. A cada aumento de la presión en el interior del tu-

bo, en el lugar del pico, la llama se hace más pequeña, porque debe disminuir la salida del gas; lo contrario sucede si la presión disminuye.

La frecuencia del movimiento de la llama y, por lo tanto, de los impulsos que provienen de ella, tiene el mismo valor que la de la oscilación del tubo.

Si el sonido no se produce por sí mismo, es suficiente excitar al tubo haciendo incidir sobre él ondas que genere un diapasón o un tubo de su misma frecuencia; el sonido perdurará luego.

8. Resonadores. Aparato de Koenig.^a

— Por resonancia es posible revelar todas las oscilaciones simples que componen un sonido compuesto cualquiera.

Helmholtz ha construído a ese efecto resonadores (fig. 336), que consisten en un cuerpo esférico metálico hueco provisto de dos pequeñas prolongaciones cónicas diametrales, abiertas: una, la *a*, recibe el sonido a analizar y la otra, *b*, se adapta directamente al oído.



Fig. 336.

Tales osciladores tienen un solo período propio de oscilación, de modo que resuenan únicamente si tal frecuencia figura entre las componentes del sonido que se estudia.

Los resonadores a pequeña abertura *a* resuenan más intensamente, pero requieren una afinación mejor, lo que se explica, de acuerdo con la teoría de las oscilaciones forzadas (véase el tomo I), puesto que así la radiación acústica y, por consiguiente, el decrecimiento de las oscilaciones propias, es menor.

Según los cálculos de Helmholtz la frecuencia de un resonador semejante está dada en aire seco a 0°C, por la relación

$$n = 56174 \frac{\sqrt[4]{s}}{\sqrt{S}}, \quad [4]$$

donde *s* representa la superficie de la abertura *a* y *S* el volumen interior del resonador, mientras que de las determinaciones experimentales de Sondhauss resultaría para el coeficiente el valor 52400.

Koenig ha construído el aparato que se observa en la figura 337 a fin de hacer cómodo el análisis de un sonido. Se trata de una serie de resonadores de Helmholtz montados en un brete de hierro cuyas

aberturas b están en conexión con cápsulas manométricas. Las llamas se observan mediante un espejo rotativo, de que está dotado el aparato.

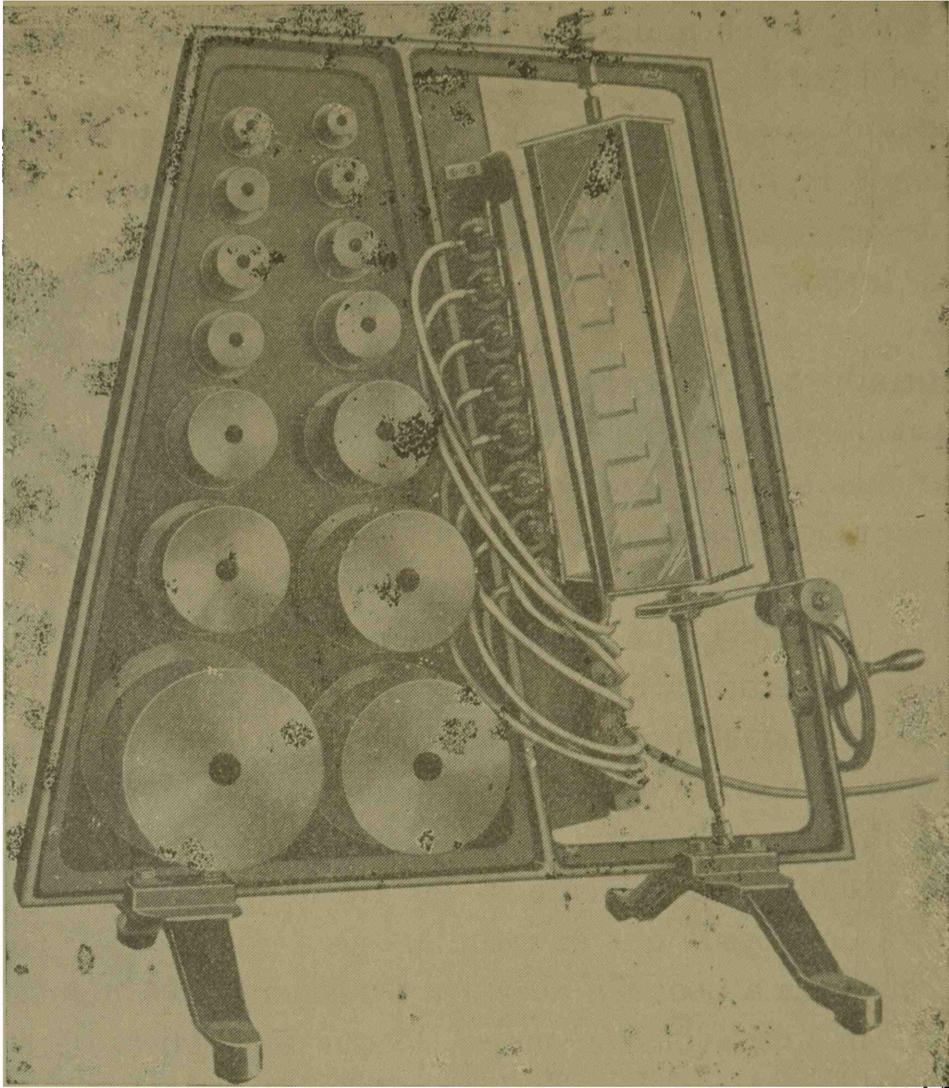


Fig. 337.

9. Reproducción de los sonidos por el fonógrafo de Edison. —

El fonógrafo de Edison permite escribir las vibraciones que emite un cuerpo sonoro y, utilizando la inscripción, reproducirles nuevamente.

Se aprovecha para ello el movimiento forzado que cumple una lámina bajo la acción de los impulsos ondulatorios emitidos por cuerpos sonoros; ese movimiento es, a causa del amortiguamiento de las oscilaciones propias de la lámina, una reproducción, en otra escala, del movimiento incidente.

Las vibraciones de la membrana m (fig. 338 a) se transmiten a una palanquita que termina en una punta c , mediante la cual se inscribe el movimiento en la superficie parafinada de un cilindro s que gira a la vez que se desplaza paralelamente a sus generatrices, a fin de que, los trazos de la punta c no se superpongan.

La punta penetra en la capa de parafina en caminos proporcionales al desplazamiento de la lámina, de modo que la profundidad variable, sinuosa, del trazo, representa una verdadera inscripción del sonido.

Si se invierte el proceso, es decir, si se gira nuevamente en el mismo sentido, comenzando desde el principio, naturalmente, el cilindro parafinado, de modo que la punta se mueva sobre el trazo, la lámina

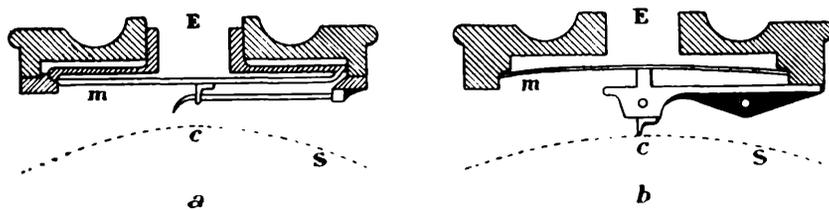


Fig. 338.

se ve forzada a ejecutar el mismo movimiento anterior, reproduciéndose los sonidos que la habían excitado.

La reproducción es mejor si se utiliza para ello en lugar de la punta *c* una punta roma (fig. 338 *b*) y una membrana más delgada.

Los sonidos inscriptos pueden reproducirse fotográficamente, muy ampliados, lo que facilita el estudio de su composición.

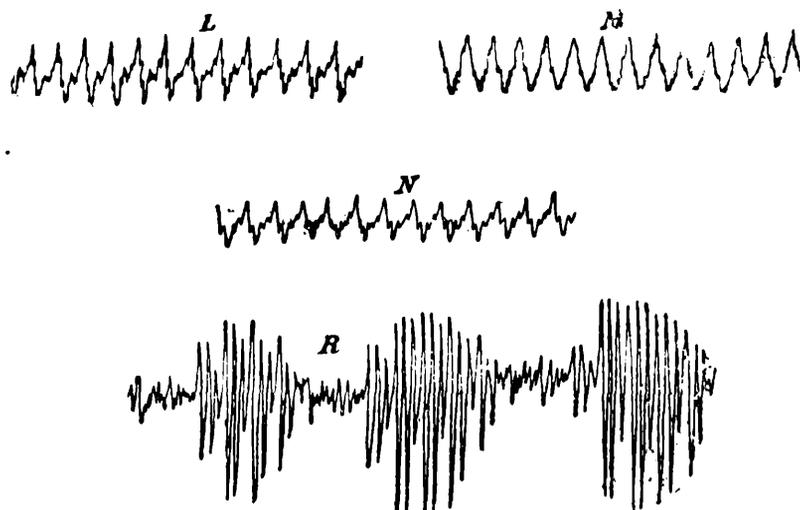


Fig. 339.

Basta para ello fijar un espejito en el extremo de la palanca que lleva la punta roma y hacer reflejar en él un pequeño haz de luz. Si se le recibe sobre un papel sensible arrollado sobre un cilindro que gira alrededor de un eje paralelo al de los desplazamientos del haz, se obtiene un trazo que constituye, como se dijo, una reproducción ampliada de la inscripción, vale decir de los sonidos.

Este instrumento se ha utilizado particularmente para el análisis de los sonidos de la voz humana.

En la figura 339 están representadas algunas curvas correspondientes a los sonidos de varias letras.

10. Acordes. Consonancia y disonancia. Intervalos musicales. — La experiencia enseña que si el oído humano es excitado simultáneamente por dos sonidos de frecuencias diferentes, el carácter de la sensación depende, exclusivamente, de la relación de las frecuencias, y no de los valores absolutos de éstas.

Si la sensación es agradable se dice que se trata de un *acorde consonante*, y si es desagradable, que se ha producido una *disonancia*.

Si los sonidos siguen uno después de otro y la sensación es agradable, se habla de un *acorde melódico*. La sensación es tanto más agradable, vale decir, el acorde es tanto más perfecto cuanto más simple es aquella relación.

La relación de la frecuencia mayor a la menor se designa con el nombre de *intervalo musical*; los intervalos resultan expresados, según esto, por números enteros o fracciones impropias.

En la música se usan tan sólo algunos intervalos. La escala o gama mayor, cuya primera nota o *tónica* es *do*, consiste de ocho frecuencias, cuyas designaciones, e intervalos con respecto a la tónica, están consignadas en el siguiente cuadro:

<i>do</i>	$\frac{1}{1}$	unísono
<i>re</i>	$\frac{9}{8}$	segunda
<i>mi</i>	$\frac{5}{4}$	tercera
<i>fa</i>	$\frac{4}{3}$	cuarta
<i>sol</i>	$\frac{3}{2}$	quinta
<i>la</i>	$\frac{5}{3}$	sexta
<i>si</i>	$\frac{15}{8}$	séptima
<i>do</i>	$\frac{2}{1}$	octava

Las denominaciones de la derecha indican el rango de las notas en la escala.

Se obtienen todas las escalas de los sonidos musicales continuando la gama en ambos sentidos, conservando los mismos intervalos y denominaciones, con la diferencia de subfijos; cada nota de una de las escalas será la octava de la homóloga de la escala anterior y la tónica la octava de la precedente.

Se escribiría pues,

$do_1, re_1, \dots, si_1; do_2, re_2, \dots, si_2; do_3, re_3, \dots, si_3; do_4, \dots$

Como en la gama se dan solamente las relaciones de las alturas de los sonidos con respecto a la tónica, los valores absolutos de las frecuencias quedan determinados si se fija el de una sola nota de cualquiera de las escalas.

Como ya se dijo, en el congreso reunido en Viena en 1885 se definió como diapasón normal a un diapasón cuya frecuencia a 0°C es de 435 oscilaciones dobles por segundo, dándole el nombre de la_3 o la normal.

Las frecuencias de otras notas se calculan, mediante esa definición, en forma muy sencilla.

Se tiene, por ejemplo,

$$la_1 = \frac{435}{4}$$

y para el do_1 , que es la nota más grave de los bajos,

$$do_1 = \frac{la_1}{\frac{5}{3}} = \frac{435}{4} \cdot \frac{3}{5} = 65,25 \frac{\text{vibraciones dobles}}{\text{segundo}}$$

y para el do_5 , que es la nota más aguda de los sopranos:

$$do_5 = \frac{la_5}{\frac{5}{3}} = 435 \cdot 4 \cdot \frac{3}{5} = 1044 \frac{\text{vibraciones dobles}}{\text{segundo}} .$$

11. Sostenidos y bemoles. Gama temperada. — Motivos de índole musical, en orden a la cual estamos muy lejos de considerarnos expertos, han hecho indispensable el uso de otros intervalos. A cada una de las siete notas de una cualesquiera de las escalas se hace corresponder dos notas, un *sostenido* y un *bemol*.

La frecuencia del sostenido se obtiene multiplicando la de la nota a la que corresponde por $\frac{25}{24}$ y la del bemol por $\frac{24}{25}$; los intervalos que definen con su nota son, pues, $\frac{24}{25}$ y $\frac{25}{24}$, respectivamente.

El empleo de una gama completa, que con sus sostenidos y bemoles comprende 21 notas, es posible en instrumentos como el violín, violoncelo, etc., en los que, modificando la longitud de las cuerdas, es posible variar, dentro de grandes límites, la frecuencia de las oscilaciones. En instrumentos en los que, como en el órgano y el piano, las frecuencias de las oscilaciones de los tubos o cuerdas son fijos, sería sumamente incómodo utilizar las escalas completas.

En los pianos, por ejemplo, que llevan siete octavas, el número elevado de teclas (21 por octava) haría la ejecución por demás dificultosa.

Se usa en tales casos de una gama llamada *temperada* en la que se confunde el sostenido de una nota con el bemol de la siguiente.

El intervalo de la octava queda dividido así en doce intervalos iguales a $\sqrt{2}$.

PUBLICACIONES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS
a partir de enero de 1939

SERIE PRIMERA. — Informaciones generales.

1. Anuario 1938-39, mayo 1939	(N° 120)	\$ 1.50
2. Inauguración de la ampliación del laboratorio de Ensayo de Materiales, agosto de 1939	(N° 124)	Gratis
3. Laboratorio de ensayo de materiales, agosto de 1940	(N° 131)	»
4. Escuela del Motor	(N° 132)	»
5. Elección de autoridades y acto de transmisión del decanato	(N° 135)	»
6. Anuario 1941.	(N° 145)	\$ 2.00
7. Entrega de publicaciones en acto público por el señor Embajador de Gran Bretaña, Sir Esmond Ovey, el día 6 de octubre de 1941	(N° 148)	Gratis
8. Digesto 1942	(N° 149)	\$ 2.00
9. Disposiciones de interés para los estudiantes, 1942	(N° 153)	\$ 1.00
10. Anuario 1942 . . .	(N° 156)	\$ 2.00
11. Planes de Estudio	(N° 160)	\$ 0.30
12. Departamento de Mecánica	(N° 163)	\$ 2.00
13. Instituto de Aeronáutica	(N° 164)	Gratis
14. Programas de examen, 1943	(N° 165)	\$ 1.50
15. Programas de ingreso	(N° 170)	\$ 4.00
16. Elección de autoridades y acto de toma de posesión del decanato, 1945 ..	(N° 183)	Gratis
17. Ordenanza general de ingreso y programas de los cursos preparatorios..	(N° 186)	\$ 4.00

SERIE SEGUNDA. — Revista y Contribuciones.

1. Trabajos de los ingenieros M. Simonoff y E. A. Arnaboldi. Mayo de 1939	(N° 121)	\$ 2.40
2. Trabajos de los doctores R. G. Loyarte, J. Pláceres, F. Charola, R. F. Recoder, R. P. Cesco y A. E. Sagastume Berra. Enero de 1940	(N° 127)	\$ 2.40
3. Trabajos del doctor P. Montel y de los ingenieros J. S. Gandolfo y M. Simonoff. Abril de 1940	(N° 128)	\$ 2.40
4. Trabajos de los doctores A. Durañona y Vedia y G. Knie y de los ingenieros J. S. Gandolfo y A. Dorfman. Octubre de 1940	(N° 136)	\$ 2.00
5. Trabajos de los ingenieros A. Gray y R. Martínez de Vedia y del doctor E. Sábató. Diciembre de 1940	(N° 139)	\$ 3.00
6. Trabajos de los doctores R. G. Loyarte, R. Carratalá, D. Vucetich, B. Gross, G. García e ingeniero E. Dickmann. Abril de 1941	(N° 143)	\$ 3.00
7. Trabajos de los doctores A. Durañona y Vedia, A. E. Sagastume Berra y R. P. Cesco y de los ingenieros E. A. Arnaboldi y F. F. Langmann, Diciembre de 1941	(N° 150)	\$ 3.00
8. Trabajos del doctor A. E. Sagastume Berra, y de los ingenieros A. Escudero y E. A. Arnaboldi, R. Martínez de Vedia y A. Dorfman	(N° 161)	\$ 4.00
9. Trabajos de los doctores R. J. Ambrosis, F. Vierheller, Antero Bueno, A. E. Sagastume Berra y E. Castellano, y del ingeniero F. F. Langmann. — Bibliografía	(N° 168)	\$ 4.00
10. Trabajos de los ingenieros A. R. Gray, J. S. Gandolfo, C. Di Corleto, M. Mesny, y doctores C. Pusqualini, F. Vierheller y A. Bueno	(N° 173)	\$ 4.00
11. Trabajos de los ingenieros C. Di Corleto, J. A. Brochiero, R. Dupeyron, y doctores A. E. Sagastume Berra, R. J. Ambrosis, Rodríguez y Balseiro ..	(N° 174)	\$ 4.00
12. Trabajos de los ingenieros E. Mallol, Juan A. Brochiero, Simón A. Delpech y señor Mario Bunge	(N° 177)	\$ 2.00
13. Trabajos de los ingenieros O. Delfino, J. J. Ré, M. Mesny y E. Mallol ..	(N° 179)	\$ 3.00
14. Contribuciones de los doctores R. Grinfeld, R. Cesco, J. C. Vignaux y F. Vierheller ..	(N° 180)	\$ 4.00
15. Trabajos de los ingenieros S. A. Delpech y L. E. Barretto, M. Simonoff, doctor R. P. Cesco y señor Ralph Palmer Agnew	(N° 188)	\$ 4.00

SERIE TERCERA. — Publicaciones Especiales.

*. Saneamiento urbano en la República Argentina. Primera parte. Provisión de agua. Cuaderno N° 4 por el ingeniero E. Artaza. Junio de 1939	(N° 122)	\$ 3.80
1. Conmemoración de la Independencia nacional (julio 1938), julio 1939 ..	(N° 123)	Gratis

*. Tercera Reunión Anual de Caminos. Conferencias de los ingenieros T. Sánchez de Bustamante, V. Carri, J. Zuker, A. P. Grisi, A. Kashirski, C. K. Preus, N. Alurralde, M. Fornari, E. Arenas, J. Boiso y doctor A. Zanetta. Septiembre 1939	(Nº 125)	\$ 10.00
2. Estudio de la evolución fluvial que determina el endicamiento del río San Juan, por el ingeniero J. S. Gandolfo. Enero 1940	(Nº 126)	\$ 4.00
3. Conmemoración de la Independencia nacional (julio 1939), abril 1940 ..	(Nº 129)	Gratis
* Física General. Tomo IV, segunda edición, por el doctor R. G. Loyarte	(Nº 130)	\$ 20.00
4. Lista de Publicaciones. Agosto 1940	(Nº 133)	Gratis
*. Saneamiento urbano en la República Argentina. Primera parte. Provisión de agua, por el ingeniero E. Artaza. Cuaderno Nº 5. Septiembre 1940...	(Nº 134)	\$ 5.00
5. Cuarta Reunión Anual de Caminos (I). Discurso inaugural del doctor H. Magliano. Conferencias de los ingenieros A. Lodeiro Blanco, A. J. L. Bolognesi, A. M. Podestá, E. F. Tagle, V. Carri y J. L. Carattino.....	(Nº 137)	\$ 5.00
6. Cuarta Reunión Anual de Caminos (II), Conferencias de los ingenieros P. Palazzo, E. Arenas y A. Kashirski	(Nº 138)	\$ 5.00
7. Cálculo de Estructuras de Hormigón Armado, por el ingeniero J. Zuker	(Nº 140)	\$ 6.00
8. Saneamiento urbano en la República Argentina. Tercera parte. Obra domiciliaria. Tomo I, por el ingeniero E. Artaza. Abril de 1941	(Nº 141)	\$ 20.00
9. Física general. Tomo I, cuarta edición, por el doctor R. G. Loyarte. Abril de 1941	(Nº 142)	\$ 15.00
10. La viga placa, por J. J. Montú	(Nº 144)	\$ 4.00
11. Determinaciones de detonancia de combustibles y carburantes	(Nº 146)	\$ 3.00
12. La Anisotropía óptica por deformación elástica de los medios transparentes y su aplicación a la Fotoelasticimetría, por el ingeniero R. Buich	(Nº 147)	\$ 8.00
13. Sistemas hiperestáticos planos, por el ingeniero E. De Medina	(Nº 151)	\$ 5.00
14. Vigas de hormigón armado con armadura doble simétrica sometidas a flexión compuesta, por el ingeniero J. R. Castiñeiras	(Nº 152)	\$ 1.00
15. Producción, transporte y distribución de la energía eléctrica, por el ingeniero M. Simonoff	(Nº 154)	\$ 25.00
16. El proyecto económico de estructuras de hormigón armado, por el ingeniero J. R. Castiñeiras	(Nº 155)	\$ 5.00
17. Física general. Tomo II, tercera edición, por el doctor R. G. Loyarte	(Nº 157)	\$ 15.00
18. Tablas para vigas con chanfles rectos y parabólicos, para facilitar la resolución de sistemas hiperestáticos, por los ingenieros G. A. Rabuffetti y E. A. Arnaboldi	(Nº 158)	\$ 2.00
19. Quinta Reunión Anual de Caminos. Discurso inaugural del ingeniero J. R. Castiñeiras. Conferencias de los doctores C. L. Ruiz y E. Petroni, agrimensor L. de Carli, ingenieros A. P. Grisi, J. Zuker, A. M. Podestá, E. F. Tagle, E. Arenas, A. Kashirski, M. A. Fornari, ingeniero agrónomo A. Arena e ingeniero J. J. Font	(Nº 159)	\$ 10.00
20. Saneamiento urbano en la República Argentina. Primera parte. Provisión de agua, por el ingeniero E. Artaza. Cuaderno Nº 6. Febrero 1943 ..	(Nº 162)	\$ 15.00
21. Física general. Tomo III - Calor, tercera edición, por el doctor R. G. Loyarte	(Nº 166)	\$ 15.00
22. Electricidad.— I. Electricidad y magnetismo.— II. Electricidad corpuscular, por el ingeniero M. Simonoff	(Nº 167)	\$ 18.00
23. Saneamiento urbano en la República Argentina. Segunda parte. Desagües urbanos por el ingeniero E. Artaza. Cuaderno Nº 1. Noviembre 1943	(Nº 169)	\$ 4.00
24. Semejanza Mecánica, por el ingeniero C. Berta	(Nº 171)	\$ 4.00
25. Aceros y Tratamientos térmicos, por el ingeniero A. Lodeiro Blanco ...	(Nº 172)	\$ 4.00
26. Carburantes, Combustibles y Lubricantes. Ensayos Normales, por los Asistentes Dr. E. Castellano e Ing. M. Mesny, del Departamento de Mecánica	(Nº 175)	\$ 3.00
27. Física General. Tomo Iº, quinta edición, por el doctor R. G. Loyarte, Junio de 1944	(Nº 176)	\$ 18.00
28. Tratado de Optica. 1er. Fascículo por el doctor E. Loedel Palumbo...	(Nº 178)	\$ 7.50
29. Aurel Stodola a través de sus Libros, por el ingeniero Emilio Mallol ...	(Nº 181)	\$ 0.50
30. Trigonometría, por el ingeniero Numa Tapia	(Nº 182)	\$ 25.00
31. Discursos pronunciados en el homenaje a la memoria del ingeniero Julio R. Castiñeiras	(Nº 184)	Gratis
32. Discurso pronunciado por el Sr. Vice Presidente de la Universidad Ingeniero Aquiles Martínez Civelli, en el acto de la reapertura de la Universidad, el día 25 de Octubre de 1945	(Nº 185)	Gratis
33. Física General, Tomo IV, tercera edición, por el Dr. R. G. Loyarte....	(Nº 187)	\$ 25.00
34. Introducción a la Matemática superior, por el doctor Alberto E. Sagastume Berra	(Nº 189)	\$ 25.00

Se enviará sin cargo, a quien lo solicite, la "Lista de Publicaciones", que contiene la nómina de publicaciones de la Facultad.

Se terminó de imprimir el 10 de Diciembre de 1946, en los
Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 311-325 - Buenos Aires

Í N D I C E

ESTÁTICA DE LOS FLÚIDOS

CAPÍTULO I

ESTATICA DE LOS LIQUIDOS

	Pág.
Definición de flúido	1
Teorema: la presión en un punto dado de un líquido es la misma en todas direcciones	3
Equilibrio de una masa flúida. El teorema general de la hidrostática	4
Consecuencias inmediatas del teorema general de la hidrostática	7
Aplicación del principio de los trabajos virtuales a la deducción del teorema general de la hidrostática	15
Trabajos de las fuerzas en los desplazamientos reales	16
Ascensores hidráulicos	18

CAPÍTULO II

EQUILIBRIO RELATIVO DE SOLIDOS Y FLUIDOS. DETERMINACION DE DENSIDADES

A. — *El principio de Arquímedes*

El principio de Arquímedes	19
La igualdad de la acción y de la reacción	20
El principio de Arquímedes aplicado a los gases	21
Reducción de una pesada al vacío	22

B. — *La flotación*

Flotación	23
Estabilidad del equilibrio. Metacentro	24
Estabilidad y altura metacéntrica de los navíos. Oscilaciones transversales	25
Determinación de la altura metacéntrica	27

C. — *Peso específico; densidad. Métodos de determinación*

	Pág.
Definiciones	29
Determinación del peso específico de los sólidos por el principio de Arquímedes	30
Determinación con el picnómetro	31
Determinación del peso específico de los líquidos por el principio de Arquímedes	32
Por la balanza de Mohr	33
El método del picnómetro	34

¡D. — *Métodos para la obtención aproximada de pesos específicos. Areómetros*

Areómetro de Nicholson. Balanza de Jolly	35
Areómetros a escala	37
Areómetro a escala arbitraria de Baumé	40
Alcoholímetro de Gay Lussac	41

E. — *Correcciones a las medidas de pesos específicos*

Reducción de las determinaciones al vacío	42
Reducción de los pesos específicos a una temperatura normal	44

CAPÍTULO III

COMPRESIBILIDAD DE LOS LÍQUIDOS. TRACCIONES QUE PUEDEN SOPORTAR. DEFINICION DE FLUIDO IDEAL. TENSION SUPERFICIAL Y CAPILARIDAD

A. — *Compresión y tracción de líquidos*

Módulo de compresión	45
Definición de fluido ideal	47
Tracciones que puede soportar un líquido	47

B. — *Tensión superficial. Capilaridad*

La tensión superficial	48
Definición de la tensión superficial. Diferencia entre la tensión superficial de un líquido y la de una membrana elástica ordinaria	49
Energía potencial proveniente de la existencia de la tensión superficial	51
Consecuencias que se deducen por el principio del <i>mínimum</i> de la energía potencial para la posición de equilibrio. Figuras de equilibrio	52
Extensión de un líquido sobre la superficie de otro	54
Tensión en la superficie de separación de un fluido y de un sólido. Angulo de contacto	55
Ascensión de los líquidos en los tubos capilares	57
Relación entre la presión y la curvatura de las superficies de contacto	59

	Pág.
Fenómenos de atracción y de repulsión	62
Determinación experimental de la tensión superficial y del ángulo de contacto	63
Resultados experimentales. Influencia de la temperatura	69
Explicación molecular de fenómenos observados en sólidos y líquidos ...	69

CAPÍTULO IV

ESTÁTICA DE LOS GASES

Los gases son pesados. Peso específico del aire	73
El experimento de Torricelli	74
El principio de Pascal en los gases	76
Algunos experimentos ilustrativos. Los hemisferios de Magdebourg	77
Acción de la presión atmosférica sobre el cuerpo humano	81
Barómetros. Barómetro de cubeta	82
Barómetros de sifón	83
Barómetro de Fortín	85
Preparación de un barómetro	86
Prueba de un barómetro	88
Correcciones	89
Reducción a 45° de latitud	91
Otros dispositivos barométricos. Barómetros metálicos indicadores y registradores	92

CAPÍTULO V

COMPRESIBILIDAD DE LOS GASES. LEY DE BOYLE-MARIOTTE MANOMETROS. BOMBAS HIDRAULICAS

A. — Compresibilidad de los gases

Consideraciones generales	97
La ley de Boyle-Mariotte	98
Las comprobaciones experimentales de Boyle y de Mariotte	99
Las determinaciones exactas de la compresibilidad de los gases. Los trabajos de Dulong, Pouillet, Regnault, Amagat y otros. Influencia de la temperatura. Aproximación de la ley de Boyle -Mariotte	101
Causas de error indeterminadas	106
La ley de Boyle-Mariotte a bajas presiones	107
Influencia de la temperatura. Representación gráfica de algunos de los resultados. La ecuación de Van der Waals	107
Medición barométrica de alturas	109
Altura virtual o aparente y peso total de la atmósfera	111
Alumenómetros	112

B. — *Manómetros*

	Pág.
Definición	113
Manómetro a aire libre	114
Manómetros para pequeñas presiones. Manómetro diferencial de Kretz-Batelli. Manómetro diferencial de lord Raleigh	114
Manómetro a aire comprimido	118
El micromanómetro de Arago-McLeod	119
Manómetros metálicos	120

C. — *Bombas hidráulicas y otros dispositivos hidromecánicos*

Bombas hidráulicas	121
El sifón	125
El frasco de Mariotte	127

CAPÍTULO VI

MAQUINAS NEUMATICAS

Máquinas neumáticas	129
Máquina de vacío y compresión a un solo émbolo. Espacio nocivo. Límite de enrarecimiento	129
Máquina de vacío a dos émbolos	132
Bombas a aceite	135
Bombas a mercurio	137
Bomba rotativa de Gaede	139
Bomba a mercurio de Gaede	141
Bomba molecular de Gaede	142
Bomba a condensación de Langmuir	144
Definición moderna de alto vacío. Características de las bombas a alto vacío	146

HIDRODINAMICA

CAPÍTULO VII

CLASES DE MOVIMIENTOS. ECUACIONES DE EULER.
MOVIMIENTO ESTACIONARIO. ECUACION DE BERNOULLI

Movimiento laminar y turbulento	149
Las ecuaciones de Euler para flúidos ideales	149
El movimiento estacionario de un líquido ideal: ecuación de continuidad	151
Relación entre las velocidades y las distancias de las secciones	152

La ecuación de la energía de Bernoulli. La presión hidrodinámica	Pág 154
Experiencias y aplicaciones	157

CAPÍTULO VIII

VISCOSIDAD DE LOS FLUIDOS

A. Líquidos. Pérdida de carga en los tubos	163
Definición del coeficiente de viscosidad	164
La distribución de la velocidad. La ley de Poiseuille	167
Determinación experimental del coeficiente de viscosidad	170
Valores numéricos. Dependencia con la temperatura	174
B. La viscosidad de los gases	175

CAPÍTULO IX

PERDIDA DE LA CARGA POR CAMBIO DE SECCION DE LOS TUBOS. LEY DE BORDA. SALIDA DE LOS FLUIDOS POR ORIFICIOS Y POR TUBOS

Ley de Borda	179
Salida de los líquidos por un orificio. Teorema de Torricelli	182
Comprobación experimental	183
Gasto teórico. Contracción de la vena líquida. Coeficientes experimentales .	184
Salida por tubos cilíndricos	185
Salida de los gases por orificios	188
El método de Bunsen para determinar el peso específico de los gases	189

CAPÍTULO X

MOVIMIENTO TURBULENTO EN LOS TUBOS

Velocidad media límite entre el movimiento laminar y el turbulento	191
La pérdida de carga por unidad de longitud del tubo	192
Distribución de las velocidades	193
La teoría en el movimiento turbulento	193

CAPÍTULO XI

FUERZAS EN LOS CONDUCTOS PRODUCIDAS POR LAS VARIACIONES DEL VECTOR VELOCIDAD. FUERZAS POR CHOQUE. RESEÑA SOBRE RUEDAS Y TURBINAS

Varía solamente el módulo de la velocidad	195
Cambia la dirección de la velocidad	196
Choque normal de un chorro sobre una superficie	198
El plano o paleta se mueve	199
Ruedas hidráulicas	200
Turbina a reacción	201
Turbinas Jonval, Girard, Francis y rueda Pelton	201

CAPÍTULO XII

MOVIMIENTO TURBILLONARIO Y RESISTENCIA DE FLUIDOS
AL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS

A. — *Movimiento turbillonario*

	Pág.
Circulación	207
Torbellinos	207
Rudimentos de la teoría	209

B. — *Resistencia de los flúidos al movimiento de los cuerpos*

Cuerpos que tienen la forma de las líneas de corriente	211
Cuerpos que tienen sólo en parte la forma de las líneas de corriente	214
Roce superficial	215
Presión sobre una placa situada formando un ángulo diferente de cero con la dirección de la corriente	217
Distribución de la presión sobre placas rectangulares	222
Las componentes horizontal y vertical de la fuerza	223
La desviación lateral de una pelota de tenis	224
El movimiento de los proyectiles	225

DINAMICA DE LA ELASTICIDAD Y ACUSTICA

CAPÍTULO XIII

SUPERPOSICION DE OSCILACIONES

DETERMINACION DE LA FRECUENCIA DE VARILLAS. TEOREMA DE FOURIER

Movimiento armónico	229
Superposición de oscilaciones	230
El péndulo doble	242
Las varillas elásticas de Wheatstone	242
Las figuras de Lissajous	243
El microscopio a vibración	244
Las oscilaciones propias de las varillas son amortiguadas	244
Medida de la frecuencia	245
Teorema de Fourier	249

CAPÍTULO XIV

PROPAGACION DEL MOVIMIENTO OSCILATORIO EN UN MEDIO ELASTICO.
ELEMENTOS DE SISMOMETRIA

A. — *Definiciones. Ecuación de los rayos. Principio de Huygens.
Reflexión y refracción de ondas*

	Pág.
Consideraciones generales	251
Ondas longitudinales y transversales	252
Las ondas superficiales de los líquidos	255
Superficie de onda. Ondas esféricas y planas	258
Ecuaciones de los rayos de ondas esféricas y planas	259
El principio de Huygens-Fresnel	262
Reflexión y refracción de ondas en la superficie de separación de dos me- dios elásticamente diferentes	264
Reflexión y refracción de ondas planas	267
Reflexión total	270

B. — *Velocidad de ondas longitudinales y transversales en medios homogéneos e isótropos*

La aceleración de un elemento de masa	271
La ecuación de movimiento de un elemento de masa	272

C. — *Temblores de tierra. Brevísimas nociones de sismometría*

Generalidades	276
Principio de construcción de los sismógrafos. Ecuación de movimiento	277

CAPÍTULO XV

EL SONIDO. SU ESENCIA Y CARACTERES. INFLUENCIA DE LA VELOCIDAD
DE LA FUENTE SOBRE LA ALTURA: PRINCIPIO DE DOPPLER

A. — *Caracteres del sonido. Reflexión y refracción*

El sonido se origina por un movimiento vibratorio de la materia	285
El sonido es un movimiento ondulatorio	287
Las tres características de la sensación del sonido y las magnitudes físicas correspondientes	289
Reflexión del sonido. Eco	290
Murmullo de las galerías	291
Refracción del sonido	292

B. — *La velocidad del sonido*

Consideraciones generales	293
Velocidad del sonido en los tubos	300

C. — *Determinación de la frecuencia*

	Pág.
Métodos gráficos y estroboscópicos	302
Por el tubo de Kundt	302
La comparación subjetiva	303
Límites de los sonidos perceptibles	305

D. — *Influencia del movimiento de la fuente o del observador sobre la altura del sonido: principio de Doppler*

Generalidades	306
Experimentos y comprobaciones experimentales	309

E. — *Intensidad del sonido*

Definición. Fórmula de Rayleigh	310
Métodos de medida	311
La intensidad fisiológica o subjetiva	312
Sensibilidad del oído	314

CAPÍTULO XVI

SUPERPOSICION DE ONDAS; ONDAS ESTACIONARIAS.

VIBRACIONES DE LAS CUERDAS, DE LAS BARRAS, DE LOS TUBOS Y DE LAS PLACAS

A. — *Superposición de ondas. Ondas estacionarias*

Superposición de ondas de la misma frecuencia que se propagan en igual dirección y sentido	317
Determinación de la velocidad del sonido por el tubo de Quincke	321
Superposición de ondas de igual frecuencia que se propagan en la misma dirección pero en sentido contrario	321
Discusión matemática	325
Superposición de ondas de frecuencias diferentes. Teorema de Fourier ...	328

B. — *Movimiento ondulatorio transversal de las cuerdas*

Movimiento ondulatorio de una cuerda tendida	329
La reflexión de la onda	330
Descripción completa del movimiento	332
Vibraciones de las cuerdas	332
Comprobaciones experimentales	336
La teoría de las cuerdas vibrantes	339

C. — *Vibraciones longitudinales de las cuerdas y de las barras*

Vibraciones longitudinales de las cuerdas y de las barras	343
---	-----

D. — *Vibraciones transversales de las barras. Diapasón*

	Pág.
Vibraciones transversales de las barras	348
El diapasón	351

E. — *Vibraciones de las placas y de las membranas*

Generalidades	354
Vibraciones de las membranas	355
Vibraciones de las placas	356

F. — *Vibraciones de los tubos*

Las oscilaciones de un tubo labial	360
Comprobaciones experimentales	363

CAPÍTULO XVII

RESONANCIA EN LOS MEDIOS CONTINUOS. ANALISIS
DE LOS SONIDOS. ESCALAS MUSICALES

Consideraciones generales	365
Ondas estacionarias obtenidas en cuerdas por resonancia. Dispositivo de Melde	366
Excitación de barras por resonancia	367
Resonancia en los tubos. Medición de la velocidad del sonido por el método de Quincke	368
El tubo de Kundt	369
Los tubos a lengüeta	371
Llamas armónicas	372
Resonadores. Aparato de Koenig	373
Reproducción de los sonidos por el fonógrafo de Edison	374
Acordes. Consonancia y disonancia. Intervalos musicales	376
Sostenidos y bemoles. Gama temperada	377

