Libros de Cátedra

Levantamientos topográficos con estación total

Roberto José Romano, Liliana Teresa Quispe Gutierrez y Pablo Paús

FACULTAD DE INGENIERÍA

exactas

edulp
EDITORIAL DE LA UNLP

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

LEVANTAMIENTOS TOPOGRÁFICOS CON ESTACIÓN TOTAL

Roberto José Romano
Liliana Teresa Quispe Gutierrez
Pablo Paús

Facultad de Ingeniería

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

edulp
EDITORIAL DE LA UNLP

Agradecimientos

A la Universidad Nacional de La Plata, en especial a quienes forman o han formado parte del Departamento de Agrimensura de la Facultad de Ingeniería.

En el pulso de hoy late el corazón de ayer, que es el de siempre.

Raúl Scalabrini Ortiz, El hombre que está solo y espera

Índice

Introducción 8

Capítulo 1
La Topografía 9
Roberto José Romano

Capítulo 2
Medición de distancias 30
Roberto José Romano y Pablo Sebastián Paús

Capítulo 3
El Teodolito 50
Roberto José Romano

Capítulo 4
Mediciones angulares 96
Roberto José Romano

Capítulo 5
Errores Óptico-Mecánicos en el Teodolito: causas y consecuencias 111
Roberto José Romano

Capítulo 6
Cálculos Topográficos 137
Roberto José Romano

Capítulo 7
Levantamiento de detalles por Radiación 154
Roberto José Romano

Capítulo 8
Relevamiento planimétrico con estación total 175
Roberto José Romano

Capítulo 9

Nivelación Trigonométrica 193

Roberto José Romano y Liliana Teresa Quispe Gutierrez

Capítulo 10

Taquimetría Electrónica 209

Roberto José Romano y Liliana Teresa Quispe Gutierrez

Autores 249

Prólogo

Como apertura de este trabajo, se ha seleccionado una cita del Agrimensor Raúl Scalabrini Ortiz que reflexiona acerca de la conexión entre el pasado, el presente y el futuro. Se subraya la continuidad temporal, indicando que en el presente se puede discernir la influencia o la herencia del pasado. Aunque las circunstancias evolucionen, elementos fundamentales perduran. Con este enfoque se abordará la temática principal de este trabajo: la Topografía.

En los conceptos fundamentales que sustentan la Topografía, existe una continuidad histórica prácticamente inmutable. Los objetos de su práctica no han sufrido cambios significativos en milenios: la medición, el cálculo, la representación gráfica y la demarcación sobre el terreno. Sin embargo, la labor diaria del Agrimensor, la figura central y más relevante en las tareas topográficas, ha evolucionado a lo largo de los siglos en consonancia con los avances culturales, sociales y tecnológicos de la humanidad.

Este compendio de apuntes de cátedra ilustra una serie de procedimientos de uso actual con un fuerte **enfoque práctico**, aplicando la tecnología vigente, pero sin perder de vista los fundamentos teóricos que respaldan dicho proceder. El propósito de este material es ser un modesto complemento dentro de la extensa y diversa bibliografía dedicada a la Topografía. Los títulos y autores pertinentes serán referidos al final de cada capítulo; se recomienda enfáticamente el estudio de esas obras para conseguir un abordaje completo sobre los temas que aquí se desarrollan.

Este trabajo ha sido concebido con la intención de convertirse en una herramienta de estudio útil para aquellos que han elegido la Agrimensura como su vocación y medio de vida. Aspiramos a que este libro represente un elemento de apoyo para los estudiantes de nuestra carrera en su proyección hacia el futuro.

Introducción

La Topografía engloba una serie de conocimientos teórico-prácticos sobre instrumental y técnicas de medición, los cuales tienen como objetivo determinar la posición de elementos, tanto naturales como artificiales, en el territorio. Estos trabajos topográficos no solo cumplen con propósitos geométricos, sino que también abordan cuestiones legales, brindando resultados esenciales para diversas problemáticas en el ámbito de la Agrimensura y de la Ingeniería.

Este libro de cátedra se erige con la misión de proporcionar contenidos esenciales para varias materias vinculadas a la Topografía, llenando un vacío en la bibliografía existente. A pesar de la amplia disponibilidad de material, gran parte de este se ha quedado desactualizado, sin reflejar los avances tecnológicos más recientes.

En el ámbito de la Agrimensura, en las últimas décadas se ha visto un evolución progresiva y constante en el desarrollo de nuevas tecnologías para instrumentos topográficos, lo que implica cambios importantes (incluso radicales) en las metodologías de medición. Lamentablemente, la bibliografía especializada no se ha actualizado a la par de estos progresos. Hecho que debió compensarse con la generación de apuntes de cátedra que exploran estas técnicas y les proporcionan un respaldo teórico. Este libro tiene como objetivo central compilar y organizar este material, utilizado actualmente en diversas cátedras de Ingeniería en Agrimensura.

Este material no solo está centrado en los contenidos teóricos, sino que también pretende poner a disposición de los estudiantes las tecnologías más modernas de trabajo. Se ha complementado con desarrollos prácticos que se basan en la utilización del equipamiento disponible en la Facultad de Ingeniería, específicamente en el Departamento de Agrimensura.

Mediante un enfoque transversal, este libro busca ajustarse a las distintas necesidades y programas de estudio de diversas materias, ofreciendo un recurso integral y actualizado. A pesar de la necesidad de actualizar contenidos, se ha tenido el cuidado de no perder de vista las fuentes bibliográficas tradicionales en este campo, integrando los principios fundamentales de la Topografía con las tecnologías más avanzadas disponibles en la actualidad.

Un fenómeno destacado que ha influido significativamente en la creación de este material bibliográfico fue la pandemia COVID-19. El cambio a modalidades virtuales en los años 2020 y 2021 impulsó la generación de nuevos materiales y enfoques pedagógicos. Gran parte de estos aportes han perdurado en el retorno a la presencialidad en 2022, enriqueciendo aún más la serie de apuntes aquí recopilados. Este libro refleja no solo la evolución tecnológica en el campo de la Topografía, sino también la adaptabilidad y resiliencia ante retos inesperados en el ámbito académico.

CAPÍTULO 1
La Topografía

Roberto José Romano

Definición y Objetivo de La Topografía

La Topografía es la disciplina que estudia los instrumentos y técnicas orientados a determinar las posiciones relativas de puntos del terreno con el objetivo de representarlos gráficamente. Abarca una parte limitada de la superficie terrestre, y comprende elementos tanto naturales como artificiales.

Esta disciplina resulta fundamental para la planificación y gestión de los recursos territoriales, ya que permite la obtención de información precisa sobre la forma, posición y estructura del terreno. Estos datos son esenciales para la planificación de proyectos de infraestructura, el estudio y la gestión de los recursos naturales y la conservación del medio ambiente, entre otros usos.

La Topografía engloba a los trabajos de medición en campo, así como a los cálculos a que dan lugar dichas mediciones, y el posterior aprovechamiento de los resultados obtenidos para la confección de material cartográfico (en soporte físico o digital).

Las actividades topográficas se desarrollan en el campo y en el gabinete. En el campo se efectúan los levantamientos topográficos, o sea, las mediciones y recopilaciones de datos. En el gabinete se desarrolla la parte de procesamiento de los datos, cálculos topográficos y representación gráfica.

En Topografía, cuando las distancias no superan los 10 km y los trabajos están enfocados en la planimetría, se puede omitir la curvatura natural de la Tierra. En estos casos, se asume que la Tierra es una superficie plana y que las direcciones de la plomada en dos puntos cualesquiera son paralelas. Esta simplificación se utiliza en trabajos planimétricos, donde solo se consideran las coordenadas X e Y de los puntos.

Relación entre la Topografía y la Geodesia

Como se expresó anteriormente, la Topografía realiza sus trabajos en zonas relativamente pequeñas de la superficie terrestre considerándola como plana (superficie topográfica). Cuando es necesario abarcar extensiones de terreno más grandes como ciudades, provincias, países,

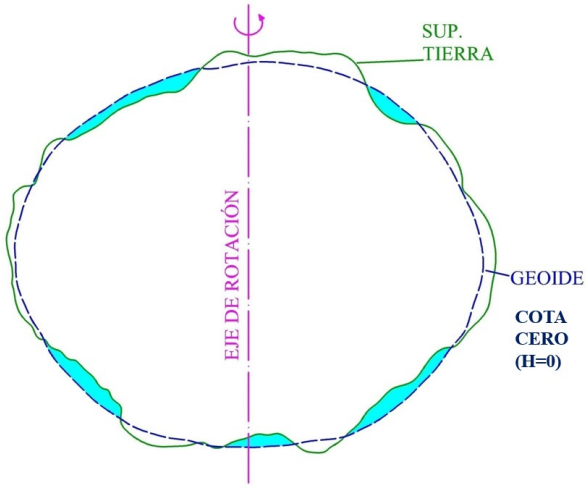
continentes o el planeta mismo es imposible despreciar la curvatura terrestre, por lo que se requiere de la Geodesia que utiliza otros procedimientos e instrumental de medida.

La Geodesia es la ciencia que se ocupa de fijar posiciones de puntos sobre la superficie terrestre. Las mediciones realizadas por la Geodesia son utilizadas para determinar la verdadera forma de la Tierra en grandes extensiones del territorio. La Geodesia se encarga de las mediciones de un cierto número de puntos, distribuidos convenientemente sobre el territorio, a partir de la posición relativa de dichos puntos surge la verdadera forma y dimensiones de la Tierra. A su vez, estos puntos denominados geodésicos, sirven de apoyo para las mediciones topográficas.

Los puntos geodésicos requieren de algún tipo de superficie para que su ubicación sea referida. Por lo tanto, es necesario desarrollar algunas hipótesis sobre la forma de la superficie terrestre.

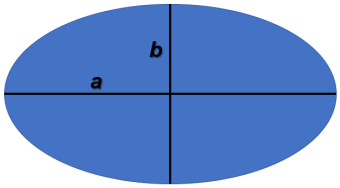
Si se prolongase por debajo de los continentes el nivel medio de los mares en calma, se obtiene una superficie teórica denominada Geoide, de forma irregular, que representa la forma física real de la Tierra. Más precisamente, el Geoide es la superficie equipotencial del campo gravitatorio terrestre que mejor se ajusta al nivel medio de los mares para una época en particular. Su forma es compleja debido a la distribución desigual de masas continentales, densidad de la corteza y achatamiento de los polos. Esta es la superficie de referencia para la altimetría, y con respecto a ella se determina la altura o cota de los puntos de interés, pero no es representable por ninguna función matemática, ni desarrollable sobre un plano.

Figura 1.1. *Representación del Geoide sobre la superficie de los mares y la tierra.*



Un elipsoide de revolución es una superficie obtenida por la revolución de una elipse en torno a uno de sus ejes, equivale a una esfera achatada en sus polos. Dada la irregularidad en la forma del Geoide, puede ser utilizado en su lugar un elipsoide de revolución, este tipo de superficie es representable matemáticamente. En el ámbito de la Geodesia se denomina Elipsoide de referencia. Dado que el elipsoide es la superficie matemáticamente representable que más se aproxima a la forma verdadera de la tierra, permite referir a esta los puntos geodésicos. Para determinar la posición de puntos sobre una superficie, es necesario que dicha superficie tenga representación matemática.

Figura 1.2. *Elipse en el plano.*

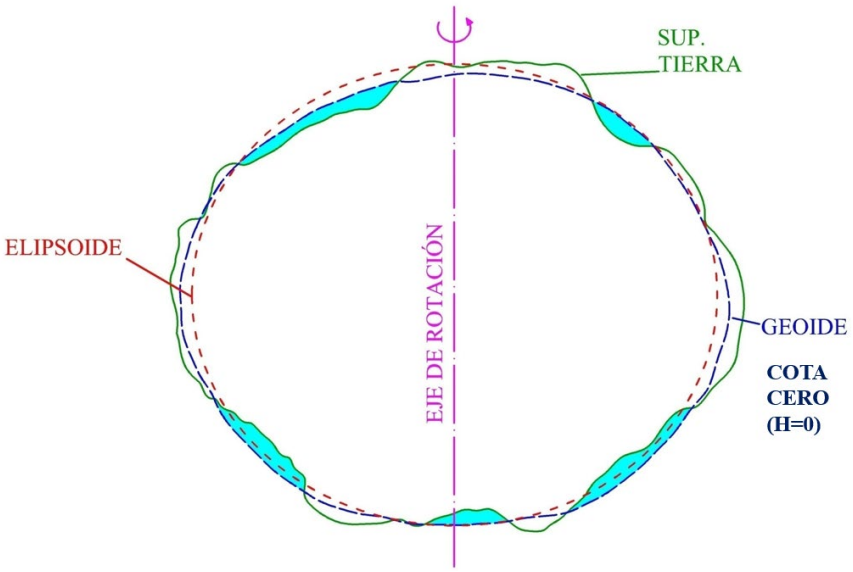


Todos los puntos de coordenadas x, y, z que conforman la superficie de un elipsoide de revolución satisfacen la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Donde a, b y c son las longitudes de los semiejes sobre los ejes XYZ. Al ser esta una superficie que es representable matemáticamente puede calcularse posiciones terrestres a partir de las observaciones realizadas y un sistema de referencia que se adopte.

Figura 1.3. *Elipsoide de referencia superpuesto con la figura del geoide y la superficie terrestre.*



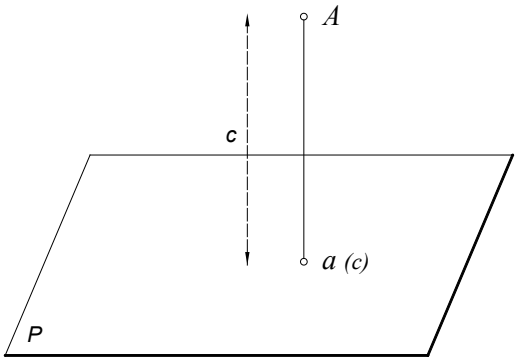
La Geodesia a partir de sistemas de referencia globales o regionales (país, provincia, etc.) y de un elipsoide de referencia, establece un sistema de coordenadas para determinar la posición de un punto sobre la superficie terrestre. Dicha posición queda establecida por la intersección de un meridiano y un paralelo, constituyendo las coordenadas geográficas Latitud y Longitud de un punto P (φ, λ).

No obstante, puede ser adoptada como superficie de referencia una esfera de radio medio igual a 6370 Km. La simplicidad de esta superficie hace más sencillos los cálculos y para algunas situaciones garantiza la precisión suficiente.

Sistemas de Referencia usados en Topografía

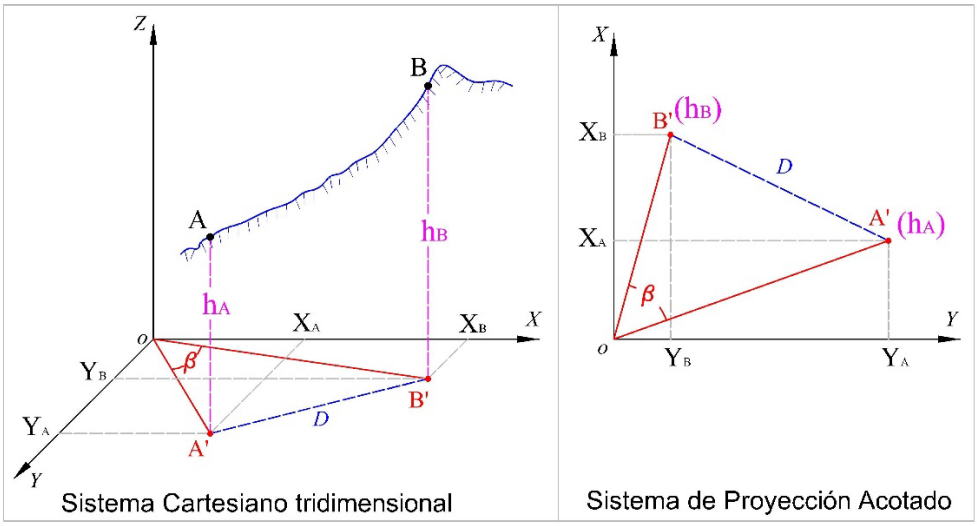
En la Topografía planimétrica puede prescindirse de la curvatura terrestre, por ello la superficie de referencia es un plano horizontal, la dirección de la línea de plomada es normal a este plano en cualquier punto considerado. La representación gráfica se alcanza utilizando el método de proyección acotada (figura 1.4), que consiste en representar los puntos característicos del terreno por medio de su proyección ortogonal sobre el plano horizontal, y por un número o cota que se escribe junto a cada punto para indicar su altura sobre el plano (DOMÍNGUEZ GARCÍA-TEJERO, 2002).

Figura 1.4. *Método de proyección acotada utilizado en Topografía.*



En la figura 1.4, a es la proyección sobre el plano P del punto *A* en el espacio, *c* es la altura del punto *A* sobre el plano *P*. Las coordenadas planas del punto a y su altura *c* forman la proyección acotada de *A*. Este método permite representar sobre el plano (2D) puntos del terreno (3D).

Figura 1.5. *Sistema cartesiano tridimensional y sistema de proyección acotado.*



En la figura 1.5, se ilustran el sistema cartesiano XYZ y el sistema de proyección acotada. En esta figura A' y B' son las proyecciones ortogonales de los puntos del terreno A y B. Además, D

y β son respectivamente la distancia reducida al horizonte y el ángulo horizontal, h_A y h_B son las alturas de los puntos A y B sobre el plano de referencia XY.

En Topografía el eje de las ordenadas se denomina **X** y representa la dirección Norte-Sur, y el eje de abscisas se denomina **Y** representado a la dirección Este-Oeste, tal como se aprecia en la figura 1.5. Además, los semi-ejes Norte y Este tienen sentido positivo (+) y los semi-ejes Sur y Oeste sentido negativo (-).

A su vez, los giros angulares se consideran positivos en sentido horario (dextrógiro) y negativo en sentido antihorario (levógiro).

Hipótesis en que se fundamenta la Topografía

Son cuatro conceptos que se desprenden del método de proyección acotada empleado en Topografía:

- La línea que une dos puntos sobre la superficie de la tierra es una línea recta (distancia geométrica).
- Las direcciones de la plomada, en dos puntos diferentes cualesquiera, son paralelas.
- La superficie imaginaria de referencia, respecto a la cual se tomarán las alturas, es una superficie plana.
- El ángulo formado por la intersección de dos líneas sobre la superficie terrestre es un ángulo plano, no esférico.

Mediciones topográficas

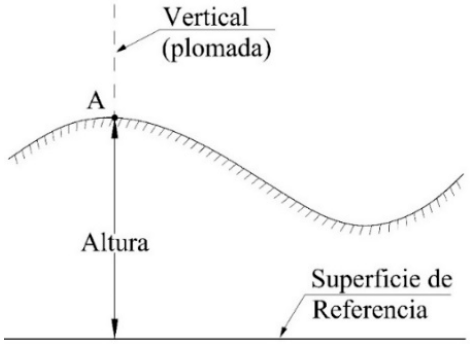
Ya fue establecido que la Topografía tiene por objetivo la representación gráfica de elementos del territorio, por lo que las mediciones que se realicen tienen esa función. Las mediciones que se efectúan en Topografía son de tres tipos, angulares, lineales y alturas.

- Medidas Angulares: Son mediciones que determinan los ángulos horizontales existentes entre distintas alineaciones en el terreno, así como los ángulos verticales que indican la elevación de distintos elementos. Son diversos los instrumentos que pueden emplearse para medir este tipo de magnitudes, pero aquí se tratarán únicamente el Teodolito y la Estación Total. Sobre estos instrumentos y las técnicas de medición se ahondará en los próximos capítulos.

- Medidas Lineales: Son las distancias que pueden ser medidas entre los puntos del terreno, ya sea por métodos directos o indirectamente. Uno de los métodos directos más convencionales para la medición de distancias consiste en el empleo de cintas métricas. Mientras que los métodos indirectos más frecuentes se practican mediante la medición electrónica o por métodos estadimétricos.

- Medición de alturas (Nivelación): La nivelación es una metodología utilizada para medir alturas de puntos sobre una superficie de referencia (figura 1.6). Las alturas son distancias medidas sobre la dirección de la vertical. Para la Geodesia la superficie de referencia que se utiliza es el Geoide. Para la Topografía es la superficie topográfica. En las mediciones de alturas debe ser considerada la curvatura de la Tierra.

Figura 1.6. *Elevación: altura o cota de un punto.*



Unidades de medida

En Argentina rige el SIMELA (Sistema Métrico Legal Argentino) el cual se basa en el Sistema Internacional de Unidades (SI), adoptado en la 11ª Conferencia General de Pesas y Medidas (1960).

Se describirán las principales unidades de medida utilizadas en Topografía para magnitudes lineales, angulares y de superficie. Para la medición de distancias la unidad es el metro, con sus múltiplos y submúltiplos, aunque se pueden encontrar excepciones tales como el uso de la vara. Para ángulos y áreas, las unidades más comunes se pasan a describir a continuación.

Unidad de superficie

En Topografía, la superficie es la magnitud que expresa la cantidad de área que ocupa un polígono, como por ejemplo una parcela de terreno. Resulta de proyectar el relieve real del terreno sobre un plano horizontal de comparación. Desde el punto de vista Topográfico, es la única superficie que interesa. Estas magnitudes se expresan comúnmente en metros cuadrados (m^2), pero en algunos casos son empleadas las unidades de medida agraria. Para convertir entre estos dos sistemas de medida se emplean las relaciones:

1 centiárea = 1 ca = 1 m^2

1 área = 1 a = 100 m^2

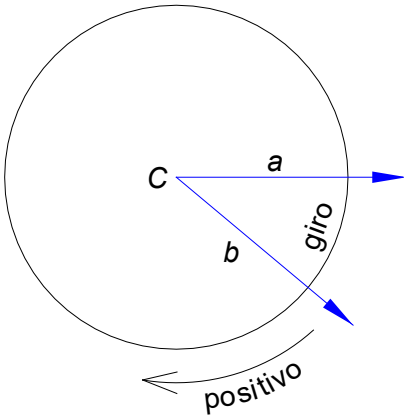
1 hectárea = 1 ha = 10.000 m^2

Por ejemplo: 1.350.854,00 m^2 = 135 ha 08 a 54 ca

Unidades Angulares

Si se hace girar un rayo **a** alrededor de un punto **C** hasta que ocupe la posición **b**, resulta una figura llamada ángulo (figura 1.7). En Topografía, el sentido giratorio positivo coincide con la marcha de las agujas del reloj.

Figura 1.7. *Sentido angular.*



Si se gira el rayo **a** alrededor del punto **C** hasta que ocupe nuevamente su posición inicial, el rayo habrá realizado un giro completo. Un punto cualquiera perteneciente a este rayo habrá descripto en este giro una circunferencia completa. Llámese ángulo de giro completo al que se origina en este giro, ángulo llano al que corresponde a su mitad y ángulo recto al que corresponde a la cuarta parte (MÜLLER, 1950).

Graduación sexagesimal: Se supone la circunferencia dividida en 360 partes iguales denominadas grados [°], distribuidos en cuatro cuadrantes de 90 grados, cada grado se considera dividido en 60 minutos y cada minuto a su vez, en 60 segundos.

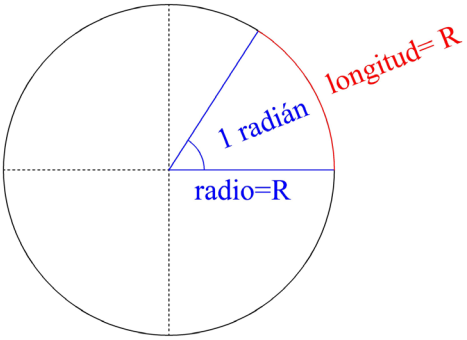
Graduación centesimal: En el sistema de graduación centesimal, al ángulo recto se le asigna el valor de 100 grados. La circunferencia se divide entonces en cuatro cuadrantes de 100 grados cada uno, y cada grado centesimal comprende 100 minutos y cada minuto, a su vez, 100 segundos. La notación para esta graduación se presenta de la siguiente manera: 18,2563^{g}.

La Graduación Natural es un sistema de medición angular que utiliza el radián (rad) como unidad. En una circunferencia cualquiera, un radián es una medida angular para la cual el arco es igual al radio (figura 1.8). Un giro completo en una circunferencia equivale a 2π radianes, por lo tanto, el ángulo recto es π/2.

Considerando una circunferencia de radio unitario (r=1) su perímetro será igual a 2π. Dos ángulos rectos equivalen a π. Entonces se puede establecer:

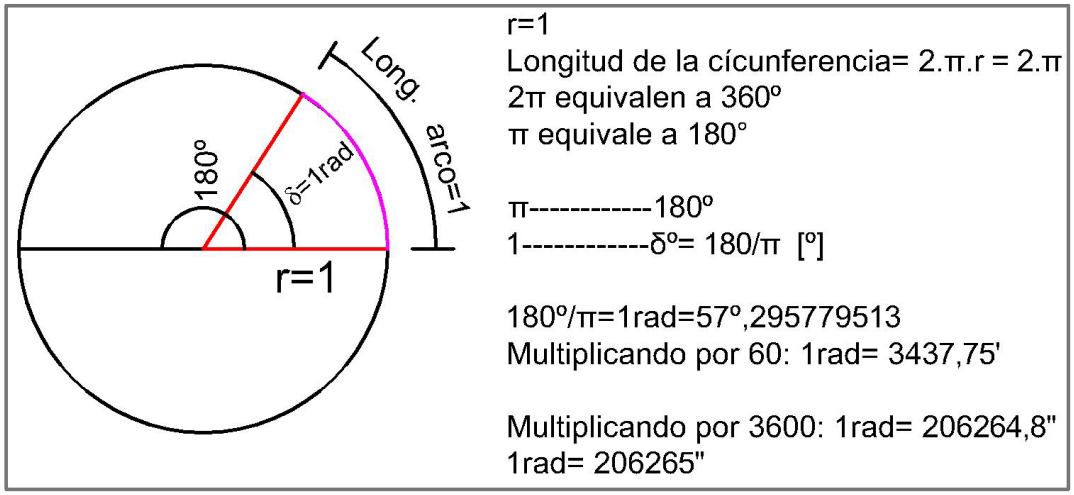
$$2\ rectos = \pi = 3{,}1416$$

Figura 1.8. *Graduación natural.*



En la figura 1.9 se desarrolla las equivalencias entre el sistema natural y sexagesimal.

Figura 1.9. *Circunferencia de radio unitario.*

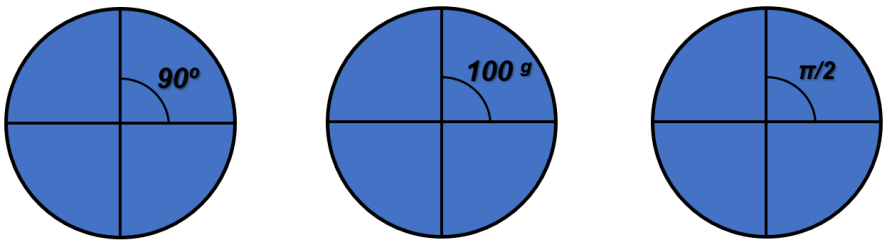


Puede un ángulo ser convertido de un sistema a otro considerando el valor del giro completo de la circunferencia:

$$\frac{\alpha^{\circ}}{360} = \frac{\alpha^{g}}{400} = \frac{\alpha^{r}}{2\pi}$$

Las relaciones entre los tres sistemas se ven en la figura 1.10.

Figura 1.10. *Relaciones entre los sistemas.*



Sistema Sexagesimal
Giro completo 360º

Sistema Centesimal
Giro completo 400g

Sistema Natural
Giro completo 2π

Conversión del sistema Sexagesimal al Natural: considerando que la longitud de la circunferencia es C= 2 π R.

$$Radianes\ a\ grados\ sexagesimales \qquad 1rad = \frac{180°}{\pi} = 57{,}29577951°$$

$$Radianes\ a\ minutos\ sexagesimales \qquad 1rad = \frac{180°}{\pi} \times 60 = 3437{,}75'$$

$$Radianes\ a\ segundos\ sexagesimales \qquad 1rad = \frac{180°}{\pi} \times 3600 = 206265"$$

Conversión del sistema Sexagesimal al Centesimal:

$90^o = 100^g$ entonces: $10/9\ \alpha^o = \alpha^g$

$100^g = 90^o$ entonces: $9/10\ \alpha^g = \alpha^o$

Ejemplo 1.1:

Conversión de 23° 47' 35" sexagesimales al sistema centesimal.

Primero se convierten a grados sexagesimales con fracción decimal:

$$23 + \frac{47}{60} + \frac{35}{3600} = 23{,}793055°$$

Luego se aplica la regla de tres:

360°----------400 ^{g}

23,793055°----------x

$$x = \frac{23{,}793055° \,.\, 400^g}{360°} = 26{,}4367^g$$

Resultado: $26{,}4367^g$ o $26^g\,43^m\,67^s$

Aclaración: cuando se pasa del sistema sexagesimal al centesimal, o viceversa, es válido plantear la igualdad 360°=400^g pero debe quedar perfectamente claro que no se pueden plantear las siguientes igualdades:

$$1° \neq 1^g$$

$$1' \neq 1^m$$

$$1" \neq 1^s$$

Debido a que 1° surge de dividir la circunferencia en 360 partes iguales, mientras que 1^g de dividirla en 400 partes iguales. Por lo que los ángulos generados son diferentes.

Entonces

$$1° \neq 1^g$$

$$60' \neq 100^m$$

$$60" \neq 100^s$$

Ejemplo 1.2

Conversión de 23° 47' 35" sexagesimales a sistema natural.

Primero se convierten a grados sexagesimales con fracción decimal:

$$23 + \frac{47}{60} + \frac{35}{3600} = 23{,}793055°$$

Luego se aplica la relación:

$$1rad = \frac{180°}{\pi} = 57{,}29577951°$$

57,29577951° ---------- 1 rad

23,793055° ---------- x rad

Por una cuestión de practicidad en lugar de dividir por 57,29577951° se utiliza 180°/π.

$$\frac{23{,}793055°}{\frac{180°}{\pi}} = 23{,}793055° . \frac{\pi}{180°} = 0{,}415267\ rad$$

Resultado: 0,415267 rad

Escalas

La escala puede ser definida como el factor de reducción que expresa la relación existente entre la medida real en el terreno y la misma medida representada sobre el plano. La relación de semejanza entre la representación y la realidad está dada por:

$$E = \frac{1}{D} \qquad donde \qquad D = \frac{medida\ sobre\ el\ terreno}{medida\ sobre\ el\ plano}$$

D: Denominador de escala.

Escala numérica

Se escribe como el cociente de la distancia entre dos puntos en el plano o mapa, dividida por la distancia entre los puntos correspondientes de la superficie terrestre. En Topografía las distancias consideradas son las que están contenidas en un plano horizontal (reducidas al horizonte).

Un mapa o un plano han de guardar una relación de semejanza con la realidad, por eso se usa la escala. Las escalas más comunes en topografía son 1/100, 1/200, 1/250, 1/500, 1/750, luego para extensiones de terreno mayores, a esos mismos denominadores se los utiliza multiplicados por 10 o 100 obteniéndose las escalas 1/1.000, 1/2.000, 1/2.500, 1/5.000, 1/7.500, 1/10.000, 1/100.000, etc. La elección depende de la extensión de terreno a representar y del tamaño de la hoja a utilizar.

Si por ejemplo se necesita representar una extensión de terreno de 1.850 m de largo por 750 m de ancho sobre una hoja cuadrada de 80 cm de lado, la relación que se debe contemplar es la del lado mayor en el terreno con los 80 cm de la hoja.

$$\frac{1.850{,}00\ m}{0{,}80\ m} = 2.312{,}5$$

El numerador y el denominador deben estar en las mismas unidades, en este caso se expresaron en metros, el resultado de la división es adimensional. Si bien este valor cumple con la definición de relacionar medidas del plano y del terreno, no está reglamentado. Se debe elegir un denominador de escala normalizado, para este ejemplo en particular pueden elegirse 2.000 o 2.500. En estos casos siempre deberá elegirse el denominador de escala mayor, de lo contrario

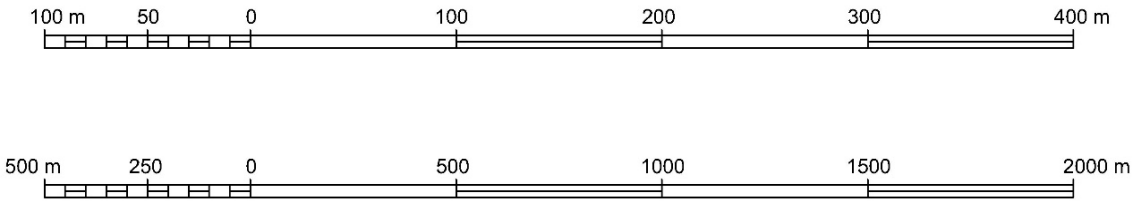
la representación no entrará en la hoja disponible. En este supuesto, la mejor escala para representar el terreno sobre la hoja disponible es 1/2.500. El terreno quedará representado en el plano por un rectángulo de 74 cm de largo por 30 cm de ancho.

Escala gráfica

Es usual en los mapas incluir una escala gráfica, esta consiste en una línea sobre la que se marcan diferentes medidas de distancia. De modo que una distancia en el plano llevada sobre esta escala dará la distancia real. De forma gráfica, se logran las relaciones que permiten pasar, de una magnitud tomada en el terreno a su correspondiente en el plano y viceversa. En la figura 1.11 es posible visualizar dos casos diferentes de escalas gráficas.

Una escala gráfica tiene la ventaja, respecto a la numérica, de que al hacer reducciones o ampliaciones esta escala se reduce o amplía en la misma magnitud, de modo que siempre representa la relación correcta entre el dibujo y el terreno.

Figura 1.11. *Escalas gráficas.*



Límite de percepción visual

El ojo tiene una distancia mínima a partir de la cual dos puntos que están separados pasan a verse como uno solo. Se denomina límite de percepción visual a la mínima distancia a la que el ojo es capaz de ver dos puntos separados. Si bien es un parámetro que puede variar en cada persona de acuerdo con su capacidad visual, se adopta como un valor típico 0,2 mm. Entonces, si se observan dos puntos separados por menos de ese valor serán vistos como un solo punto.

Error gráfico

El error gráfico es el resultado de multiplicar el límite de percepción visual por el denominador de la escala. El error gráfico representa valores a partir del cual magnitudes menores no se van a ver representadas en el mapa.

Ejemplo 1.3

Error gráfico para

1:25000	25000 * 0,2 mm= 5000 mm= 5 m
1: 500	500 * 0,2 mm= 100 mm= 0,1 m

Levantamiento de puntos

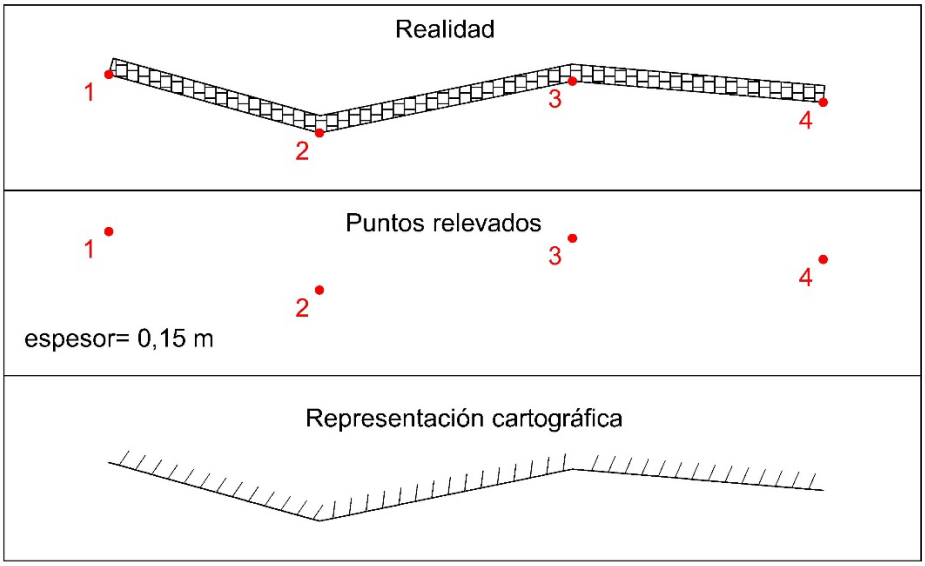
Un levantamiento topográfico es esencialmente el proceso de determinar, en el espacio bidimensional o tridimensional, las ubicaciones de un conjunto de puntos que corresponden a elementos del terreno ya sean naturales o artificiales. Antes de llevar a cabo las mediciones, el Agrimensor debe poseer la habilidad de 'leer' el terreno; es decir, tiene que ser capaz de comprender y descomponer los elementos del terreno a partir de puntos fundamentales. Una vez que se han identificado estos puntos que representan el terreno y sus objetos, pueden medirse para luego procesar esos datos en el gabinete, permitiendo así obtener el producto final deseado.

Punto topográfico

El punto, en geometría, es una entidad que carece de dimensiones (no dispone de longitud, área, etc.) y que, por lo tanto, no pertenece al mundo físico. Un punto geométrico permite señalar una cierta posición espacial que se establece a partir de un sistema de referencia.

Para la geometría un punto no tiene dimensión, pero el punto topográfico, en cambio, es un elemento real, un objeto físico que materializa en alguna forma en el terreno al punto geométrico.

Figura 1.12. *Representación gráfica de un muro mediante una línea quebrada.*



Para relevar toda aquella información útil del terreno, es necesario aplicar un proceso de abstracción y así poder pasar de la complejidad del mundo real a una representación simplificada factible de ser volcada sobre algún tipo de producto cartográfico. De este modo, todos aquellos hechos existentes de interés se considerarán a partir de elementos puntales. Estos puntos de interés deben ser levantados mediante un relevamiento topográfico. En una etapa posterior, con estos datos se practican cálculos que permiten la representación gráfica del terreno.

Un muro puede interpretarse como una línea quebrada y los elementos puntuales que se relevan son sus cuatro vértices (ver figura 1.12). Una vez obtenida la ubicación de estos puntos a través sus coordenadas, puede ser representado mediante la simbología correspondiente.

Otro caso particular en el que se representan elementos de la realidad a partir de entidades discretas, es decir, sus puntos de interés, es el de un levantamiento de una calle mediante perfiles (figura 1.13). Una calle se puede representar mediante una sucesión de cortes o perfiles transversales. Cada perfil se compone de un cierto número de puntos singulares del terreno, tales como puntos localmente altos o bajos, o cambios de pendientes.

Los objetos complejos de la realidad (Incluido el relieve del terreno) son relevados a partir de sus puntos más representativos, los cuales, mediante su ubicación relativa tras el cálculo en gabinete, permiten la representación simplificada de dicha realidad.

El producto cartográfico no puede representar toda la realidad. Los elementos que represente dependen de la necesidad que origina el producto. Finalmente, el producto cartográfico (Mapa, Carta, Plano, etc.) es una simplificación de la realidad y cumple con un propósito específico.

Figura 1.13. *Perfil transversal de una calle.*



El levantamiento (o relevamiento) topográfico consiste en un conjunto de operaciones cuyo objeto es determinar la posición relativa de puntos del terreno. Por lo general son levantamientos de escalas medias a grandes, estos levantamientos se pueden clasificar en Planimétricos, Altimétricos y Taquimétricos.

- Planimétricos: El objetivo que persigue un levantamiento planimétrico es el de obtener un plano donde figuren todos los detalles y distancias horizontales del terreno con toda exactitud. La planta está definida por coordenadas planimétricas XY referidas a un sistema de referencia dado.
- Altimétricos: Es el conjunto de operaciones necesarias para obtener las cotas o alturas respecto a un plano de comparación arbitrario o al nivel medio del mar. Frecuentemente, a los levantamientos altimétricos se les llama Nivelación. Este tipo de levantamientos permiten realizar planos de puntos acotados o de curvas de nivel.
- Taquimétricos: Son levantamientos que combinan observaciones planimetrías y altimetrías. Se determina en una misma operación topográfica la posición en el plano y la altura de los puntos sobre este. Actualmente estos relevamientos se realizan con equipos de estación total o con equipos GNSS RTK.

Influencia de la curvatura terrestre

La curvatura terrestre influye de manera diferente en los levantamientos planimétricos y altimétricos, por ese motivo se analiza de forma independiente en cada caso.

En mediciones Planimétricas, donde las distancias no superen los 10 Km puede omitirse la curvatura de la tierra y considerar que la superficie de referencia es un plano horizontal. Es decir, las distancias que no superen los 10 Km se pueden considerar como planas (sin curvatura).

En Altimetría no es posible despreciar la curvatura de la superficie terrestre, debe ser considerada una corrección por su efecto. Para ello se toma a la tierra como una esfera de radio medio (R= 6370 Km).

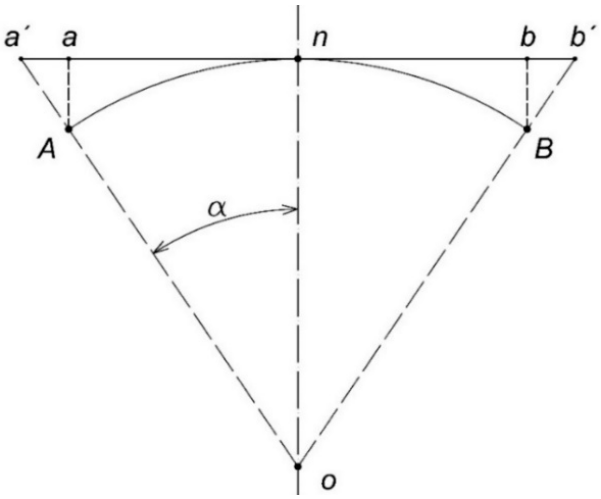
Influencia de la curvatura terrestre en Planimetría

Al no considerarse la curvatura de la tierra, en general se obtiene una longitud diferente de la real, ya que se proyecta en base a una única dirección de la vertical. Se analiza en este caso, la diferencia entre la longitud de la tangente a'b' y el segmento ab en un determinado arco de la superficie terrestre (figura 1.14). Téngase en cuenta que la longitud del segmento ab es igual a la longitud de la cuerda del arco circular AB.

En la figura 1.14 se han supuesto dos puntos A y B sobre un arco circular, y se establece como plano de comparación a la tangente en el centro de este arco en el punto n. Las direcciones de la plomada en todos los puntos del arco son convergentes en su centro **O**. En esta suposición, la representación de A y B deberían ser **a'** y **b'** (proyecciones ortogonales). Sin embargo, al realizar el levantamiento sobre una superficie de referencia plana y horizontal, la plomada seguirá

la dirección de la vertical en n en todos los puntos. Por lo que se obtendrá realmente la representación de A y B en a y b.

Figura 1.14. *Curvatura terrestre en Planimetría.*



La diferencia quedará representada por los segmentos aa' y bb'.

Considerando R = 6.370 km, se calcula a'b' a partir de un ángulo (α) de 2,5 minutos:

$$a'n = 6.370.000m \,.\, tg(0°02'30") = 4.632{,}395m$$

Con lo cual la distancia a'b'= 9.264,791 m.

La distancia ab coincide con la longitud de la cuerda del arco AB:

$$sen\ \alpha = \frac{an}{AO} = \frac{an}{6.370.000m}$$

$$2.an = 2\ \times\ 6.370.000m\ \times\ sen(0°02'30") = 9.264{,}789\ m$$

Resultando la distancia ab=9.264,789 m.

Se puede apreciar que para una distancia de casi 10Km, la diferencia entre el arco y la cuerda es de unos 2 mm. Por lo tanto, en los levantamientos planimétricos en distancias de hasta 10Km puede considerarse la superficie de referencia como un plano horizontal, sin que esto signifique un error importante.

Influencia de la curvatura terrestre en Altimetría

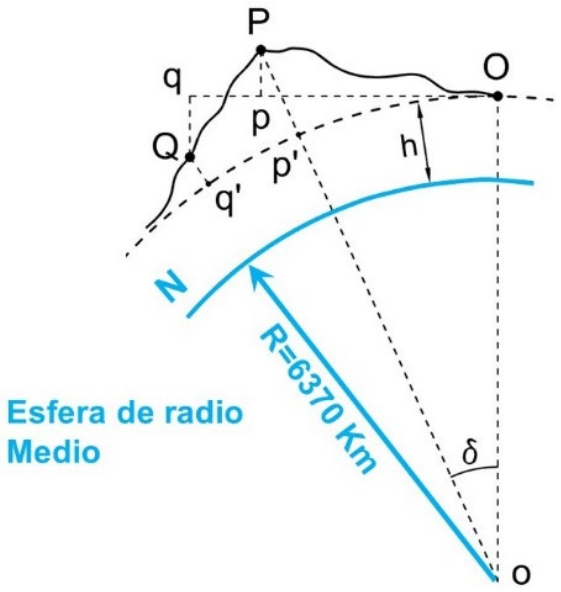
Mientras que en las mediciones planimétricas se puede prescindir de la curvatura de la Tierra y considerar paralelas las direcciones de la plomada en todos los puntos de la zona de trabajo, no sucede lo mismo en los trabajos altimétricos.

En figura 1.15, los puntos O, P y Q pertenecen al terreno natural. Si se midiesen los desnivelas desde O hacia los puntos P y Q, considerando como referencia una superficie plana horizontal tangente a la superficie terrestre en O, se obtienen las alturas Pp y Qq. Resultando que P tiene una altura mayor que O, y Q una altura menor que O. Pero si consideramos como referencia un arco circular concéntrico con la esfera de radio medio, las alturas medidas serán Pp´ y Qq´. En esta última consideración, el punto Q estaría sobre O. Como se puede apreciar, para la medición de alturas, no se puede omitir la curvatura de la superficie terrestre. Por ello, a las alturas deberá

aplicársele una corrección a partir de considerar la curvatura terrestre. La magnitud de esta corrección dependerá fundamentalmente de la distancia entre los puntos considerados.

En Nivelación Geométrica, con visuales usualmente cortas y trabajando desde el medio, puede considerarse como nulo el efecto de la curvatura terrestre.

Figura 1.15. *Efecto de la curvatura terrestre en la medición de alturas.*



Corrección por curvatura terrestre en altimetría

Error por curvatura terrestre

En la figura 1.16 se aprecia la trayectoria de una línea visual dada por un anteojo topográfico. Esta línea debería seguir la forma de la superficie de nivel que pasa por A' y así obtener la lectura B'. Pero la visual sigue la línea recta A'B'' dando como resultado la lectura B'', cuando la lectura debería ser B'.

Omitiendo la altura del instrumento, por ser despreciable frente al radio medio de la Tierra, se puede considerar la siguiente igualdad:

$$OA' = R$$

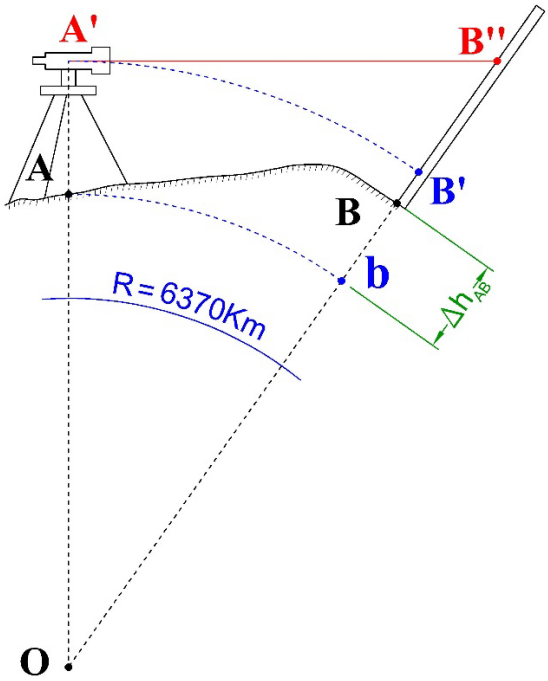
El valor de R (radio medio de la Tierra) es de 6370 km. También en la figura 1.16 se puede plantear la igualdad:

$$\Delta h_{AB} = Bb = A'A - B'B$$

Siendo:

- AA': altura del instrumento sobre A.
- B'B: lectura adelante en la mira sobre B (caso ideal).
- e_C: Error por curvatura= B'B''.

Figura 1.16. *Efecto de la curvatura terrestre.*



En la figura 1.16, dada la pequeñez del ángulo A'OB'' pueden considerarse de igual longitud el arco, la cuerda y la tangente, por lo tanto:

d= arco Ab = A'B''

Aplicando el teorema de Pitágoras al triangulo rectángulo A´O B´´:

$$(R + e_c)^2 = R^2 + d^2$$

$$R^2 + 2.R.e_c + {e_c}^2 = R^2 + d^2$$

El término $\boldsymbol{e_c^2}$ puede considerarse despreciable por ser su magnitud muy pequeña respecto a los demás términos. Resultado la expresión:

$$2.R.e_c = d^2$$

El efecto de la curvatura sobre la lectura es:

$$\boldsymbol{e_c = \frac{d^2}{2.R}}$$

Este error requiere de una corrección positiva a la cota obtenida, a modo de ejemplo, en la tabla 1.1 se han calculado valores de e_c para algunas distancias típicas.

Tabla 1.1. *Cálculo del error por curvatura e_c para distancias típicas.*

Distancia (m)	e_c (m)
100.00	0.00
500.00	0.02
1000.00	0.08
2000.00	0.31

Efecto de la refracción atmosférica

Debido a las diferentes densidades de las capas atmosféricas, un rayo visual que las atraviesa no sigue una línea recta, sino que se curva ligeramente con la concavidad hacia el suelo (figura 1.17). Debido a este fenómeno natural, la refracción atmosférica disminuye entonces el efecto de la curvatura en una pequeña fracción (DOMÍNGUEZ GARCÍA-TEJERO, 2002). El radio de curvatura R' de la visual curvada por el efecto de la refracción es aproximadamente 7 u 8 veces más grande que el radio medio de la Tierra (R=6370 Km), siendo entonces en promedio R'= 50000 Km.

$$R \sim 0{,}13\ R'$$

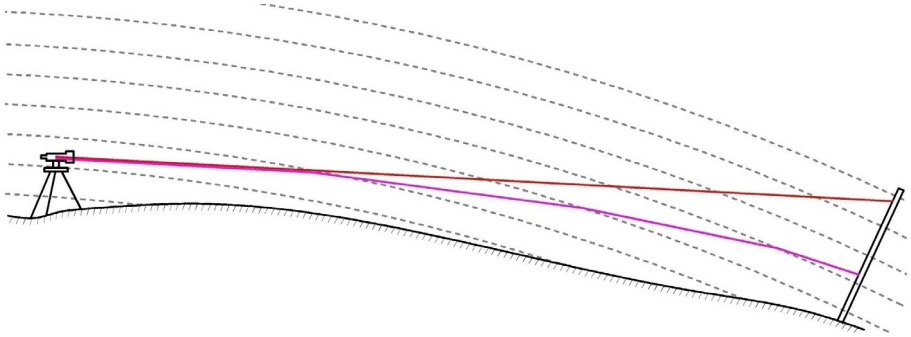
Se denomina coeficiente de refracción *k*:

$$k = \frac{R}{R'} = 0{,}13$$

Llamando e_R al efecto de la refracción atmosférica

$$e_R = \frac{d^2}{2.R'} = 0{,}13\frac{d^2}{2.R}$$

Figura 1.17. *Curvatura de la visual por el efecto de la refracción atmosférica.*



Corrección por Curvatura y Refracción (Cr)

El efecto de la refacción atmosférica tiene el signo opuesto al de la curvatura terrestre. El efecto combinado de ambos efectos está dado por la expresión:

$$c_r = e_c - e_R$$

$$C_r = \frac{d^2}{2.R} - 0{,}13\frac{d^2}{2.R} = \frac{d^2}{2.R}\ (1 - 0{,}13) = 0{,}87\frac{d^2}{2.R}$$

$$C_r = 0{,}87\frac{d^2}{2.R}$$

En la figura 1.18 se ha graficado el efecto conjunto de la curvatura terrestre y la refracción atmosférica, la visual efectiva determina la lectura sobre el punto denominado B'''. El efecto combinado de curvatura y refracción aumenta el valor de la lectura adelante, por ello el desnivel obtenido es menor al verdadero. La altura (o cota) del punto medido será menor debido a este efecto, por lo tanto, la corrección que se le aplique debe ser positiva. Por lo que, en los trabajos que deba aplicarse C_r, su valor se suma a la cota del punto medido.

En la figura 1.18 puede verse que el desnivel teórico que se busca obtener es:

$$\Delta h_{AB} = AA' - BB'$$

El desnivel que se obtiene realmente es:

$$\Delta h_{AB} = AA' - BB'''$$

Siendo:

$$BB''' > BB'$$

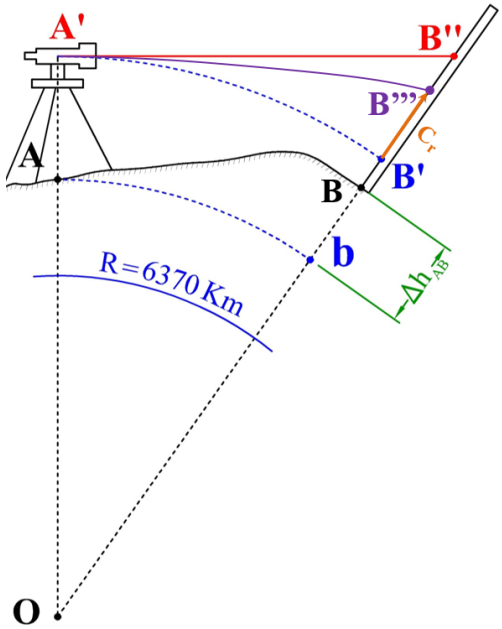
Por ese motivo, el desnivel obtenido siempre será menor al teórico. El desnivel se suma a la cota del punto conocido para calcular la cota del punto desconocido:

$$Cota\ B = Cota\ A + \Delta h_{AB}$$

Si el desnivel utilizado es menor al verdadero, lo mismo sucederá con la cota calculada. Por ese motivo la corrección Cr debe sumarse siempre:

$$Cota\ B = Cota\ A + \Delta h_{AB} + C_r$$

Figura 1.18. *Corrección por curvatura y refracción (Cr).*



En la tabla 1.2 se muestran valores de Cr calculados para distancias típicas.

Tabla 1.2. *Cálculo de Cr para distancias típicas.*
Distancias en metros y correcciones en milímetros.

Distancia (m)	Cr (mm)
100.00	1
300.00	6
500.00	17
1000.00	68
2000.00	273

Analizando la tabla 1.2 y considerando que las alturas en levantamientos de puntos se calculan con precisión del centímetro (2 decimales), pude tomarse como regla práctica que se debe aplicar esta corrección cuando las distancias **superan los 300 metros**.

Los equipos denominados estaciones totales tienen la posibilidad de aplicar de forma automática esta corrección Cr. En estos instrumentos, el coeficiente de refracción tiene un valor similar al aquí dado: 0,14. En los resultados de las alturas esta variación no representa diferencias apreciables.

Figura 1.19. *Configuración de las correcciones por curvatura y refracción en estaciones totales (caso 1).*



Figura 1.20. *Configuración de las correcciones por curvatura y refracción en estaciones totales (caso 2).*



En los trabajos de nivelación más precisos, como los empleados para traslado de cotas, tales como la nivelación geométrica, se mide desde el medio y las visuales raramente superan distancias de 100 m. Entonces en nivelación geométrica, dentro del ámbito de la topografía, puede ser omitida la corrección por curvatura y refracción.

Replanteo de puntos

El levantamiento topográfico puede ser definido como el conjunto de operaciones necesarias para representar un terreno junto con sus elementos naturales y artificiales. A partir de las mediciones realizadas en campo y tras el cálculo y procesamiento correspondiente, se elabora un plano en formato papel o digital.

Por otro lado, el replanteo se refiere a la operación inversa del levantamiento, consistente en marcar sobre el terreno la posición de elementos puntuales utilizando los datos obtenidos del plano o deducidos de cálculos. Se describen los casos más habituales:

- Replanteo en obras civiles: marca de ejes para edificios, trazado de caminos, y marcación de puntos con alturas específicas. Incluye también el replanteo de curvas circulares o espirales.
- Replanteo de parcelas: señalización de los límites según el plano de mensura, incluyendo la colocación de mojones (amojonamiento).

Hoy en día, la forma más eficiente y precisa de realizar el replanteo es mediante una estación total o con equipos GNSS RTK. Ingresando las coordenadas de los puntos en el equipo, el software calcula automáticamente las medidas necesarias para ubicar los puntos en el terreno. En algunos casos, se puede cargar un archivo CAD en la computadora del instrumento y seleccionar directamente los puntos a marcar en el plano digital. Estas herramientas agilizan considerablemente las tareas de campo y reducen la necesidad de operaciones en el gabinete.

Generalmente, los programas de estaciones totales y equipos GNSS RTK cuentan con rutinas de cálculo que permiten resolver automáticamente diversos problemas topográficos en campo, como el replanteo de líneas y curvas en 2D y 3D, así como el replanteo de puntos acotados a partir de Modelos Digitales del Terreno.

En todos los casos, el replanteo se realiza a partir de marcas preexistentes, dejadas durante el relevamiento topográfico previo o alguna otra tarea de medición. Además, tanto el equipo como el método de trabajo seleccionados deben ser los adecuados para garantizar la precisión requerida en el replanteo de los puntos.

Referencias

DOMÍNGUEZ GARCÍA-TEJERO, Francisco (2002). *Topografía General y Aplicada*. Ediciones Mundi-Prensa.

MÜLLER, Roberto (1950). *Compendio General de Topografía Teórica Práctica*. Librería: “EL ATENEO”.

CAPÍTULO 2
Medición de distancias

Roberto José Romano y Pablo Sebastián Paús

Distancias medidas en Topografía

En topografía, la distancia útil entre dos puntos es la reducida al horizonte. Si los puntos tienen alturas diferentes, la distancia a considerar será la longitud horizontal comprendida entre las líneas de plomada que pasan por ambos puntos (Wolf, 2016). Las distancias pueden expresarse en diferentes unidades, en Argentina se utiliza oficialmente el metro [m]. El metro se define como la distancia que recorre la luz en el vacío, en un intervalo de tiempo de 1/299792458 s (INTI).

No obstante ello, en nuestro país es posible encontrar registros antiguos de medidas de longitud con otras unidades alternativas como por ejemplo la vara (1 vara = 0,866 m), la cuadra (1 cuadra= 150 varas) y la legua (1 legua= 40 cuadras)

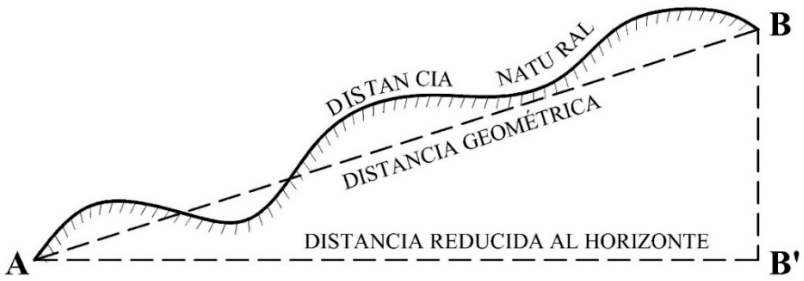
Distancias topográficas

En los trabajos topográficos hay diferentes alternativas para medir distancias, y estas pueden ser de distintas clases, por lo que es conveniente hacer una clasificación.

Las distancias topográficas se clasifican en (figura 2.1):

- **Distancia natural**: es la distancia entre dos puntos siguiendo el relieve del terreno. Esta distancia no tiene ningún interés en Topografía.
- **Distancia geométrica**: distancia entre los puntos del terreno A y B, medida en línea recta y sin tener en cuenta el relieve del terreno.
- **Distancia reducida al horizonte**: distancia AB', siendo B' la proyección ortogonal del punto B sobre el plano horizontal que pasa por el punto A.

Figura 2.1. *Distancias topográficas.*



Medición de distancias

Los levantamientos topográficos son representados a escala sobre el plano horizontal, por lo que cuando se mide una distancia entre dos puntos sobre la superficie topográfica, ésta debe ser en proyección horizontal o reducida al horizonte.

La medición de la distancia entre dos puntos constituye una operación común en todos los trabajos de topografía. El método y los instrumentos utilizados dependerán de la importancia y precisión requeridas. Los métodos pueden dividirse en directos e indirectos.

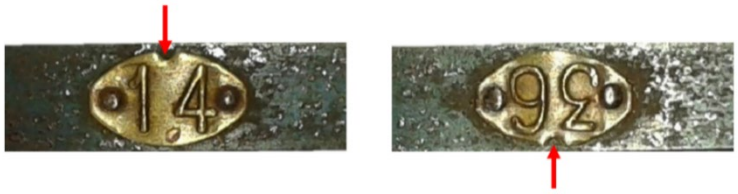
En los métodos directos se obtiene la magnitud de la distancia por aplicación sucesiva, en toda su extensión, de la unidad de medida o un múltiplo o submúltiplo de esta. Mientras que se mide en forma indirecta cuando se realizan otras determinaciones sin aplicar el elemento de medición directamente sobre la línea a medir, obteniéndose por calculo su valor.

Cinta de Agrimensor

La forma tradicional de medir distancias es con una cinta de Agrimensor (o de tambor). Estas son cintas de 50 o 100 m de longitud, graduadas en ambos lados con un pequeño remache de bronce cada 0,20 m. Cada metro entero impar está marcado con un remache de bronce de mayor diámetro, sin numeración. Los metros pares están grabados sobre una chapa de casi el mismo ancho de la cinta, numerada de ambos lados de esta, siendo la suma de sus valores igual al de la longitud de la cinta. Para una cinta de 50 m, cuando de un lado encontremos el número 14, del otro lado y en el mismo lugar estará el número 36 (figura 2.2).

En general, la medida directa de distancias con cinta de Agrimensor viene acompañada de un alineamiento previo entre los puntos.

Figura 2.2. *Graduación de metro par en una cinta de Agrimensor.*



En este tipo de cintas, el origen es habitualmente el borde exterior de las manijas metálicas que sirven para su transporte durante la medición.

Las técnicas para medición con cintas de este tipo han sido ampliamente descriptas y graficadas en diversos libros de Topografía por lo que aquí no se abundará en demasiados detalles. La cinta de Agrimensor se utiliza junto a otros elementos denominados fichas. Un juego de fichas está compuesto de 11 de estas. Cada ficha es una varilla metálica de aproximadamente 5 mm de diámetro en su sección circular y una longitud de unos 40 cm. Son construyen en acero de modo que resisten el desgaste en el uso.

Como toda tarea topográfica, se debe tener siempre un control sobre las mediciones. Cada distancia debe medirse al menos dos veces, una de ida y la otra de vuelta. Si la diferencia entre los dos registros no supera un valor admisible (tolerancia) se calcula el promedio de ambas.

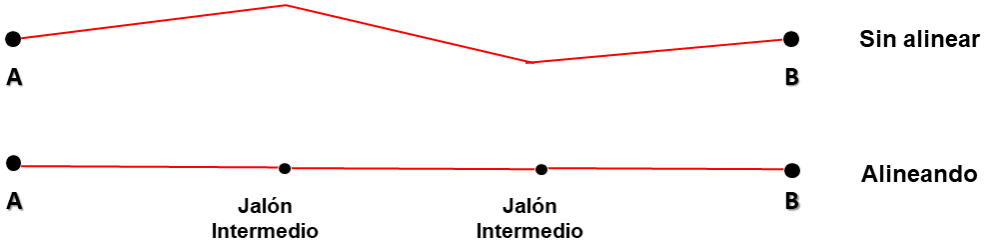
Es usual que la distancia a medir sea mayor a la longitud de la cinta, por este motivo y para que la cinta realice un recorrido recto entre los puntos extremos de la línea, se emplean alineaciones. Para esta tarea se utilizan elementos denominados jalones, estos son bastones metálicos o de madera, con una extremo aguzado o punta para hincar sobre el terreno. Se pintan en bandas alternadas rojas y blancas que contrasten con el entorno.

Figura 2.3. *Cinta de Agrimensor en su carretel y juego de fichas.*



Colocando jalones en los extremos y en los puntos intermedios de una línea a medir se logra materializar una alineación. Luego, con la cinta se recorre la alineación recta demarcada evitando un recorrido en zig zag que implicaría medir una distancia mayor a la real (figura 2.4).

Figura 2.4. *Esquematización de una alineación con jalones.*



Medición Electrónica de distancias

Los primeros avances en la medición electrónica de distancias en Topografía y Geodesia datan de la segunda mitad del siglo XX. Los equipos desarrollados en esa época eran autónomos (Geodimeter, Telurómetro, etc.). Con el tiempo, la miniaturización y el perfeccionamiento de estos dispositivos permitieron integrarlos a otros equipos, como las estaciones totales.

Una estación total es un instrumento topogeodésico que combina un teodolito y un distanciómetro, ambos electrónicos. Este dispositivo tiene la capacidad de realizar mediciones angulares y de distancia. Además, cuenta con un sistema inteligente embebido o computadora interna que permite realizar numerosas operaciones matemáticas basadas en estas mediciones, almacenar

datos en una memoria, efectuar correcciones a los datos crudos y otras funciones que se abordarán a lo largo de este libro.

El alcance del distanciómetro electrónico de una estación total puede llegar a ser de unos 4 kilómetros (según datos de fabricantes), no obstante, las máximas distancias medidas en la generalidad de los trabajos es notablemente inferior a esa longitud. La precisión en la medición de una distancia con estos instrumentos depende de varios factores:

- de sus características técnicas,
- de la magnitud de la distancia,
- del equipamiento auxiliar (reflectores, trípodes, bastones nivelantes, etc.),
- de los requerimientos del trabajo,
- de la experiencia del operador y
- las condiciones medioambientales.

En la generalidad de los trabajos es factible alcanzar resultados con una incertidumbre del orden del centímetro. También surgen casos especiales en los que se realizan mediciones con precisión milimétrica o incluso submilimétrica.

El principio de funcionamiento de los distanciómetros electrónicos se basa en medir el tiempo que tarda una señal electromagnética en propagarse a lo largo de una línea en el sentido de ida y vuelta. La señal sale del instrumento colocado en un extremo de la línea, se propaga hasta el otro extremo donde se refleja en un elemento reflector y regresa al instrumento. El tiempo que tarda la señal en recorrer este trayecto de ida y vuelta multiplicado por la velocidad de propagación es proporcional a dos veces la distancia. El valor de la distancia surge del procesamiento de la señal recibida, por lo tanto, se trata de un método de medición indirecto.

La implementación práctica de la medición electrónica de distancias se basa en alguno de los dos métodos fundamentales: “Tiempo de vuelo” o “Comparación de fase”. La diferencia entre ambos es el tipo de modulación empleado. La señal está compuesta por una onda portadora que se modula con otra onda moduladora o medidora; ésta última es la que se utiliza para medir. En la actualidad, la mayoría de los instrumentos utilizan el método de comparación de fase.

El tipo de señal portadora que suelen utilizar los fabricantes de equipos pertenece a la banda visible o al infrarrojo cercano del espectro electromagnético, aprovechando las siguientes ventajas:

- Buena penetración.
- Dificultad de ser interferida o perturbada.
- Sencillez en obtener su reflexión, puntería y detección.

Este tipo de señales poseen tan alta frecuencia y tan pequeña longitud de onda que es imposible utilizarlas como unidad de medida. Por lo tanto, es necesario modular la onda luminosa con otra de baja frecuencia cuya longitud de onda sea adecuada para la medición a realizar y de utilización técnicamente factible.

En el ámbito de las telecomunicaciones, la modulación es un proceso por el cual una magnitud característica de la onda portadora (amplitud, frecuencia o fase) se modifica para seguir las variaciones de otra señal, denominada moduladora; ésta última es la que lleva la información que se quiere transmitir. En el caso de los distanciómetros se utiliza la modulación de amplitud, es

decir, que la amplitud de la onda portadora varía en función de onda moduladora. Esta modulación puede ser pulsada o continua, dependiendo del método de medida empleado.

En el método del "tiempo de vuelo" se utiliza como señal un pulso de luz de muy corta duración y se mide el tiempo (t) que tarda esta señal en recorrer la distancia de ida y vuelta entre el instrumento y el reflector. Suponiendo conocida la velocidad de propagación v, la distancia resulta:

$$D = \frac{1}{2}\ (v * \ t)$$

Para tener una resolución de la distancia de 1 cm, la medida de tiempo debe tener una resolución de 30 ps (picosegundo = 10^{-12} s). En el pasado esto representaba un desafío tecnológico importante, pero en la actualidad es uno de los métodos utilizados.

En el método de "diferencia de fase", la onda portadora de un distanciómetro electroóptico se modula con otra señal continua de frecuencia (f) cuya longitud de onda (λ = v / f) es más apropiada considerando las magnitudes que habrá que determinar; a esta señal se la denomina onda medidora. La longitud de la onda modulada (λ) se utiliza como unidad de medida para determinar la distancia sobre el terreno, suponiendo conocidas la velocidad de propagación (v) y la frecuencia (f). Por lo tanto, la longitud de onda (λ) de esta señal se toma como distancia Fundamental de Medida o Unidad de Medida (U).

$$U = \frac{\lambda}{2}$$

La medida por diferencia de fase resulta más precisa en la determinación de distancias que la medida por tiempo de vuelo, por eso los instrumentos MED de alta precisión generalmente utilizan el método de diferencia de fase.

La mayoría de los distanciómetros electrónicos fabricados actualmente transmiten luz infrarroja láser como señal portadora, por ello se los denomina electroópticos. La intensidad de este tipo de señal puede modularse directamente, simplificando de manera considerable el equipo (Wolf, 2016). Los distanciómetros electrónicos embebidos en estaciones totales son de esta clase y utilizan fuentes de luz del tipo LED (del inglés *light-emitting diode*) o láser. A este tipo de distanciómetros electrónicos, que emplean como portadoras ondas electromagnéticas del sector visible o infrarrojo cercano del espectro, se los denomina equipos MED (medición electroóptica de distancias).

El sector rojo del espectro electromagnético abarca longitudes de onda entre 620 y 700 nm, mientras que la porción del infrarrojo cercano (NIR) se extiende de 700 a 3000 nm. En la tabla 2.1 se presentan algunos ejemplos de equipos comúnmente utilizados en trabajos de Agrimensura. La mayoría de las estaciones totales modernas emplean ondas electromagnéticas en las regiones visible roja y NIR del espectro (Deakin, 2016).

Tabla 2.1. *Distanciómetros electroópticos de algunas estaciones totales de uso corriente.*

Fabri-cante	Modelo	Long. de onda portadora (nm)
Spectra	Focus 2	620 a 690
Leica	TPS700	780
Leica	TS60	658
Trimble	Serie S	660

Evolución de la medición electrónica de distancia

A continuación, se muestran distintos equipos que permiten la medición electrónica de distancias. Ordenados de acuerdo a su evolución en el tiempo, comenzado por los más antiguos.

En la figura 2.5 se muestra un Telurómetro del Dpto. Agrimensura FI UNLP. Se medía con dos equipos idénticos, estacionando uno en cada extremo de la línea a medir. Este instrumento utilizaba una onda portadora en la banda de radiofrecuencia de microondas, modulando en amplitud la onda medidora y se lograban alcances de 30 a 50 km.

Figura 2.5. *Telurómetro.*



En la figura 2.6 se muestra un distanciómetro y teodolito electrónicos, también son propiedad del Dpto. de Agrimensura de la FI UNLP. Mediante una conexión por cable podían vincularse ambos instrumentos y se obtenían la componente horizontal y la vertical de la distancia medida. El armado de este equipo requería la alineación de ambos ejes de colimación, del teodolito y del distanciómetro, previo a la medición.

Figura 2.6. *Teodolito y distanciómetro electrónicos.*



En la figura 2.7 se muestra una estación total marca Geodimeter. A este equipo lo integran un teodolito y un distanciómetro electrónico, además de una computadora interna. Este equipo conforma una estación total integral tal como se las conoce actualmente.

Figura 2.7. *Estación total integral.*



Estación total robótica (figura 2.8), este tipo de estación total posibilita ser comandada a distancia mediante un enlace inalámbrico, posee funciones tales como seguimiento automático del prisma. Los giros acimutal y vertical, así como el enfoque, son comandados mediante servomotores.

Figura 2.8. *Estación total robótica.*



Existe además una variedad de distanciómetros electrónicos para labores de poco alcance y menor precisión, estos son “equipos de mano” y su uso es muy frecuente en la Agrimensura y la construcción. El alcance de estos dispositivos (figura 2.9) varía de acuerdo con la marca y el modelo, pudiendo estar entre los 60 m y los 250 m con precisiones del orden de ±1 mm. Estos instrumentos no necesitan de prismas reflectores, la señal que retorna es reflejada directamente en objetos como por ejemplo muros.

En el ámbito de la Agrimensura, estos distanciómetros de mano se emplean en mediciones de menor importancia. Si bien la precisión intrínseca del instrumento es de ± 1 mm, las distancias obtenidas son bastante menos precisas, dado que usualmente no se utilizan trípodes ni se reducen las distancias al horizonte.

Figura 2.9. *Distanciómetro de mano.*



Medición de distancias con estación total

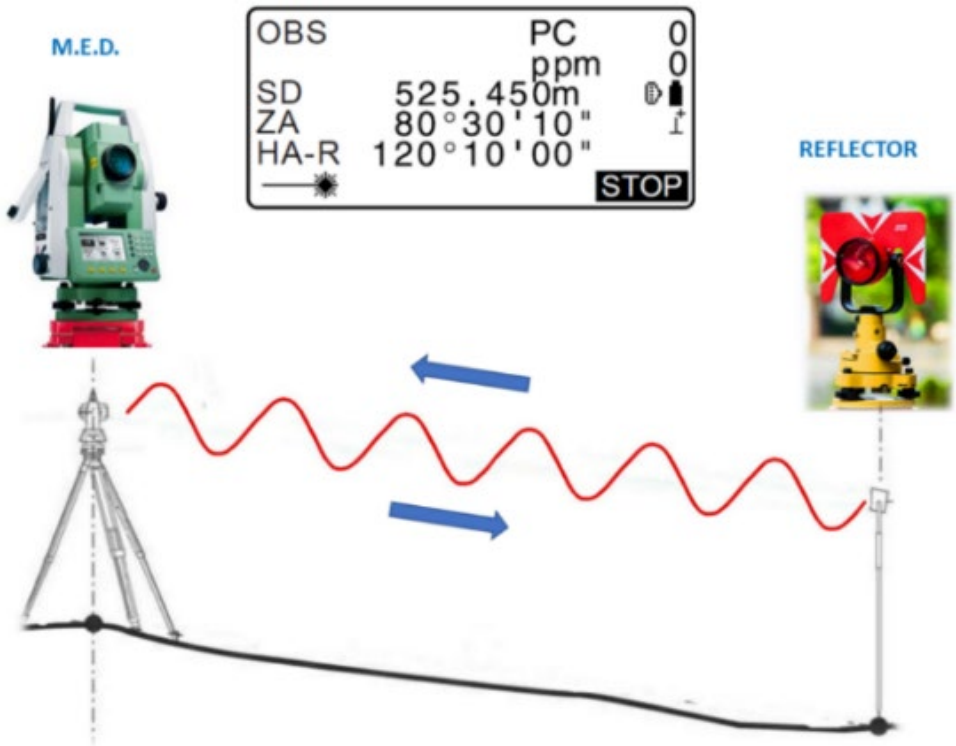
Una estación total es un equipo topográfico que está conformado por un distanciómetro y un teodolito, ambos electrónicos; además de una computadora embebida para la administración de datos, aplicación de correcciones y cálculos topográficos.

En general, las estaciones totales utilizan distanciómetros electroópticos que miden por diferencia de fase o tiempo de vuelo. Para la medición se utiliza un prisma reflector que se coloca en el otro extremo de la línea a medir. Aunque, en algunos casos se pude utilizar la medición sin prisma, por reflexión directa.

En la figura 2.10 se muestra el esquema típico de medición de distancias con una estación total y un prisma. En un extremo se coloca la estación total sobre un trípode y en el extremo opuesto un prisma reflector. El equipo emite una señal que recorre la distancia a medir hasta llegar al prisma, tras el reflejo retorna al distanciómetro para ser procesada. Luego de ser procesada la señal de retorno, el valor de la distancia es mostrado en la pantalla del dispositivo.

Los distanciómetros electrónicos miden la distancia geométrica (o inclinada), el teodolito mide el ángulo de elevación (o depresión) de la línea visual, luego la computadora de la estación total calcula la distancia inclinada y la diferencia de altura con el prisma. En el ejemplo de la figura 2.5 se puede ver el valor medido de una distancia de 525,450 metros, la dirección horizontal 120°10’00” y el ángulo cenital 80°30’10”.

Figura 2.10. *Medición electrónica de distancias.*

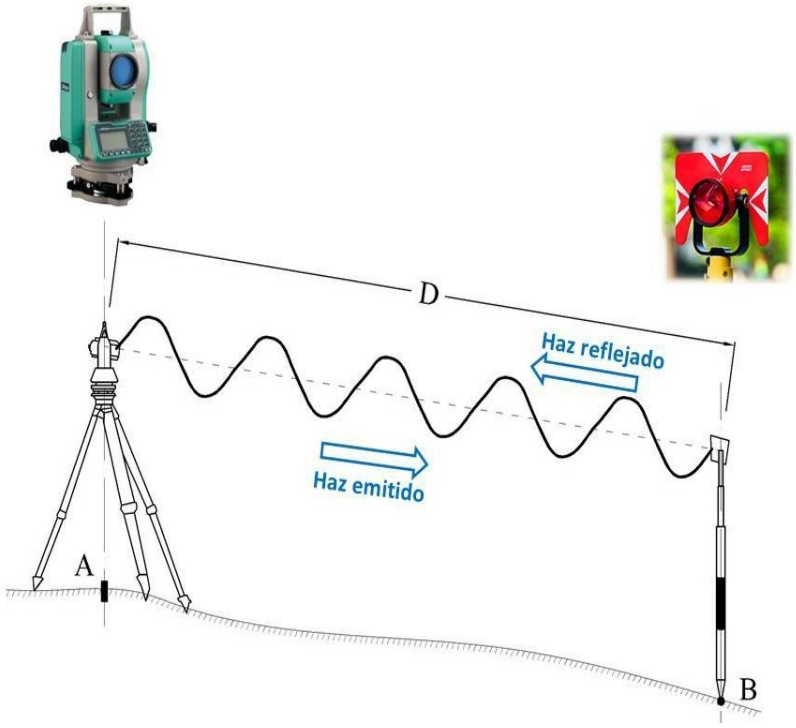


Prismas reflectores

Para la medición electrónica de distancias con equipos MED es requerido un elemento reflector que se posiciona en el extremo opuesto de la línea a medir (figura 2.11). El elemento reflector devuelve la señal al equipo para que este determine la distancia. Los distanciómetros electroópticos trabajan con reflectores pasivos, a diferencia de los instrumentos de microondas que utilizan reflectores activos. Los reflectores pasivos son dispositivos inertes que devuelven la señal al distanciómetro. Se han realizado intentos de emplear dispositivos de reflexión pura mediante un espejo o sistema de espejos, pero son poco usuales. Lo más común es usar reflectores que actúan por medio de reflexión-refracción, denominados prismas de reflexión total.

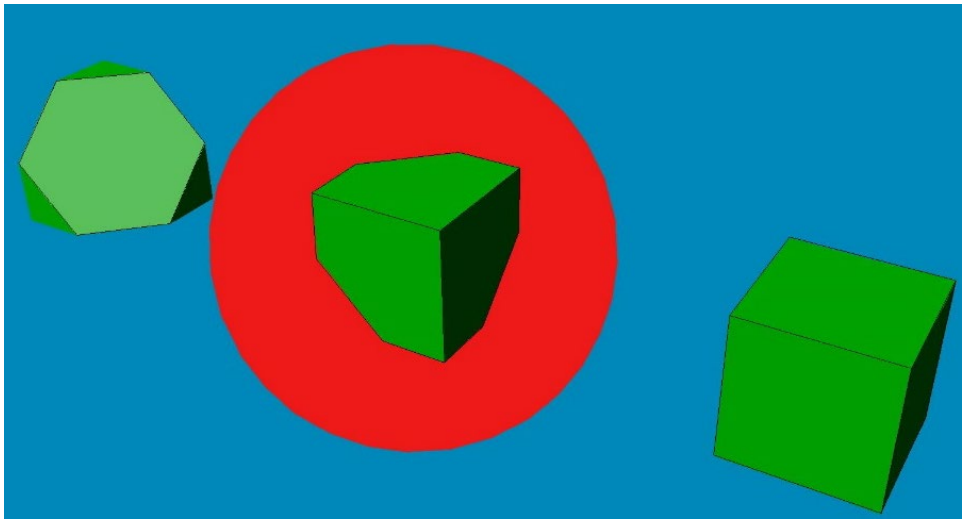
Para establecer el prisma reflector sobre uno de los puntos extremos de la distancia a medir se utilizan diferentes elementos auxiliares. Pueden ser utilizados bastones porta prismas que cuentan con niveles de burbuja tipo esférico para asegurar su verticalidad. Para mediciones de mayor precisión se pueden emplear sistemas de centrado forzoso, tales como bases nivelantes tipo tribrach, con soportes especiales para los prismas.

Figura 2.11. *Distancia D medida entre los puntos A y B.*



El tipo de prisma más utilizado es el que resulta de truncar el vértice de un cubo, formando una pirámide trirrectangular de lados isósceles y base equilátera. La esquina de un cubo de vidrio se corta de tal manera que el plano del corte sea perpendicular a la diagonal de este. En la figura 2.12 se muestra el corte del cubo mediante un plano diagonal al mismo.

Figura 2.12. *Cubo es truncado en uno de sus vértices formando un sólido de forma piramidal.*



Los prismas reflectores se construyen de vidrio macizo y su fundamento se basa en que el rayo luminoso proveniente del instrumento llega a la base equilátera y es devuelto en la misma dirección de incidencia luego de una triple reflexión.

En la figura 2.13 se presenta el despiece de un reflector convencional. En el sector izquierdo, se observa el prisma de vidrio con la base de la pirámide orientada hacia abajo. A la derecha, se incluye una fotografía que muestra el conjunto completo montado sobre un bastón verticalizador.

Figura 2.13. *Despiece de un prisma convencional.*



El prisma de vidrio es colocado en un contenedor de plástico resistente (imagen central de la figura 2.13). Este elemento, mediante una unión de rosca, se sujeta a un soporte especial que permite montar todo el conjunto en un bastón verticalizador o en una base nivelante. Con la ayuda de un nivel esférico es posible colocar el prisma sobre la vertical del punto a medir (figura 2.14). El soporte posee una señal de puntería que facilita la puntería con el anteojo.

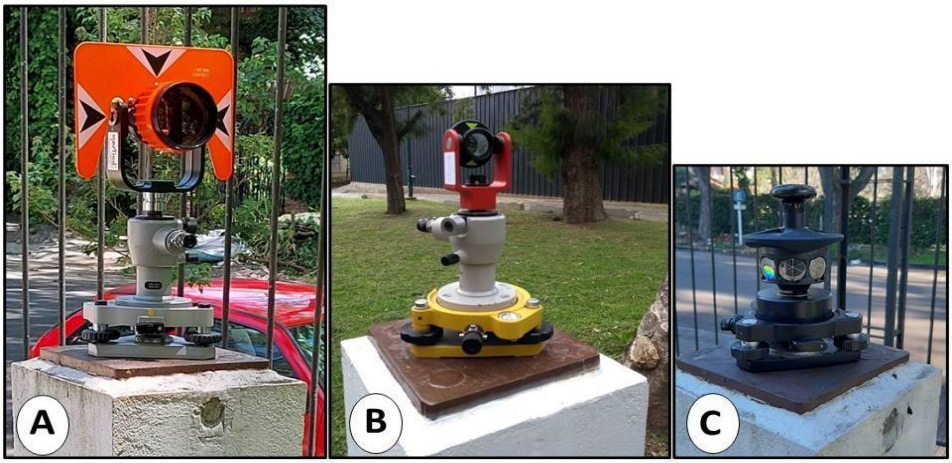
Figura 2.14. *Nivel esférico de bastón porta prisma.*



En la mayoría de las mediciones de distancias se utilizan prismas montados sobre bastones, pero en mediciones especiales pueden utilizarse bases nivelantes. En la figura 2.15 hay diferentes tipos de prismas montados sobre bases nivelantes, en un pilar:

- A: prisma estándar o convencional.
- B: modelo de mini-prisma, se utilizan cuando se requiere aumentar la precisión de las mediciones.
- C: prisma de 360º, se utilizan en estaciones robóticas o semi-robóticas con función de seguimiento automático del reflector.

Figura 2.15. *Prismas montados sobre bases nivelantes.*



Existen diferentes modelos de prismas reflectores que pueden utilizarse, dependiendo del tipo de instrumento y/o tarea a realizar. Para trabajos de topografía en los que se requiere mayor precisión, por ejemplo, resultados que exigen una exactitud menor al centímetro, es posible utilizar mini-prismas, reduciendo errores de puntería y falta de verticalidad en el reflector. Otro modelo diferente de reflector son los prismas 360º utilizados en estaciones totales robóticas o semi-robóticas, donde el seguimiento del prisma se hace de forma automática.

Además de los prismas de reflexión total analizados, pueden usarse otras alternativas. Existen láminas reflectoras, denominadas dianas de puntería, compuestas por diminutas esferas de vidrio que reflejan la señal recibida desde el distanciómetro. También existe, en la mayoría de los equipos modernos, la posibilidad de medición sin reflectores, en estos casos

la señal es reflejada directamente por el elemento o superficie observados. Estas opciones requieren una mayor cantidad de energía en la señal emitida, suelen tener menor alcance y menor precisión en la determinación de la distancia. Además, los resultados obtenidos pueden ser afectados por el tipo de superficie y la inclinación relativa a la dirección de propagación de la señal.

Las estaciones totales ofrecen varios modos de medición: rápido, fino, continuo y promedio de múltiples mediciones. Estos modos permiten medir a uno o varios reflectores, a una diana de puntería o mediante reflexión directa. El usuario puede elegir el modo que mejor se adapte a sus necesidades, ya sea priorizando la rapidez o la precisión. A pesar de los diversos métodos de medición disponibles, la opción más precisa y de mayor alcance es utilizar prismas de reflexión total como reflectores. Para emplear diferentes tipos de reflectores, es necesario configurar previamente el modo de medición y ajustar la constante del prisma.

Cuando la distancia a medir es considerable, por ejemplo, supera el kilómetro, se utilizan varios prismas para aumentar la energía de la señal de retorno. En estos casos se suelen utilizar tres prismas reflectores combinados en una señal de puntería, como poder se apreciado en la figura 2.16.

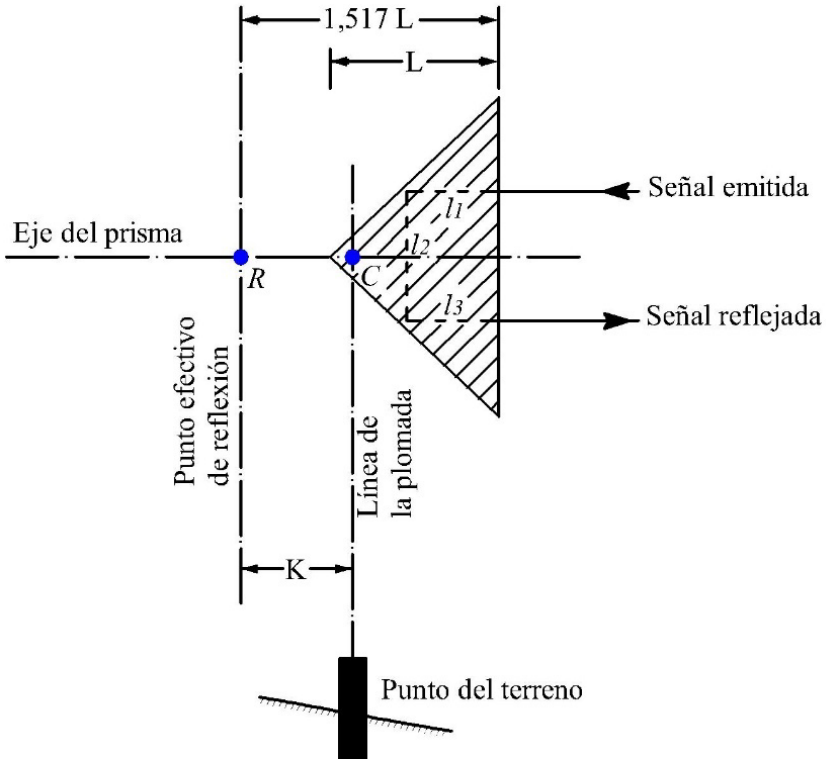
Figura 2.16. *Señal de puntería con tres prismas.*



Constante aditiva (K)

En los prismas de reflexión total, el haz de energía realiza un recorrido interno por un medio de propagación, el vidrio con un índice de refracción diferente al del aire. Debido a que la luz viaja a una velocidad menor en el vidrio que en el aire, el centro efectivo del reflector, el punto R en la figura 2.17, está realmente atrás del prisma.

Figura 2.17. *Constante aditiva K en un prisma de reflexión total.*



De acuerdo con esta figura, el recorrido del rayo por el interior del prisma puede representarse con las distancias l_1, l_2 y l_3, y se puede establecer la relación (Wolf, 2016):

$$2.L = l_1 + l_2 + l_3$$

Pero debido a que el índice de refracción del vidrio n_v es mayor que el del aire, la velocidad de la luz se reduce y la distancia efectiva queda reducida a:

$$n_v.L = 1{,}517\,.L$$

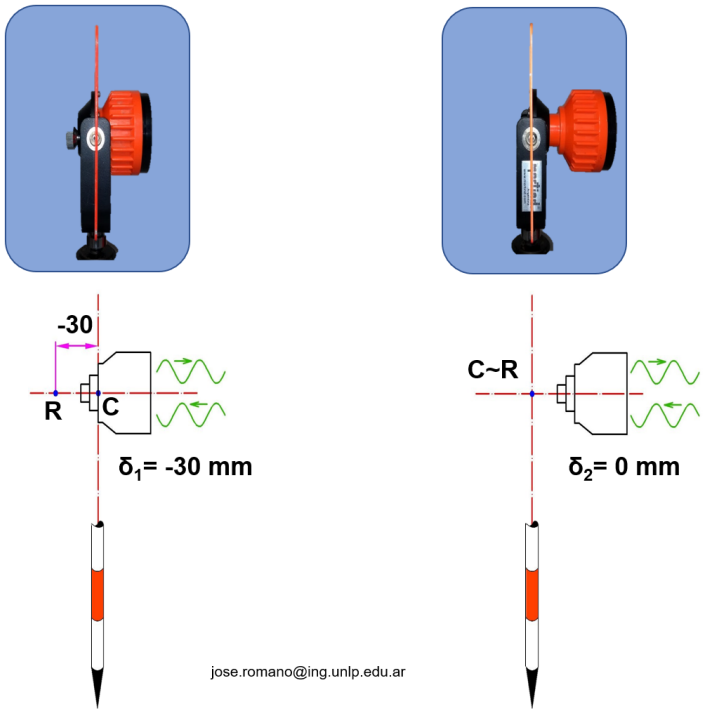
En la figura 2.17 puede verse el punto efectivo de reflexión R de acuerdo con lo expresado antes. La constante K es la distancia entre el punto efectivo de reflexión R y el punto C generado por la intersección del eje del prisma con la línea de plomada.

Por lo tanto, suele ocurrir que la reflexión no se efectúa sobre la línea de la plomada del punto de interés, esto introduce un error sistemático en la medida de las distancias. Entonces, la distancia medida será mayor y por lo tanto se requiere una corrección de punto cero, llamada habitualmente constante del prisma o constante aditiva y que en algunas fuentes bibliográficas (Chueca Pazos, 1996; Wolf, 2016) se la representa con la letra mayúscula K.

El valor de la constante del prisma dependerá de las características constructivas de éste. Además, es común que el valor de la constante cambie según la manera en que el prisma se monte sobre el soporte.

Representado en la figura 2.18, está uno de los modelos de prisma más convencionales y de uso más generalizado. Estos tienen como constante K los valores 0 mm (cero) y -30 mm. Considerando el recorrido interno de la señal por el prisma de vidrio, la distancia medida corresponde a un hipotético reflejo directo en el punto R indicado en la figura 2.18.

Figura 2.18. *Dos opciones diferentes de montar un prisma (K= -30 mm y K= 0 mm).*



En la parte izquierda de la figura 2.18, el prisma se monta de tal modo que el punto efectivo de reflexión R queda 30 mm detrás del eje del bastón. Denominando C a la intersección de la línea de plomada con el eje del prisma, en este esquema R se encuentra 30 mm detrás de C, en este ejemplo K= -30 mm. A la distancia medida el equipo le aplica automáticamente una corrección de -0,030 m.

En el montaje de la derecha, de la figura 2.18, el prisma se coloca en el lado inverso del soporte, de modo que los puntos R y C coinciden, en este caso la corrección a aplicar es cero, es decir, K= 0 mm. Con esta alternativa se resuelve el problema de la constante (K=0), pero debido a que el prisma queda muy por delante del bastón se requiere tener un mayor cuidado al apuntar la cara externa del prisma (base de la pirámide) hacia el instrumento. Además, la posición del prisma tan por delante genera un desbalance en el equilibrio del conjunto prisma-soporte-bastón que en relevamientos de campo dificulta la actividad.

Otros valores menos comunes para la constante del prisma son, entre otros, -40 mm, -17,5 mm, -62 mm, pudiendo llegar a valores de hasta -70 mm. Es fundamental configurar el equipo para que aplique una corrección acorde al montaje del prisma sobre el bastón. También es usual, en levantamientos topográficos, trabajar con más de un prisma con constantes diferentes.

Errores sistemáticos de los equipos MED

En los distanciómetros electroópticos que operan por diferencia de fase pueden llegar a encontrarse tres tipos de errores sistemáticos propios del equipo:

- Error de la constante K.

- Error de escala.
- Error de ciclo.

Estos errores normalmente suelen ser pequeños y no afectan a las mediciones. Pero el uso prolongado del instrumento, el intercambio de reflectores y otros factores pueden determinar que excedan su magnitud normal y afecten los resultados.

Los errores de un distanciómetro electroóptico pueden ser determinados mediante un procedimiento de calibración del instrumento y su reflector. Conocidos estos errores podrán aplicarse las correcciones correspondientes a las observaciones.

Error de la constante K

En la figura 2.19 se representa de forma esquemática un distanciómetro electrónico, siendo λ la longitud de la onda medidora. Contabilizando el número entero de longitudes de onda, más la fracción correspondiente, la computadora del equipo determina la distancia. Dado que la señal recorre dos veces la distancia, por la emisión y reflexión, se utiliza como onda medidora la longitud U:

$$U = \frac{\lambda}{2}$$

Durante el procesamiento de la medida la computadora de la estación total debe corregir la distancia resultante debido a la existencia de dos factores:

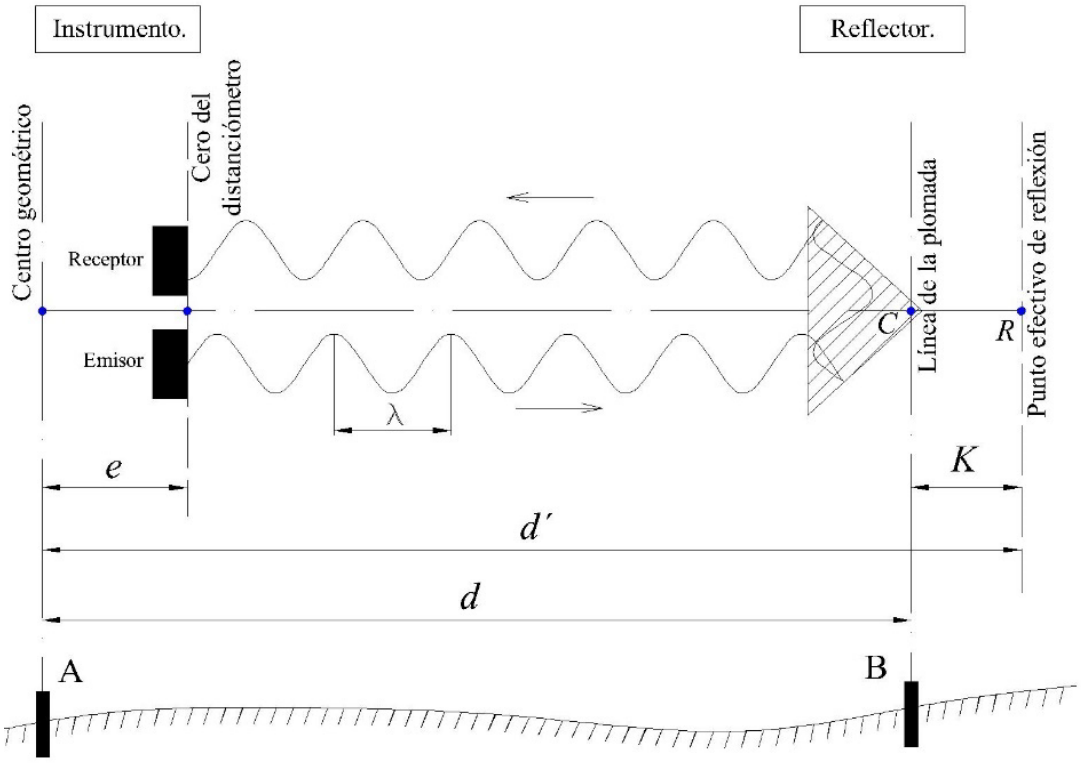
1. Constante del instrumento (e): El punto cero del distanciómetro (punto de emisión/recepción de onda), origen para la medición de distancias, no coincide con el centro geométrico del instrumento o punto de estación, generando un desplazamiento contante ***e*** como puede verse en la figura 2.19. La corrección de esta magnitud se realiza en fábrica y el equipo la aplica automáticamente en cada medición sin que el usuario tenga alguna posibilidad de intervenir en su configuración.
2. Como fue mencionado anteriormente, dentro del reflector la señal realiza un recorrido, y debido a que el índice de refracción del prisma (vidrio) es distinto al del aire, existe una separación entre los puntos C y R. Esta separación u offset se denomina constante del prisma K.

Cuando se determina el valor de la constante K mediante un procedimiento de calibración, en realidad corresponde al conjunto estación-prisma, ya que son indistinguibles los dos factores involucrados. De acuerdo con la figura 2.19, y omitiendo otras correcciones producto del medio de propagación, la distancia medida por el instrumento es d', la cual ya fue corregida automáticamente por el parámetro e:

$$d = d' - K$$

La constante aditiva K para una determinada estación total puede variar debido a un intercambio de reflectores, por fuertes vibraciones o golpes, por diferentes montajes de instrumentos o después de un servicio de mantenimiento o reparación. Por este motivo, es fundamental controlar el valor de K periódicamente y corregirlo si fuese necesario.

Figura 2.19. *Correcciones aditivas a la distancia.*



En las estaciones totales, el operador carga el valor correspondiente de K para que el instrumento calcule directamente la distancia d. Si se registra alguna variación de la constante K, podrá ingresarse el valor corregido de la nueva constante aditiva en lugar de la original.

Error de escala

Una de las características propias de los instrumentos MED basados en el método de la diferencia de fase es la unidad de medida U. Los fabricantes de estos equipos emplean diferentes valores. En la publicación de J. Rüeger de 1996 se mencionan valores típicos de U de: 2 m, 5 m, 10 m, 7,50 m, 15 m, 20 m, 30,769 m y 33,333 m, mencionando que los dos últimos son poco usuales. Equipos más modernos pueden utilizar valores diferentes a los citados, por ejemplo, la estación total Topcon ES 55 utiliza una onda medidora con un valor de U de 4 m.

El error de Escala se debe a que el instrumento genera una longitud de onda (λ) distinta a la de diseño, con lo cual la unidad de medida U teórica es diferente a la real. Como resultado, la distancia medida tendrá un error que ha de ser proporcional a su longitud, de ahí la naturaleza escalar del error. La causa de este error puede estar en el envejecimiento de los componentes electrónicos encargados de generar la señal, como el oscilador del equipo. De la misma manera afecta a los instrumentos MED que operan por tiempo de vuelo debido a que la medida del tiempo se basa en contar ciclos de un oscilador a cristal de cuarzo.

En el planteo de la figura 2.19, si la longitud (λ) utilizada por el equipo para calcular la distancia fuera diferente a la que realmente emite, estaría cometiendo un error de escala. Este error generalmente se expresa en partes por millón (ppm).

Error de ciclo

Bajo este nombre se engloban todos aquellos errores sistemáticos periódicos presentes en la medición electroóptica de distancias y cuya fuente es el instrumento. Se presentan solamente en los equipos que operan mediante el método de la diferencia de fase.

El error cíclico es de naturaleza periódica, con una longitud de onda igual a la unidad de medida del instrumento (U) o un submúltiplo de esta. En los equipos modernos, los errores cíclicos son pequeños, la mayoría de tamaño insignificante, pero pueden volverse importantes a medida que algunos componentes envejecen (FIG. Nº 9, 1994).

Estos errores periódicos pueden darse debido a la diafonía (Crosstalk), eléctrica u óptica o debido a un error sistemático en el sistema de medición de fase. En Telecomunicaciones, se dice que entre dos circuitos existe diafonía, denominada en inglés Crosstalk (XT), cuando parte de las señales presentes en uno de ellos, considerado perturbador, aparece en el otro, considerado perturbado; una señal contamina a la otra. Este acoplamiento eléctrico entre la señal emitida y la señal de medición recibida ocurre en todos los distanciómetros en mayor o menor grado, y es independiente del tipo de sistema de medición de fase.

La expresión matemática más elemental para el error de ciclo es la función seno (Hazelton, 2009).

$$a\ sen\left(\frac{2\ \pi\ d}{U}\right)$$

Siendo ***a*** la amplitud de este error y ***d*** la distancia medida.

Podrían emplearse formas más complejas para el error de ciclo expresándolo mediante una serie de Fourier (Rüeger, 1996).

$$a\ cos\left(\frac{2\ \pi\ d}{U}\right) + b\ sen\left(\frac{2\ \pi\ d}{U}\right)$$

Donde ***a*** y ***b*** son los coeficientes para una serie de orden 1.

En su publicación de 1996, J. Rüeger expresa que en equipos de uso topográfico la amplitud del error de ciclo no supera los 5 mm. Puede suponerse que los avances tecnológicos acontecidos desde esa fecha han reducido los efectos de este error dadas las mejoras en los sistemas ópticos y electrónicos. No obstante, los datos técnicos de los equipos modernos forman parte de sus patentes, las empresas que los fabrican y comercializan no suelen brindar esta información.

Los fabricantes de estos equipos utilizan distintas técnicas para reducir el efecto de estos errores periódicos, blindaje del emisor y el receptor, separación de canales ópticos y revestimientos antirreflejos de partes ópticas. Además, pueden incorporarse en estos dispositivos diferentes compensaciones electrónicas, todas ellas bajo el supuesto de que la amplitud y la fase de los errores periódicos no varían con la distancia (Rüeger, 1996).

Para representar este error de carácter periódico, en la tabla 2.2 se volcaron once distancias medidas con cinta, esas mismas distancias medidas con un instrumento MED con U=10,00 m y en la última columna están sus diferencias (Moffitt, 1975). En este ejemplo las mediciones con cinta se consideraron de orden superior y se toman como referencia. Las once distancias se distribuyen homogéneamente a lo largo de la unidad de medida U= 10,00 metros. Las variaciones

no lineales encontradas en las diferencias pueden ser atribuidas a un error periódico en las distancias observadas con el equipo MED.

Tabla 2.2. *Ejemplo de la manifestación del error de ciclo (Moffitt, 1975).*

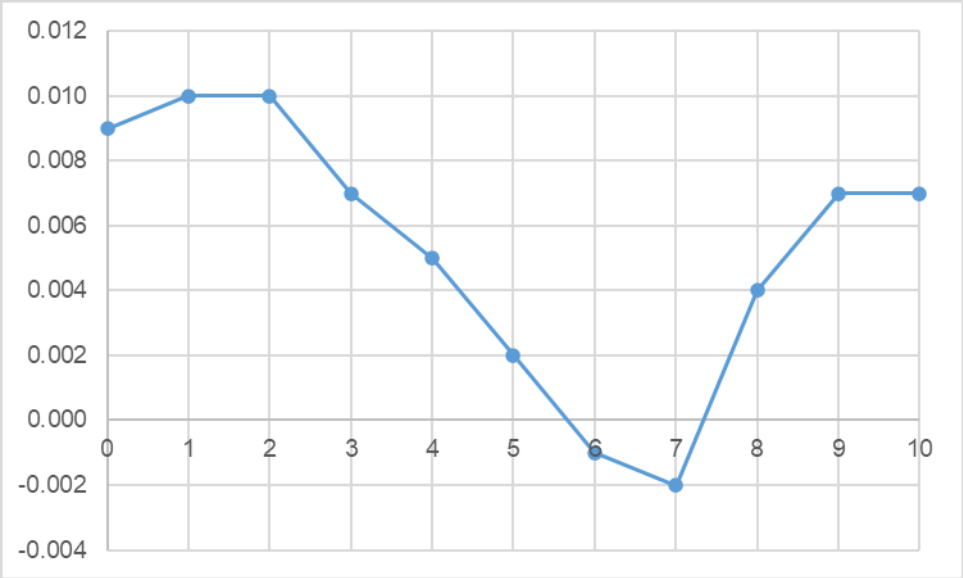
Distancia	Medición con cinta (m)	Medición con MED (m)	Diferencia (m)
0	30.798	30.807	0.009
1	31.798	31.808	0.010
2	32.798	32.808	0.010
3	33.798	33.805	0.007
4	34.797	34.802	0.005
5	35.799	35.801	0.002
6	36.799	36.798	-0.001
7	37.798	37.796	-0.002
8	38.800	38.804	0.004
9	39.802	39.809	0.007
10	40.799	40.806	0.007

En la figura 2.20 se representan las diferencias para las once distancias. En ese gráfico, las diferencias (en metros) se representan sobre el eje de ordenadas, mientras que sobre el eje de las abscisas se han volcado, del 0 al 10, los números que identifican a cada medición. Se puede apreciar como las diferencias entre medidas se distribuyen a lo largo de la unidad de medida U=10,00 m adoptando una forma cuasi sinusoidal.

Cabe destacar que los distanciómetros que funcionan con el método de tiempo de vuelo están libres del problema de diafonía debido a que los pulsos transmitidos y recibidos se separan en el tiempo y no coexisten.

El error de ciclo, junto con el de escala y el de la constante K, son los tres errores sistemáticos que pueden afectar la medición electroóptica de distancias cuando se utiliza un instrumento de estación total. En las mediciones de uso topográfico es fundamental corregir las observaciones crudas de todos aquellos efectos sistemáticos relevantes, tanto los que dependen del instrumental como los provocados por el medio de propagación, principalmente la presión y temperatura ambiente.

Figura 2.20. *Distribución de las diferencias entre mediciones a lo largo de la unidad de medida.*



Referencias

CHUECA PAZOS, Manuel, HERRÁEZ BOQUERA, José, BERNÉ VALERO, Jose Luis (1996). *Tratado de Topografía 2: Métodos Topográficos*. Editorial Paraninfo.

DEAKIN, R. E (2016). *EDM: Notes on Electronic Distance Measurement*. Bonbeach VIC, 3196, Australia.

HAZELTON, N (2009). *Instrument Calibration for the 21st Century*. Paper for the MSPS 57th Annual Meeting.

International Federation of Surveyors (FIG). 1994. *Recommended procedures for routine checks of Electro-Optical distance meters*. FIG Nº 9.

MOFFITT, F. H. (1975). *Calibration of EDM's for Precision Measurement*. Surveyin and Mapping 35, nº 2. Páginas 147 a 154.

RÜEGER, Jean M. (1996). *Electronic Distance Measurement (an Introdution)*. Springer-Verlag Berlín and Heidelberg.

WOLF, Paul y GHILANI Charles (2016). *Topografía*. Alfaomega.

CAPÍTULO 3
El Teodolito

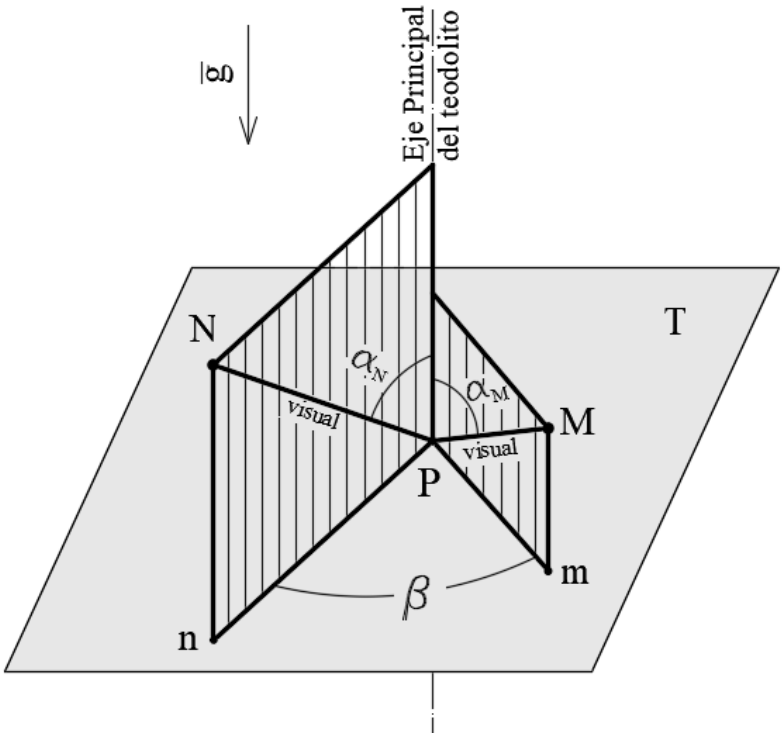
Roberto José Romano

Descripción del teodolito

El teodolito es un instrumento geodésico-topográfico utilizado para la medición de magnitudes angulares. Los ángulos de interés para la Topografía son los proyectados sobre planos horizontales o verticales.

En la figura 3.1 interesa medir desde **P** los ángulos hacia los puntos del terreno **M** y **N**. Los ángulos que interesa medir son el ángulo acimutal (horizontal) β y ángulos de altura (verticales) α_M y α_N (Müller, 1944).

Figura 3.1. *Ángulo acimutal (horizontal) β y ángulos de altura (verticales) α_M y α_N.*



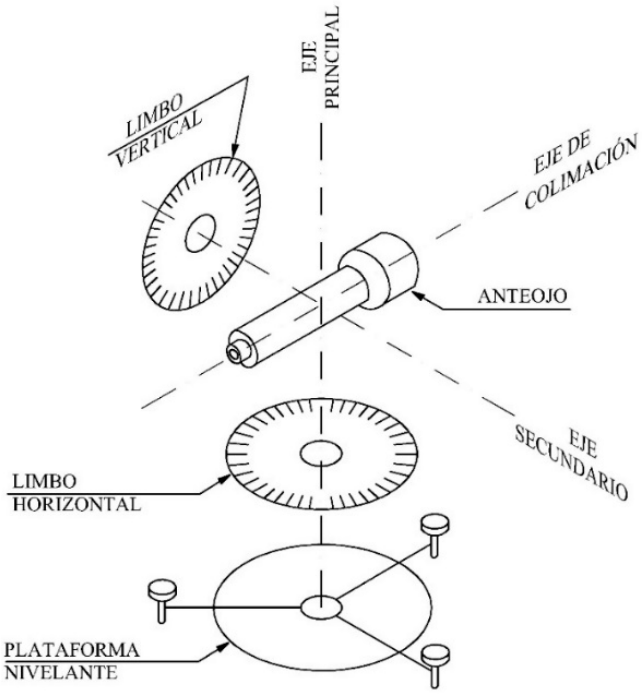
Los ángulos horizontales que deben medirse, como por ejemplo el *β*, toman el valor de la sección normal del diedro determinado por los planos que contengan al eje verticalizado del teodolito y pasen respectivamente por M y N.

Por otra parte, los ángulos verticales que se miden son los que forman las visuales con la línea vertical que pasa por P, coincidente con el eje del instrumento.

En la figura 3.1 se denominó T al plano horizontal que contiene al punto P desde el cual parten las líneas visuales a los puntos del terreno M y N. Se denominaron, además, como m y n a las proyecciones ortogonales de M y N respectivamente sobre el plano T. El ángulo β es un ángulo contenido en el plano horizontal T.

Ambas mediciones angulares, horizontal y vertical, se efectúan utilizando el instrumento denominado teodolito, esquematizado en la figura 3.2, el cual es capaz de dirigir las visuales hacia los puntos de interés y proyectarlas en dirección vertical (línea de plomada) sobre un plano horizontal.

Figura 3.2. *Esquema básico de un teodolito.*



Este instrumento, mediante un anteojo astronómico permite dirigir visuales desde un punto de estación hasta otro punto de interés. Las proyecciones de esa línea visual sobre un plano horizontal y sobre otro vertical, son medidas sobre los respectivos limbos acimutal y cenital.

El teodolito es un instrumento que debe ser verticalizado para realizar sus mediciones, el eje principal del instrumento debe hacerse coincidir con la dirección de la gravedad (línea de plomada) en el punto de estación.

La evolución del teodolito ha ido de la mano con los avances tecnológicos, contando actualmente con teodolitos electrónicos capaces de realizar mediciones angulares muy precisas, rápidamente y con facilidad. Al presente, es poco común encontrar teodolitos autónomos, ya que estos instrumentos actualmente forman parte de equipo topográficos denominados de estación total. No obstante, en lo que refiere a su concepto, el teodolito ha tenido muy pocas modificaciones.

Figura 3.3. *Izquierda: teodolito electrónico. Derecha: teodolito óptico.*



Ángulos medidos en Topografía

Los ángulos de interés para la Topografía son de dos tipos:

- Ángulos verticales: Unido solidariamente al anteojo se encuentra el limbo vertical (figura 3.2). Al girarse el anteojo alrededor del eje secundario se arrastra en ese movimiento a este limbo. Este giro es medido por el sistema de lectura, fijo en los soportes que vinculan el anteojo con el resto de la alidada. Este mecanismo posibilita la medición de ángulos verticales.
- Ángulos horizontales: También denominados acimutales. El anteojo, junto al resto de la alidada, gira sobre el limbo horizontal, este círculo permanece fijo durante todo el proceso de medición. Los giros acimutales del anteojo pueden ser medidos con una precisión de pocos segundos (teodolitos modernos) mediante un sistema de lectura acimutal integrado en la alidada. Este movimiento denominado superior o particular del aparato, es el empleado para determinar ángulos horizontales.

Para colimar (apuntar) a un punto de interés con el anteojo, se deben infligir a este un giro vertical y otro horizontal, en ambos casos se trabaja accionando los tornillos del freno y de pequeños movimientos.

Previo a las mediciones angulares, el teodolito debe ser colocado sobre el punto de estación de modo tal que su eje principal se encuentre verticalizado, es decir, coincida con la dirección de la plomada. Esto último se realiza con la ayuda de niveles de aire y la base nivelante dispuesta en el sector inferior del instrumento. Esta operación se denomina calado del teodolito.

Existe otro tipo de magnitud angular, los ángulos inclinados, estos se miden en planos que no son verticales ni horizontales. Ángulos de este tipo eran los obtenidos con un instrumento denominado sextante. Este instrumento guarda poca utilidad para la Topografía moderna al igual que la medición de ángulos inclinados. Antiguamente este tipo de mediciones era empleada en la navegación. En la bibliografía tradicional de Topografía es posible encontrar suficiente información sobre esta temática.

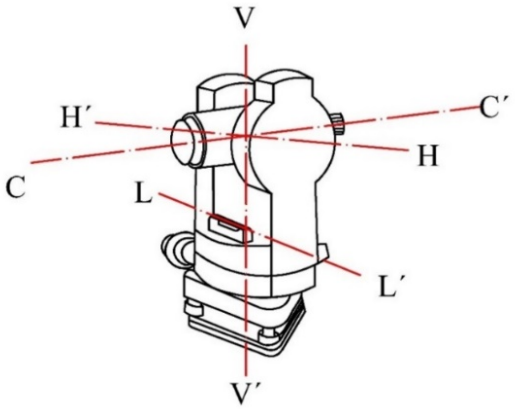
Ejes de un teodolito

El teodolito está equipado con un anteojo astronómico que permite realizar dos tipos de movimientos de giro. El primero de estos movimientos se lleva a cabo cuando el anteojo gira junto con la alidada (la parte superior móvil del teodolito) sobre la parte fija inferior del instrumento, lo que posibilita la medición de ángulos acimutales. El segundo movimiento ocurre cuando el anteojo gira sobre los cojinetes que lo conectan con el resto de la alidada, permitiendo la medición de ángulos verticales.

Deben distinguirse tres ejes fundamentales en el teodolito (figura 3.4):

- Eje de Colimación (CC') determinado por la cruz filar del retículo y el centro óptico del lente objetivo del anteojo astronómico. Este eje determina la visual o línea de puntería.
- Eje Secundario (SS') alrededor del cual bascula el anteojo (pasa por el centro del limbo vertical).
- Eje Principal (VV') alrededor del cual gira la alidada.

Figura 3.4. *Ejes de un teodolito.*



Las partes del teodolito utilizadas para definir sus tres ejes, más algunas otras que hacen a su funcionamiento, serán mencionadas y descriptas en las siguientes páginas. La posición relativa de cada uno de los ejes con respecto a los demás determina el correcto funcionamiento de un teodolito.

Errores instrumentales del teodolito

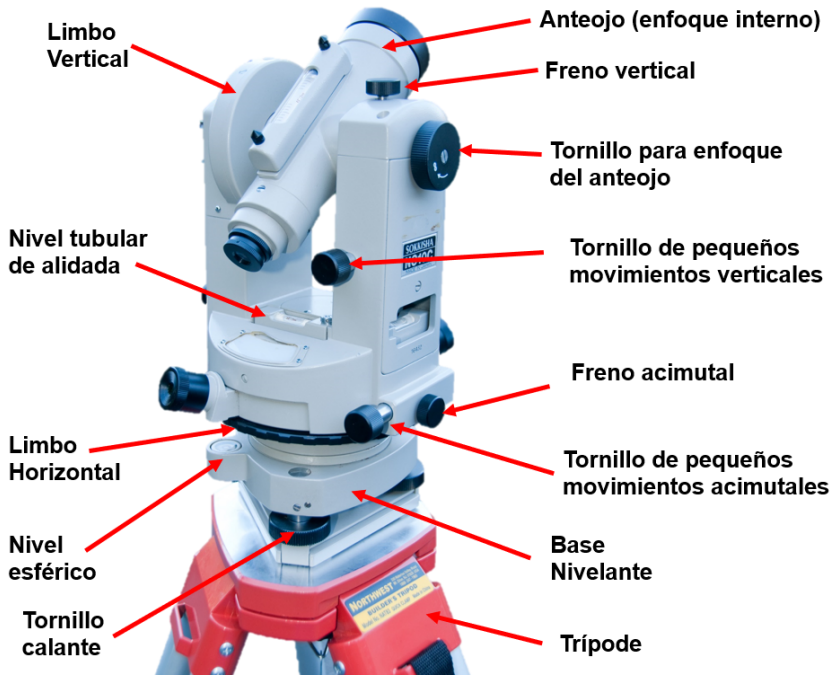
En cualquier teodolito pueden encontrarse tres tipos de errores de naturaleza sistemática y causa instrumental: error de colimación, error de inclinación del eje secundario y error de índice. Estos errores se deben a que uno o más de los elementos que conforman un teodolito no ocupan exactamente la posición teórica que deberían según su diseño original. Se trata de pequeños desajustes que, si bien no impiden el uso del instrumento, hacen que las mediciones y los cálculos que de estas derivan sigan ciertos procedimientos específicos (por ejemplo, el Método de Bessel). Sobre estos temas se profundizará en los capítulos 4 y 5.

Elementos que conforman un teodolito

Un teodolito está formado por un conjunto de piezas individuales, diseñadas y dispuestas de tal manera que permitan las mediciones angulares. Las partes fundamentales con las que debe contar un teodolito son las siguientes:

1. Base nivelante con tres tornillos calantes: que apoya sobre un trípode o tribrach, al cual se fija mediante un tornillo “ad hoc”.
2. Limbo horizontal (acimutal): circulo graduado de 0° a 360° en el sentido directo (de las agujas del reloj).
3. Tornillo de presión o freno del limbo horizontal.
4. Tornillo de pequeños movimientos del limbo horizontal.
5. Alidada: Parte superior del teodolito que gira alrededor del eje principal.
   5.1. Anteojo astronómico: que bascula alrededor del eje secundario.
   5.2. Limbo vertical (cenital, nadiral o de alturas): graduado como el acimutal, que gira solidariamente con el anteojo.
   5.3. Tornillo de presión o freno del anteojo.
   5.4. Tornillo de pequeños movimientos del anteojo.
   5.5. Nivel tubular (y/o dispositivo electrónico equivalente): para verticalizar el eje principal (a esta operación se la denomina “calado del teodolito”).

Figura 3.5. *Componentes fundamentales de un teodolito.*



Anteojo astronómico

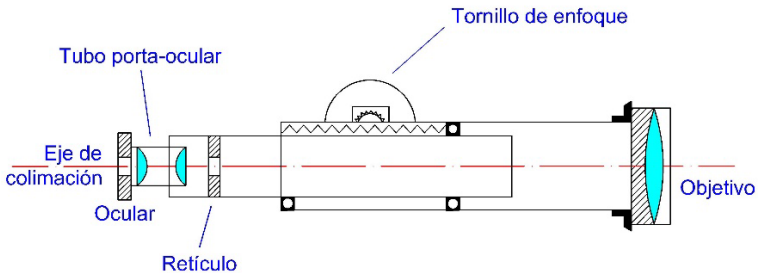
El anteojo astronómico es la pieza componente del teodolito que permite dirigir visuales a los puntos del terreno que son de interés.

Consta el anteojo astronómico de dos lentes, o sistema convergente, montadas en un tubo, formando un sistema dióptrico centrado (figura 3.6). Una de estas lentes se dirige hacia el objeto de interés y por esta razón se denomina lente objetivo del anteojo. Sobre la otra lente coloca su ojo el operador del teodolito, llamada por tal motivo ocular.

El lente objetivo brinda una imagen real e invertida del objeto. A su vez, el ocular funciona como una lupa que proporciona de dicha imagen (que es pequeña) otra mayor, virtual y directa.

Dentro del tubo que conforma el anteojo, entre el objetivo y el ocular, va montado un disco de vidrio denominado retículo con dos líneas gravadas, llamadas hilos, uno vertical y otro horizontal. Estos dos hilos forman lo que se denomina la cruz filar, y el punto de intersección de ambos hilos constituye el centro del retículo.

Figura 3.6. *Esquema de un anteojo astronómico.*

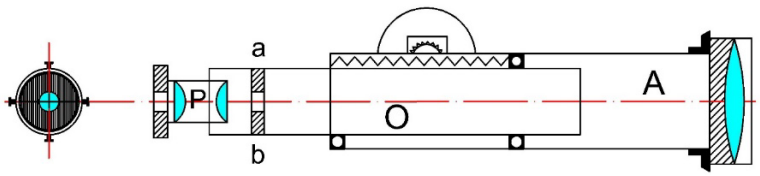


Los anteojos astronómicos pueden dividirse en dos categorías, los más antiguos con enfoque externo y los utilizados en los teodolitos más modernos y en estaciones totales con enfoque interno.

Anteojo de enfoque externo

Este tipo de anteojos formaban parte de los teodolitos más antiguos. En la figura 3.7 se encuentran los principales componentes de este tipo de anteojos.

Figura 3.7. *Izquierda: representación del retículo.*
Derecha: esquema de un anteojo de enfoque externo.



- Objetivo montado sobre tubo A.
- Tubo ocular O se desplaza dentro del tubo A. Lleva montado el retículo ab.
- Tubo porta-ocular P lleva montado el ocular y se desplaza dentro del tubo O.

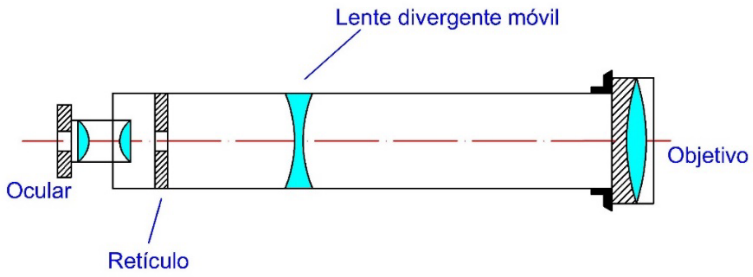
Para realizar la colimación de un punto u objeto de interés se realiza el siguiente procedimiento: Se desplaza el tubo porta-ocular P respecto al tubo ocular O hasta lograr ver el retículo

ab con toda claridad y sin esfuerzo. En esas condiciones, se desplaza el tubo O hasta que el retículo coincida exactamente con la imagen dada por el objetivo, operación que se llama enfocar el objeto. Esta primera imagen y la cruz filar (retículo) a ella superpuesta, vienen a constituir el objeto para la lente ocular, que dará la imagen definitiva, la que se obtiene de los dos hilos del retículo. Se llama colimar un punto hacer que su imagen se forme en el centro del retículo.

Anteojos de enfoque interno

Los anteojos de enfoque externo, como el antes descripto, son de gran utilidad para comprender los principios ópticos que intervienen en las operaciones de enfoque y colimación de un punto. Los anteojos con los que se construyen actualmente los instrumentos topográficos son de enfoque interno (figura 3.8). Este sistema permite eliminar el tubo ocular, cuyo movimiento causa desajustes en el anteojo.

Figura 3.8. *Esquema de un anteojo de enfoque interno.*



Como se muestra en la figura 3.8, el objetivo ocupa un extremo del tubo del anteojo y el retículo el otro, la distancia entre ellos no varía. El ocular se puede aproximar más o menos al retículo, para que la imagen de este último se logre clara y sin forzar la vista del operador. El enfoque se realiza mediante una lente divergente móvil en el interior del anteojo, cuya función es alejar o aproximar la imagen hasta superponerla al retículo.

La operación de enfoque para colimar un punto, en la práctica, no varía respecto a la realizada con un anteojo de enfoque externo. Se provoca primero la imagen clara del retículo desplazando el ocular. Luego se obtiene una imagen nítida del objeto desplazando un lente interno ubicado próximo al ocular. El movimiento del lente interno se logra mediante un tornillo lateral, o girando un anillo colocado sobre el tubo, dependiendo del tipo de teodolito.

Las ventajas que ofrecen los anteojos de enfoque interno consisten en presentar un cierre hermético en los dos extremos, tener una menor longitud y una mayor durabilidad (invariabilidad del eje de colimación al hacer puntería a diferentes distancias).

A modo didáctico es posible afirmar que, dentro de un anteojo de enfoque externo, durante el proceso de enfoque, el retículo es llevado hacia la imagen dada por el lente objetivo. Esto significa que el enfoque se hace cambiando la posición del retículo en relación con la imagen. En cambio, en un anteojo de enfoque interno, el enfoque se realiza moviendo la imagen hacia el retículo. En este caso, el retículo permanece fijo y la imagen se desplaza para superponerse con él.

Error de paralaje

Durante la colimación de un elemento del terreno, la imagen dada por el lente objetivo y el retículo deben estar en un mismo plano dentro del tubo del anteojo. Cuando esto no ocurre existe un error de paralaje. La ocurrencia o no de esto depende en gran medida de la experiencia del operador.

El control de la existencia de este error se realiza durante la colimación del punto. El operador debe desplazar su ojo levemente a derecha e izquierda, si la imagen del punto se desplaza con respecto a la del retículo es porque ambas no están en el mismo plano y existe un error de paralaje. Enfocar correctamente un punto u objeto implica la no existencia del error de paralaje.

En los teodolitos más modernos, que conforman las estaciones totales, en los últimos años se ha implementado la tecnología de autofoco o autoenfoque, que consiste en un enfoque automático realizado por servomotores que componen el anteojo. En estos instrumentos el error de paralaje se elimina automáticamente, aunque por el momento es un avance que está disponible en pocos equipos.

Colimación de puntos de interés

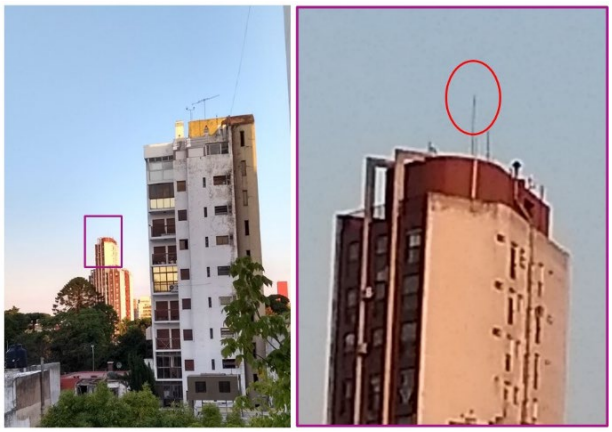
Para poder realizar mediciones angulares sobre algún punto del terreno, antes este debe ser colimado mediante el anteojo del instrumento. Cualquier error cometido en esta operación afectará a la medida realizada, por tal motivo debe realizarse con el mayor cuidado posible. Una de las principales causas de error es la de paralaje antes mencionado.

Se dan a continuación algunos casos de puntos colimados con un teodolito.

Caso 1: Colimación del extremo de un pararrayos.

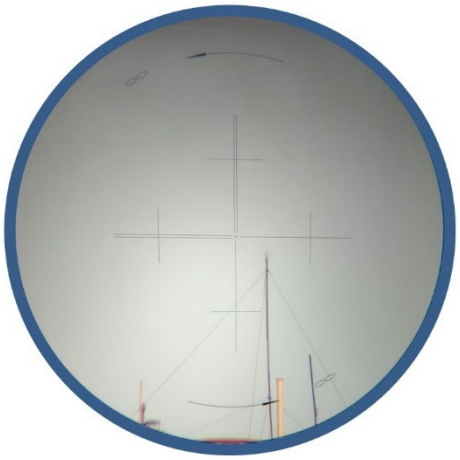
Se realiza la colimación (puntería) del extremo de un pararrayos ubicado a unos 300 m, sobre un edificio (figura 3.9). Para esta operación deben utilizarse los tornillos de freno y pequeños movimientos, tratados subsiguientemente.

Figura 3.9. *Pararrayos en extremo superior de un edificio (a simple vista)*



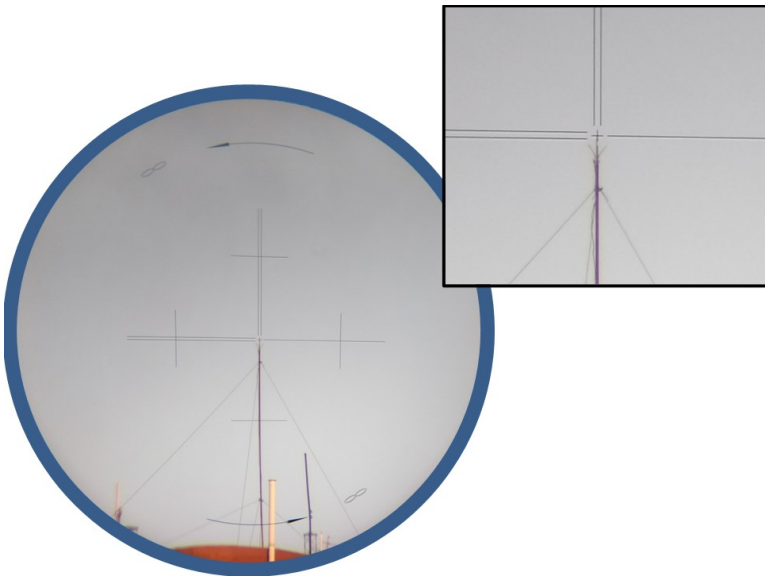
En la figura 3.10 el extremo del pararrayos ya está dentro del campo visual del anteojo, pero aún falta colimar el punto. Para hacer la colimación precisa se utilizan los tornillos de pequeños movimientos, que permiten desplazamientos precisos del anteojo.

Figura 3.10. *El extremo del pararrayos dentro del campo visual del anteojo, sin la colimación del punto*



En la siguiente imagen se puede ver el extremo del pararrayos (punto de interés) ya colimado. Como puede apreciarse, colimar el punto significa que la cruz filar (intersección de hilos vertical y horizontal), coinciden con el punto.

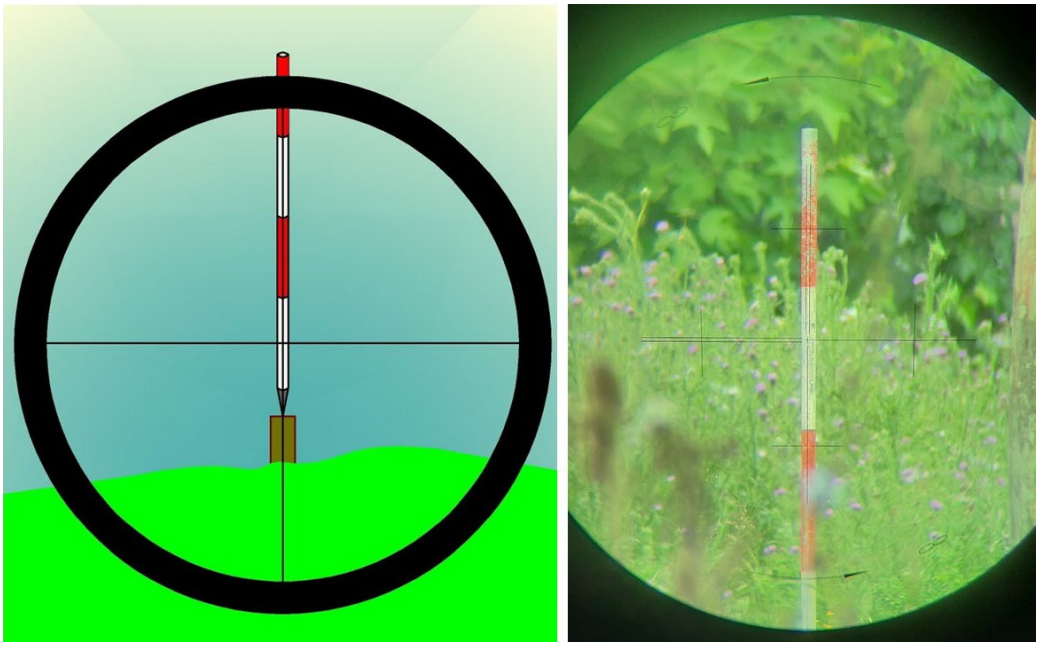
Figura 3.11. *El punto de interés colimado*



Caso 2: Bisección de un jalón.

Tanto los jalones como las fichas se coliman mediante una bisección. Con el hilo vertical del retículo se divide la imagen del objeto en dos partes iguales. En la figura 3.12 (derecha) la fotografía fue tomada a través del anteojo de un teodolito, y se muestra cómo se bisecta un jalón. En la parte izquierda de la misma figura se esquematiza la situación. Vale la pena mencionar en este apartado que, cada vez que sea posible, la bisección deberá realizarse lo más abajo posible, para reducir los efectos de la imperfecta verticalización del elemento.

Figura 3.12. *Bisección de un jalón. Izquierda: esquema. Derecha: fotografía*



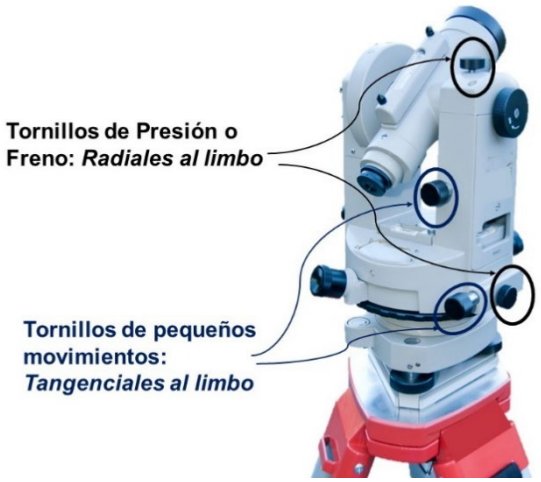
Tornillos de freno y de pequeños movimientos

Para realizar mediciones angulares, los teodolitos disponen de elementos móviles y de otros fijos. El giro de los elementos móviles respecto a los elementos fijos permite cuantificar los ángulos de interés, objeto de la medida. Para poder realizar estos giros y dirigir el eje de colimación del anteojo a los elementos de interés, es necesario controlar perfectamente estos giros. Para los dos giros del teodolito, uno horizontal y otro vertical, disponemos de tornillos de freno y de pequeños movimientos. Trabajar con estas dos clases de tornillos permite realizar la colimación precisa de los puntos de interés, controlando el giro de la alidada y el giro del anteojo.

Se inicia el proceso de colimación con todos los frenos liberados. Se busca el elemento con el anteojo hasta que aparece en su campo visual y entonces se aplican los frenos de la alidada y del anteojo. En el exterior del anteojo se encuentran marcas especiales que ayudan a realizar esta puntería aproximada. Luego trabajando con los tornillos de pequeños movimientos, uno para cada giro, se realiza la colimación precisa del punto. Se debe tener cuidado al trabajar con estos tornillos, deben manipularse con mucha precaución ya que se trata de elementos de precisión que pueden sufrir daños si se les imprime una presión excesiva.

Usualmente, para poder aplicar los pequeños movimientos debe estar previamente accionado el tornillo de freno. En la figura 3.13 se muestran estos tornillos en un teodolito óptico, donde los frenos se ubican de forma radial a los limbos, mientras que los tornillos de pequeños movimientos lo hacen de manera tangencial.

Figura 3.13. *Disposición de tornillos del freno y pequeños movimientos en un teodolito óptico.*



En los teodolitos electrónicos y en estaciones totales suele montarse el tornillo de freno y el de pequeños movimientos sobre el mismo eje, tanto para giros acimutales como verticales (figura 3.14).

Figura 3.14. *Teodolito electrónico. Tornillo de freno y pequeños movimientos montados en un solo eje.*



La ubicación de los tornillos de freno y pequeños movimientos puede cambiar en cada marca y modelo de instrumento. Al utilizar un teodolito (o estación total) por primera vez lo recomendable es tomarse un momento para reconocer el instrumento y localizar cada uno de estos tornillos.

Figura 3.15. *Tornillos de freno y de pequeños movimientos en un teodolito electrónico.*



En algunos de estos instrumentos se han retirado los tornillos de freno y remplazado por un sistema que trabaja por fricción, y solamente se cuenta con los tornillos de pequeños movimientos.

En algunos modelos de estaciones totales, tantos los tornillos de freno como los de pequeños movimientos, se han reemplazado por sistemas servoasistidos. Estos son sistemas de movimiento motorizado por inducción magnética, lo que proporciona un movimiento sin rozamiento, con bajo consumo y un control muy preciso.

Figura 3.16. *Estación total con sistema de fricción.*



Sistemas de lectura angular

Como se ha indicado, un teodolito es capaz de dirigir visuales mediante un anteojo a puntos de interés sobre el terreno, esas visuales deben ser proyectadas por el instrumento sobre un plano horizontal y sobre otro plano vertical. Las magnitudes angulares correspondientes a las visuales dirigidas por el anteojo se miden sobre los limbos vertical y acimutal mediante sistemas de lecturas especiales.

Limbos

Los teodolitos se fabrican con dos círculos graduados o limbos, montados en planos mutuamente perpendiculares. De acuerdo con el sistema de medida angular utilizado en un país, estas graduaciones pueden estar dadas en el sistema sexagesimal o en el centesimal, en Argentina se utiliza el sistema sexagesimal. Antes de comenzar a medir los ángulos, el instrumento se nivela de tal manera que el círculo horizontal se oriente en un plano horizontal, lo que simultáneamente coloca al círculo vertical en un plano vertical. De este modo pueden medirse ángulos acimutales y verticales directamente en sus respectivos planos de referencia.

En los teodolitos más antiguos estos limbos eran metálicos y la lectura se realizaba mediante nonios, posteriormente se sustituyeron por limbos de cristal con complejos sistemas ópticos más precisos. Actualmente, los teodolitos electrónicos y estaciones totales utilizan limbos codificados en los que la lectura es realizada por sensores especiales.

Una característica que indica la precisión de un teodolito es lo que se denomina apreciación de lectura, y se indica con la letra “a”. Se refiere a la menor división que puede leerse directamente mediante el sistema de lectura. Este concepto se aplica únicamente a los teodolitos mecánicos y ópticos, que tienen graduación numérica sobre sus limbos y cuyas medidas pueden ser leídas e interpretadas directamente por el usuario. En cambio, en los teodolitos electrónicos, con limbos codificados, la lectura es realizada por sistemas electrónicos que muestran directamente la medida sobre una pantalla (display). La precisión de los teodolitos electrónicos (y estaciones totales) se expresa mediante un valor de desviación estándar experimental obtenida de procedimientos de medición estandarizados, como por ejemplo la norma ISO 1713-3:2001.

Sistema de graduación en los limbos

Los teodolitos utilizados en Argentina tienen una graduación en los limbos con divisiones de 0° a 360° del tipo normal, es decir, creciendo de izquierda a derecha (sentido horario). Pero, en otros países pueden encontrarse sistemas de lectura graduación centesimal, divididos de 0^g a 400^g.

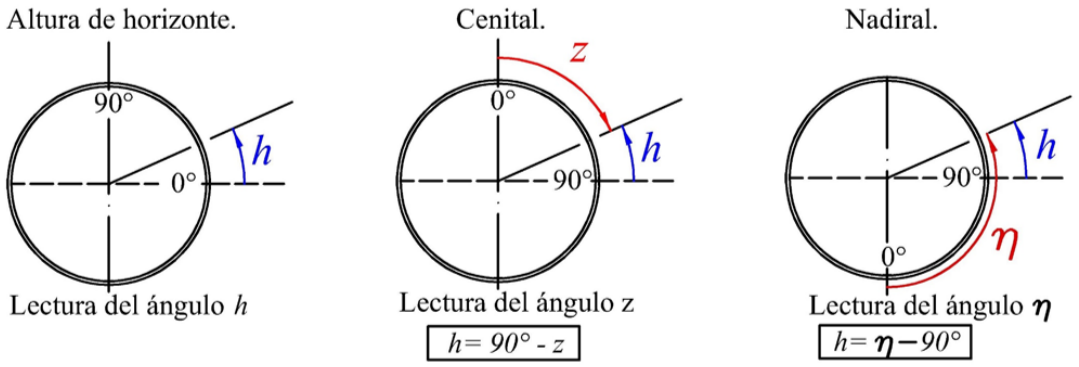
Las mediciones (o lecturas) realizadas en el limbo horizontal se denominan direcciones. Cuando se mide un ángulo horizontal, este se calcula haciendo la diferencia entre dos direcciones. En este tipo de mediciones sobre el limbo horizontal, la posición de la graduación cero (0º) es arbitraria, debido a que el ángulo se calcula mediante la diferencia de dos lecturas.

La situación es diferente para las terminaciones angulares del limbo vertical. En este caso, la ubicación del cero (0º) del limbo no es arbitraria, sino que se establece en correspondencia con la dirección del cenit, del nadir o de la horizontal del lugar. Una vez colocado el teodolito en estación, la lectura de 0º del limbo vertical corresponde a un punto específico que podrá ser el cenit, el nadir o el horizonte, según el tipo de limbo. Por lo tanto, dependiendo de la ubicación del 0º existen tres tipos de limbos verticales (figura 3.17):

- Limbos para ángulos de altura (h): los ángulos son medidos desde el horizonte.
- Limbos cenitales (z): Los ángulos son medidos desde el cenit.
- Limbos nadirales (η): Los ángulos se miden desde el nadir.

Por lo tanto, cuando se utiliza el limbo vertical, con una sola lectura ya se define el ángulo medido, ya que la posición del 0º es absoluta y vinculada a la dirección de la gravedad.

Figura 3.17. *Tipo de limbos verticales.*



Los sistemas de lectura utilizados en teodolitos han evolucionado a la par de los distintos avances tecnológicos, los primeros sistemas utilizaban sistemas de nonios, posteriormente se crearon los sistemas de lectura ópticos y actualmente se utilizan sistemas electrónicos.

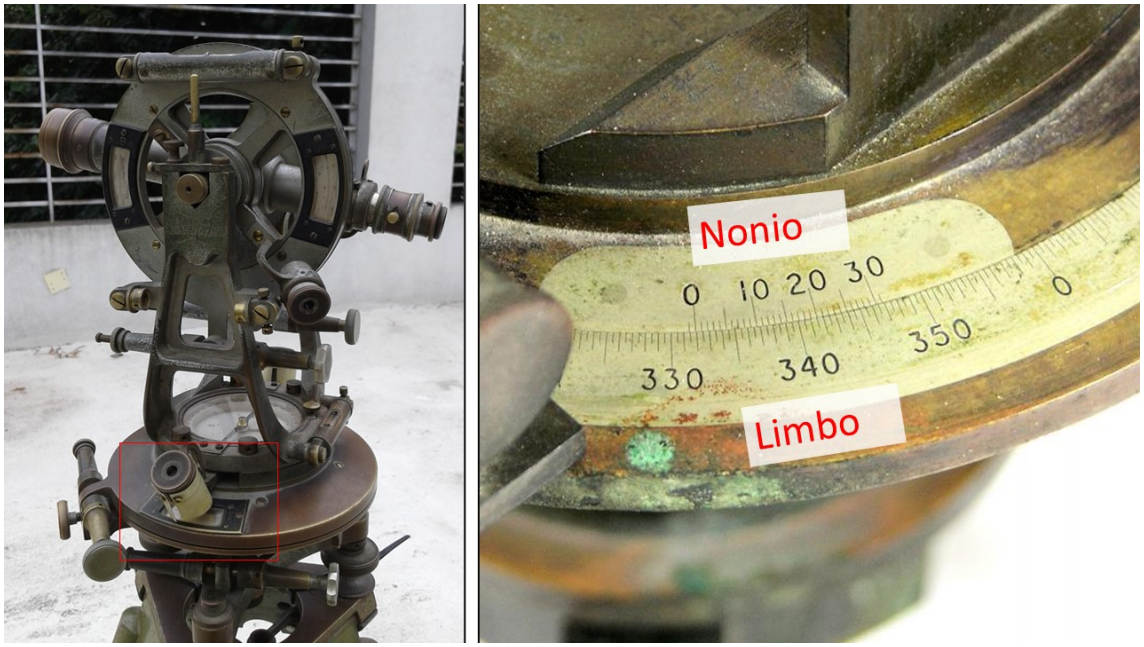
Sistemas de lectura a nonios

Los teodolitos mecánicos tenían limbos metálicos sobre los que podía leerse directamente, mejoraban la precisión del sistema de medición mediante nonios (figura 3.18). Los nonios tienen por objeto aumentar la aproximación en la lectura de los limbos. Para construirlos se toma un número n-1 de divisiones del limbo, y se dividen en n partes iguales, cada división del nonio resulta de este modo más pequeña que una del limbo. Este sistema de lectura dejó de utilizarse en teodolitos.

En la figura 3.18, parte derecha, se puede apreciar el nonio ubicado junto al limbo, a la división perteneciente al cero del nonio se la denomina índice.

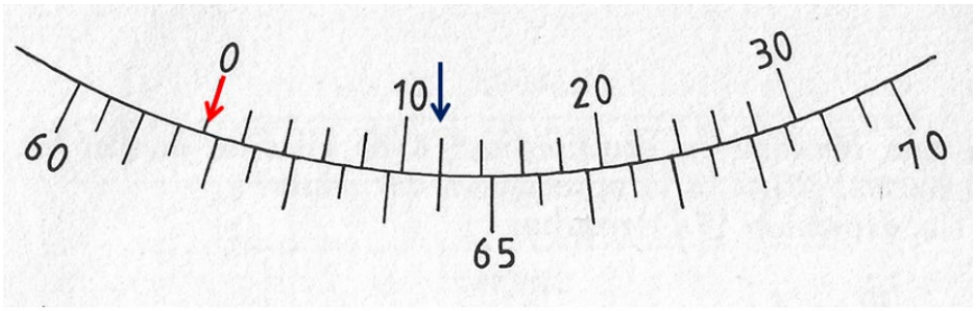
En la figura 3.19 se encuentra un ejemplo de cómo se realiza la lectura en estos sistemas. En ella se observa un sector del limbo entre las graduaciones 60° y 70°. La graduación del limbo es cada 30’ mientras que la del nonio es cada 2’. El índice del nonio se ubica entre las divisiones 61°30’ y 62°00’. Se realiza una primera lectura aproximada con el índice correspondiente a la división 61°30’ y se le suma la lectura fina correspondiente a la fracción de división. Para realizar la lectura fina hay que buscar la división del nonio que coincide perfectamente con una división del limbo, en este caso es la 12. La lectura completa es 61° 42’. La utilización del nonio permite realizar lecturas con una apreciación de 2 minutos en un limbo cuyas divisiones son cada 30 minutos.

Figura 3.18. *Sistemas de lectura a nonios.*



En algunos modelos de teodolitos se colocaban lupas para facilitar la lectura sobre los limbos y nonios, uno de estos modelos es mostrado en la figura 3.18 sector izquierdo.

Figura 3.19. *Lectura a nonius de un teodolito mecánico: 61º 42'.*



	Lectura Aproximada:	**61° 30'**
+	**Lectura Fina:**	**12'**
	Dirección angular:	**61° 42'**

Sistemas de lectura ópticos

A comienzos del siglo XX el Dr. Wild inicia la construcción de teodolitos que en su sistema de lectura incorporan limbos de cristal. Una serie de complejos mecanismos óptico-mecánicos permitían realizar lecturas muy precisas sobre estos limbos. Estos sistemas de lectura ópticos reemplazaron rápidamente a los sistemas de lectura a nonios, ya que fueron adoptados por el resto de los fabricantes de teodolitos.

Es mucha la variedad y elevada la complejidad de estos sistemas de lectura, suelen variar en cada modelo y fabricante de teodolitos. En las referencias al final de este capítulo el lector podrá encontrar los títulos en los que se puede profundizar en este tema. Pero dado que los teodolitos

con sistemas ópticos de lectura están prácticamente fuera de uso, en este apunte se realizará solamente una somera descripción del tema.

En los instrumentos con este sistema, los limbos se construyen de cristal y se encuentran protegidos dentro de la armadura del teodolito, las lecturas se realizan mediante sistemas ópticos complejos.

Los micrómetros que componen estos sistemas permiten elevar la aproximación en la lectura. La lectura de las mediciones angulares correspondiente se realiza mediante un anteojo microscopio ubicado junto al anteojo principal del teodolito.

En estos sistemas de lectura, se conduce la luz desde el exterior mediante espejos y prismas por circuitos ópticos, de este modo, tal como se aprecia en la figura 3.20, pueden realizarse las correspondientes lecturas acimutales y verticales en el mismo microscopio. Dicha figura corresponde al corte de un teodolito óptico de la firma Wild. En la parte derecha de la imagen, en trazo color amarillo, se aprecia el recorrido de un haz de luz a través del sistema óptico de lectura.

Existe una gran variedad de sistemas lectura ópticos, en esta sección, se muestran algunos ejemplos para ilustrar su funcionamiento. Estos sistemas ópticos han sido reemplazados por los electrónicos, por lo que solamente se realizará una rápida descripción de los mismos.

Figura 3.20. *Sistema de lectura óptico.*

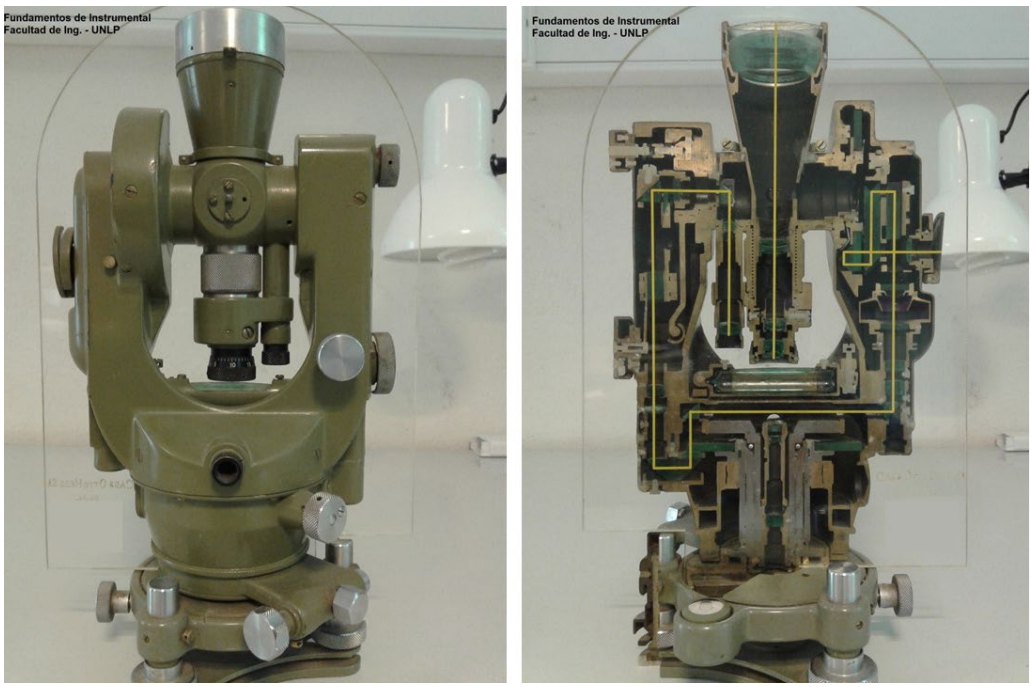
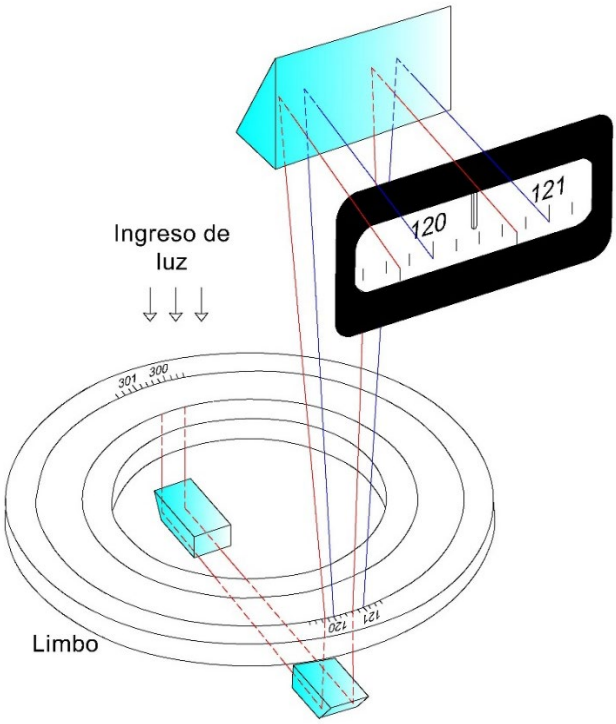


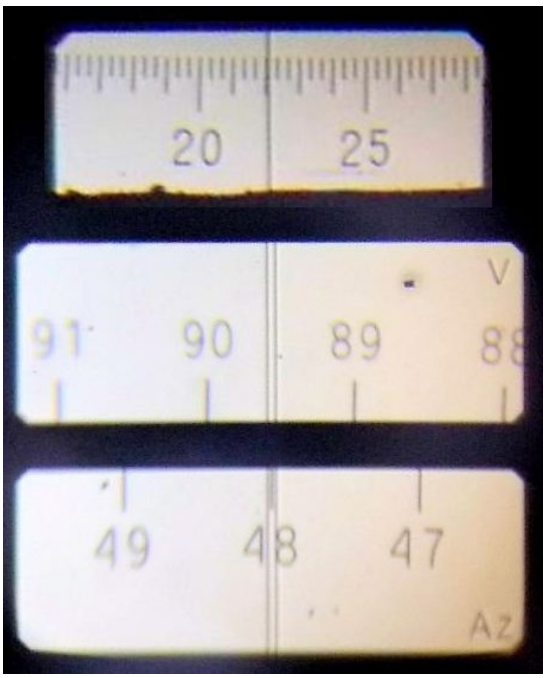
Figura 3.21. *Recorrido de un haz de luz a través del sistema óptico de lectura.*



A continuación, y a modo ilustrativo, se muestran distintos casos de lecturas en sistemas ópticos.

Caso 1: El primer caso se ilustra en las figuras 3.22 y 3.23, para mediciones de una dirección y un ángulo vertical respectivamente.

Figura 3.22. *Lectura de la dirección 48º 22' 00".*



En la figura 3.22 pueden verse tres ventanas, la inferior Az corresponde a las lecturas gruesas acimutales, la del centro V a las lecturas gruesas verticales y la ventana superior se utiliza en las

lecturas finas. Mediante un tornillo de coincidencia se desplazan a izquierda o derecha las imágenes de las ventanas para lecturas gruesas.

Para leer la dirección (figura 3.22), mediante el tornillo de coincidencia, se realizó el centrado del índice (línea doble) con la graduación de 48°, en la ventana superior se leen los minutos y segundos, en este caso 22’ 00”. Nótese que la graduación del limbo es cada un grado y la del sistema de lecturas finas cada 20 segundos; entre el minuto 20 y el 25 hay cuatro líneas más largas que indican los minutos 21, 22, 23 y 24 (sin numerar). Las divisiones más pequeñas corresponden a 20 segundos, ya que dividen al minuto en tres partes iguales.

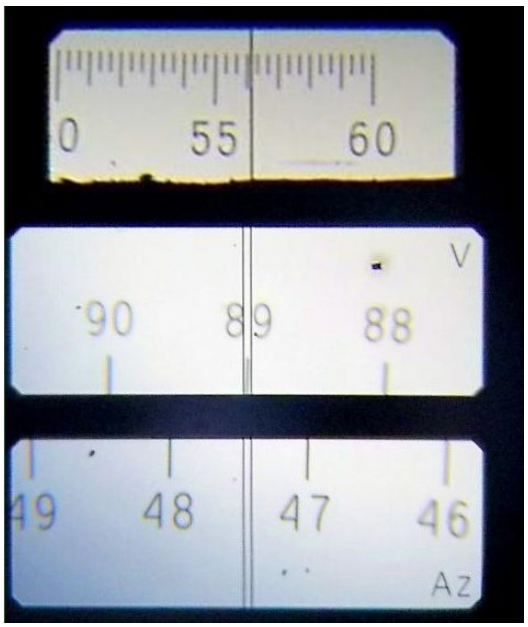
Lectura acimutal AZ (figura 3.22): Lectura gruesa 48º + Lectura fina 22’ 00”:

Medida= 48º 22’ 00”

Debe entenderse que para la ventana Az la única coincidencia posible es el 48°, si se quisiera hacer coincidencia con 49° o 47° los topes del sistema no lo permiten.

Si a continuación se necesita realizar la lectura vertical, con el mismo tornillo de coincidencia se busca centrar alguna de las divisiones de la ventana **V**. La coincidencia se realiza con la graduación de 89°. Luego, en la ventana superior se efectúa la lectura fina correspondiente a 56’ 05”.

Figura 3.23. *Lectura vertical 89º 56’ 05”.*



Lectura vertical V (figura 3.23): Lectura gruesa 89º + Lectura fina 56’ 05”:

Medida= 89º 56’ 05”

Solo es posible hacer coincidir el índice en una de las ventanas a la vez.

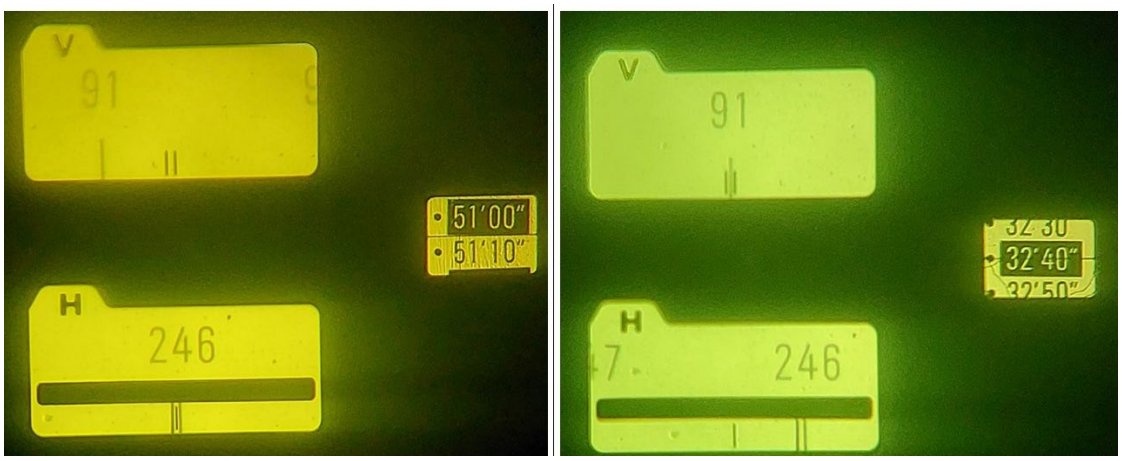
En el ejemplo visto, la apreciación de lectura es de 20”.

Caso 2: Un segundo caso que se analiza en la figura 3.24 corresponde a un teodolito de la empresa Topcon, con apreciación de lectura 10”.

En la parte izquierda de la figura 3.24 se muestra la lectura de una dirección correspondiente al limbo horizontal. La parte derecha de la misma figura muestra la lectura, para el mismo punto,

del ángulo vertical. En este sistema de lectura se tienen dos ventanas de mayor tamaño indicadas con las letras mayúsculas V (limbo vertical) y H (limbo horizontal), ambas son para las lecturas gruesas. Más pequeña y dispuesta en la parte central, se encuentra la vista del micrómetro que da la parte fina de la lectura. En la ventana de lectura gruesa pueden leerse los grados y en la ventana del micrómetro se leerán directamente los minutos y los segundos.

Figura 3.24. *Lecturas del Caso 2.*



Las lecturas finales y su composición para este caso son:

Lectura acimutal H (figura 3.24 izquierda): Lectura gruesa 246º + Lectura fina 51' 05":

Medida= 246º 51' 05"

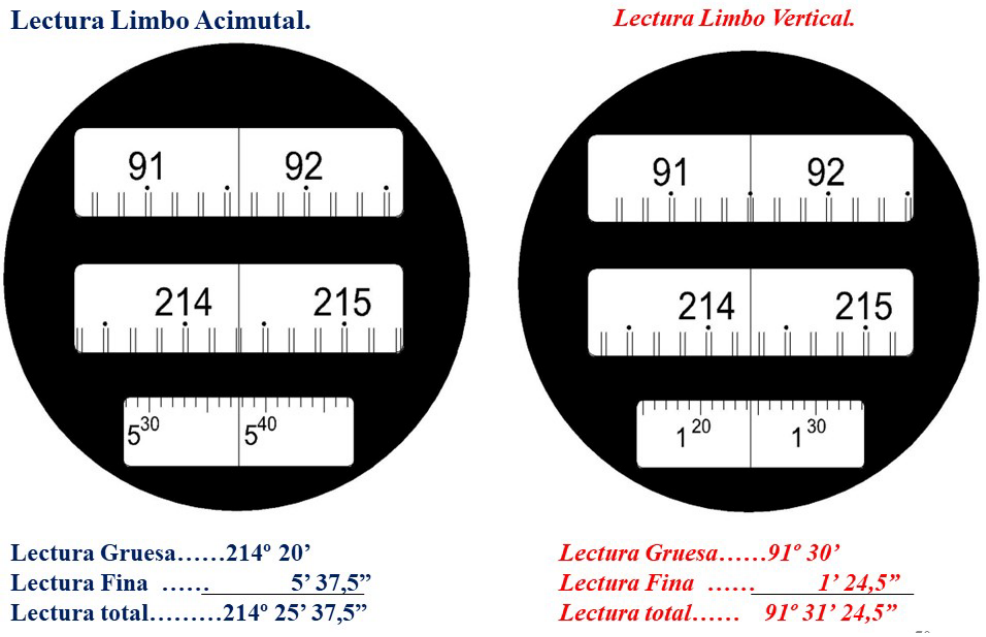
Lectura vertical V (figura 3.24 derecha): Lectura gruesa 91º + Lectura fina 32' 40":

Medida= 91º 32' 40"

Caso 3: El siguiente ejemplo de lectura pertenece a un teodolito óptico que corresponde a la firma Kern, modelo DKM2, con apreciación de lectura de 1", y se representa en la figura 3.25. En este caso, utilizando el sistema fino de lectura es posible leer directamente hasta 1" y luego estimar fracciones de esta magnitud. En el caso de la lectura del limbo acimutal (sector izquierdo de la figura 3.25) se hace una lectura gruesa en la ventana del medio de 214º 20" y la parte fina de la lectura se efectúa en la ventana inferior correspondiendo a 05' 37,5". La lectura completa de esa dirección es de 214º 25' 37,5"; este equipo permite realizar mediciones angulares de décima de segundo.

Un proceso equivalente se lleva a cabo para las mediciones del limbo vertical dada en el sector derecho de la figura 3.25. Mediante el mecanismo del teodolito se realizará la coincidencia correspondiente en la ventana superior, siendo en este ejemplo de 91º. Se consigue así la lectura gruesa de 91º 30' y luego se realiza la lectura fina de 01' 24,5" en la ventana inferior. Siendo la lectura completa para el ángulo vertical en este ejemplo de 91º 31' 24,5".

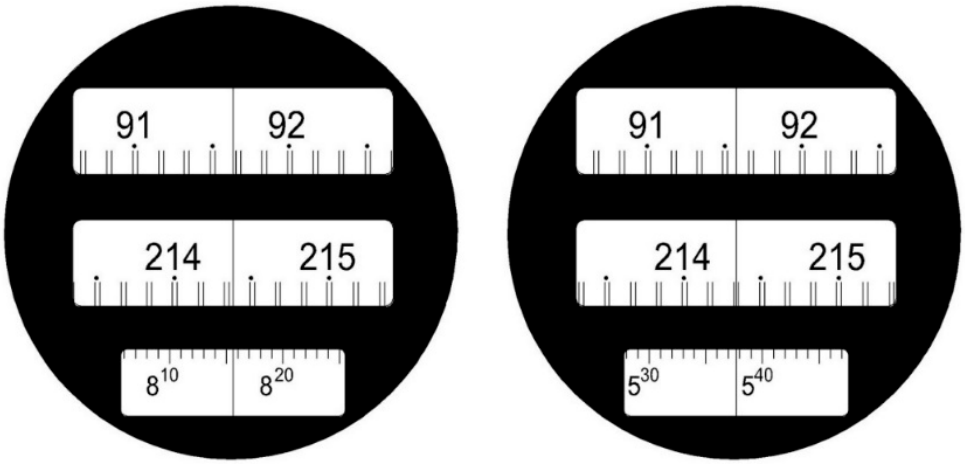
Figura 3.25. *Lecturas correspondientes al Caso 3.*



Micrómetro óptico de coincidencia. Principio de la placa de vidrio

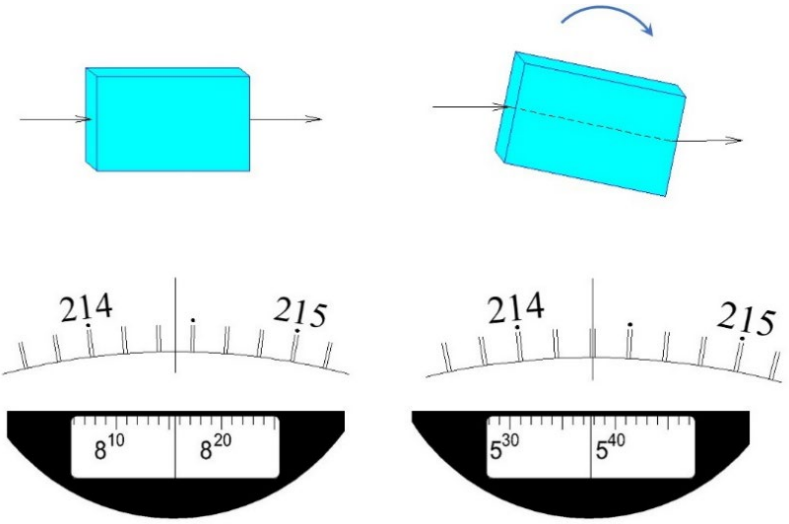
En los sistemas de lectura óptica existen diferentes técnicas y dispositivos para lograr la lectura precisa o fina. Se describirá de manera resumida uno de ellos, denominado principio de placas paralelas. Nuevamente se utiliza el ejemplo del caso 3.

Figura 3.26. *Lectura de una dirección con teodolito Kern DKM2.*



En la figura 3.26, a la izquierda se puede ver la imagen desde el sistema de lectura antes de hacer la coincidencia. A la derecha se aprecia la coincidencia ya realizada con el tornillo del microscopio, en esta instancia puede ser realizada la lectura del limbo acimutal: 214º 25' 37,5".

Figura 3.27. *Principio de la placa de vidrio.*



Antes de proseguir es necesario realizar la siguiente aclaración. Cuando es girado el tornillo de coincidencia y se aprecia el desplazamiento de las graduaciones a través del anteojo del micrómetro, no se está infligiendo ningún tipo de rotación a los limbos. Al girar el tornillo de coincidencia, se imprime un giro sobre una placa de vidrio móvil (figura 3.27). La imagen que llega al microscopio atraviesa dicha placa, por lo que cuando es girada, por efecto de refracción genera un desplazamiento de la imagen dada por el sistema óptico. La magnitud del giro aplicado sobre esta placa es registrada por un sistema óptico-mecánico y se representa en la lectura fina del instrumento.

Para realizar una lectura, antes debe girarse el tornillo de coincidencia, entonces la placa es girada hasta que la imagen de una división del limbo coincide con la marca de referencia (índice); en la figura 3.27 se indica que la coincidencia se realiza con la graduación de 214º 20'. La cantidad de giro impresa a la placa de vidrio para llevar la imagen del limbo desde una posición intermedia hasta una de coincidencia es medida por el sistema de lectura y expresada como un valor angular. De ese modo es posible medir fracciones menores a una división del limbo.

En esta clase de dispositivos, la desviación máxima del micrómetro corresponde a una división del limbo, por lo que únicamente se conseguirá la coincidencia en una posición, indicando el tope del tornillo de coincidencia el sentido en que ha de hacerse el giro. La lectura proporciona el desplazamiento desde la posición cero de desviación nula.

Sistema de lectura electrónico

Como se ha señalado, en el pasado, se usaban sistemas mecánicos para lecturas que incluían dispositivos denominados nonios. Con el tiempo, estos sistemas mecánicos fueron reemplazados por sistemas ópticos, que ofrecían una mayor precisión y facilidad de lectura. Posteriormente, los sistemas ópticos también fueron sustituidos por sistemas electrónicos. Estos últimos representan un avance tecnológico que proporciona aún más precisión, velocidad y comodidad en las lecturas.

Los teodolitos actuales utilizan sistemas de lectura electrónicos, la lectura es realizada por sensores electrónicos sobre limbos codificados, las lecturas de ambos limbos se muestran directamente sobre la pantalla del instrumento. Un sistema angular de lectura electrónico consta de limbos codificados y de sensores. Estos sensores se disponen de a pares, en sectores diametralmente opuestos del limbo.

Figura 3.28. *Teodolito con sistema de lectura electrónico.*



En la figura 3.28 se muestra un ejemplo de lectura en este tipo de sistemas. Lectura vertical V: 87º 59’ 11”. Lectura acimutal H: 168º 17’ 07”.

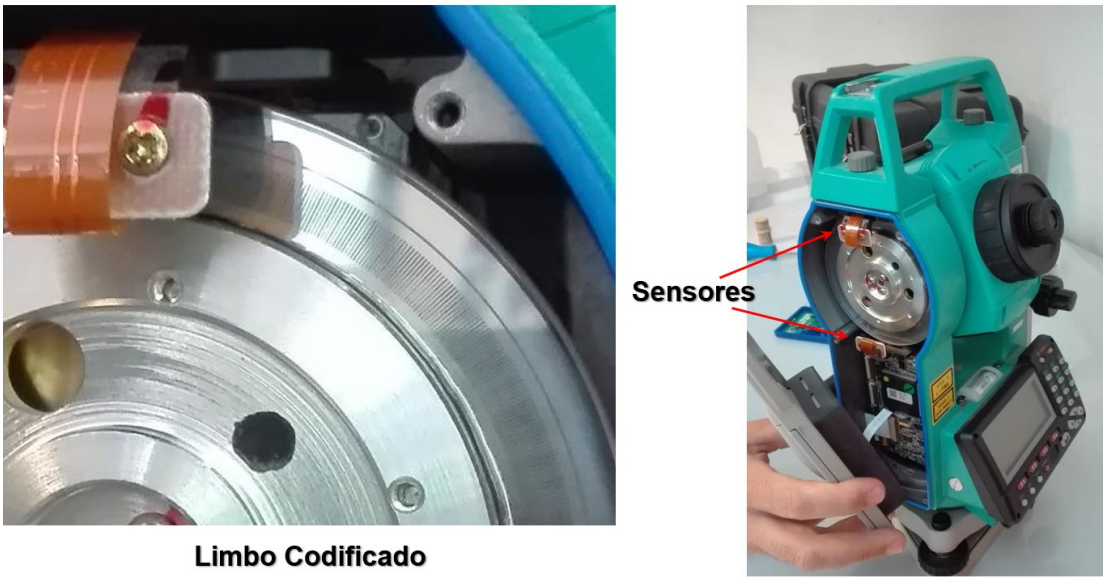
Existen dos tipos de sistemas de lectura electrónico para mediciones angulares, “codificadores incrementales” y “codificadores absolutos” (Chueca Pazos, 1996).

Los sistemas incrementales, tal como su nombre lo indica, miden solamente incrementos angulares, pero no toman una referencia fija. Estos sistemas pueden medir los giros experimentados por el teodolito en ambos limbos respecto a un origen arbitrario. En estos sistemas, cuando se enciende el instrumento se fija un valor cero angular aleatorio, y se miden los ángulos respecto a esa referencia, pero se reinicia cuando el teodolito se apaga y enciende nuevamente. Para el limbo vertical, donde la posición del cero no puede ser arbitraria, estos sistemas cuentan con referencias especiales, al encender el teodolito deberá girarse el anteojo hasta que el sistema de lectura detecte la posición del cero. Muchos teodolitos electrónicos autónomos, no los que conforman estaciones totales, cuentan con el sistema incremental.

Los codificadores absolutos disponen de una codificación que permite definir una posición de referencia absoluta (figura 3.29). En estos sistemas de medición angular puede fijarse una posición como cero de las lecturas, en ambos limbos. Estos sistemas son más convenientes debido a que no se pierde la referencia tomada como origen (0º) si se interrumpe la alimentación del teodolito y debe cambiarse la batería. Las estaciones totales adoptaron este tipo de sistema de

lectura, permitiendo apagar el equipo y luego al encenderlo conservar la orientación, esto posibilita una mayor agilidad de trabajo y mantenimiento de la carga de las baterías.

Figura 3.29. *Limbo codificado de una estación total.*



Error de excentricidad

El eje de giro de la alidada (Eje Principal VV') debe pasar por el centro del círculo del limbo horizontal, de no ocurrir esto existe un error de excentricidad de la alidada. Este error se minimiza realizando una doble lectura en los extremos diametralmente opuestos del limbo.

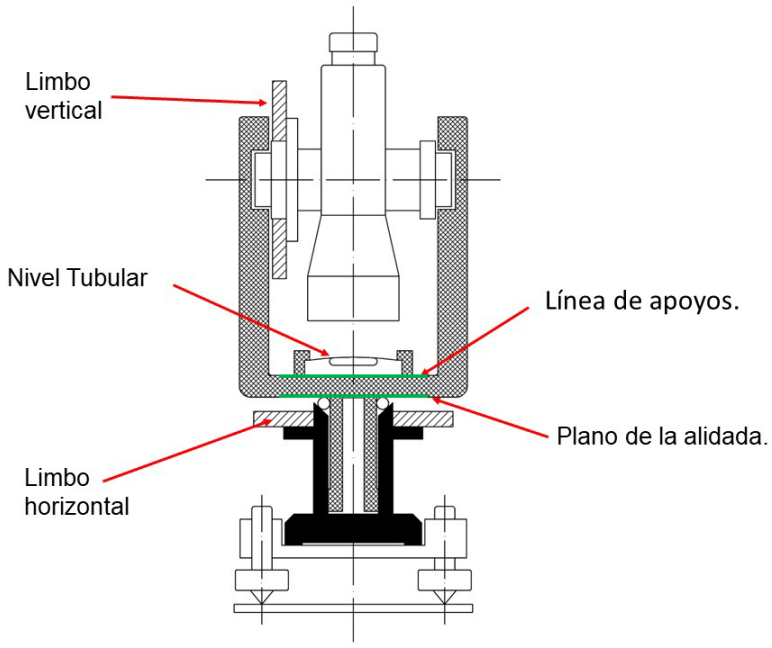
En teodolitos mecánicos con sistema de lectura a nonios se realizaban dos lecturas por cada medida individual. En modelos de teodolitos posteriores esto se resolvió mediante procedimientos ópticos o electrónicos según el tipo de teodolito, pero en general se apela a una lectura doble, en los extremos diametralmente opuesto de los limbos.

La alidada

La alidada es la parte superior de un teodolito que pude girar respecto a la parte inferior fija. En la alidada está el sistema de lectura y en la parte inferior está el limbo acimutal, como la alidada gira respecto al limbo las lecturas serán distintas para cada dirección.

Por construcción, el plano de la alidada es paralelo al limbo acimutal, por lo tanto, si se dispone de forma horizontal al plano de la alidada también será horizontal dicho limbo. Esta situación se ilustra en la figura 3.30.

Figura 3.30. *Corte esquemático de un teodolito.*



En la figura 3.31 se indica, en un teodolito electrónico, la parte superior que compone el conjunto denominado alidada.

Figura 3.31. *Alidada en un teodolito electrónico.*



Niveles de aire

Para poder medir los ángulos que interesan a la topografía, un teodolito debe cumplir con ciertas condiciones que pueden ser divididas en de dos grandes grupos:

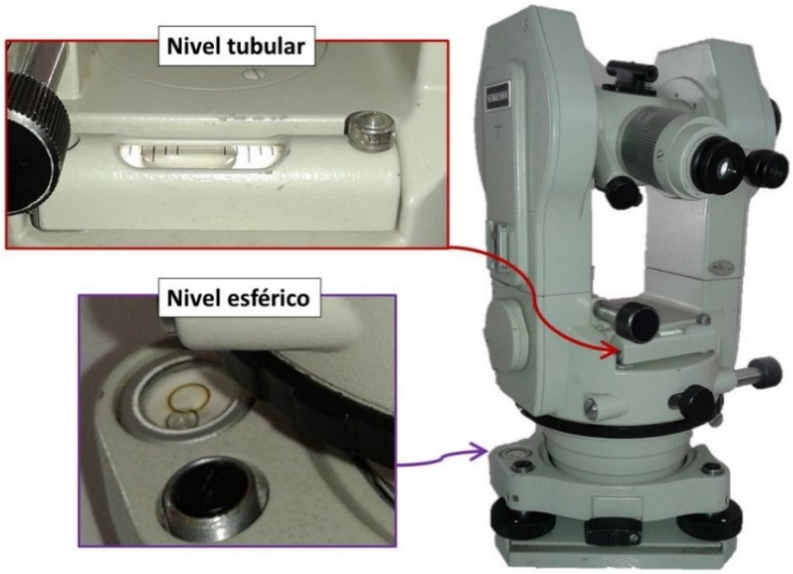
1. Condiciones instrumentales: Determinan la posición relativa de los diferentes elementos constitutivos del teodolito.
2. Condiciones de operación: La principal de ellas requiere verticalizar el eje principal.

Los elementos que permiten verticalizar el eje principal son los niveles de aire o de burbuja (figura 3.32). En los teodolitos clásicos se hallan dos tipos de niveles:

- el nivel tórico o tubular y
- el nivel esférico.

En muchos teodolitos modernos (estaciones totales) el nivel tubular ha sido reemplazado parcial o totalmente por compensadores electrónicos que automáticamente corrigen la falta de verticalidad del eje principal, luego de realizar un calado aproximado.

Figura 3.32. *Niveles de aire del teodolito. Nivel tubular y nivel esférico.*



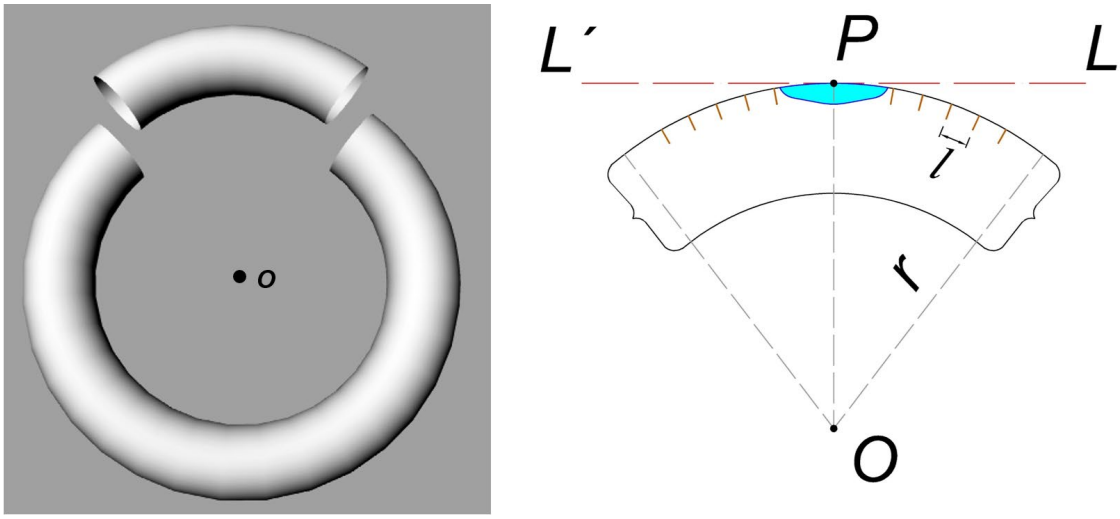
Niveles tubulares

El nivel tubular consiste en un tubo de vidrio de tórica casi lleno de un líquido de baja viscosidad (como alcohol o éter). Dentro del tubo queda una burbuja de aire que siempre se posiciona en la parte más alta del mismo. En la parte izquierda de la figura 3.33 se muestra la imagen de un toroide y el sector que correspondería a un nivel tubular, es a modo ilustrativo, los radios de los niveles tubulares son tan grandes que la curvatura prácticamente no se aprecia a simple vista. En la parte derecha de la figura 3.33 está la esquematización de un nivel tubular, donde la recta LL´ es su eje. En la figura 3.34 se ha dibujado el eje LL´ sobre la fotografía de un nivel tubular.

Se denomina eje del nivel tubular (LL´) a la recta tangente a la superficie del nivel, en el punto central “P” de su escala (figura 3.33). Cuando la burbuja está centrada se dice que el nivel está calado. El eje del nivel (LL’), ocupará la posición horizontal cuando la burbuja esté centrada (Nivel calado).

Para comprobar la posición de la burbuja sobre el nivel se trazan líneas cada 2 mm. En niveles muy antiguos esta separación era de 2,256 mm (una línea de París). En las figuras 3.32. 3.33 y 3.34 muestran este tipo de trazos en niveles tubulares.

Figura 3.33. *Nivel tubular.*



El parámetro que define la calidad de un nivel tubular es su sensibilidad, es decir el pequeño ángulo que debe variarse la inclinación de los apoyos del nivel para que la burbuja se desplace una división entera. A su vez, la sensibilidad de un nivel depende del radio de curvatura (r) del toroide.

$$s" = \frac{l}{r} . 206265"$$

$$s" = \frac{2}{r[mm]} . 206265"$$

s": Sensibilidad de un nivel tubular:

l: separación entre divisiones (figura 3.33).

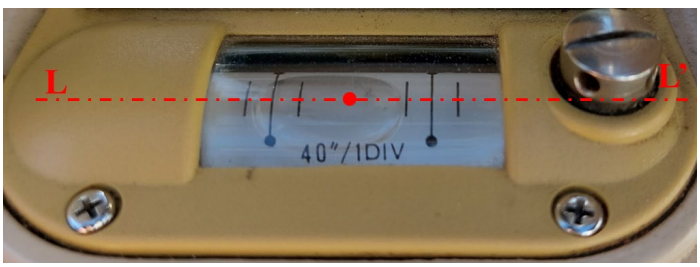
r: radio de curvatura.

En la figura 3.34 puede encontrarse un nivel con una sensibilidad de 40". Cada división es de 2 mm, por lo tanto, se puede calcular el radio del toroide utilizado:

$$r = 2\ mm\ .\ \frac{206265}{40} = 10313{,}25\ mm$$

El radio de curvatura (r) de ese nivel tubular es del orden de los 10 m.

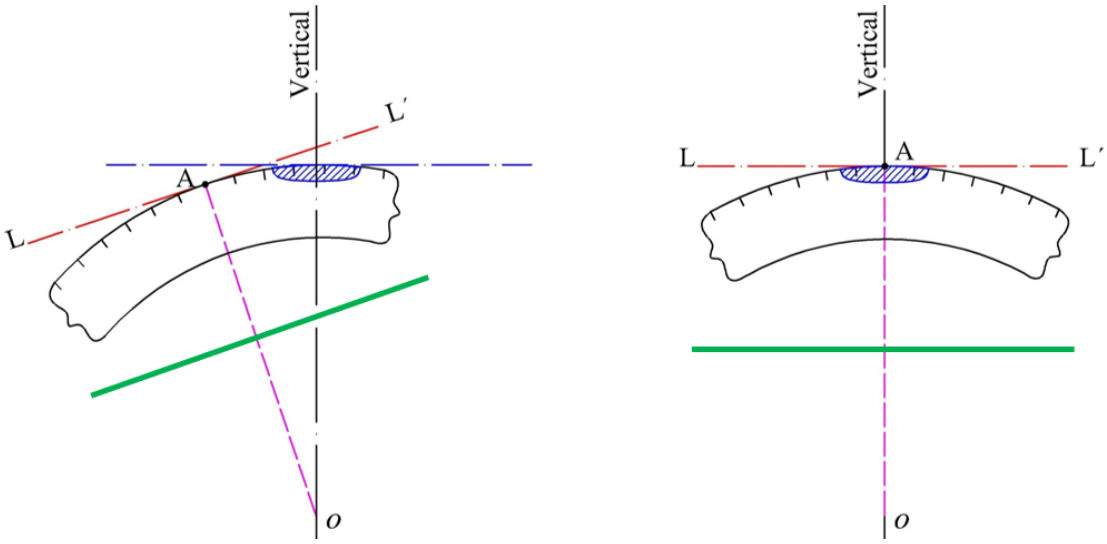
Figura 3.34. *Eje (LL´) de un nivel tubular.*



El nivel tubular de la alidada es fundamental durante la verticalización del eje principal del teodolito, dependiendo de la precisión del instrumento pueden encontrarse niveles tubulares con distinta sensibilidad.

El eje (LL´) del nivel toma la posición horizontal cuando la burbuja está centrada. En la figura 3.35, la línea dada por los apoyos del nivel se indica en color verde. En cualquier nivel tubular la línea de los apoyos debe ser paralela al eje del nivel. De este modo, al centrar la burbuja será horizontal el eje (LL´) del nivel y por lo tanto quedará en posición horizontal la línea de los apoyos.

Figura 3.35. *Calado de la burbuja de un nivel tubular.*



Niveles esféricos

Estos niveles se componen de una caja metálica cilíndrica, fijada a la alidada del teodolito con tres tornillos de corrección. Esta caja se llena con un líquido de baja viscosidad, dejando una burbuja en su interior (ver figura 3.36). Se cubre con una tapa de vidrio de forma esférica. Cuanto mayor sea el radio interior del vidrio, mayor será la sensibilidad del nivel. La sensibilidad de estos niveles suele estar entre los 2’ y 5’, menor a la de los del tipo tubular.

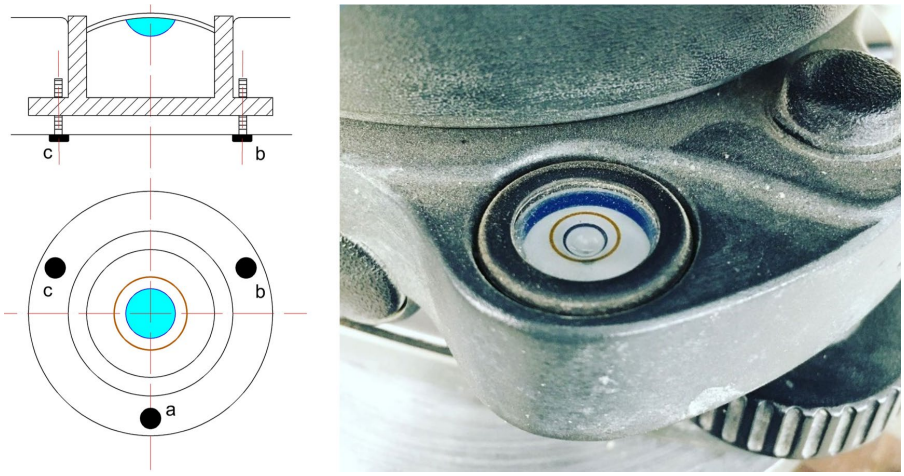
Los niveles esféricos no solo se emplean en teodolitos, sino que forman parte de la mayoría de los instrumentos topográficos, pudiéndoseles encontrar en niveles de anteojo, estaciones totales de todo tipo, bases nivelantes para equipos GNSS.

En el centro de la tapa de vidrio que cierra al nivel esférico se grava una o más circunferencias concéntricas. Al centrar la burbuja se establece la horizontalidad sobre el plano tangente al centro de los círculos, y también la base del nivel.

En un teodolito, centrando la burbuja del nivel esférico se logra una primera aproximación a la horizontalidad de la alidada. Esta operación se realiza regulando la longitud de las patas del trípode.

Este tipo de niveles, también llamados “ojo de buey”.

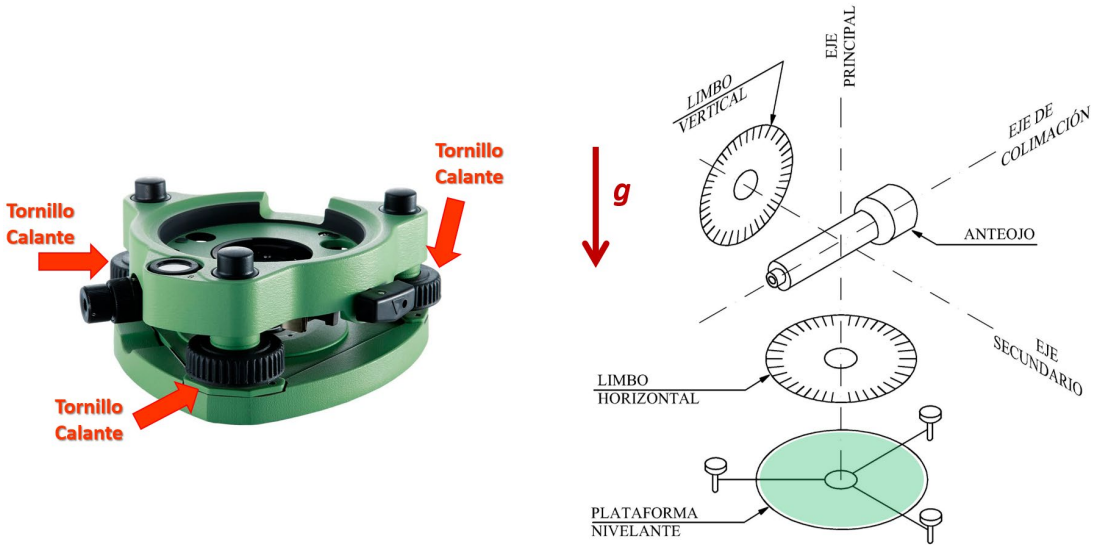
Figura 3.36. *Nivel esférico, los tornillos a, b y c permiten su montaje y ajuste en el teodolito.*



Base nivelante

Los teodolitos cuentan con una plataforma nivelante formada por tres brazos, cada uno atravesado en sus extremos por un tornillo (ver figura 3.37). Estos tornillos, denominados 'calantes', constituyen los tres puntos de apoyo del instrumento sobre la platina (o meseta) del trípode. Al ajustar los tornillos calantes, se puede modificar la longitud que sobresale debajo de cada brazo. Este mecanismo permite inclinar el eje del instrumento con precisión, ajustando su posición mediante movimientos suaves y exactos (Domínguez García-Tejero, 2002).

Figura 3.37. *Base nivelante y tornillos calantes.*



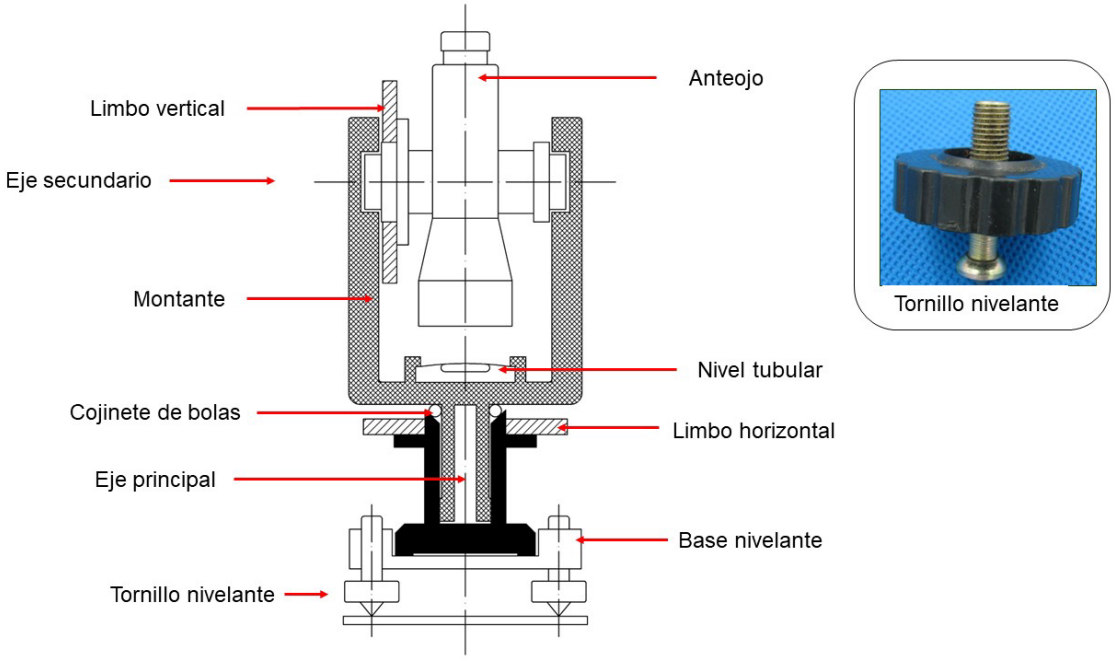
El recorrido de los tornillos calantes no es ilimitado, tienen un alcance restringido, por ello previo a utilizar estos tornillos debe calarse el nivel esférico trabajando con las patas del trípode.

Este tipo de elemento es utilizado en todo tipo de instrumentos topográficos como niveles de anteojo, receptores GNSS, equipos LiDAR, entre otros. Se la denomina también bases Tribrach.

Los tornillos calantes se ubican según los vértices de un triángulo equilátero, distribuidos cada 120º, y permiten inclinar el eje principal en cualquier dirección dentro de cierto rango.

En la figura 3.38, en un esquema de corte de un teodolito se aprecia la ubicación de los tornillos calantes.

Figura 3.38. *Ubicación y detalle de los tornillos calantes.*



Montaje del nivel tubular en la alidada

El nivel tubular se monta de tal modo que la línea de sus apoyos forma parte del plano de la alidada. Por ello, al centrar la burbuja se hace horizontal el eje del nivel tubular y a su vez una recta del plano de la alidada.

Figura 3.39. *Nivel tubular antes de ser fijado a la alidada.*



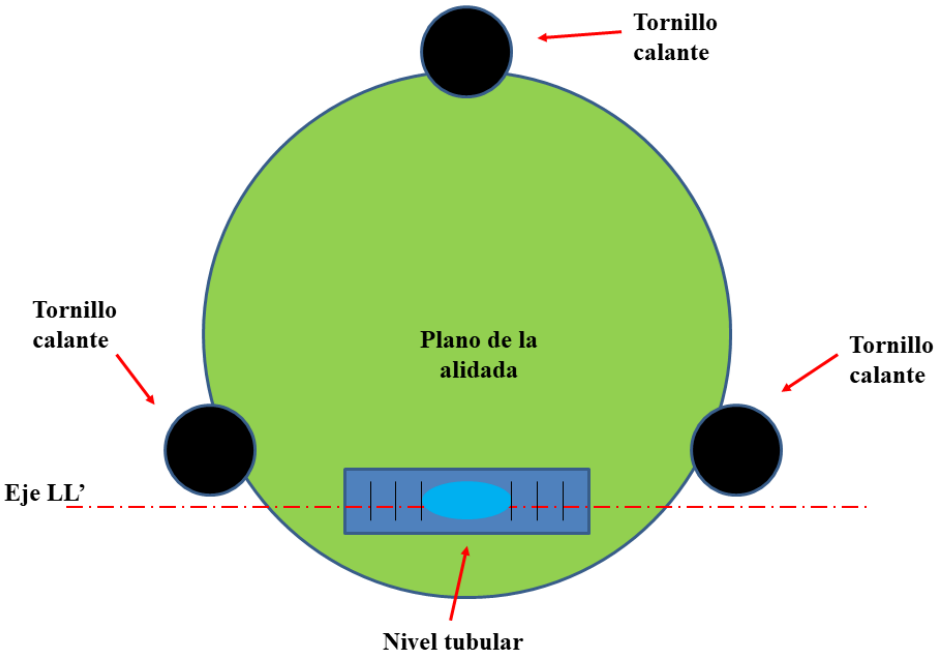
El nivel tubular se construye a partir de una ampolla de vidrio, dentro de la cual está el líquido con la burbuja ya indicado. Esta ampolla de vidrio se fija, mediante una masilla, dentro de una caja de metálica o plástica. El conjunto de la caja y la ampolla se ajustan a la estructura de la

alidada mediante una unión con un tornillo (figura 3.39). Este tipo de unión permite regular la posición del nivel mediante el ajuste del tornillo, para poder ajustar el nivel en su posición ideal. Si la posición del nivel se fuera a descorregir en el futuro, por el uso constante u otra razón, podrá ajustarse nuevamente con este tornillo.

Trabajando conjuntamente con el nivel tubular y los tornillos calantes del teodolito es posible horizontalizar dos rectas del plano de la alidada, que no sean paralelas, con ello se logra hacer horizontal el plano de la alidada y por consiguiente verticalizar el eje principal del instrumento.

En la figura 3.40 se muestra de forma esquemática la ubicación del nivel tubular y los tres tornillos calantes.

Figura 3.40. *Esquema de un nivel tubular montado a la alidada.*

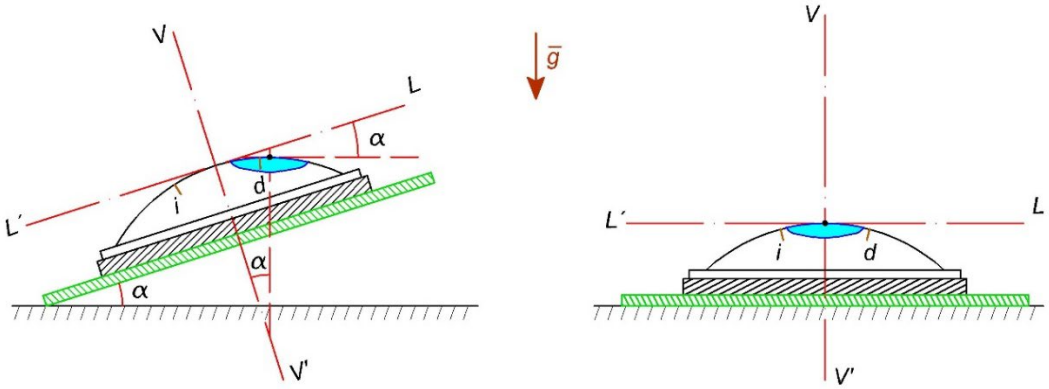


Nivel tubular descorregido

Se dice que un nivel tubular está corregido si su eje LL' es paralelo a la línea de los apoyos. Si se cumple esta condición, cuando es centrada la burbuja, la línea de los apoyos queda en posición horizontal. Esta situación se expone en la figura 3.41.

Para horizontalizar un plano basta con provocar la horizontalidad de dos rectas de ese plano que no sean paralelas entre sí; idealmente se opta por dos rectas perpendiculares. Por lo tanto, centrando la burbuja del nivel tubular en dos posiciones perpendiculares entre sí, se logra horizontalizar el plano de la alidada y por consiguiente verticalizar el eje principal VV' del teodolito.

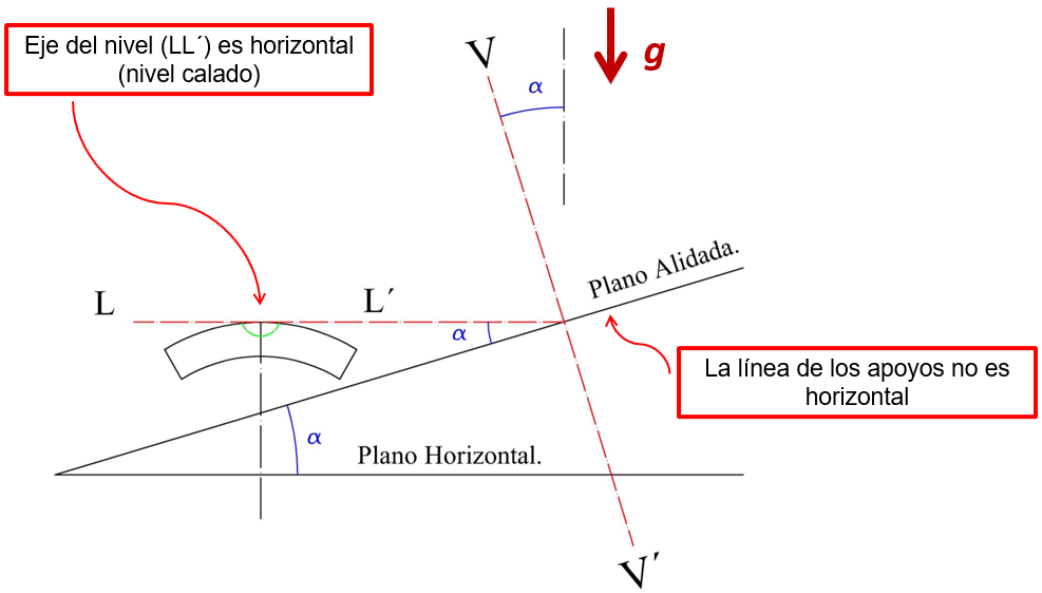
Figura 3.41. *Calado del nivel tubular de la alidada.*



A partir de la figura 3.41 es posible explicar cómo se opera con un nivel corregido. La línea de los apoyos del nivel se indica en color verde, esta línea forma con un plano horizontal un ángulo α, este mismo ángulo lo formará el eje principal del teodolito VV' con la dirección de la vertical. También se pude encontrar el mismo ángulo α entre el eje del nivel LL' y la recta tangente al centro de la burbuja. Dando por sentado que el nivel tubular está corregido, se accionan los tornillos calantes hasta centrar la burbuja, para ello la línea de los apoyos varió su inclinación un ángulo α. Como se ve en la figura 3.41, al centrar la burbuja, se ha logrado la horizontalidad del eje del nivel LL', así como la verticalidad del eje principal del teodolito VV'.

Para el centrado de la burbuja se toman como referencia las líneas marcadas sobre la cara del nivel, indicadas con las letras i y d en la figura 3.41.

Figura 3.42. *Esquema de un nivel tubular descorregido.*



Pero suele suceder con mucha frecuencia que el nivel tubular de la alidada no esté corregido, lo que significa que al centrar la burbuja se logrará efectivamente la horizontalidad del eje del nivel LL', pero no quedará horizontal la línea de apoyos del nivel. En esas condiciones el calado del teodolito requiere un trabajo adicional.

Entonces, un nivel tubular está descorregido cuando su eje LL' no es paralelo a la línea de sus apoyos. Este tipo de descorrección suele suceder por ser sometido el equipo a fuertes vibraciones, golpes, variaciones abruptas de temperaturas, entre otras causas.

La situación de un nivel de alidada descorregido se puede apreciar en la figura 3.42. Se observa como el eje del nivel LL´ no es paralelo a la línea definida por los apoyos. Por ello, al centrar la burbuja no se logra horizontalizar la línea de los apoyos.

Para comprobar el estado de un nivel tubular debe centrarse la burbuja y luego invertir la línea de los apoyos 180°, si luego del giro la burbuja permanece centrada puede concluirse que el nivel está corregido. Pero, si tras invertir los apoyos la burbuja deja de estar centrada, entonces el nivel está descorregido.

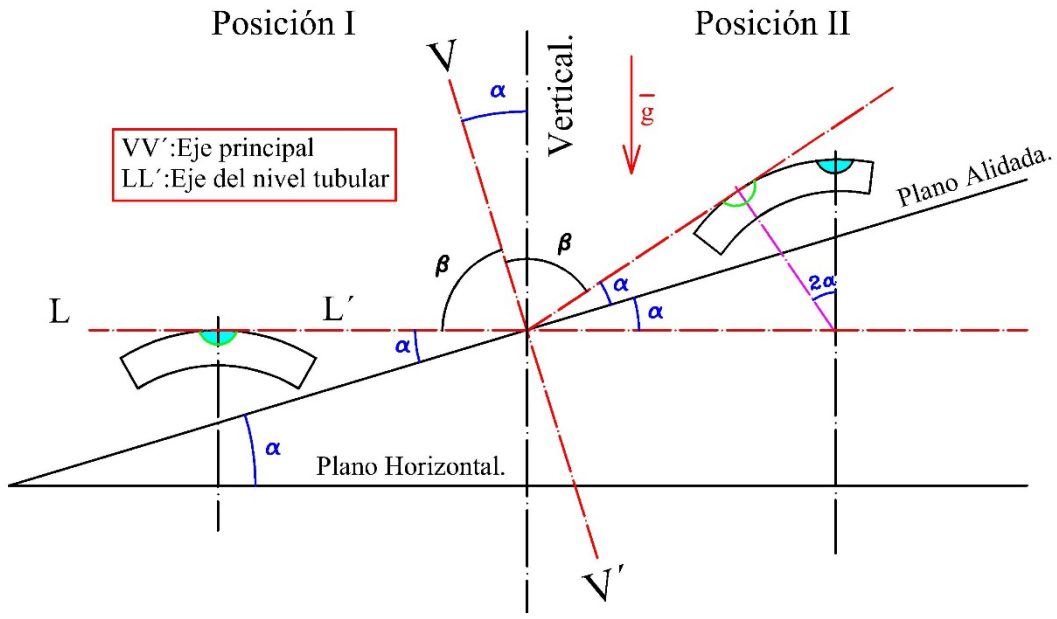
Para poder trabajar con un nivel descorregido debe de aplicarse el siguiente principio.

Principio Fundamental del nivel

Si se apoya un nivel tubular sobre una recta y luego se invierten sus apoyos, el desplazamiento (arco circular) que experimenta la burbuja equivale al doble del ángulo que dicha recta de apoyo forma con la horizontal.

En un teodolito, la inversión de los apoyos del nivel tubular se realiza girando 180° la alidada, en ese caso, el desplazamiento que experimenta la burbuja será el doble del ángulo de descorrección de ese nivel.

Figura 3.43. *Principio fundamental del nivel tubular.*



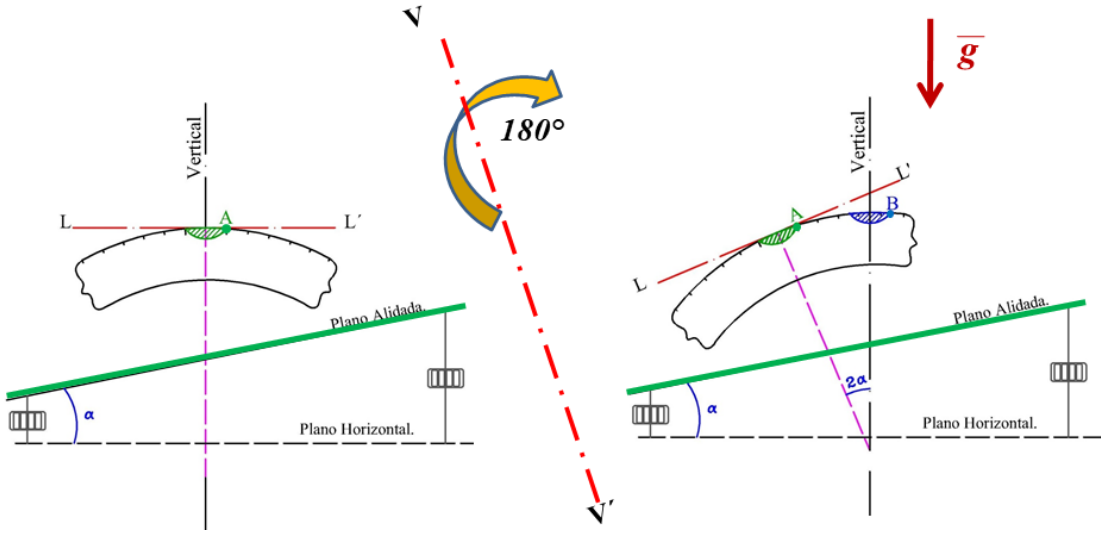
En la figura 3.43 se demuestra cómo al centrar la burbuja (lado izquierdo de la imagen) la línea de los apoyos forma un ángulo (α) con la referencia horizontal, ese mismo ángulo (α) lo forma el eje principal VV' con la dirección de la vertical. Luego, si se gira la alidada 180°, lo que equivale

a invertir la línea de los apoyos del nivel, la burbuja ocupa la posición 2 que no es la correspondiente al centrado. El recorrido realizado por la burbuja desde la posición 1 a la posición 2 equivale a un ángulo de valor 2α. Puede verse en la figura como en ambos casos la burbuja (posición 1 centrada y posición 2 descentrada) ocupa siempre la parte más alta del tubo del nivel.

Dado que la cara del nivel tiene grabadas divisiones cada 2 mm y el extremo de la burbuja es mucho más fácil de apreciar que el centro, en la práctica, la aplicación del Principio Fundamental del nivel se aplica siguiendo el siguiente procedimiento:

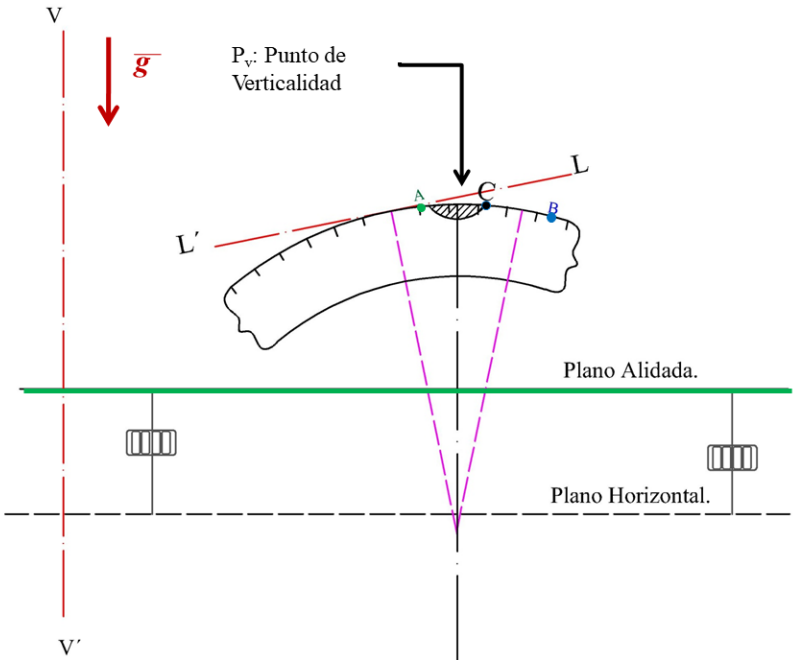
1. Se coloca el nivel tubular en dirección de dos tornillos calante cualesquiera y con ellos se realiza el centrado de la burbuja. Como se ve en la figura 3.44 (izquierda) uno de los externos de la burbuja centrada coincide con la división A.
2. Luego, se gira la alidada 180° y el extremo que ocupaba la posición A pasó a ocupar la posición B. El número de divisiones de la escala del nivel tubular entre A y B equivale al doble del ángulo que forma la alidada con la horizontal en esa dirección de los apoyos.
3. Con los mismos tornillos calantes debe llevarse la burbuja hacia un punto C intermedio entre A y B (figura 3.45). En ese momento se consigue que la línea de los apoyos, y por lo tanto la alidada en esa dirección, tome la posición horizontal.
4. Para horizontalizar completamente el plano de la alidada deberá girarse la alidada en un ángulo de 90° y con el tercer tornillo calante se lleva la burbuja a la posición C antes encontrada.
5. Posteriormente, en cualquier posición de la alidada el extremo de referencia de la burbuja debería mantenerse en la posición C, esto indica que el eje principal VV' ha sido verticalizado. Al punto C se lo denomina "**punto de verticalidad**".

Figura 3.44. *Principio fundamental del nivel aplicado en un teodolito.*



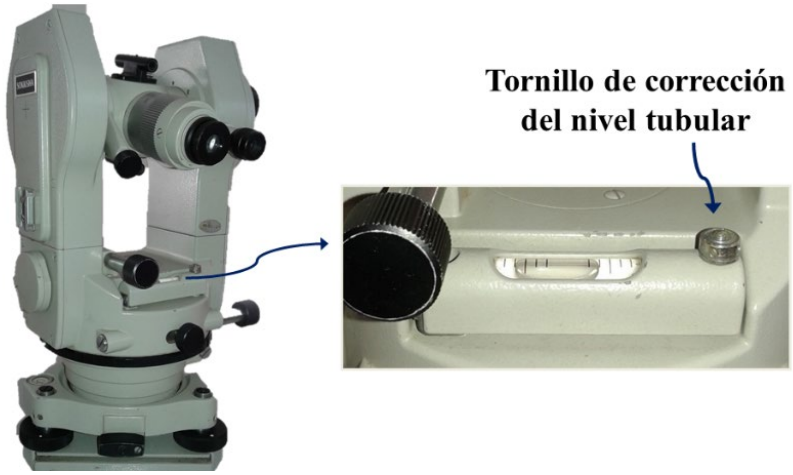
Se denomina punto de verticalidad de un nivel, al punto más alto de la burbuja cuando el eje principal VV´ se halla vertical. Una vez encontrado el punto de verticalidad, y si fuese requerido, es posible corregir el nivel tubular. Para ello se acciona el tornillo correspondiente de corrección ubicado en el nivel tubular (figura 3.46), hasta centrar la burbuja.

Figura 3.45. *Punto de verticalidad del nivel (C).*



La posición de la burbuja correspondiente al punto de verticalidad de un nivel suele mantenerse constante.

Figura 3.46. *Tornillo de corrección del nivel tubular.*



Trípodes

Los trípodes son elementos que cumplen la función de sostener el teodolito sobre la posición de trabajo. Se fabrican de aluminio o madera con herrajes metálicos, sus patas son extensibles. Permiten centrar el teodolito sobre el punto de estación y las patas extensibles son utilizadas en la primera etapa del calado de este instrumento (calado del nivel esférico).

Figura 3.47. *Trípode de aluminio.*



En la Figura 3.47 puede ser apreciado un trípode de aluminio utilizado con una estación total. En la parte central de la figura se muestra la platina (o meseta) del trípode, la cual sirve como plataforma de apoyo para la base del instrumento. Un tornillo específico, con una rosca universal Whitworth de 5/8 de pulgada y 11 hilos, asegura la sujeción estable del equipo.

Plomadas

La función de la plomada, en el teodolito, es la de servir como referencia para centrar el eje principal sobre un punto o marca sobre el terreno, esta operación es denominada estacionado del teodolito. La puesta en estación del teodolito se realiza en conjunto con su calado, de modo que, finalizadas ambas operaciones, el eje principal debe coincidir con la dirección de la plomada en el punto de estación. En esa instancia el teodolito se encontrará en condiciones de medición.

El tipo de plomada más convencional, la plomada física, consiste en una pesa de metal suspendida de un cordel, que cumple la función de señalar la línea vertical del lugar (figura 3.48). La utilización de este tipo de plomada implicaba invertir una buena cantidad de tiempo en esperar que se estabilizara sobre un punto, especialmente si había la presencia de viento. En los teodolitos modernos y estaciones totales han sido reemplazadas por plomadas ópticas o por plomadas del tipo láser; en casos poco frecuentes también se utilizan plomadas rígidas.

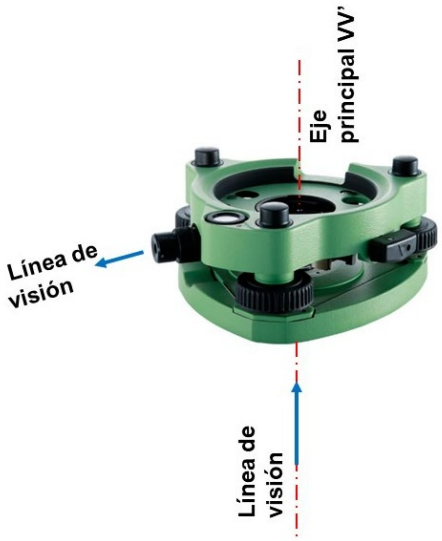
Figura 3.48. *Plomada física.*



Plomada óptica

En los teodolitos y estaciones totales lo más común es el uso de plomadas ópticas integradas en la base nivelante o en la alidada. Estos sistemas ópticos permiten centrar el instrumento sobre el punto de estación de manera más rápida y precisa que con una plomada física. Durante la operación de puesta en estación del teodolito, la plomada óptica proporciona una línea visual dirigida hacia el suelo, colineal con el eje principal del instrumento. En la Figura 3.49 se muestra el recorrido de la línea visual de la plomada óptica.

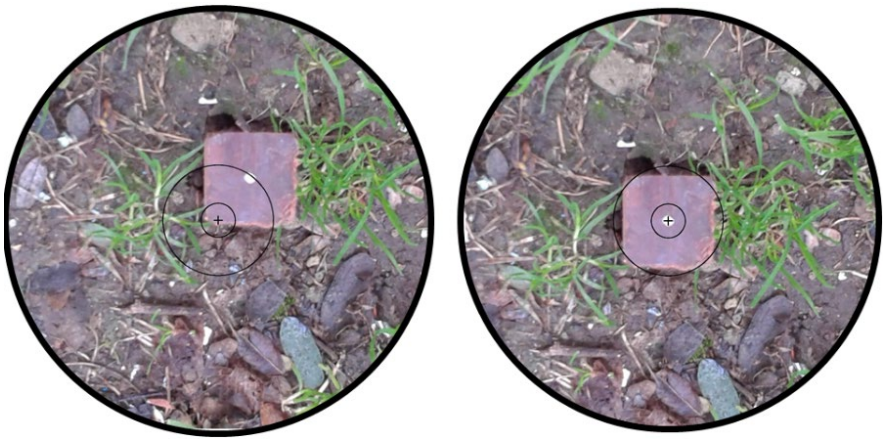
Figura 3.49. *Plomada óptica.*



El teodolito es fijado sobre un trípode y trabajando con la plomada óptica es posible realizar el centrado sobre el punto de estación. En la figura 3.50 se muestra el campo visual a través del sistema óptico de este tipo de plomada, la cruz del centro indica la proyección del eje principal

VV' del instrumento. En la figura 3.50, sector izquierdo, se ve la plomada próxima a un punto de estación, mientras que en el sector derecho de la misma imagen ya se ha logrado el centrado.

Figura 3.50. *Visual desde el ocular de una plomada óptica. Izquierda: descentrada. Derecha: centrada.*



Plomada rígida

Otro tipo de plomadas son las de tipo rígidas o de bastón, incorporadas en trípodes centradores de la firma Kern. Estos no son trípodes convencionales, el sistema de sujeción del teodolito es específico de esta marca.

Figura 3.51. *Trípode con plomada rígida.*



En este tipo de trípodes, la platina se encuentra unida de forma solidaria a un bastón que se prolonga hasta el suelo, constituyendo así una plomada rígida, provista de un nivel esférico (figura 3.51). Esta plomada rígida y la platina del trípode se mueven solidariamente, y su ajuste se regula mediante un tornillo que permite la fijación del sistema cuando se consigue la posición definitiva del equipo.

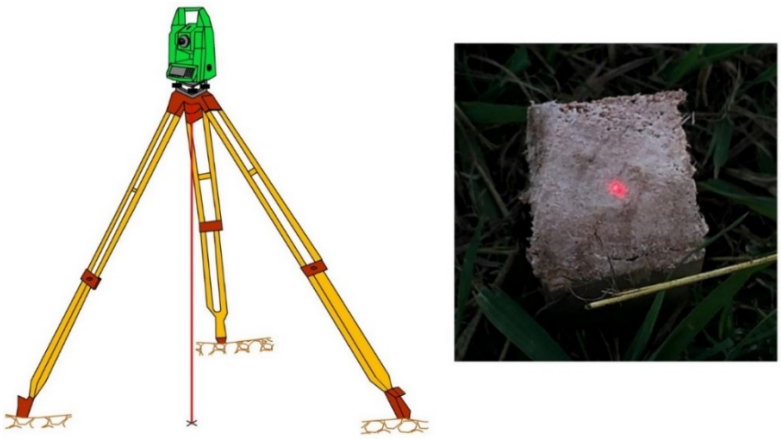
Un instrumento colocado sobre este tipo de trípode puede ser simultáneamente centrado y verticalizado con solo apoyar la punta de la plomada rígida sobre el punto de estación y centrar

la burbuja de su nivel esférico. De ser necesario, la plomada rígida centradora puede ser quitada y hacerse el centrado con una plomada óptica (Müller, 1950).

Plomadas láser

En algunos teodolitos modernos y estaciones totales la plomada óptica ha sido reemplazada por una láser. Este tipo de dispositivo produce un haz de luz láser que es colineal con el eje principal del instrumento.

Figura 3.52. *Plomada láser.*



Este tipo de plomada facilita considerablemente la operación de puesta en estación del conjunto trípode-teodolito, ya que el operador no necesita colocar uno de sus ojos contra el ocular de la plomada óptica. Sin embargo, el centrado del instrumento no es tan preciso como con los sistemas ópticos. Además, en algunos casos, la incidencia directa de la luz solar puede dificultar la visibilidad del puntero láser sobre la marca en el terreno.

Calado del teodolito

Existen ciertas condiciones que debe cumplir un teodolito para poder realizar las mediciones angulares requeridas en los trabajos topográficos. Estas pueden dividirse en condiciones instrumentales y condiciones operativas.

Las condiciones instrumentales refieren a la conformación del teodolito, es decir, a la posición que deben adoptar cada una de sus partes constituyentes:

1. el eje de colimación CC’ debe ser perpendicular al eje secundario HH’, a su vez,
2. el eje secundario HH debe ser perpendicular el eje principal VV’.
3. Cuando el eje de colimación esté en posición horizontal la lectura del ángulo vertical debe ser 0° o 90° (según el tipo de limbo vertical).
4. El eje del nivel tubular LL’ debe ser paralelo a la línea de sus apoyos (nivel corregido).

Las condiciones operativas están a cargo del usuario del instrumento, la principal de ellas es que el eje principal VV' debe estar en posición vertical durante las mediciones.

Si se cumplen las condiciones instrumentales 1 y 2 mencionadas anteriormente, y el eje principal ha sido verticalizado correctamente, entonces el eje de colimación describirá un plano vertical al girar en torno al eje secundario. Esto permitirá la medición de los ángulos verticales y horizontales que interesan en Topografía.

A continuación se describen los pasos necesarios para verticalizar el eje principal de un teodolito sobre un punto determinado del terreno, este procedimiento se denomina calado. Estos mismos pasos son prácticamente idénticos cuando se trabaja con estación total.

Se pueden distinguir tres etapas durante el calado del teodolito:

- Calado grueso.
- Calado aproximado.
- Calado fino.

Calado grueso

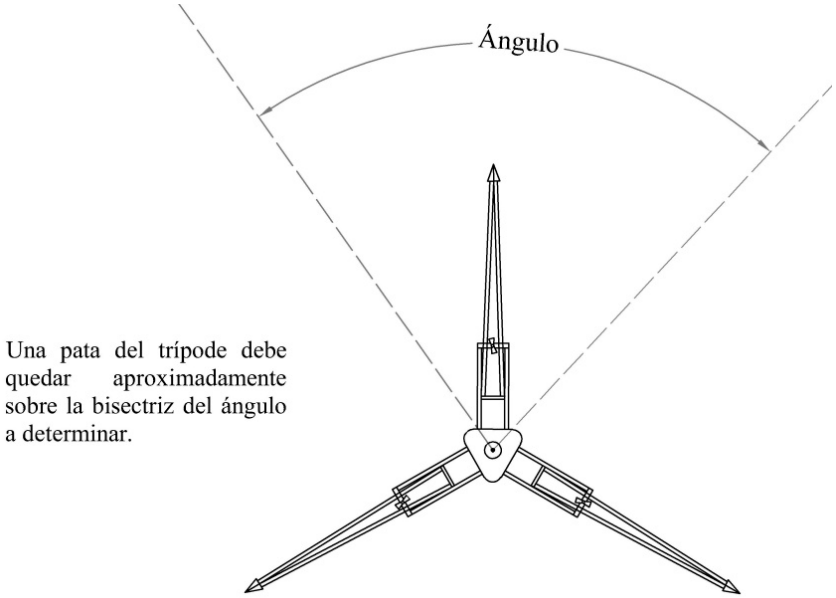
El calado grueso inicia ubicando el trípode de manera que sus patas queden aproximadamente equidistantes del punto de estación (estaca, marca o mojón). Considere que las patas del trípode no deben quedar muy próximas entre sí, sino el instrumento estará en una posición inestable, y si quedaran demasiado separadas, serán un obstáculo para el operador. Se debe conseguir una apertura intermedia de las patas, que asegure la estabilidad del equipo y que a su vez no entorpezca el trabajo.

Para mayor comodidad del operador, es recomendable que una de las patas del trípode se alinee con la bisectriz del ángulo a determinar, como se ha graficado en la figura 3.53, situando el punto de estación en el vértice de esa figura geométrica. Antes de montar el instrumento sobre el trípode, es importante verificar que las patas no estén en el tope de su recorrido y que la platina esté lo más cercana posible a la posición horizontal.

Con el mayor cuidado, se extrae el instrumento de su caja y se lo sujeta sobre la platina del trípode mediante el tornillo "ad hoc". Nunca debe dejarse el instrumento sobre la platina si no ha sido fijado a la misma. Luego de estar correctamente fijado el teodolito sobre el trípode deberá cerrarse la caja del instrumento para que no ingrese polvo ni otro tipo de suciedad a la misma.

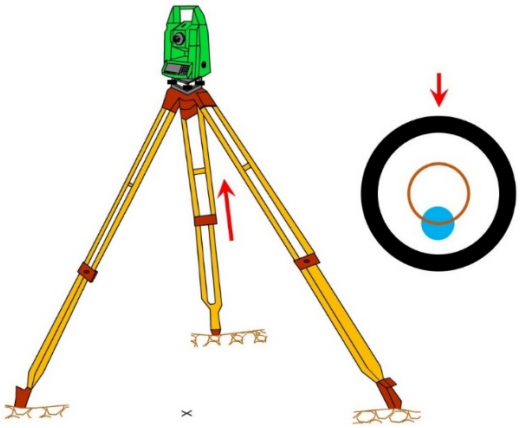
Ya sujeto el teodolito al trípode, se clava al suelo una de sus patas pisando con fuerza sobre su estribo. Luego, con ambas manos se levantan las otras dos patas unos pocos centímetros del suelo, y maniobrándolas se provoca el centrado de la plomada (óptica o láser) dentro de la marca o punto sobre el terreno. Ya conseguido el centrado de la plomada sobre el punto, se clavan las dos patas antes utilizadas.

Figura 3.53. *Posición del trípode.*



En esa instancia, se deben dejar los tornillos calantes de la base nivelante a la mitad de su recorrido, en muchos modelos existen marcas que indican dicha posición.

Figura 3.54. *Calado del nivel esférico.*



Una primera aproximación a la horizontalidad de la alidada se consigue realizando el centrado de la burbuja del nivel esférico del teodolito. Para ello se trabaja con las patas del trípode, una a la vez, liberando las fijaciones (tornillos tipo mariposa o palancas) y extendiendo o acortando su longitud, hasta conseguir el calado del nivel esférico.

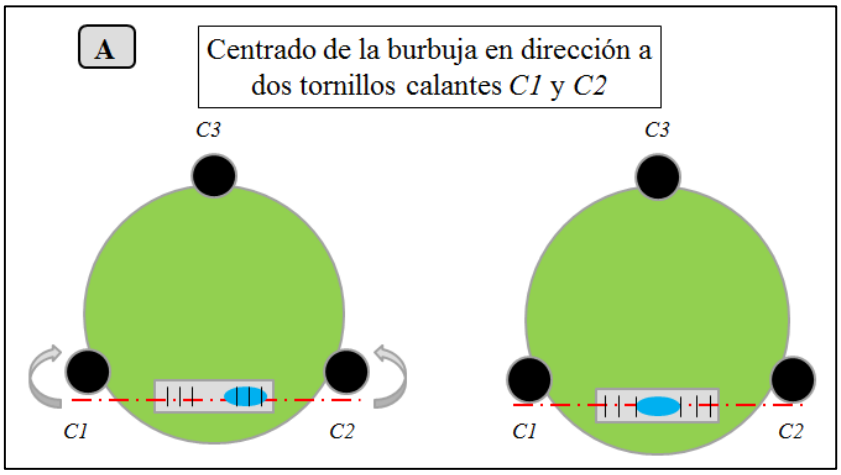
Al acortar o alargar una pata, los puntos de pivote del conjunto trípode-teodolito se encuentran en los apoyos de las otras dos patas sobre el suelo. Por ello, la operación de nivelación con el nivel esférico no debería afectar el centrado de la plomada; sin embargo, es necesario verificar que esto sea así. Una vez que se ha logrado nivelar el nivel esférico, y antes de continuar, se debe comprobar que la plomada óptica (o láser) siga estando centrada.

Calado aproximado

Habiéndose completado la instancia previa se prosigue con el calado aproximado. En esta etapa se trabaja sobre el nivel tubular de la alidada utilizando los tornillos calantes que están dispuestos en la base nivelante.

Paso A: Soltando el freno de la alidada, esta debe girarse hasta que el nivel tubular quede paralelo a la dirección de dos tornillos calantes cualesquiera. Luego se centra la burbuja accionando dichos tornillos en forma antagónica (figura 3.55), es decir los dos hacia adentro o los dos hacia afuera según sea necesario, sabiendo que la burbuja se desplazará en la dirección indicada por el dedo índice de la mano derecha.

Figura 3.55. *Calado aproximado (paso A).*

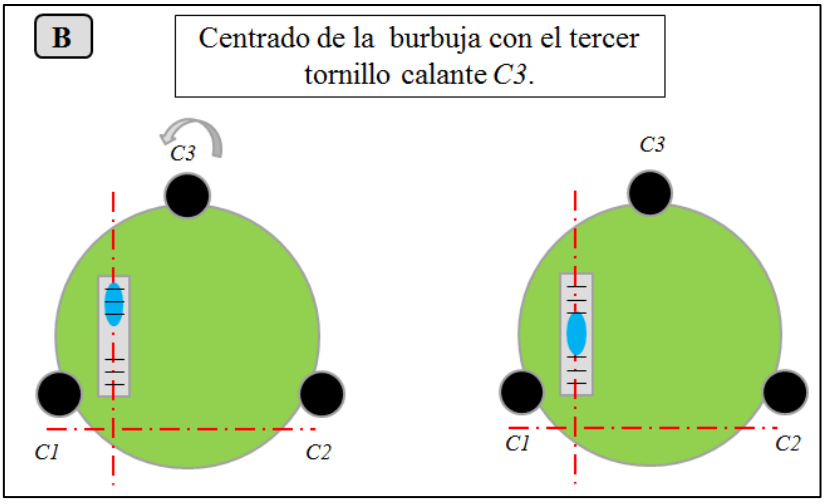


Es fundamental, cuando se opere simultáneamente con dos tornillos calantes, girarlos en igual medida y en forma antagónica, de este modo el punto de pivote del teodolito se ubica entre ambos, y el descentrado de la plomada sobre el punto de estación ha de ser mínimo.

Paso B: Centrada la burbuja en el paso anterior, se gira la alidada 90° y con el tercer tornillo calante (no utilizado hasta ahora) se centra ésta nuevamente, este paso se describe en la figura 3.56.

Luego de esta operación, la burbuja debería permanecer centrada al girar la alidada en cualquier dirección, de ser así el teodolito ya estará calado y en condiciones de medir. Solo faltaría verificar que la plomada permanece centrada en el punto de estación.

Figura 3.56. *Calado aproximado (paso B).*

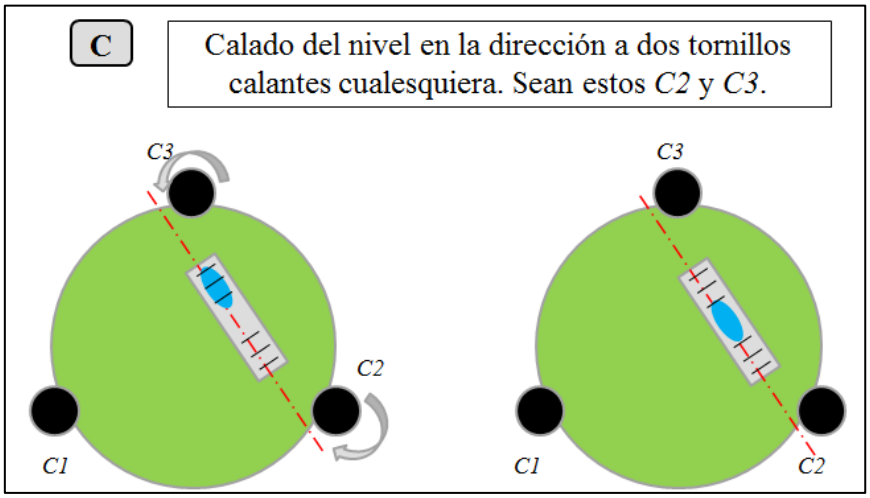


Si la burbuja NO permaneciera centrada al girar la alidada, significa que el nivel tubular se encuentra descorregido. Ante esta situación es necesario realizar el calado fino o preciso, lo que implica la aplicación práctica del Principio Fundamental del nivel tubular. Si se apoya un nivel tubular sobre una recta y luego se invierten sus apoyos, el desplazamiento (arco circular) que experimenta la burbuja equivale al doble del ángulo que dicha recta de apoyo forma con la horizontal.

Calado fino

El calado fino se realiza cuando se ha encontrado, en el paso anterior ,que el nivel tubular está descorregido. Se desarrolla este procedimiento a partir del paso C.

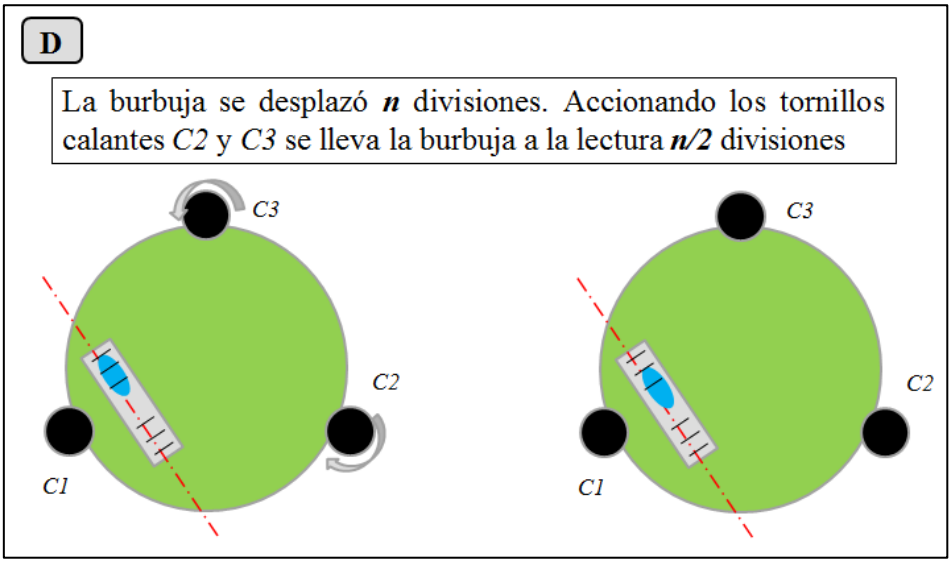
Figura 3.57. *Calado fino (paso C).*



Paso C: Realizado ya el calado aproximado (pasos A y B), se vuelve a colocar el nivel tubular en dirección paralela a dos tornillos calantes cualesquiera y luego, con ellos se realiza el centrado de la burbuja (figura 3.57).

Paso D: Se gira el nivel tubular (la alidada) 180°, lo que es equivalente a invertir sus apoyos, y **se aplica el principio fundamental del nivel**: si tras el giro de la alidada la burbuja se ha desplazado **n** divisiones desde la posición central, se la regresará **n/2** divisiones en el sentido opuesto operando con los mismos tornillos del paso anterior (figura 3.58). La posición "**n/2** divisiones" de la burbuja corresponde al punto de verticalidad del nivel tubular de ese instrumento, e indica que se ha logrado horizontalizar parcialmente el plano de la alidada, en la dirección de los dos tornillos calantes. De ese modo, se ha puesto horizontal a la familia de rectas que, perteneciendo al plano de la alidada, es paralela a la dirección de los tornillos calantes utilizados (C2 y C3 en las figuras 3.57 y 3.58). Es suficiente con hacer horizontal otra recta no paralela a las anteriores para hacer horizontal el mencionado plano. Conviene que esa recta sea la de máxima pendiente, tal como se lo explica en el paso E.

Figura 3.58. *Calado fino (paso D).*



Paso E: Habiendo hallado el punto de verticalidad del nivel tubular, deberá girarse la alidada 90° (figura 3.59) y con el tercer tornillo calante se llevará la burbuja a la misma posición en que había quedado anteriormente (descentrada **n/2** divisiones). De este modo se ha puesto en posición horizontal el plano de la alidada, habiéndose logrado la horizontalidad de dos familias de rectas no paralelas pertenecientes al mismo.

Como control, obsérvese que en cualquier posición de la alidada la burbuja permanezca en la posición descentrada n/2 divisiones, lo cual implica que el eje principal fue verticalizado (figura 3.60). En caso contrario deberá repetirse el calado fino.

Figura 3.59. *Calado fino (paso E).*

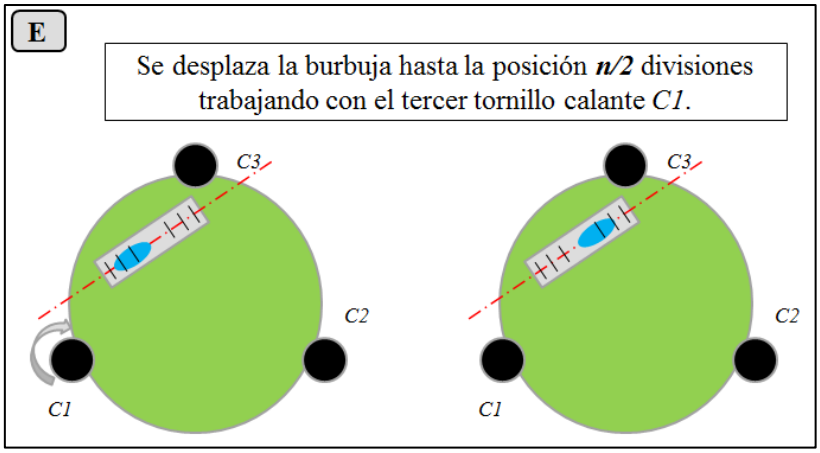
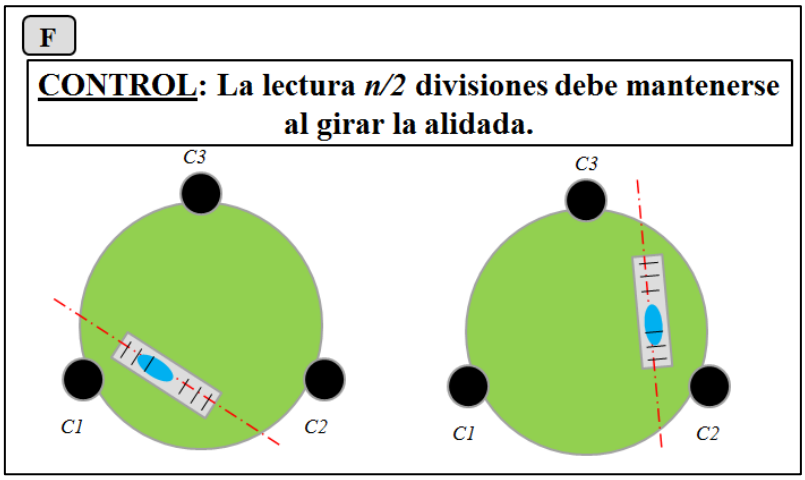


Figura 3.60. *Control del calado fino (paso F).*



Finalmente deberá verificarse que la plomada permanezca centrada sobre el punto de estación.

Necesidad del calado fino

Finalizado el calado fino, si se requiere podría centrarse la burbuja mediante el tornillo específico dispuesto en el nivel tubular para esa labor; en ese caso se lo habrá corregido. Este trabajo raramente es requerido, ya que puede verticalizarse óptimamente el eje principal del teodolito a pesar de que el nivel tubular de la alidada no esté corregido.

Debe entenderse que, en los teodolitos que tengan corregido su nivel tubular, solo se requiere el calado aproximado. En este caso, tras el calado aproximado, la burbuja permanecerá centrada en cualquier posición de la alidada.

El calado fino solo se requiere en aquellos teodolitos cuyo nivel tubular se ha descorregido. En este caso, cuando se consiga el calado del instrumento, la burbuja permanecerá en una posición diferente a la del centrado (n/2 divisiones) en cualquier dirección.

Independientemente del tipo de calado requerido, siempre debe controlarse el centrado de la plomada sobre el punto de estación.

Nivel testigo y compensadores

Debido a limitaciones relacionadas con los sentidos humanos del operador y con la sensibilidad del nivel tubular y del movimiento de los tornillos calantes del teodolito, siempre queda una pequeña inclinación en el eje principal con respecto a la dirección de la vertical. Este error por falta de verticalidad del eje principal es del tipo accidental y es inevitable, se denomina error de verticalidad.

Al tratarse de un error accidental, el error de verticalidad se manifiesta con magnitudes muy pequeñas en las mediciones acimutales. Pero en las mediciones del limbo vertical puede alcanzar una mayor magnitud, es por ello por lo que los teodolitos mecánicos se equipaban con niveles testigos (figura 3.61).

Figura 3.61. *Nivel testigo en un teodolito mecánico.*



Las mediciones de ángulos sobre el limbo vertical son muy sensibles a la imperfecta verticalidad del eje principal. Por ello se independiza la posición del índice respecto al eje principal, esto se consigue vinculándolo a un nivel tubular llamado nivel testigo. Esta solución se aplicaba en los teodolitos mecánicos, y antes de cada lectura del ángulo vertical debía centrarse la burbuja del nivel testigo. En estos teodolitos, la sensibilidad del nivel testigo era superior a la del nivel tubular.

En teodolitos ópticos y electrónicos existen compensadores automáticos llamados de un solo eje que reemplazan al nivel testigo. Su función es quitar el efecto de la falta de verticalidad del eje principal en las lecturas verticales.

En las estaciones totales, existen compensadores de doble eje que eliminan el error de verticalidad en las lecturas del limbo vertical y además sobre el limbo horizontal. Estos compensadores son electrónicos, automáticos y trabajan en tiempo real.

Referencias

CHUECA PAZOS, Manuel, HERRÁEZ BOQUERA, José, BERNÉ VALERO, Jose Luis (1996). *Tratado de Topografía 2: Métodos Topográficos*. Editorial Paraninfo.

DOMÍNGUEZ GARCÍA-TEJERO, Francisco (2002). *Topografía General y Aplicada*. Ediciones Mundi-Prensa.

MÜLLER, Roberto (1944). *Teodolitos y Poligonaciones*. Librería: "EL ATENEO".

MÜLLER, Roberto (1950). *Compendio General de Topografía Teórica Práctica*. Librería: "EL ATENEO".

WOLF, Paul y GHILANI Charles (2016). *Topografía*. Alfaomega.

ROMANO, José, LOPEZ, Ricardo, GIAGANTE, Verónica, RIOS JACOBSEN, Silvana, ZURITA, Ezequiel. (2021). *Medición directa de distancias, alineaciones, calado del teodolito y método de Bessel*. YouTube. https://youtu.be/OMyVlBK5ZDk

ROMANO, José, LOPEZ, Ricardo, ZURITA, Ezequiel, VAZQUEZ, Gonzalo. (2020). *Demarcación de un Polígono y Medición de sus Ángulos Internos*. YouTube. https://youtu.be/K0PG1oKodts

CAPÍTULO 4
Mediciones angulares

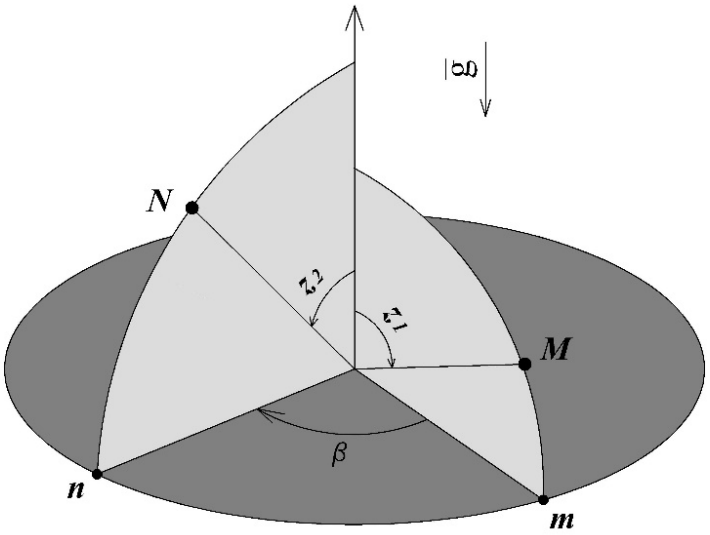
Roberto José Romano

Principio de la medición angular y errores característicos

En Topografía, los ángulos horizontales y verticales se miden utilizando un instrumento denominado teodolito o su versión evolucionada, la estación total. Este dispositivo está diseñado de tal manera que, una vez estacionado sobre un punto y nivelado correctamente, permite medir las proyecciones horizontales y verticales de las visuales dirigidas a los puntos del terreno.

Como se ilustra en la Figura 4.1, los puntos M y N están ubicados en el terreno y hacia ellos se dirigen líneas visuales con un teodolito. Al colimar el punto M, se genera un plano vertical que contiene tanto a dicho punto como al eje principal del instrumento. Sobre este plano vertical, se puede medir el ángulo cenital z1. De manera similar, al colimar el punto N, se genera otro plano vertical que pasa por ese punto, y sobre el cual se mide el ángulo cenital z2. Además, a partir de estos planos verticales, es posible determinar el ángulo diedro β, ya que cada colimación de M y N corresponde a una medida de dirección sobre el limbo horizontal.

Figura 4.1. *Ángulos que pueden ser medidos con un teodolito.*



Para poder obtener el ángulo horizontal β y los ángulos cenitales z_1 y z_2 fue necesario realizar con el teodolito un mínimo de dos visuales:

- Visual al punto M con lecturas acimutal m y cenital z_1.
- Visual al punto N con lecturas acimutal n y cenital z_2.

Los ángulos verticales surgen directamente de las lecturas verticales a cada punto, pero el ángulo horizontal (o acimutal) debe ser calculado. Las lecturas realizadas en el limbo horizontal se denominan direcciones acimutales o simplemente **direcciones**; el ángulo acimutal de interés se calcula como una diferencia entre las direcciones leídas:

$$\beta = n - m$$

En este tipo de mediciones, se consideran positivos los giros realizados en sentido horario. Por tal motivo se comienza leyendo al punto que está ubicado a la izquierda del operador, luego se gira en el sentido de las agujas del reloj y se mide en el punto a la derecha.

Suele afirmarse, cuando se trata de mediciones acimutales, que el teodolito no mide ángulos sino direcciones, ya que el ángulo no se mide directamente sino se calcula. Cuando se trata de mediciones verticales sí se miden directamente los ángulos.

Las mediciones angulares, como todas las demás realizadas en topografía, siempre están afectadas por errores.

Errores en las mediciones angulares

En Topografía existen tres clases de errores (Wolf, 2016):

- Errores groseros: son equivocaciones que ocurren debido a la falta de atención o a perturbaciones previsibles que el observador no detecta, pero que podrían evitarse con el debido cuidado. La magnitud de estos errores supera lo que podría esperarse considerando los medios con los que se opera. Los errores groseros suelen ser significativos en comparación con la magnitud que se está midiendo, mientras que los demás errores son, en general, muy pequeños. Por ejemplo, realizar la lectura en un teodolito óptico sin antes realizar la coincidencia del índice.
- Errores sistemáticos: son aquellos que, en igualdad de condiciones, se repiten siempre en la misma cantidad y con el mismo signo. Este tipo de error obedece siempre a una ley matemática o física, por lo tanto, puede determinarse su magnitud y aplicarse la corrección correspondiente en la mayor parte de los casos. En general, son causados por los instrumentos con los que se trabaja o por el medio en el que se está operando. Ejemplo: error de colimación del teodolito.
- Errores accidentales: son aquellos producidos por factores incontrolables por el observador, los cuales obedecen únicamente a la ley del azar y son de naturaleza aleatoria. Su característica principal es que actúan de un modo irregular por lo que no pueden cuantificarse, y tienen igual probabilidad de ser positivos o negativos. Solamente es posible evaluar los efectos de su propagación aplicando parámetros estadísticos y, como obedecen a la ley de probabilidades, en ocasiones tienden a compensarse en observaciones sucesivas. Los errores aleatorios permanecen (después de hacer la corrección de los errores sistemáticos y groseros) y solo puede acotarse la probabilidad de su entorno. Por ejemplo: error de puntería del teodolito.

Para poder eliminar o atenuar los efectos de los errores mencionados en las mediciones realizadas con un teodolito (o estación total) puede ser aplicado el método o regla de Bessel, en una o más series.

Método de Bessel

El círculo o limbo vertical solidario con el anteojo puede ocupar en la medición angular dos posiciones distintas:

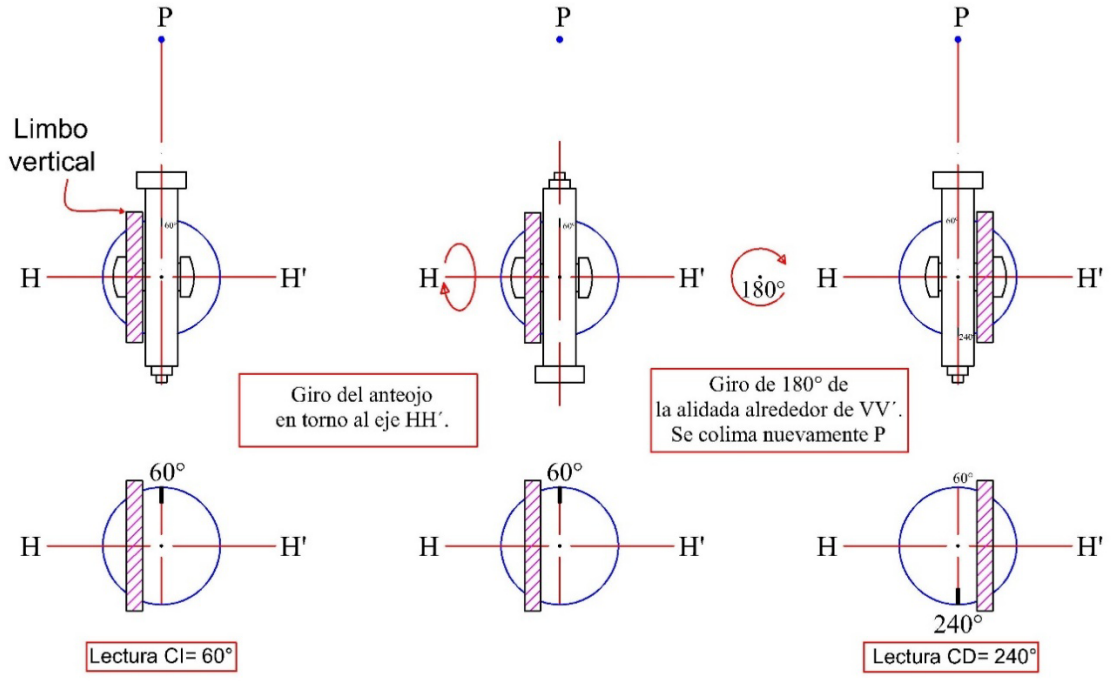
1. Posición Normal I o Círculo Izquierda (CI).
2. Posición Invertida II o Círculo Derecha (CD).

Para pasar de CI a CD se debe girar la alidada 180° respecto del eje principal y luego girar el anteojo sobre el eje secundario para realizar nuevamente la colimación del punto, a esta tarea se la denomina "vuelta de campana".

La regla o método de Bessel[1] consiste en colimar dos veces cada punto, la primera con el anteojo en posición normal (CI) y después con el anteojo invertido (CD), previa vuelta de campana del anteojo.

En el ejemplo plateado en la figura 4.2, si se colima a un punto P y se realiza la lectura acimutal en CI con un valor de 60°, al realizar la vuelta de campana y repetir la lectura acimutal a P, omitiendo errores en la medición, la nueva lectura ha de ser 240°.

Figura 4.2. *Posición del anteojo (arriba), lecturas respectivas (abajo).*



[1] Friedrich Wilhelm Bessel (1784 - 1846).

De acuerdo con la figura 4.2:

- CI= 60°
- CD= 240°
- CD'= CD ± 180°
- CD'= 240° - 180° = 60°

Se denomina CD' (círculo derecha prima) al ángulo acimutal que difiere exactamente 180° con el valor leído en CD. Si no existirían errores de medición se verificaría que CI=CD', pero como los errores siempre están presentes esa igualdad es poco probable.

El método de Bessel también se aplica a la medición de ángulos verticales. En este caso no se realiza el cálculo de CD'. Si no existen errores sistemáticos que afecten a las lecturas del limbo vertical deberá cumplirse la condición: CI+CD=360º

La aplicación del método de Bessel posibilita:

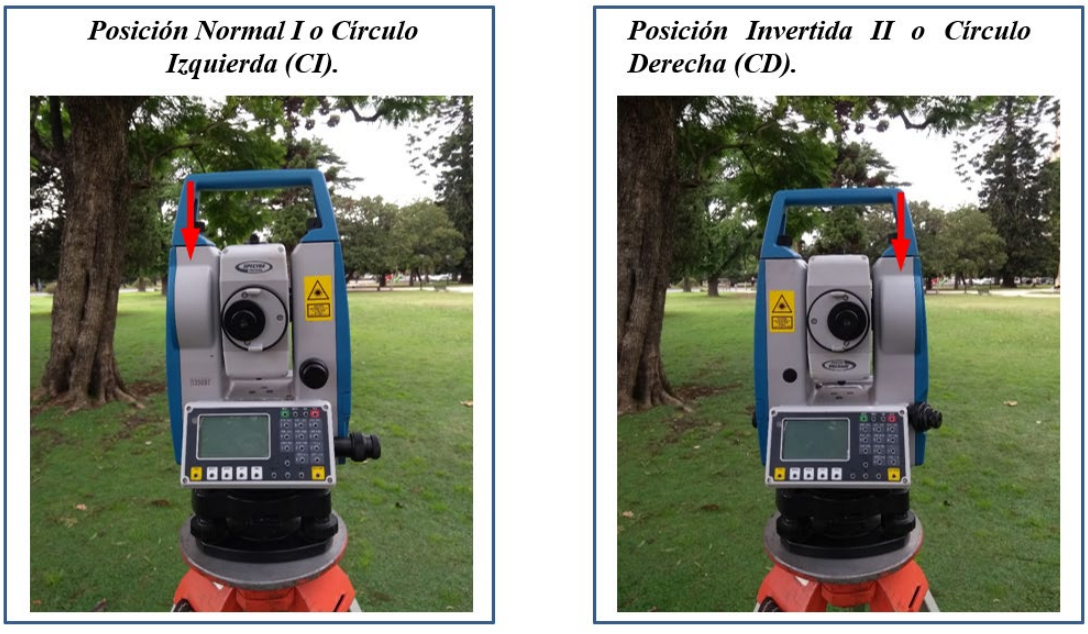
- Eliminar el efecto de los errores sistemáticos en las mediciones angulares.
- Determinar la magnitud de los errores sistemáticos del tipo instrumental, como el error de colimación, error de inclinación del eje secundario o el error de índice, presentes en un teodolito.

Este método además permite:

- Detectar errores groseros de magnitud apreciable.
- Calcular un promedio a partir de las lecturas en ambos círculos, mejorando la precisión del resultado.

El método de Bessel se aplica tanto en teodolitos autónomos como en estaciones totales (figura 4.3).

Figura 4.3. *Posiciones del anteojo en una estación total.*



Analizando las lecturas realizadas en CI y en CD es posible determinar si en un teodolito están presentes los errores del tipo sistemáticos producto del propio instrumento. Para mediciones en el limbo horizontal pueden ser determinados los errores de "colimación (c)" y de "inclinación del eje secundario (i)". Para el caso de mediciones con el limbo vertical se puede determinar la existencia y magnitud del "error de índice" (ε).

Aplicación del método de Bessel en la medición de direcciones

Cuando se mide una dirección angular por el método de Bessel, su valor (α) se calcula como:

$$\alpha = \frac{CI + CD'}{2}$$

$$CD' = CD \pm 180°$$

CI y CD son las lecturas realizadas por el método de Bessel al punto de interés.

Al error sistemático (e) que puede afectar a una dirección se lo calcula:

$$e = \frac{CI - CD'}{2}$$

Las causas del error acimutal **e** son principalmente el "error de colimación" y de "inclinación del eje secundario" del teodolito afectando de manera conjunta la medida.

Las lecturas corregidas del limbo acimutal serán:

$$\mathrm{CI_c} = \mathrm{CI} - \mathrm{e}$$

$$\mathrm{CD_c} = \mathrm{CD} + \mathrm{e}$$

Luego, debe verificarse que se cumpla con exactitud la siguiente igualdad:

$$CI_c = CD_c \pm 180°$$

A continuación, se analizan las lecturas en CI y CD realizadas a un punto con un teodolito óptico. Se trabajó únicamente con el limbo acimutal:

- Lectura en CI= 298º 31' 10"
- Lectura en CD= 118º 30' 50"

Se calcula CD'= 118º 30' 50" + 180º 00' 00"= 298º 30' 50"

$$\alpha = \frac{CI + CD'}{2} = \frac{298º\ 31'\ 10"\ + 298º\ 30'\ 50"}{2} = 298º\ 31'\ 00"$$

$$e = \frac{CI - CD'}{2} = \frac{298º\ 31'\ 10"\ - 298º\ 30'\ 50"}{2} = 0º\ 00'\ 10"$$

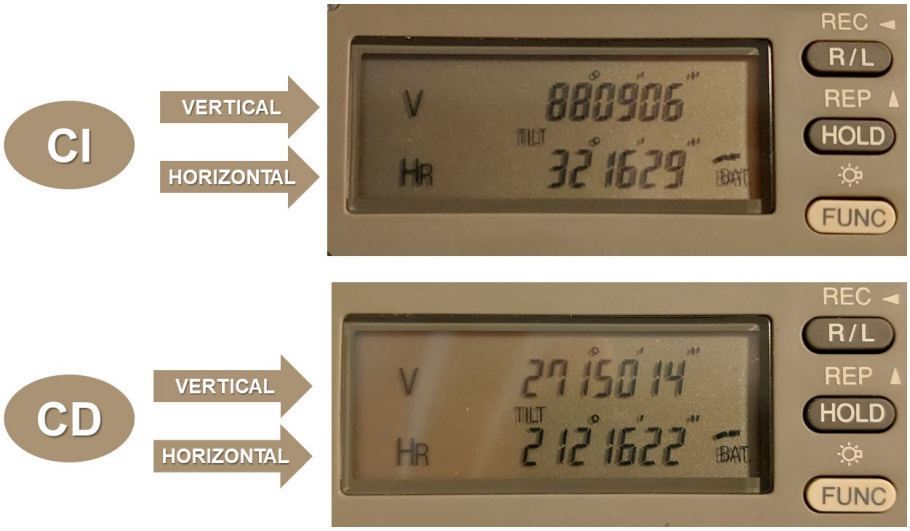
El error e= 10" es combinación de los errores de colimación y de inclinación del eje secundario.

$$CI_c = CI - e = 298º\ 31'\ 10"\text{- } 0º\ 00'\ 10"\ = \ 298º\ 31'\ 00"$$

$$CD_c = CD + e = 118º\ 30'\ 50"\text{ + } 0º\ 00'\ 10"\ = \ 118º\ 31'\ 00"$$

Se analiza un nuevo caso, pero utilizando un teodolito electrónico (figura 4.4). En la parte superior de la figura 4.4 se encuentran las lecturas de CI y en la parte inferior las de CD, en ambos casos HR indica que es una lectura del limbo horizontal, mientras que V indica que es una lectura del limbo vertical.

Figura 4.4. *Lectura en un teodolito electrónico.*



Lecturas del limbo horizontal (figura 4.4):

- Lectura en CI= 32º 16’ 29”
- Lectura en CD= 212º 16’ 22”

Se calcula CD’= 212º 16’ 22” - 180º 00’ 00”= 32º 16’ 22”

$$\alpha = \frac{CI + CD'}{2} = \frac{32º\ 16'\ 29" + 32º\ 16'\ 22"}{2} = 32º\ 16'\ 25{,}5"$$

Se debe adoptar un resultado redondeado al segundo, adoptamos 32º 16’ 26”. También podría haberse adoptado 32º 16’ 25”

$$e = \frac{CI - CD'}{2} = \frac{32º\ 16'\ 29" - 32º\ 16'\ 22"}{2} = 0º\ 00'\ 03{,}5"$$

El error resulta en 3,5”, por ser un error debe redondearse por exceso resultando en 4”. No obstante, para calcular las lecturas corregidas deberá utilizarse en este caso la parte decimal, de lo contrario no se cumplirá la verificación $CI_c = CD_c \pm 180°$

$$CI_c = CI - e = 32º\ 16'\ 29" - 0º\ 00'\ 03{,}5" = 32º\ 16'\ 25{,}5"$$

$$CD_c = CD + e = 212º\ 16'\ 22" + 0º\ 00'\ 03{,}5" = 212º\ 16'\ 25{,}5"$$

En los dos ejemplos anteriores el valor α equivale a la lectura en CI corregida por el error e. A este valor α también se lo denomina promedio. Al ser el promedio de CI y CD’ una dirección corregida, se pueden calcular ángulos horizontales que no estén afectados por los errores de colimación y de inclinación del eje secundario.

Determinación de ángulos horizontales por el método de Bessel

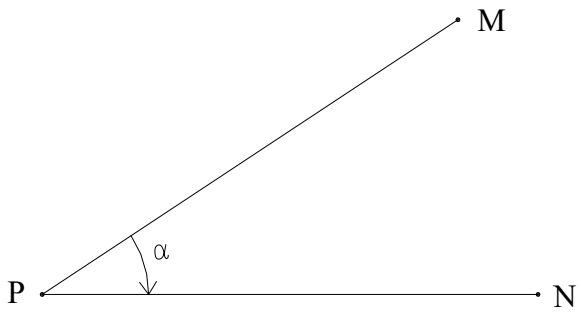
El procedimiento para medir una dirección mediante el método de Bessel consiste en realizar primero la medición en la posición CI y luego repetirla en la posición CD. Sin embargo, para las mediciones en el limbo horizontal, cuando se determinan ángulos acimutales sobre el terreno, es

necesario medir al menos dos direcciones. La diferencia entre estas direcciones proporciona el ángulo buscado.

En situaciones donde se deben medir dos o más direcciones, es fundamental utilizar un procedimiento de medición que permita realizar diversos controles y asegurar que no se omita ningún dato. Por lo tanto, en estos casos, se deben medir todas las direcciones necesarias en la posición CI y posteriormente repetir las mediciones en la posición CD.

Para medir un ángulo aplicando el método de Bessel debe seguirse el procedimiento detallado a continuación. Con el objeto de determinar el valor del ángulo que forman las direcciones a los puntos M y N desde el vértice P (figura 4.5) se procede de la siguiente manera:

Figura 4.5. *Ángulo horizontal* $\mathrm{M\widehat{P}N}$.



Con la ayuda de un trípode, se coloca el teodolito sobre el punto P, centrándolo correctamente sobre la estaca, mojón o marca que lo identifica y asegurando un calado adecuado del instrumento.

Se debe colocar el anteojo de modo que el círculo vertical quede a su izquierda (posición CI). Posteriormente se apunta a la señal en el punto M utilizando el freno de la alidada y el tornillo de pequeños movimientos. Se realiza la lectura correspondiente en el limbo horizontal para esa dirección y se registra en la libreta de campo. La medición siempre debe comenzar en el punto ubicado a la izquierda del observador.

Luego, se debe liberar el freno de la alidada y girar el anteojo en sentido horario hasta colimar la señal en el punto N, utilizando los tornillos de freno y pequeños movimientos de alidada para ajustar. Entonces se lee y registra la lectura correspondiente.

A continuación, se debe aflojar el freno de la alidada y, manteniendo el giro en sentido horario, se colima nuevamente la señal en M para verificar que la lectura coincida con la registrada anteriormente. Si la discrepancia supera la apreciación (a) del sistema de lectura del teodolito, indica que ha habido un error. En este caso, deberán desecharse todas las observaciones y repetir el procedimiento. Si no hay discrepancias significativas, se marcará con una tilde el casillero correspondiente a la primera dirección.

Posteriormente, se realizará la vuelta de campana y se colimará nuevamente al punto M, pero en esta oportunidad en la posición del anteojo denominada CD (posición invertida). Se registrará el valor resultante para esa dirección, y debe considerarse que esta lectura debe diferir con su homóloga en la posición CI en 180°.

Luego, se procede a liberar el freno de la alidada y, girando el anteojo (sentido horario), se colima la señal en N, registrando el nuevo valor que le corresponde a la dirección, y que, lo mismo que el anterior, diferirá de su lectura homóloga en CI en 180º.

Después de soltar el freno de la alidada y girando siempre en el sentido horario, se lleva el anteojo a colimar la señal colocada en M para realizar la verificación con el valor de esa dirección tomada por primera vez en la posición CD. Si coinciden se hace una tilde en el casillero correspondiente del registro de campo. Si no coinciden deben repetirse el procedimiento desde el principio.

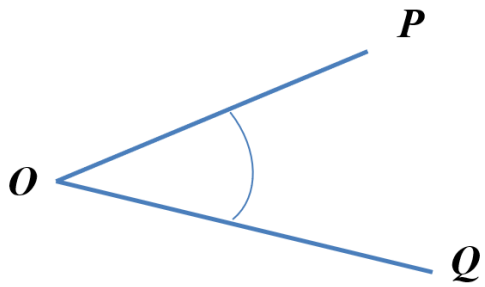
El objetivo de este procedimiento es aplicar el principio esencial de la regla enunciada por Bessel, que permite eliminar la influencia de los errores de colimación y de inclinación del eje secundario en la medición. Esto se consigue calculando el promedio de cada dirección medida en ambas posiciones del círculo. Se debe calcular el promedio de los valores registrados con CI y CD para cada una de las direcciones. Para ello, si el valor obtenido en CD es mayor que 180° se le restan 180° y en caso de ser menor se le suman 180°.

Finalmente, haciendo la diferencia entre el promedio de la segunda dirección N menos el promedio de la primera dirección M, se obtiene el valor del ángulo buscado:

$$\alpha = Promedio\ N - Promedio\ M$$

Para complementar el procedimiento descripto se analizará a continuación un ejemplo numérico: medición del ángulo $P\hat{O}Q$. Con un teodolito estacionado en el punto O se determinará la medida del ángulo horizontal que forman las visuales a P y a Q (figura 4.6).

Figura 4.6. *Ángulo horizontal* $P\hat{O}Q$.



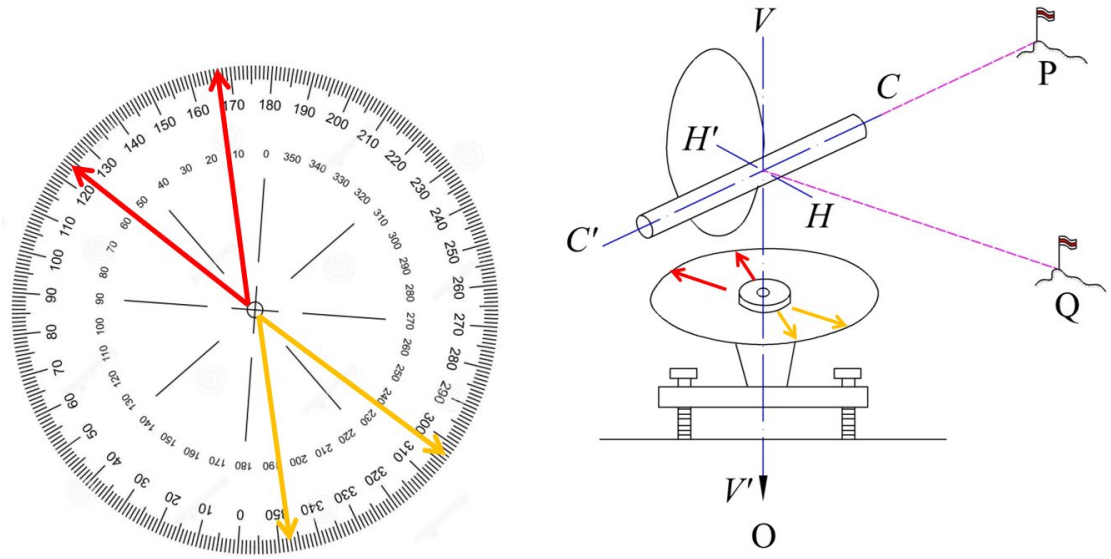
1. Estacionar y calar el teodolito sobre el punto O.
2. Colimar al punto P con el anteojo en CI y registrar la lectura (123º23’03”).
3. Girar la alidada en sentido horario y luego colimar al punto Q y registrar la lectura (169º37’31”).
4. Continuar el giro horario en CI y a modo de control realizar nuevamente la lectura a P. La diferencia con respecto a la primera lectura debe ser menor a la apreciación de lectura del teodolito. Esta lectura no se anota, solo se realiza una tilde junto al primer registro.
5. Realizar la vuelta de campana y colimar al punto P con el anteojo en CD (303º23’23”).
6. Girar en sentido horario y colimar al punto Q (349º37’51”).

7. Seguir girando en sentido horario y leer nuevamente el punto P (CD) para controlar la lectura. No se registra la lectura, sino que se hace una tilde junto a la primera.

Se han realizado seis lecturas, de las que se han registrado cuatro. Siendo estas: a P y a Q en CI y luego de la vuelta de campana a P y a Q en CD. Las lecturas de control no se anotan, solamente se realiza una tilde junto a la lectura inicial correspondiente.

En la figura 4.7 se muestra un esquema de cómo se distribuyen las direcciones registradas aproximadamente en el limbo horizontal.

Figura 4.7. *Esquematización de los pasos para medir el ángulo* $\mathrm{P\hat{O}Q}$.



La tabla 4.1 es del tipo que se utiliza para registrar las mediciones en campo.

Tabla 4.1. *Registro de campo de la medición de un ángulo por el método de Bessel.*

Estación	Punto Visado	Lecturas		Promedio	Ángulo Medido
		CI	CD		
O	P	123º 23' 03" ✓	303º 23' 23" ✓	123º 23' 13"	46º 14' 28"
	Q	169º 37' 31"	349º 37' 51"	169º 37' 41"	

El ángulo de interés es el acimutal $P\hat{O}Q$ y se calcula:

CD'$_{OP}$= 303°23'23" – 180°= 123°23'23"

$$Promedio\ OP: \qquad \alpha_{OP} = \frac{123°23'03" + 123°23'23"}{2} = \mathbf{123°23'13"}$$

CD'$_{OQ}$= 349°37'51" – 180°= 169°37'51"

$$\text{Promedio OQ:} \qquad \alpha_{OQ} = \frac{169°37'31" + 169°37'51"}{2} = \mathbf{169°37'41"}$$

$$ángulo\ P\hat{O}Q = 169°37'41" - 123°23'13" = \mathbf{46°14'28"}$$

Pueden corregirse las lecturas realizadas y obtener así las lecturas corregidas, el procedimiento es el que sigue:

Lecturas corregidas OP:

$$e_{\mathrm{OP}} = \frac{123°23'03" - 123°23'23"}{2} = \mathbf{-0°00'10"}$$

$$\mathrm{CI_c} = 123°23'03\text{-}(\text{-}0°00'10") = \mathbf{123°23'13}$$

$$\mathrm{CD_c} = 303°23'23\text{+ }(\text{-}0°00'10") = \mathbf{303°23'13}$$

Se verifica la operación: $\boldsymbol{CI_c = CD_c \pm 180°}$

Lecturas corregidas OQ

$$e_{\mathrm{OQ}} = \frac{169°37'31" - 169°37'51"}{2} = \mathbf{-0°00'10"}$$

$$\mathrm{CI_c} = 169°37'31"\text{-}(\text{-}0°00'10) = \mathbf{169°37'41}$$

$$\mathrm{CD_c} = 349°37'51"\text{+ }(\text{-}0°00'10) = \mathbf{349°37'41}$$

Se verifica: $\boldsymbol{CI_c = CD_c - 180°}$

Medición de los ángulos internos de un polígono por el método de Bessel

Cuando por este método se determinen todos los ángulos internos de un polígono de *n* vértices, la sumatoria de los ángulos internos medidos deberá cumplir con la condición geométrica de cierre angular:

$$\sum \alpha_i = 2\ rectos\ .\ (n-2)$$

El elemento "2 rectos" refiere a dos ángulos rectos, que en el sistema sexagesimal equivale a 2 x 90º (180º).

$$\sum \alpha_i = 180º\ .\ (n-2)$$

La diferencia que se produjera entre la sumatoria de los ángulos medidos ($\sum \boldsymbol{\alpha_m}$), y la condición de cierre será el error de cierre angular ($\boldsymbol{\mathcal{E}_\alpha}$).

$$\mathcal{E}_\alpha = \sum \alpha_m - \sum \alpha_i$$

Si $\boldsymbol{\mathcal{E}_\alpha}$ resulta ser menor que la tolerancia (**T**) los ángulos medidos serán compensados.

Si este resulta ser menor que la tolerancia fijada:

$$T = \pm 3\ .a\ .\sqrt{n}$$

a: apreciación o menor lectura directa del instrumento.

Solamente pueden compensarse los ángulos medidos si se comprueba que el error de cierre angular es menor a la tolerancia.

La corrección total tiene la misma magnitud que el error de cierre angular, pero signo opuesto (-Ɛα). La corrección que se aplique a cada ángulo medido surge de dividir a la corrección total por el número de vértices. Los ángulos compensados se calculan sumando a cada ángulo medido su corrección (con el signo que corresponda). Algunas veces por cuestiones de redondeo, algunos de los ángulos pueden tener correcciones que difieran en un segundo de las del resto.

Se desarrolla como ejemplo el caso de un cuadrilátero, sus cuatro ángulos internos se midieron aplicando el método de Bessel. Para ello se realizó una estación de teodolito en cada vértice y se midieron las direcciones correspondientes a otros dos. Los valores medidos aplicando el método de Bessel se consignan en la tabla 4.2, en las columnas CI y CD. Este es el modelo de planilla utilizado para el registro de esta clase de mediciones.

Son calculados los promedios y por diferencia entre estos se obtienen los ángulos medidos. Posteriormente, teniendo en cuenta la condición geométrica de cierre angular, se compensan los tres ángulos obteniéndose así los valores definitivos.

Tabla 4.2. *Planilla de campo para la medición de los ángulos del polígono de cuatro vértices ABCDA.*

Estación	Punto Visado	Lecturas		Promedio	Ángulo Medido	Ángulo Compensado
		CI	CD			
A	B	0°23'08" ✓	180°23'18" ✓	0°23'13"	61°38'32	61°38'36
	D	62°01'39"	242°01'51"	62°01'45"		
B	C	0°00'50" ✓	180°00'59" ✓	0°00'54"	95°29'34"	95°29'38"
	A	95°30'25"	275°30'31"	95°30'28"		
C	D	0°01'23" ✓	180°01'35" ✓	0°01'29"	80°49'55"	80°49'59"
	B	80°51'20"	260°51'28"	80°51'24"		
D	A	1°13'37" ✓	181°13'51" ✓	1°13'44"	122°01'43"	122°01'47"
	C	123°15'24"	303°15'30"	123°15'27"		
				SUMAS	359°59'44"	360°00'00"

Condición de cierre

$$\sum \alpha_i = 180º\,.\,(n-2) = 2\,.\,90º\,.\,(4-2) = 360º\,00'\,00"$$

Error de cierre:

$$\varepsilon_\alpha = \sum \alpha_m - \sum \alpha_i = 359º\,59'\,44 - 360º\,00'\,00" = -0º\,00'\,16"$$

Tolerancia:

$$\boldsymbol{T = \pm 3.a.\sqrt{n} = \pm 3\,.\,5"\,.\sqrt{4} = \pm 30"}$$

a= 5” (Dato técnico del instrumento)

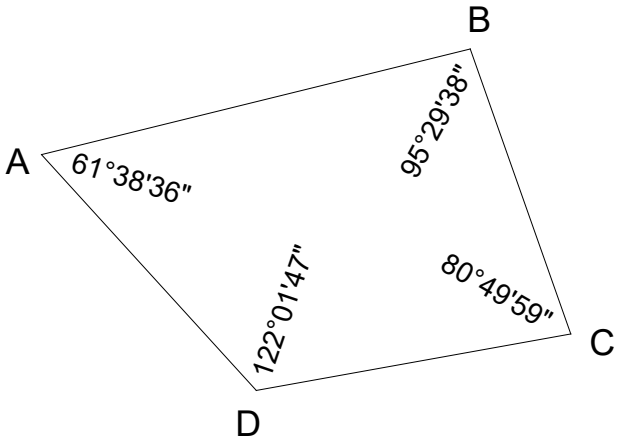
n= 4 vértices.

El error de cierre (-16”) es menor a la tolerancia (±30”), por lo tanto, puede realizarse la compensación de los ángulos medidos.

(Error = -16” => Corrección total= 16”) 16”/4= 4”

Se aplica una corrección de +4” a cada ángulo medido, obteniéndose los ángulos compensados. En la figura 4.8 puede verse representada gráficamente la situación resuelta.

Figura 4.8. *Ángulos compensados del polígono ABCDA.*



Los ángulos compensados son el resultado de la medición.

Notación angular

Es importante adoptar algunos criterios para el registro de las observaciones angulares. Esto tiene como principal objetivo evitar equivocaciones, malas interpretaciones de las anotaciones y dudas en cuanto a la interpretación de los datos registrados.

En los trabajos convencionales de Agrimensura, cuando se trabaja con valores angulares, no se utilizan los decimales de segundo. Por ejemplo:

21º 42’ 33,5”

Se redondea a:

21º 42’ 33” o 21º 42’ 34”

Un resultado no puede tener más decimales que el valor (o valores) con los que fue calculado.

En trabajos de alta precisión dentro de la Geodesia o Microgeodesia se utilizan métodos e instrumentos que permiten la medición de fracciones de segundos, pero en el ámbito de la Agrimensura, son trabajos de mediciones especiales poco frecuentes.

Por otro lado, en los minutos y los segundos el cero a la izquierda no puede ser omitido:

55º 5’ 20” (notación incorrecta) 55º 05’ 20” (notación correcta)

99º 12’ 0” (notación incorrecta) 99º 12’ 00” (notación correcta)

La omisión de las cifras indicadas pude generar duda acerca de si el valor que falta es cero o no se registró adecuadamente.

Aplicación del método de Bessel en la medición de ángulos verticales

Le medición de ángulos verticales tiene por finalidad la mayoría de las veces medir desniveles entre puntos del terreno. Mediante algún método de cálculo trigonométrico, este tipo de ángulos permiten la determinación de alturas.

El error sistemático instrumental típico en la medición de ángulos verticales es el de índice, este tipo de error se debe a la incorrecta posición de la graduación correspondiente a los cero grados (0º) en este limbo. El error de índice puede encontrarse en todo tipo de teodolitos, desde los más antiguos hasta en estaciones totales. Para su tratamiento las mediciones de los ángulos verticales se realizan aplicando el método de Bessel.

La mayoría de los limbos verticales son del tipo cenital, por lo que los ángulos medidos suelen ser de este tipo.

Cuando se miden ángulos verticales por el método de Bessel, su valor corregido se calcula:

$$z = \frac{CI - CD + 360°}{2}$$

Donde CI y CD son las lecturas del ángulo vertical realizadas a un mismo punto en ambas posiciones del anteojo.

El error de índice (ε) que afecta a las mediciones del limbo vertical se calcula:

$$\varepsilon = \frac{CI + CD - 360°}{2}$$

Las lecturas corregidas del limbo vertical serán:

$$\mathrm{CI_c} = \mathrm{CI} - \varepsilon$$

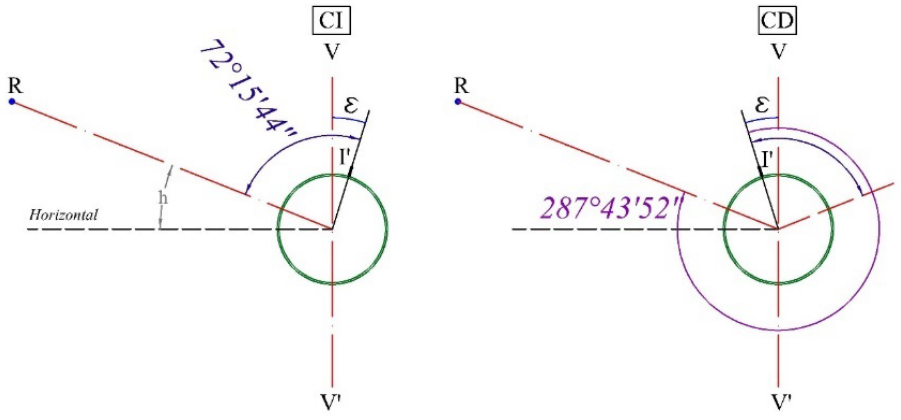
$$\mathrm{CD_c} = \mathrm{CD} - \varepsilon$$

Luego se debe verificar que se cumpla con exactitud la igualdad:

$$\mathrm{CI}_c + \mathrm{CD}_c = 360°$$

Ejemplo: Se realizó la medición de un ángulo cenital por el método de Bessel a un punto R (figura 4.9). Se necesita obtener el valor del error de índice, las lecturas corregidas y el ángulo de altura.

Figura 4.9. *Error de índice* (ε) *sobre las lecturas del limbo vertical.*



Las lecturas al punto R con el teodolito estacionado en E se volcaron en la tabla 4.3:

Tabla 4.3. *Caso de medición de un ángulo vertical por el método de Bessel.*

Estación	Punto Visado	Lecturas	
		CI	CD
E	R	72º 15' 44"	287º 43' 52"

El ángulo cenital corregido será:

$$z = \frac{72°15'44" - 287°43'52" + 360°}{2} = \mathbf{71°15'56"}$$

El error de índice (ε) será:

$$\varepsilon = \frac{72°15'44"+287°43'52 - 360°}{2} = \mathbf{-0°00'12"}$$

El ángulo de elevación (h) para la lectura a R se calcula:

$$h = 90° - z = 90°00'00" \text{ -}71°15'56" = \mathbf{18°44'04"}$$

Las lecturas corregidas del limbo vertical serán:

$$CI_c = 72°15'44" - (-0°00'12") = 72°15'56"$$

$$CD_c = 287°43'52" - (-0°00'12") = 287°44'04"$$

Lógicamente, la lectura corregida en CI es el ángulo cenital z, debido a que el limbo del teodolito es cenital.

Luego se verifica la igualdad:

$$CI_c + CD_c = 72°15'56" + 287°44'04"=360°00'00"$$

En la figura 4.10 se muestra un nuevo caso con lecturas angulares realizadas con estación total. La parte superior de la figura 4.10 corresponde a la posición CI, mientras que la inferior a CD. La denominación AZ indica que es una lectura del limbo vertical, mientras que HA-D refiere a una lectura del limbo horizontal.

Figura 4.10. *lecturas angulares realizadas con estación total.*



En este nuevo ejemplo se trabajará con las lecturas del limbo vertical:

- Lectura en CI= 59º 02' 26"
- Lectura en CD= 300º 57' 04"

El ángulo cenital sin error será:

$$z = \frac{59º\ 02'\ 26" - 300º\ 57'\ 04" + 360°}{2} = \mathbf{59°\ 02'\ 41"}$$

El error de índice (ε) será:

$$\varepsilon = \frac{59º\ 02'\ 26" + 300º\ 57'\ 04" - 360°}{2} == \mathbf{-0°\ 00'\ 15"}$$

El ángulo de elevación (h) para la lectura a R se calcula:

$$h = 90° - z = 90°\ 00'\ 00 - 59°\ 02'\ 41" = \mathbf{30°\ 57'\ 19"}$$

Las lecturas corregidas del limbo vertical serán:

$$\mathrm{CI_c} = 59º\ 02'\ 26" - (-0°\ 00'\ 15") = 59º\ 02'\ 41"$$

$$\mathrm{CD_c} = 300º\ 57'\ 04" - (-0°\ 00'\ 15") = 300º\ 57'\ 19"$$

Control:

$$\mathrm{CI}_c + \mathrm{CD}_c = 59º\ 02'\ 41" + 300º\ 57'\ 19" = 360º\ 00'\ 00"$$

Como ejercicio, se recomienda realizar los mismos cálculos utilizando las lecturas verticales (V) presentadas en la figura 4.4.

Referencias

MÜLLER, Roberto (1944). *Teodolitos y Poligonaciones*. Librería: “EL ATENEO”.

WOLF, Paul y GHILANI, Charles (2016). *Topografía*. Alfaomega.

CAPÍTULO 5
Errores Óptico-Mecánicos en el Teodolito: causas y consecuencias

Roberto José Romano

Errores instrumentales presentes en los teodolitos

Son múltiples los errores sistemáticos de causa instrumental que afectan a los teodolitos. En este capítulo serán tratados únicamente los que afectan a todos los tipos de teodolitos: mecánicos, ópticos y electrónicos:

- Error de índice (ε): afecta únicamente a la medición de ángulos verticales.
- Error de colimación (c): afecta a la medición de direcciones en el limbo horizontal (no incide en la medición de ángulos verticales).
- Error de inclinación del eje secundario (i): lo mismo que en el caso anterior, afecta a la medición de direcciones en el limbo horizontal (no incide en la medición de ángulos verticales).

Se presta especial atención a estos errores porque son comunes en las estaciones totales, donde suelen estar presentes. Analizar los teodolitos, tanto mecánicos como ópticos, suele facilitar una comprensión más clara del problema.

De los tres errores listados, el tratamiento del “error de índice” suele ser el más sencillo ya que es el único de esta clase que se presenta en la medición de ángulos verticales. Mientras que los errores de “colimación” y de “inclinación del eje secundario” requieren una mayor complejidad en su análisis ya que suelen combinarse y afectan en conjunto a la medición de direcciones.

Se estudiarán estos tres errores porque impactan incluso en las estaciones totales más avanzadas y precisas. Otros errores instrumentales, como los sistemáticos en los sistemas de lectura de nonios, se han dejado de lado ya que afectan a teodolitos que actualmente no se utilizan.

Para que el teodolito realice la medición de ángulos horizontales y verticales es necesario que se cumplan ciertas condiciones que pueden dividirse entre instrumentales y operativas. Las primeras deben ser establecidas por el fabricante del equipo, mientras que la segunda está a cargo del operador.

Las condiciones instrumentales, principalmente tienen relación con la posición relativa de los ejes:

- el eje de colimación CC’ debe ser perpendicular al eje secundario HH’,
- y a su vez éste último debe ser perpendicular el eje principal VV´.

- Además, cuando la lectura del ángulo vertical sea 0° o 90° (según el tipo de limbo vertical) el eje de colimación debe estar en posición horizontal.
- El eje del nivel LL' debe ser paralelo a la línea de apoyos del nivel.

Las condiciones operativas refieren fundamentalmente al calado del teodolito, es decir, la verticalización de su eje principal VV'. La puesta en estación del teodolito implica hacer coincidir su eje principal con la dirección de la línea de plomada (o vertical del lugar) que pasa por el punto de estación.

Si se cumplen las condiciones instrumentales y operativas mencionadas, el eje principal del teodolito coincidirá con la vertical del lugar, el eje secundario estará en posición horizontal y, en torno a este último, el eje de colimación podrá bascular describiendo un plano vertical. En esas condiciones, el limbo horizontal estará contenido en un plano horizontal y el limbo vertical en un plano vertical.

El diseño de un teodolito se basa en conceptos teóricos ideales, pero su construcción enfrenta limitaciones técnicas. Por esta razón, el 'teodolito físico' no puede funcionar de manera ideal como el 'teodolito teórico'. El 'teodolito teórico' es un modelo conceptual diseñado para medir ángulos horizontales y verticales; es una abstracción ideal. Aunque los avances tecnológicos han mejorado la precisión, una construcción perfecta sigue siendo inalcanzable. En cambio, el 'teodolito físico' es el instrumento real construido por un fabricante a partir de este diseño conceptual.

Con el paso del tiempo, la tecnología ha avanzado hacia teodolitos ópticos y luego a los electrónicos, que son los elementos básicos de las estaciones totales modernas. La figura 5.1 ilustra de forma resumida la evolución del teodolito: (A) Mecánico; (B) Óptico; (C) Electrónico; (D) Estación Total; (E) Estación Total con Escáner Laser.

Figura 5.1. *Evolución del teodolito.*



Todo teodolito (o estación total) puede estar afectado por algún tipo de error instrumental, estos errores son del tipo sistemático. Esta clase de errores pueden ser modelados matemáticamente, asignársele un valor y corregirse su influencia de las mediciones efectuadas.

En este apunte, se tratarán los errores sistemáticos del tipo instrumental que afectan a los teodolitos utilizados en la actualidad: errores de colimación, de inclinación del eje secundario y de índice.

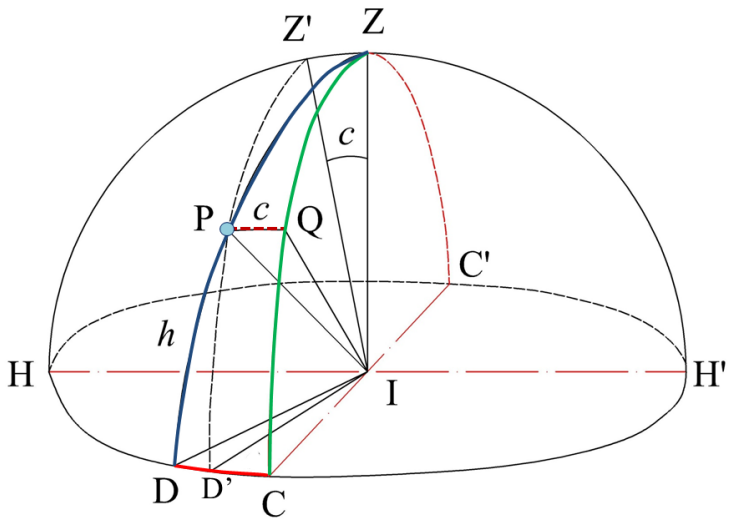
A su vez, merecen un especial tratamiento los efectos que puedan tener sobre las mediciones angulares un nivel de alidada descorregido. El error instrumental provocado por la descorrección

del nivel tubular de la alidada ya fue tratado con anterioridad. Consiste en la falta de paralelismo entre el eje del nivel tubular LL´ y la línea de sus apoyos, esta última contenida en el plano de la alidada. El problema que ocasiona este error es salvado aplicando el principio fundamental del nivel, realizando el calado fino. Por lo tanto, este error del tipo sistemático es eliminado mediante ese procedimiento completo del calado del teodolito.

Error de colimación del teodolito

En un teodolito, cuando el eje de colimación no sea perpendicular al eje secundario, y suponiendo que por el momento se cumplen estrictamente el resto de las condiciones, es posible realizar el análisis de la figura 5.2 (Müller, 1944).

Figura 5.2. *Error de colimación (c) y su influencia en las lecturas acimutales (c').*



En la figura 5.2, los puntos H, H', C y C' están contenidos en el plano del limbo horizontal. Si no existiera un error de colimación, al girar el anteojo alrededor del eje secundario, una visual describiría el arco CQZ, pero como existe un error de colimación de valor c, la visual del anteojo describirá el arco D'PZ'.

Llámese ***c*** al apartamiento del eje de colimación de su posición ideal, este error instrumental se denomina **error de colimación** del teodolito y ha de ser constante para un instrumento mientras este no sufra ningún nuevo desajuste u otro tipo de perturbación. La existencia del error instrumental c tiene efecto en la medición de direcciones. Las mediciones acimutales realizadas en este teodolito estarán afectadas por un error **c´**, denominada influencia (o efecto) de **c**. El error de colimación no afecta a las lecturas del limbo vertical.

El error instrumental **c** puede considerarse constante, mientras que su influencia **c'** varía con el ángulo de altura (h) de la visual. En estas circunstancias, cuando se colime a un punto P (figura 5.2), el sistema de lectura estará mostrando una lectura acimutal C. Pero debe entenderse que la lectura acimutal C en verdad corresponde a otro punto del terreno llamado Q, es decir, si el

teodolito no tuviera error de colimación, se leería C cuando se apuntara a Q. La lectura acimutal C no es la medición verdadera para el punto P. Para conocer la verdadera lectura acimutal de P hay que considerar la sección vertical que determina el arco ZPD, este arco sería el descripto por la visual de no existir el error de colimación. La verdadera medida del ángulo azimutal para el punto P sería la lectura en D, ya que un plano vertical que contiene al cenit Z y al punto de interés P corta al limbo horizontal en el punto D. Entonces, de no existir el error c, la lectura acimutal para P sería D.

Tras el análisis anterior, se puede afirmar que el error en la medición del ángulo acimutal debido al error de colimación equivale al arco CD, este error es llamado influencia del error de colimación y se designa como c'. Puede demostrarse que la influencia del error de colimación del teodolito c' es función de c y del ángulo de altura h del eje de colimación (Müller, 1944):

$$c' = \frac{c}{\cos h}$$

c: error de colimación del teodolito.

c': influencia del error instrumental c.

h: es el ángulo de altura medido desde el horizonte hasta la visual.

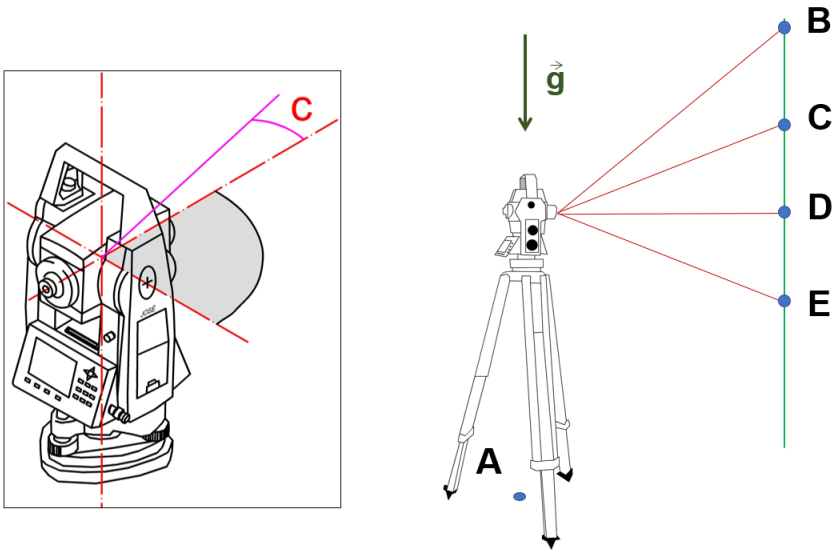
Puede apreciarse que si el eje de colimación es horizontal (h= 0°) entonces c´=c, es decir, el error en la medida la dirección, en ese caso particular, es igual al error del instrumento.

Análisis de la influencia c´

Para estudiar la influencia c´ del error de colimación se analizará la medición de direcciones a cuatro puntos sobre una misma línea de plomada con un teodolito afectado por un error de colimación (c). En este planteo, si no existiera ningún error en el teodolito, la misma dirección debería medirse con el mismo valor a los cuatro puntos, dado que están sobre la misma línea de plomada (vertical). Pero, la presencia de una desviación del eje de colimación obligará, cuando se gire el anteojo alrededor del eje secundario, a imprimir pequeños ajustes acimutales para mantener la colimación de línea dada por los puntos. Finalmente, las direcciones medidas a estos puntos no serán iguales, por efecto o influencia (c') del error de colimación (c) de ese teodolito. Un efecto similar ocurrirá si con este teodolito se pretendiera seguir la arista vertical de un edificio subiendo o bajando el anteojo, la cruz del retículo se desviará hacia la izquierda o a la derecha.

Se procede a analizar el caso de cuatro mediciones realizadas con un mismo instrumento, desde la misma estación A, a puntos B, C, D y E de alturas diferentes, este planteo se esquematiza en la figura 5.3.

Figura 5.3. *Medición de direcciones a cuatro puntos sobre una misma línea de plomada.*



Téngase en cuenta que los puntos B, C, D y E están dispuestos sobre una misma línea de plomada (vertical), por lo tanto, en los cuatro debería realizarse la misma lectura de la dirección. Pero la existencia del error de colimación, con un efecto que varía con el ángulo de alturas, hace que las cuatro medidas sean diferentes. Si no existiera el error de colimación, ni otro de la misma especie, podría colimarse el punto B y luego, bajando el anteojo sin girar la alidada, se verían pasar los restantes puntos por la cruz del retículo. Las lecturas de los puntos B, C, D y E se registraron en la tabla 5.1.

Tabla 5.1. *Influencia del error de colimación en puntos a diferentes alturas.*

Esta-ción	Punto Visado	c: Error de Colima-ción	h: Altura	c': Influencia del error de Colimación	Lectura en Limbo Hori-zontal	
					CI	CD
A	B	0° 0' 15"	45° 00´00"	0° 0' 21"	30° 25' 16"	210° 24' 34"
	C		20° 00´00"	0° 0' 16"	30° 25' 11"	210° 24' 39"
	D		0° 00´00"	0° 0' 15"	30° 25' 10"	210° 24' 40"
	E		-20° 00´00"	0° 0' 16"	30° 25' 11"	210° 24' 39"

En la tabla 5.1 se analizará el caso particular del punto que se colima con un ángulo de altura de 45º 00’ 00”. En este teodolito debería leerse al colimar un punto B las siguientes lecturas acimutales teóricas:

CI= 30º 24’ 55”

CD=210º 24’ 55”

Pero como existe un error c=0º00’15” las lecturas serán afectadas por su efecto. Si el punto B se encuentra elevado a 45º sobre el horizonte; medida que se obtiene leyendo en el limbo vertical.

La influencia c' se calcula:

$$c' = \frac{c}{\cos h} = \frac{0º0'15"}{\cos 45º00'00"} = 0º00'21"$$

Por lo tanto, las lecturas serán (tabla 5.1):

CI= 30º 24' 55" + 0º 00' 21"= 30º 25' 16"

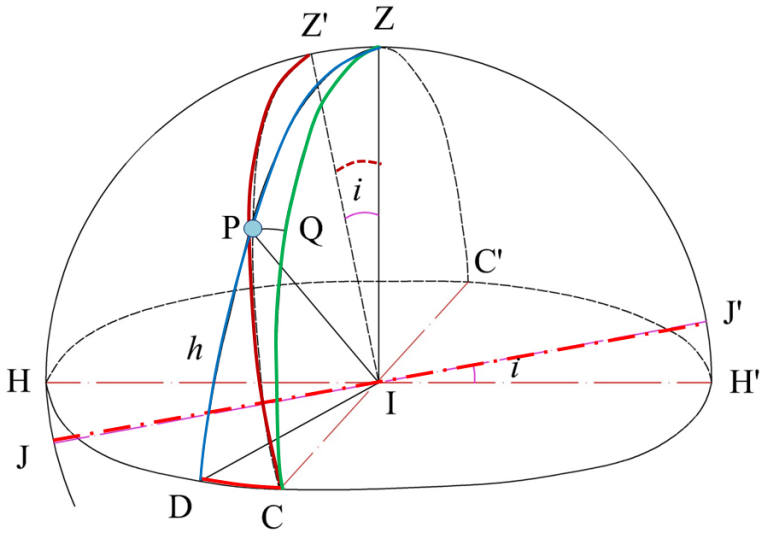
CD=210º 24´ 55" - 0º 00' 21"= 210º 24' 34"

Estas últimas son las lecturas que realmente se realizan en el limbo horizontal al medir la dirección al punto B por el método de Bessel.

Error de Inclinación del Eje Secundario.

Si el eje secundario no fuese perpendicular al eje principal, el teodolito estará afectado por un error de inclinación del eje secundario (i). Este error del instrumento tendrá su influencia en la medición de direcciones en el limbo acimutal, denominada i´ (efecto de i). El error de inclinación del eje secundario i solamente afecta a las lecturas del limbo acimutal, no a las lecturas del limbo vertical.

Figura 5.4. *Error de inclinación del eje secundario (i) y su influencia en las lecturas acimutales (i').*



En la figura 5.4 (Müller, 1944) el eje secundario debería ocupar la posición HH', pero debido a un error de inclinación i ocupa la posición JJ'. Una visual del anteojo debería recorrer el arco ZQC pero debido al error i recorre el arco Z'PC. En estas condiciones, cuando se colime a un punto P la lectura acimutal será C, pero esta última es la medición que correspondería a un punto Q si ese teodolito no tuviera el error i. La verdadera medida azimutal para el punto P sería D, ya que un plano vertical que contiene al cenit Z y al punto de interés P corta al limbo horizontal en el punto D.

El arco CD es el error en la medición del punto P y se puede designar como i'. Es posible demostrar que i´ es una función de i y de h (Müller, 1944):

$$i' = i \,.\, \tan h$$

donde:

i: error de inclinación del eje secundario del teodolito.

i': influencia del error instrumental i.

h: es el ángulo de altura medido desde el horizonte hasta la visual.

Analizando el caso particular de h=0° se encuentra que cuando el eje de colimación es horizontal el error de inclinación del eje secundario no tiene ninguna influencia en las mediciones del ángulo acimutal, es decir que se anula.

La Figura 5.5 muestra un teodolito afectado por un error de inclinación del eje secundario. Con este instrumento se coliman los puntos P, Q, S y T, que están alineados en la misma dirección de la línea vertical. Idealmente, al colimar cualquier de estos puntos, el plano vertical que contiene el eje de colimación debería pasar por todos los demás. Sin embargo, debido al error de inclinación (i), y suponiendo que es el único error presente, al colimar uno de los puntos y girar luego el anteojo sin cambiar de dirección, el retículo no pasará por los otros puntos. Los registros de las lecturas para los puntos P, Q, S y T se encuentran en la Tabla 5.2. Esta tabla permite analizar la variación de la influencia del error de inclinación del eje secundario (i') con el ángulo de altura (h) para un valor fijo i de 20".

Tabla 5.2. *Influencia del error de inclinación del eje secundario en puntos a diferentes alturas.*

Estación	Punto Visado	c: Error de Colimación	h: Altura	c': Influencia del error de Colimación	Lectura en Limbo Horizontal	
					CI	CD
A	P	0° 0' 20"	30° 00' 00"	0° 0' 12"	235° 06' 02"	55° 05' 38"
	Q		20° 00' 00"	0° 0' 07"	235° 05' 57"	55° 05' 43"
	S		0° 00' 00"	0° 0' 00"	235° 05' 50"	55° 05' 50"
	T		-20° 00' 00"	-0° 0' 07"	235° 05' 43"	55° 05' 57"

Se analiza el caso particular del punto P que se encuentra elevado a 30º sobre el horizonte. La elevación de los puntos se obtiene leyendo en el limbo vertical.

La influencia **i'** se calcula:

$$i' = i \,.\, tgh = 0º00'20" \,.\, tg\ 30º00'00" = 0º00'12"$$

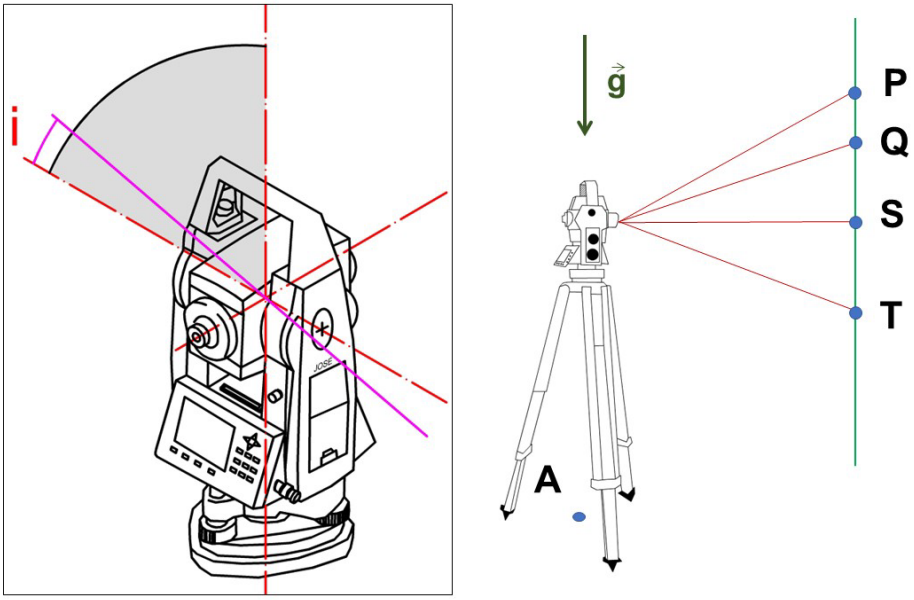
Por lo tanto, las lecturas que se realizan han de ser:

CI= 235º 05' 50" + 0º 00' 12"= 235º 06' 02"

CD=55º 05' 50" - 0º 00' 12"= 55º 05' 38"

Para los restantes puntos Q, S y T los valores de i' cambian dado que son colimados bajo ángulos de elevación diferentes. El valor de i es siempre el mismo (20" en este ejemplo) pero su efecto es variable.

Figura 5.5. *Efecto variable del error de inclinación del eje secundario.*



Efecto combinado de los errores c' e i'

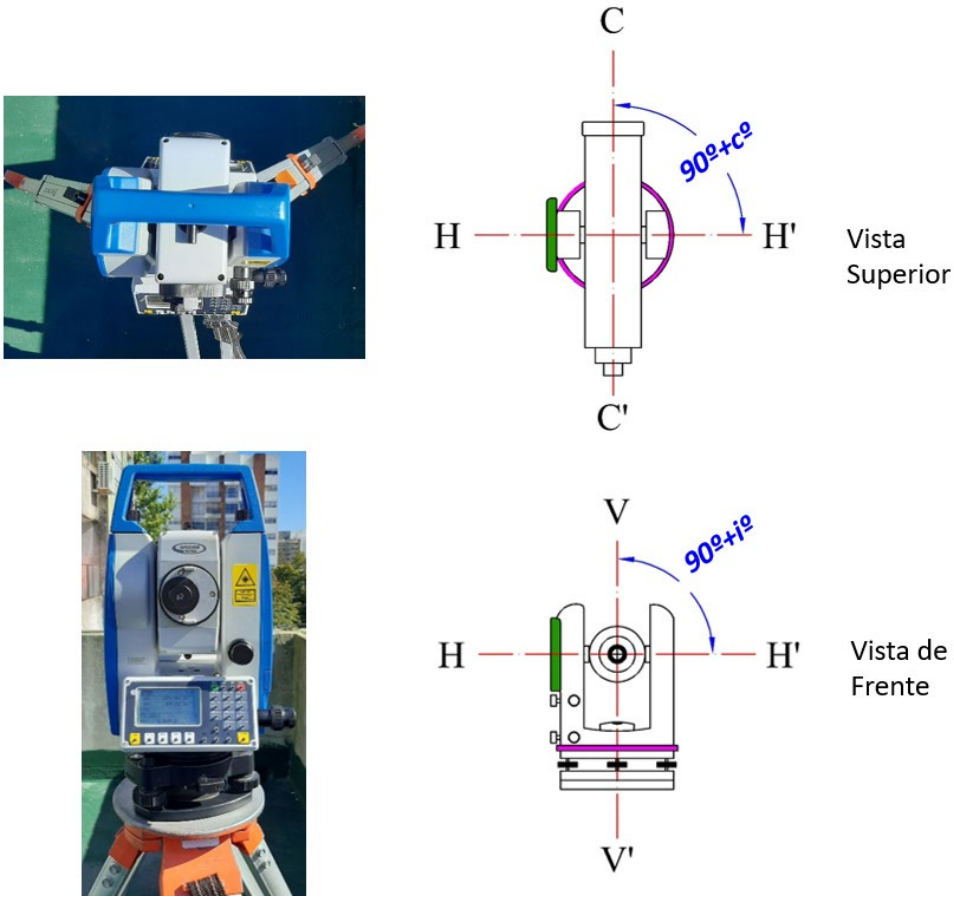
En un teodolito pueden estar presentes uno, ambos o ninguno de estos errores axiales relacionados con los ejes. Cuando se trabaja con un teodolito o estación total cuyo estado se desconoce, se debe asumir que los errores de colimación (c) y de inclinación del eje secundario (i) están presentes. Esta suposición debe mantenerse hasta que se realicen los controles del equipo. Por ello, es fundamental conocer y practicar los procedimientos para determinar la magnitud de estos errores.

En la parte superior de la Figura 5.6 se ilustra el error de colimación en una estación total. En este caso, el eje de colimación CC' no es perpendicular al eje secundario HH', formando un ángulo no recto de (90+c)º en su intersección. En la parte inferior de la figura se muestra el error de inclinación del eje secundario. Los ejes HH' y VV' deberían interceptarse en un ángulo de 90º, pero en realidad forman un ángulo de (90+i)º.

Cuando se realicen mediciones de ángulos horizontales con un teodolito (o estación total) afectado por errores instrumentales c e i, las lecturas acimutales efectuadas estarán bajo la influencia de los dos errores combinados c´e i´. El error que afectará a estas lecturas del limbo horizontal será:

$$e = c' + i'$$

Figura 5.6. *Parte superior error de colimación (c), parte inferior error de inclinación del eje secundario (i).*



El valor del error **e** no es constante, ya que i´ y c' no lo son, el valor que tome el error combinado **e** depende del ángulo de altura h. Este error combinado puede determinarse aplicando el método de Bessel.

Aplicación del método de Bessel para la determinación de los errores de colimación (c) y de inclinación del eje secundario (i)

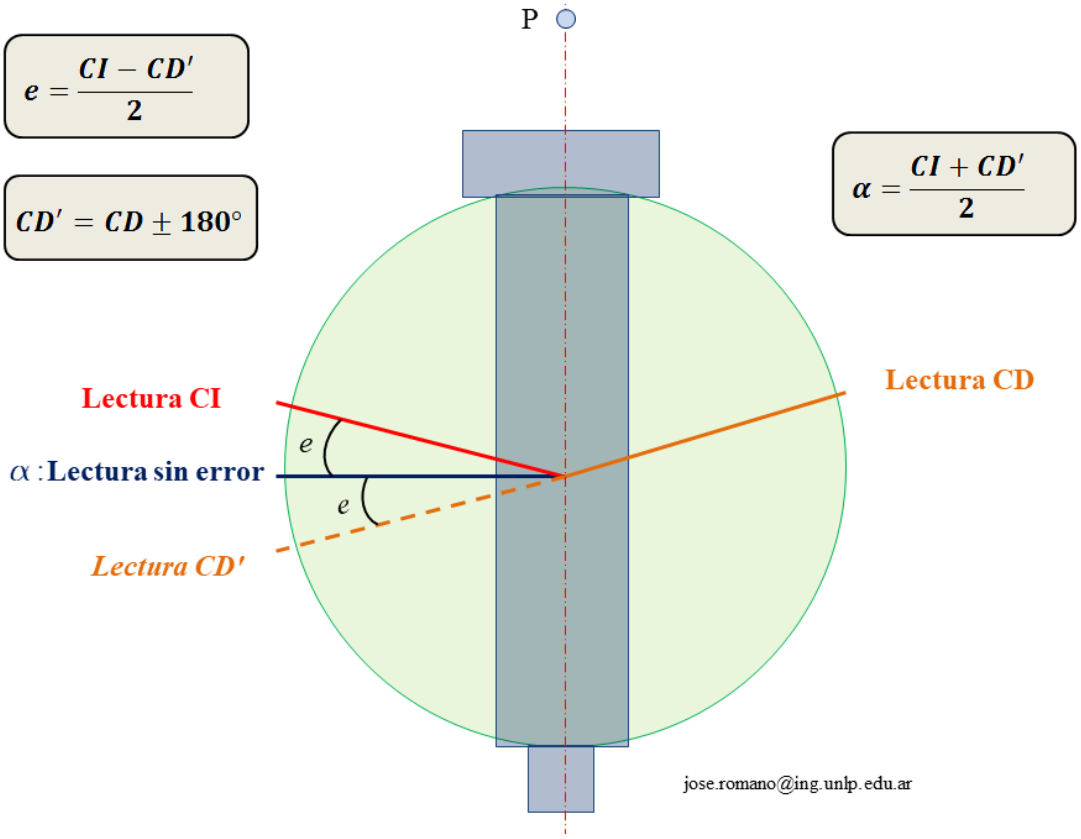
Mediante el método de Bessel puede determinarse el valor del error combinado **e**, pero a priori no se puede determinar cuánto valen i´ y c´ por separado. El objetivo es conocer el valor de los errores de inclinación de eje secundario i y el error de colimación c para un teodolito dado. Para ello se utiliza un procedimiento que consiste en medir una dirección por el método de Bessel a un punto P en el horizonte (h próximo a 0°) y posteriormente a otro punto Q más elevado (h mayor a 30°).

Si sobre un punto se realiza una medición angular por el método de Bessel, pueden ser obtenidas las magnitudes CI y CD. Luego se calcula:

$$e = \frac{CI - CD'}{2}$$

Donde: CD´= CD ± 180°

Figura 5.7. *Las lecturas de círculo izquierda (CI) y de círculo derecha (CD) corresponden al punto P.*



Anteriormente se establecieron las expresiones:

$$c' = \frac{c}{\cos h} \qquad\qquad i' = i \,.\tan h$$

Si se colima un punto P en el horizonte (figura 5.8), es decir **h= 0°**, entonces para ese caso particular:

Si h= 0° => c´=c ; i´=0

El valor e_P se calcula con las mediciones en CI y CD al punto P.

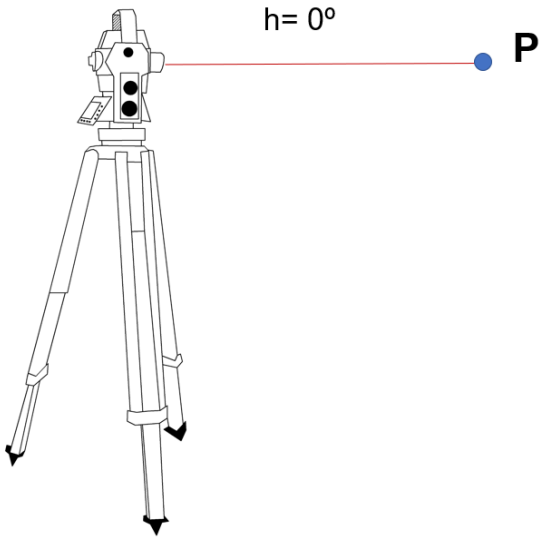
$$e_P = \frac{CI - CD'}{2}$$

Cuando el punto se encuentra en el horizonte, no existe influencia sobre la lectura acimutal del error de inclinación del eje secundario, además el error de colimación y su influencia son iguales:

$e_P = c' + i' = c$ (solamente si h=0°)

Esta situación particular se aprovecha para determinar los errores instrumentales del teodolito. Midiendo una dirección por el método de Bessel a un punto que se halle en el horizonte (h=0°), se determina el valor de **c**. Una vez determinado el valor del error de colimación del teodolito puede calcularse su influencia **c´** para cualquier otro valor de h.

Figura 5.8. *Colimación de un punto P en el horizonte.*

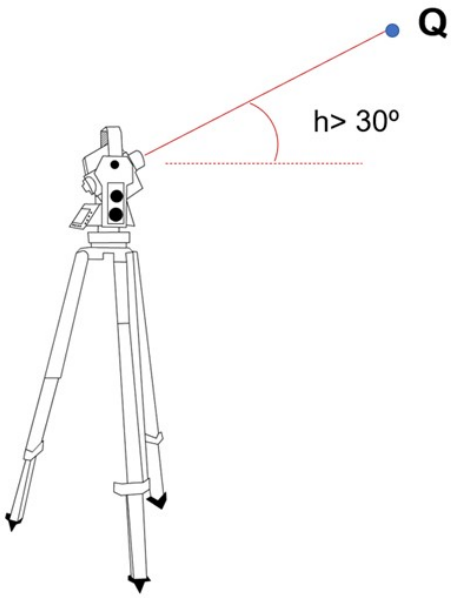


Posteriormente, se debe realizar la medición por el método de Bessel de la dirección a un punto elevado Q (figura 5.9), el ángulo de altura debe superar los 30°, y se determina nuevamente el error combinado **e**, para no generar confusión lo llamaremos $\mathbf{e_Q}$.

$$e_Q = \frac{CI - CD'}{2}$$

Ci y CD son las lecturas realizadas al punto Q.

Figura 5.9. *Colimación de un punto Q con h mayor a 30º.*



El valor de **c** fue obtenido en el paso anterior, entonces **c´** puede ser calculado:

$$c' = \frac{c}{\cos h_Q}$$

Como se está trabajando con las mediciones al punto Q, la influencia de c calculada es para dicho punto, por ello se utiliza el ángulo de altura correspondiente h_Q.

Luego se puede calcular **i'**:

$$e_Q = i' + c'$$

$$i' = e_Q - c'$$

Obtenido el valor de **i'** posteriormente se calcular el valor de **i**:

$$i' = i \,.\, \tan h_Q \qquad \Rightarrow \qquad i = \frac{i'}{\tan h_Q}$$

Dado que el punto Q se colima con un ángulo de elevación denominado $\mathbf{h_Q}$, igual o mayor a 30º, este es el valor que se utiliza para el cálculo del error **i**.

Finalizado este procedimiento, han sido determinados los valores de los errores de colimación (c) y de inclinación del eje secundario (i) para el teodolito analizado. Lo que permite en un futuro, medir solamente en CI y luego en gabinete corregir esas observaciones; siempre y cuando se realice la medición de cada punto en ambos limbos.

Cuando este mismo procedimiento se realiza con estaciones totales, las magnitudes de c y de i quedan almacenadas en la memoria interna del equipo. Luego de forma automática son corregidas las mediciones, en cualquiera de los dos círculos.

Error de índice

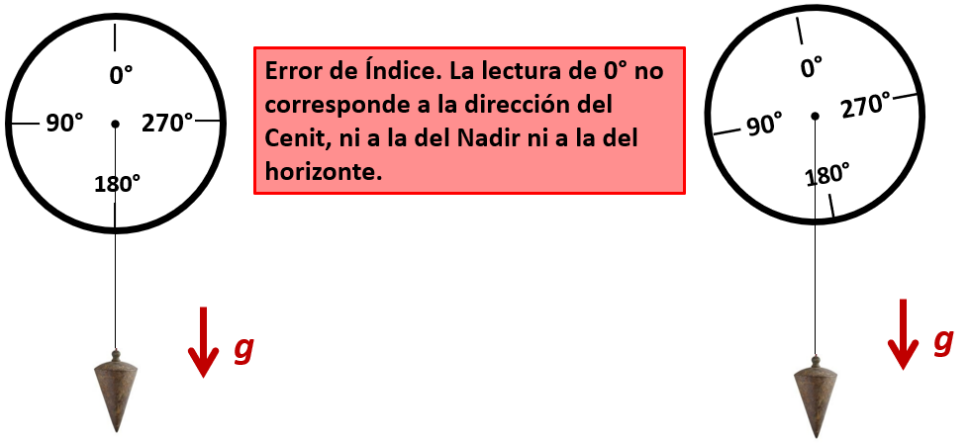
Al medir ángulos horizontales, la posición de la marca correspondiente a la graduación de cero grados (0º) en el limbo acimutal es prácticamente arbitraria; es decir, no es necesario que esta marcación tenga una orientación específica. En contraste, al medir ángulos verticales, la posición de la marcación de 0º en el limbo es fundamental, ya que debe alinearse con la dirección de la vertical del lugar.

Cuando se miden ángulos horizontales, el ángulo de interés se calcula como la diferencia entre dos direcciones, las cuales se miden a partir del 0º del limbo acimutal, cuya ubicación es arbitraria. En la medición de ángulos verticales, una sola medición es suficiente para definir la magnitud de interés, ya que la posición de la marca de 0º en el limbo vertical no es arbitraria. Los teodolitos están diseñados de manera que la línea de ceros del limbo vertical coincida con la dirección de la vertical cuando el instrumento está en condiciones de trabajo (calado).

Un teodolito presenta un error de índice (ε) cuando la lectura de 0° del limbo vertical no corresponde a la colimación de un punto en el cenit, nadir o horizonte, dependiendo del modelo del teodolito, como se ilustra en la figura 5.10.

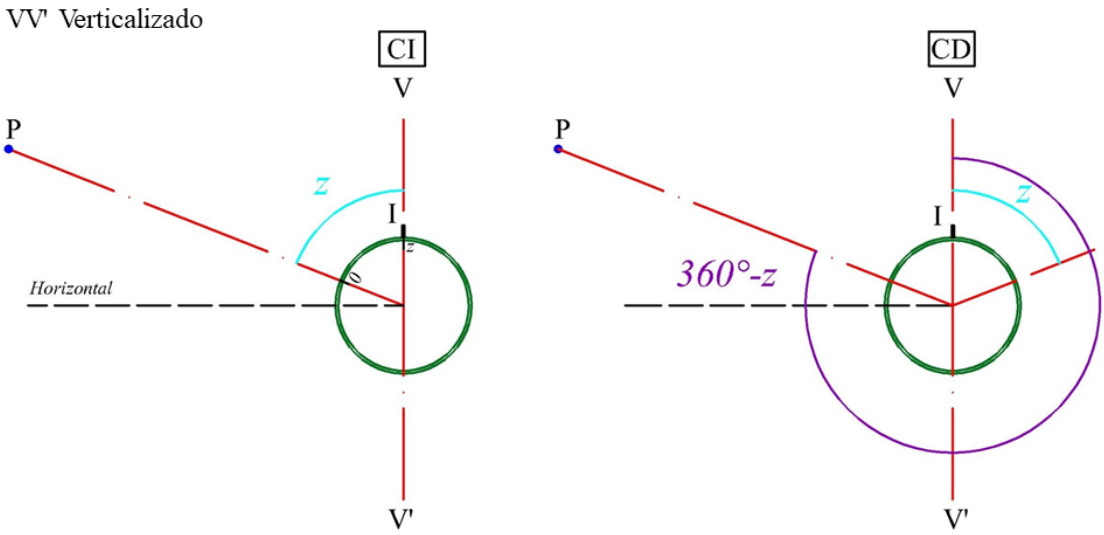
El cenit, el nadir y el horizonte son elementos teóricos que no pueden materializarse. Por lo tanto, para determinar si un teodolito tiene error de índice, se aplica el método de Bessel a las lecturas del limbo vertical. A continuación, se explica este proceso para un teodolito con limbo cenital, aunque es aplicable de manera similar a otros tipos de limbos.

Figura 5.10. *Representación esquemática del error de índice.*



En la figura 5.11 se describen dos esquemas correspondientes a la medición del ángulo cenital de un punto P aplicando el método de Bessel. En la parte izquierda de esa figura, se colima al punto P y se obtiene una lectura de CI de valor **z**, se puede apreciar que el índice **I**, referencia para las lecturas cenitales, se encuentra en una posición de coincidencia con la vertical. El ángulo cenital **z** se mide desde el índice I (dirección cenital) hasta el eje de colimación. Luego, tras realizar una vuelta de campana se realiza en CD otra lectura de P, como el círculo vertical giró 180° con respecto a P la lectura registrada será **360°-z**.

Figura 5.11. *Medición de un ángulo vertical por el método de Bessel en un teodolito sin error de índice.*



De acuerdo con la figura 5.11, se tendrán las lecturas del limbo vertical:

- CI: z
- CD: 360°-z

Si el índice se ubica en su posición ideal se sebe verificar la siguiente igualdad:

$$CI + CD = z + (360° - z)$$

$$CI + CD = 360°$$

Si tras realizar las lecturas del limbo vertical se verifica que la suma de CI y CD es exactamente igual a 360°00'00", se concluye que el teodolito no presenta error de índice (ε). Sin embargo, si dicha suma es distinta a 360°, se interpreta que existe un error de índice en el instrumento. Para afirmar la presencia de este error, la diferencia entre la suma de CI y CD y los 360° debe ser significativa en relación con la precisión angular del teodolito, teniendo en cuenta que siempre existen errores accidentales.

En la figura 5.12 se puede encontrar la situación de un teodolito afectado por un error de índice, este se debe a que el índice de referencia I no se ubica en su posición ideal, sino que se aparta de la misma un ángulo ε. Por lo tanto, las lecturas del limbo cenital registradas serán:

CI: z + ε

CD: 360° - z + ε

Al realizar la suma de esas dos lecturas:

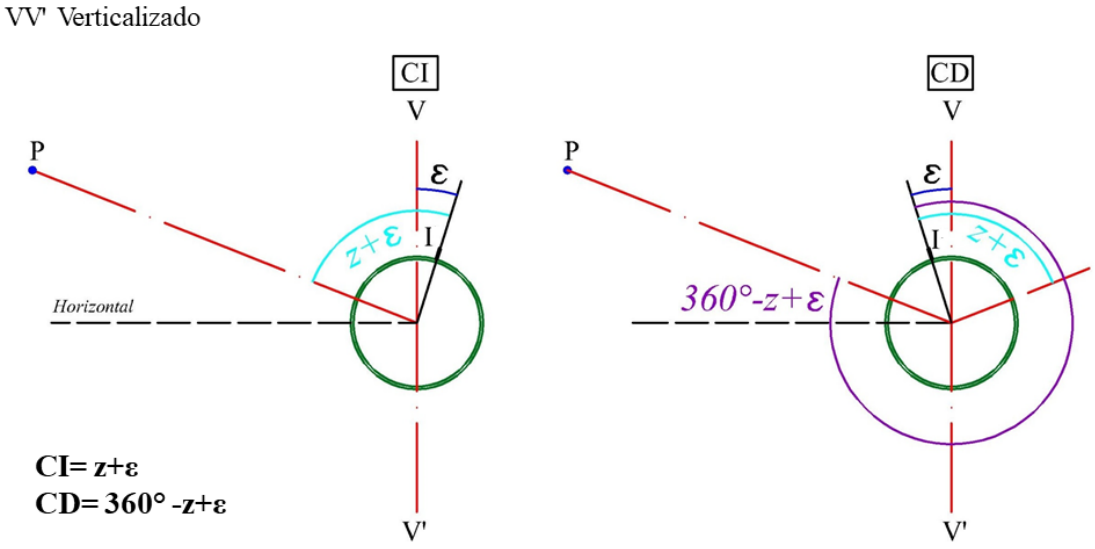
$$CI + CD = (z + \varepsilon) + (360° - z + \varepsilon)$$

$$CI + CD = 360° + 2\varepsilon$$

El error de índice puede obtenerse de la expresión:

$$\boldsymbol{\varepsilon = \frac{CI + CD - 360°}{2}}$$

Figura 5.12. *Ángulo vertical medido al punto P con un teodolito que presenta un error de índice (ε).*



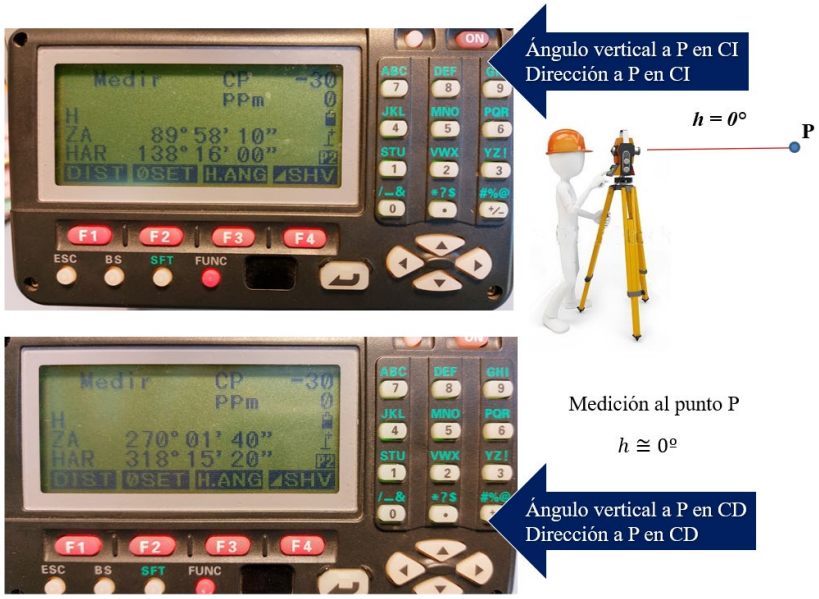
El error de índice afecta a las mediciones cenitales siempre con la misma magnitud y signo. En las mediciones del limbo vertical no existe el concepto de lectura CD´.

Determinación en campo de los errores instrumentales de un teodolito

A continuación, se describe el procedimiento para obtener los errores instrumentales de un teodolito aplicando el método de Bessel. Para identificar qué errores instrumentales están presentes y determinar su magnitud, se mide la dirección y el ángulo vertical hacia un punto P en el horizonte. Posteriormente, se realizan las mismas mediciones hacia otro punto Q, elevado 30º o más sobre el horizonte.

Se inicia este procedimiento midiendo a un punto P en el horizonte (figura 5.13). A los efectos prácticos, no es necesario que el valor de h sea exactamente 0º, pudiéndose encontrar dentro del intervalo de los -5º y los +5º. Téngase en cuenta que el valor de h para un punto dado se obtiene a partir de la lectura en CI del limbo vertical.

Figura 5.13. *Medición de una dirección y un ángulo vertical a P, arriba en CI y abajo en CD.*



Pasando en limpio las lecturas indicadas en la figura 5.13:

Limbo vertical:

CI: 89º 58´ 10” CD: 270º 01´ 40”

Limbo horizontal:

CI: 138º 16´ 00” CD: 318º 15’ 20”

En este equipo las lecturas del limbo vertical son del tipo cenital.

Se comienza calculando el error de colimación del instrumento:

El ángulo de altura en P es:

h_P= 90º - 89º 58’ 10”= 0º 01’ 50”

Este es un valor aproximado porque CI no se corrigió aún por error de índice.

Se efectúa el cálculo del error de colimación (c) utilizando las lecturas del limbo acimutal. Se observa que h en P está en el rango de +/-5º, por lo que se puede considerar similar a cero (0º) y, por lo tanto:

Si h=0º entonces c=c' ; i´=0.

En este caso particular e=c

El error en la dirección en P se calcula:

$$e_P = c = \frac{CI - CD'}{2}$$

$$CD' = 318º\ 15'\ 20" - 180º$$

$$e_P = c = \frac{138º\ 16'\ 00" - 138º\ 15'\ 20"}{2} = 0º\ 00'\ 20"$$

El error de colimación es **c= +20"**

Las lecturas corregidas para P en el limbo acimutal son:

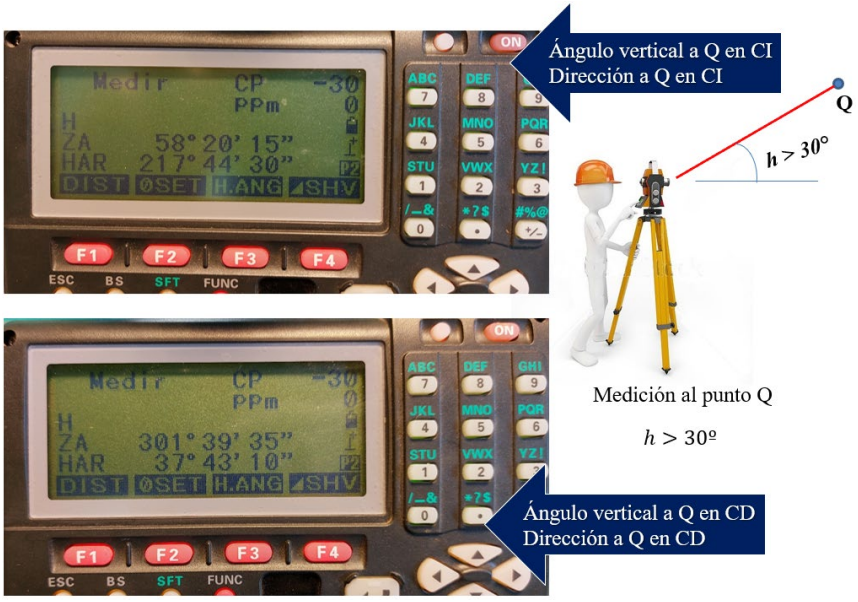
138º 16' 00" – 0º 00' 20"= 138º 15' 40"

318º 15' 20" + 0º 00' 20"= 318º 15' 40"

Se verifica que para estas lecturas corregidas CI=CD'

Luego se trabaja con las mediciones al punto Q (figura 5.14) elevado a más de 30º sobre el horizonte (h>30º).

Figura 5.14. *Mediciones a Q en ambos limbos, arriba en CI y abajo en CD.*



Se procede a calcular utilizando las lecturas realizadas a un punto Q (figura 5.14):

Limbo Vertical:

CI: 58º 20´ 15" CD: 301º 39´ 35"

Limbo Horizontal:

CI: 217º 44' 30" CD: 37º 43' 10"

- Cálculo del error de índice (ε)

Utilizando las lecturas del limbo vertical:

$$\varepsilon = \frac{58º\ 20'\ 15" + 301º\ 39'\ 35" - 360º00'00"}{2} = -0º00'05"$$

El error de índice es **ε= -05”**

Lecturas corregidas del limbo vertical en Q:

58º 20’ 15” – (-0º 00’ 05”)= 58º 20’ 20”

301º 39’ 35” – (-0º 00’ 05”)= 301º 39’ 40”

Se debe verificar:

58º 20’ 20” + 301º 39’ 40”= 360º 00’ 00”

Ángulo de altura en Q (h_Q):

Se utiliza la lectura de CI corregida:

$$h_Q = 90º - 58º\ 20'\ 20" = \ 31º\ 39'\ 40"$$

- Cálculo del error de inclinación de eje secundario (i)

Se trabajará con las direcciones medidas a Q y con los errores ya calculados:

c= +20” y ε= -05”.

Error en la dirección a Q (e_Q):

CD’= 37º 43’ 10” + 180º= 217º 43’ 10”

$$e_Q = \frac{217°\ 44'\ 30" - 217°\ 43'\ 10"}{2} = 0°\ 00'40"$$

Este error de +40” es una combinación de los efectos c’, i’

$$e_Q = c' + i'$$

Dado que Q está bastante por encima del horizonte, no se pude hacer la presunción de que c=c´ y que i´=0. Pero, dado que c se calculó previamente (en el punto P), puede calcularse c’ para la dirección medida en Q, contando además con la medida del ángulo de altura h_Q:

$$c' = \frac{c}{\cos h_Q} = \frac{20"}{\cos 31º\ 39'\ 40"} = 23{,}5"$$

Entonces, se cuenta con la igualdad:

$$e_Q = c' + i'$$

$$40" = 23{,}5" + i'$$

Despejando i’ se llega a que:

$$i' = 40 - 23{,}5" = 16{,}5"$$

Luego puede ser calculado el error i:

$$i' = i\ tgh_Q$$

En el punto Q se tiene:

$$16{,}5" = i\ .tg\ 31º\ 39'\ 40"$$

$$i = \frac{16{,}5"}{tg\ 31º\ 39'\ 40"} = 26{,}8"$$

El error de inclinación del eje secundario es **i= +26,8”**

Las lecturas corregidas para el limbo acimutal en Q serán:

217º 44’ 30” – 0º 00’ 40”= 217º 43’ 50”

37º 43’ 10” + 0º 00’ 40”= 37º 43’ 50”

Se verifica CI=CD´.

Errores del teodolito. Ejemplos resueltos.

En las siguientes páginas se resuelven varios casos prácticos que pueden surgir en distintas situaciones. Cada ejemplo utiliza diferentes instrumentos y mediciones, y es independiente de los demás. El objetivo es presentar diversos enfoques para abordar la problemática, de manera que los estudiantes puedan aplicar distintas perspectivas en el análisis y resolución de los casos.

Ejemplo 5.1

Utilizando un teodolito con limbo **cenital** se realizaron las siguientes lecturas (tabla 5.3) a dos puntos por el método de Bessel.

Tabla 5.3. *Mediciones angulares para el ejemplo 5.1.*

Estación	Punto Visado	Limbo Horizontal.		Limbo Cenital.	
		CI	CD	CI	CD
O	P	327" 40' 10"	147° 40' 10"	89° 59' 55"	269° 59' 55"
	Q	98° 14' 35"	278° 15' 15"	65° 00' 10"	294° 59' 40"

Se necesita determinar:

¿Qué errores del tipo instrumental están afectando al teodolito utilizado? ¿Cuáles son sus magnitudes?

Solución:

Como primer paso, para poder calcular h en ambos puntos, deben corregirse las lecturas verticales por efecto del error de índice (ε).

Error de índice en la lectura vertical a P:

$$\varepsilon_P = \frac{89º59'55"+269º59'55" - 360º00'00"}{2} = -0º00'05"$$

Error de índice en la lectura vertical a Q:

$$\varepsilon_Q = \frac{65º00'10"+294º59'40" - 360º00'00"}{2} = -0º00'05"$$

El error de índice afecta a todas las mediciones verticales con el mismo signo y magnitud. Por ese motivo es de esperar que en ambos casos el resultado fuese -5”.

Las lecturas verticales corregidas son:

OP CI= 89º59’55” – (-0º00’05”)= 90º00’00”

OP CD= 269º59’55” – (-0º00’05”)= 270º00’00”

Se verifica: 90º00’00”+ 270º00’00”=360º00’00”

OQ CI= 65º00’10” – (-0º00’05”)= 65º00’15”

OQ CD= 294º59’40” – (-0º00’05”)= 294º59’45”

Se verifica: 65º00’15”+294º59’45”=360º00’00”

Con las lecturas CI corregidas se calculan los ángulos de altura:

h=90º - z

OP: h_P= 90º00’00” - 90º00’00”= 0º00’00”

OQ: h_Q= 90º00’00” - 65º00’15”= 24º59’45”

Primera conclusión:

Ya se demostró la existencia de un error de índice, y se calculó su valor, éste afecta a las lecturas del limbo vertical.

En cuando al limbo horizontal:

El error acimutal en P es (e_P):

CD’$_P$= 147°40’10” + 180°= 327°40’10”

$$e_{\mathrm{P}} = \frac{327°40'10" - 327°40'10"}{2} = \mathbf{0°00'00}"$$

El error acimutal **e** para el punto P es cero, además antes se calculó su ángulo de altura (h_P= 0º). Hay que recordar que el error de colimación se evalúa en puntos sobre el horizonte.

Si h=0º entonces e=c

Como en este caso e=0 entonces c=0

Se puede concluir que no existe error de colimación en este teodolito (c=0).

Para analizar que sucede con el error de inclinación del eje secundario, debe utilizarse un punto que este elevado a h>30º sobre el horizonte, es por ello por lo que se utiliza Q.

En cuando al limbo horizontal, el error acimutal en Q es:

CD’$_Q$= 278°15’15” - 180°= 98°15’15”

$$e_{\mathrm{Q}} = \frac{98°14'35" - 98°15'15"}{2} = -\mathbf{0°00'20}"$$

Como antes se determinó que este teodolito no tiene error de colimación (c=0), se puede afirmar que el error e_Q es completamente causa de la inclinación del eje secundario. Entonces, <u>para este teodolito en particular</u> se puede calcular:

e =c’ + i’ c’=0 e=i’

Se utiliza el valor de h obtenido para el punto Q:

$$i = \frac{i'}{\tan h_Q} = \frac{-0º00'20"}{\tan 24º59'45"} = -0º00'43"$$

Respuesta:

Los errores instrumentales que afectan al teodolito con el que se realizaron las mediciones son:

- Error de inclinación del eje secundario (limbo Hz): i= -0º00’43”
- El error de colimación no afecta a las mediciones de ese teodolito (c=0)
- Error de índice (limbo V): ε= -0º00’05”

Ejemplo 5.2

En este ejemplo, se puede apreciar la utilidad de conocer los errores instrumentales de un teodolito en los casos en que se realicen lecturas únicamente en un solo círculo (CI o CD).

Con un teodolito de limbo **nadiral** se colimó a un punto R.

Se sabe que los errores de ese instrumento son:

i= 50 segundos c=20 segundos

También se sabe que este equipo no tiene error de índice (ε= -0º00'00") .

La lectura acimutal en CD es 235°30'00".

La lectura vertical en CD es 239°30'00".

Debe calcularse:

a) La lectura acimutal en CI afectada por los errores.
b) La lectura acimutal en CI corregida.
c) La lectura acimutal en CD corregida.

Solución:

Primero se calcula el valor del ángulo de altura h_R:

$$\varepsilon = 0 = \frac{CI + CD - 360º}{2}$$

$$CI = 360º - CD = 360º - 239º30'00" = \ 120º30'00"$$

Se ha mencionado que el teodolito de este ejemplo no tiene error de índice (ε=0º), además posee un limbo nadiral. El ángulo de altura h es:

h_R= 120º30'00" – 90º= 30º30'00"

Cálculo del error acimutal e para el punto R:

$$c' = \frac{c}{cosh} = \frac{20"}{\cos 30º30'00"} = 23{,}2"$$

$$i' = i.\tan h = 50" \,.\tan 30º30'00" = 29{,}4"$$

$$e_R = c' + i' = 23{,}2" + 29{,}4" = 52{,}6"$$

Se redondea el valor de e para el punto R a 53".

Cálculo de las lecturas:

$$CD' = CD \pm 180º = 235º30'00" - 180º = 55º30'00"$$

$$e = \frac{CI - CD'}{2} \quad => \quad CI = 2e + CD' = 2\,.\,0º00'53 + 55º30'00 = 55º31'46"$$

$$\alpha = Promedio = \frac{CI + CD'}{2} = \frac{55º31'46" + 55º30'00"}{2} = 55º30'53"$$

Se calculan las lecturas acimutales corregidas:

$$\mathrm{CI_c} = 55º31'46" - (0°00'53") = \mathbf{55°30'53}$$

$$\mathrm{CD_c} = 235°30'00" + (0°00'53") = \mathbf{235°30'53}$$

Se verifica: $\boldsymbol{CI_c = CD_c - 180°}$

Es correcto que el valor del promedio coincida con la lectura en CI corregida.

Respuestas:

La lectura acimutal (dirección) en CI afectada por los errores: 55º31'46"

La lectura acimutal (dirección) en CI corregida: 55º30'53"

La lectura acimutal en CD corregida: 235º30'53"

Ejemplo 5.3

Con un teodolito de limbo **nadiral** estacionado sobre el punto O se midió una dirección y un ángulo vertical a un punto Q obteniéndose las lecturas volcadas en la tabla 5.4.

Tabla 5.4. *Mediciones angulares del ejemplo 5.3.*

Estación	Punto Visado	Limbo Horizontal.		Limbo Cenital.	
		CI	CD	CI	CD
O	Q	355° 59' 55"	176° 00' 35"	128° 33' 55"	231° 26' 19"

Sabiendo que el instrumento utilizado no tiene error de inclinación del eje secundario, determine:

a) ¿Qué errores instrumentales afectan a las mediciones hechas en cada limbo?
b) Cuáles son los valores de esos errores y sus influencias según corresponda.
c) Cuáles son las lecturas corregidas en ambos limbos para CI y CD y verifique.

Solución:

Errores del limbo vertical:

$$\varepsilon = \frac{CI + CD - 360º}{2} = \frac{128º33'55" + 231º26'19" - 360º}{2} = 0º00'07"$$

Las lecturas corregidas para el limbo vertical son:

$$\mathrm{CI_c} = 128º33'55" - (0°00'07") = 128º33'48"$$

$$\mathrm{CD_c} = 231º26'19" - (0°00'07") = 231º26'12"$$

Se verifica: $128º33'48" + 231º26'12" = 360º00'00"$

El ángulo de altura h para el punto Q se calcula:

h_Q= 128º33'48" – 90º= 28º33'48"

Errores del limbo horizontal:

Se tiene como dato que el error de inclinación del eje secundario es cero (i=0°)

Entonces, para este teodolito, el error acimutal (e) en el punto Q es igual a la influencia del error de colimación (c'):

e=c'+i' si i=0 entonces e=c'

$$CD' = 176º00'35" + 180º = 356º00'35"$$

$$c' = e_Q = \frac{355°59'55" - 356°00'35"}{2} = -0°00'20"$$

$$c = c'.\cos h = -0º00'20" . \cos 28º33'48" = -0º00'18"$$

Las lecturas corregidas para el limbo acimutal son:

$$\mathrm{CI_c} = 355°59'55" - (-0°00'20") = 356°00'15"$$

$$\mathrm{CD_c} = 176º00'35" + (-0°00'20") = 176º00'15"$$

Se verifica que CI_c= CD'_c+180º.

Respuestas:

Errores instrumentales que afectan a las mediciones hechas en cada limbo:

Al limbo acimutal lo afecta un error de colimación (c) y al limbo vertical un error de índice (ε). No hay error de inclinación del eje secundario.

Los valores de esos errores y sus influencias son:

c=-0º00'18"

c'=-00º00'20"

ε=0º00'07"

Las lecturas corregidas en ambos limbos son:

Limbo vertical: CI= 128º33'48" CD=231º26'12"

Limbo horizontal: CI= 356º00'15" CD=176º00'15"

Corrección automática de errores en estaciones totales

Los teodolitos modernos, del tipo electrónico, suelen estar integrados con un distanciómetro electroóptico y un sistema inteligente embebido (computadora), formando lo que se conoce como estaciones totales.

Las estaciones totales tienen la capacidad de corregir automáticamente las mediciones de ángulos horizontales y verticales, aplicando correcciones a diversos errores instrumentales. Por ejemplo, mediante un simple ajuste, el error de índice del limbo vertical puede determinarse, almacenarse en la memoria del equipo y aplicarse automáticamente cada vez que se mide un ángulo vertical. De manera similar, se corrigen los errores sistemáticos que afectan la medición de direcciones (Wolf, 2016).

El procedimiento para determinar los errores instrumentales ε, i y c en teodolitos convencionales es idéntico al que se emplea en las estaciones totales. Aplicando el método de Bessel se realizan las mediciones necesarias, luego el equipo calcula la magnitud de estos errores y los guarda en su memoria interna. Posteriormente, a menos que se requiera una elevada precisión, es suficiente realizar las mediciones solo en CI.

Conocidas las magnitudes de los errores sistemáticos del tipo instrumental ε, i y c la computadora del equipo puede aplicar en tiempo real las correcciones:

Limbo vertical:

$$CI_c = CI_L - \varepsilon$$

Siendo CI_c la lectura corregida dada por el instrumento a partir de la lectura cruda CI_L.

Limbo Horizontal:

$$CI_c = CI_L - \frac{c}{\cos h} - i \tan h$$

Donde CI_c es la lectura corregida dada por el instrumento a partir de la lectura cruda CI_L.

El ángulo de altura h es medido directamente por el equipo, y se determina a partir de la lectura corregida del limbo vertical.

En ambos limbos, cada punto se puede medir únicamente en CI, si así se lo requiere, y las correcciones se aplican de manera automática.

Compensador de doble eje

La mayoría de las estaciones totales cuentan con dispositivos conocidos como compensadores automáticos, los cuales tienen la capacidad de corregir el efecto causado por la imperfecta verticalidad del eje principal en un rango de trabajo de unos pocos minutos de arco. Estos instrumentos, mediante mecanismos sensibles al grado de inclinación, realizan automáticamente la medición de la magnitud y dirección de la falta de verticalidad. Posteriormente, calculan y aplican correcciones a las direcciones y ángulos verticales medidos en estas condiciones.

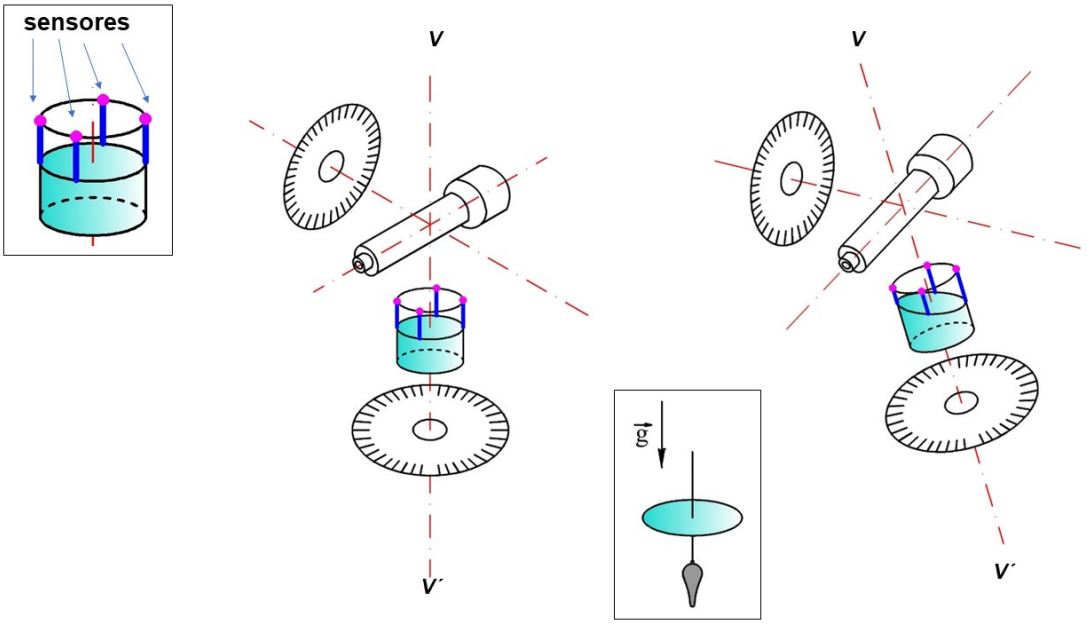
Tanto la estación total como el teodolito son instrumentos que, para realizar mediciones, requieren que su eje principal esté verticalizado, utilizando la dirección de la gravedad como referencia (la línea de la plomada). Para establecer esta referencia, los compensadores automáticos emplean la superficie de un líquido en reposo, generalmente un gel siliconado.

Uno de los modelos de compensadores comúnmente utilizado incorpora un sistema electrónico de nivelación de doble eje, en el cual cuatro sensores son empleados para detectar una superficie líquida. Tras llevar a cabo una nivelación preliminar mediante niveles de aire, las señales provenientes de los sensores se someten a un proceso de análisis para generar una representación visual en la pantalla. Esta imagen sirve de guía al operador durante la fase de calado del instrumento (Wolf, 2016).

La figura 5.15 presenta un esquema que describe el modelo de compensador de doble eje mencionado en el párrafo anterior. En la parte izquierda de la figura, se representa el eje principal VV´ verticalizado, donde los cuatro sensores perciben la misma medida sobre la superficie líquida de referencia. En contraste, en la parte derecha de la figura, se muestra el eje principal desviado ligeramente de la posición de verticalidad, lo que resulta en medidas distintas de los sensores.

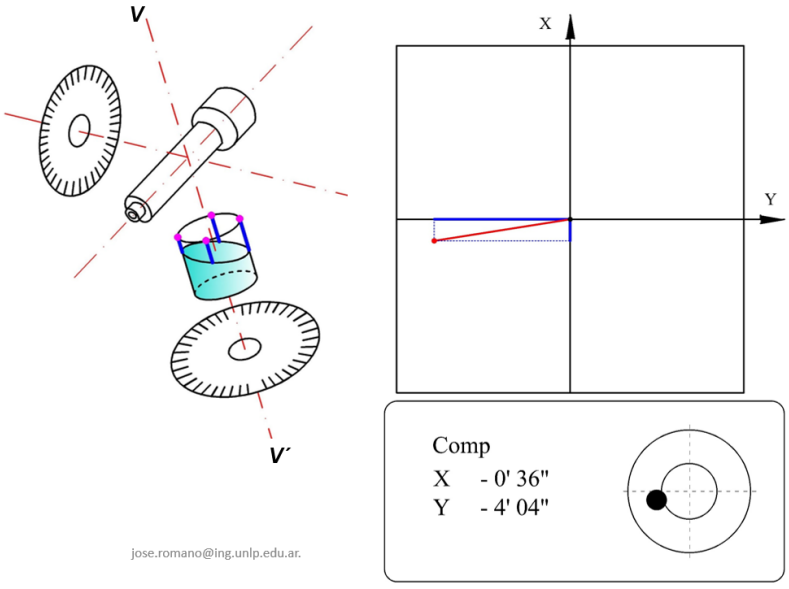
El análisis de la figura 5.15 (izquierda) muestra que cuando el eje principal VV' ha sido verticalizado, los valores medidos por los cuatro sensores sobre el líquido en reposo son idénticos. Esta condición se observa claramente en la esquina superior izquierda de la figura. En cambio, si el eje principal VV' no está en posición vertical, las mediciones de los cuatro sensores sobre el líquido serán diferentes, como se ilustra en la parte derecha de la figura 5.15. El análisis de las diferencias entre las cuatro medidas permite determinar tanto la magnitud como la dirección de la máxima inclinación del eje principal.

Figura 5.15. *Esquema de un compensador de doble eje.*



Las mediciones efectuadas por los sensores en la superficie del líquido en reposo son procesadas en tiempo real por la computadora del equipo. A partir de estos datos, la computadora calcula el grado de inclinación del eje principal y su dirección. Este sistema compensador de doble eje tiene la capacidad de presentar esta información en la pantalla del equipo mediante datos numéricos o gráficos. Es común que se permita la visualización de un nivel electrónico, similar al mostrado en la figura 5.16.

Figura 5.16. *La inclinación del eje principal es descompuesta en dos direcciones X e Y.*

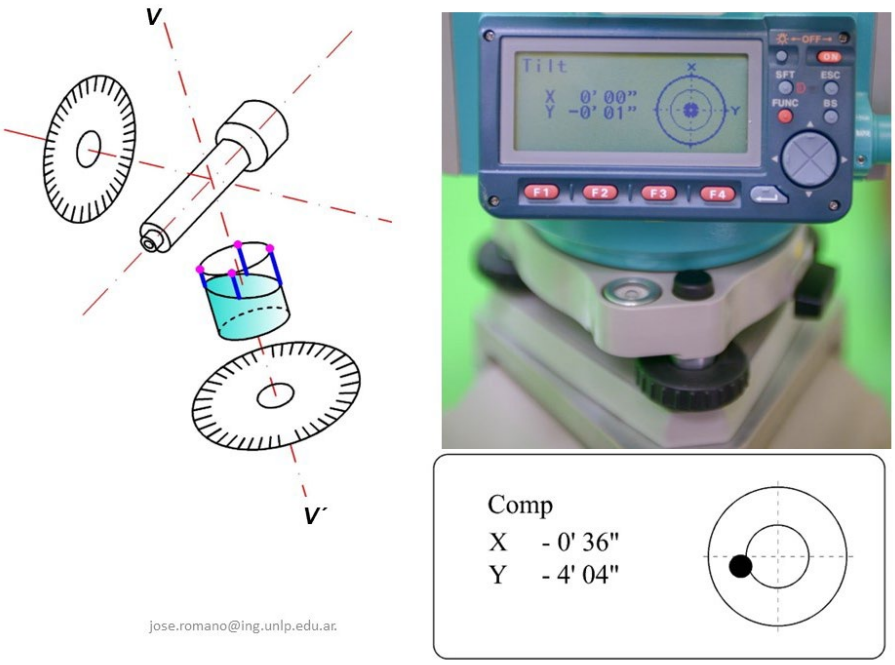


La inclinación del eje principal respecto a la línea de la vertical es descompuesta en dos direcciones: X e Y. De tal modo que la magnitud y la dirección de esa inclinación puede ser indicada al operador del equipo. Utilizando los tres tornillos calantes puede llevarse el eje principal a la

posición de verticalidad. Cuando se trabaja con estos dispositivos electrónicos no es necesario hacer girar el instrumento alrededor de su eje principal en el proceso de nivelación.

En la figura 5.17 se representa mediante una fotografía y un esquema el nivel electrónico de una estación total. En la fotografía se ve el nivel calado, en el esquema de la parte inferior se muestra un esquema del nivel antes de ser calado.

Figura 5.17. *Nivel electrónico.*



Luego de este procedimiento de calado, la magnitud y dirección de cualquier desnivel remanente es automática y continuamente recibida por el microprocesador, el cual corrige los ángulos horizontales y verticales en tiempo real.

Si la estación total dispone de compensador de doble eje, que es lo más habitual en los equipos actuales, puede suponerse que el error (tipo accidental) de verticalidad ha sido a los fines prácticos eliminado en las mediciones que se realicen en ambos limbos.

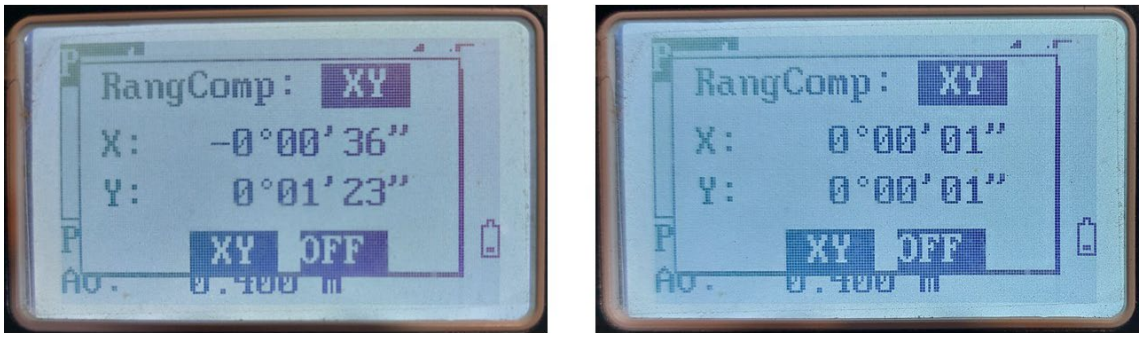
La figura 5.18 ilustra una estación total equipada con un compensador de doble eje, que se caracteriza por no emplear la representación digital de niveles de aire. Este modelo exhibe directamente la magnitud angular de la inclinación del eje principal, descompuesta en las direcciones X e Y. En el lado izquierdo de la figura, se presenta el estado del equipo después de realizar un calado preliminar (calado grueso), aunque el eje principal aún no ha alcanzado la vertical suficientemente para iniciar las mediciones topográficas. Se observa una inclinación de -0º00’36” en X y de 0º01’23” en Y.

Es relevante señalar que las direcciones X e Y se refieren a un sistema cartesiano bidimensional relativo exclusivamente a la alidada, sin conexión con direcciones específicas en el terreno. En el lado derecho de la figura 5.18, se muestra la pantalla de la estación total después de realizar el calado del equipo mediante los tres tornillos calantes. Toda la información digital

visualizada en la pantalla proviene del procesador de la estación total, que se basa en los datos recopilados por el compensador de doble eje.

Figura 5.18

Ejemplo de calado de una estación total con compensador de doble eje.



Referencias

MÜLLER, Roberto (1944). *Teodolitos y Poligonaciones*. Librería: “EL ATENEO”.

WOLF, Paul y GHILANI Charles (2016). *Topografía*. Alfaomega.

CAPÍTULO 6
Cálculos Topográficos

Roberto José Romano

Localización de puntos sobre un plano

La Topografía tiene por objeto determinar la posición relativa de puntos terrestres. Las actividades desarrolladas con este objetivo pueden dividirse en tres etapas: Medición, Cálculo y Representación. La segunda de las etapas antes enumeradas hace referencia a los cálculos topográficos necesarios para representar sobre un plano los elementos puntuales medidos sobre el terreno. Por este motivo, deben ser considerados los distintos sistemas de coordenadas bidimensionales. Además, deben tenerse en cuenta las distintas alternativas para definir la dirección de una línea con respecto a otra tomada como referencia.

Una línea, en Topografía, está definida por la ubicación de sus dos puntos extremos sobre la superficie topográfica. Una de las finalidades de la Topografía es la localización de puntos sobre un plano. Un punto se puede determinar si se conocen:

- su dirección y distancia a partir de un punto conocido,
- las direcciones desde dos puntos conocidos,
- las distancias desde dos puntos conocidos o
- la dirección desde un punto conocido y su distancia desde otro también conocido.

Sistemas de referencia utilizados en Topografía

Un sistema de referencia es un conjunto de convenciones que establecen la posición de su origen de coordenadas, y la posición y orientación de una terna de ejes cartesianos. Para conseguir la ubicación de cada punto del terreno en relación con los demás, será necesario establecer un sistema de referencia terrestre. En este, cada punto tendrá una posición única dada por sus coordenadas, convirtiéndolo así en una herramienta imprescindible para la Topografía en lo referido a la localización de cualquier observación que se realice.

Marco de referencia

La materialización de un sistema de referencia se denomina marco de referencia. Un sistema de referencia se materializa a partir de la construcción, la medición y el posterior cálculo de las coordenadas de una serie de puntos o pilares localizados sobre la superficie terrestre. En el

ámbito de la Topografía, un marco de referencia es un conjunto de elementos físicos y puntuales con coordenadas conocidas en un sistema de referencia dado. En un trabajo topográfico los puntos que conforman un marco de referencia pueden ser estacas de madera, clavos de acero, marcas de pintura, etc.

En la República Argentina el marco de referencia oficial es POSGAR 07 (Posiciones Geodésicas Argentinas 2007), medido y ajustado con técnicas geodésicas. Antes del mencionado marco nuestro país tuvo otros marcos, como el Campo Inchauspe 1969, el cual constituye la última etapa de la geodesia tradicional sostenida por redes de triangulación.

Cuando se trate de relevamientos topográficos en zonas reducidas y si no existe la necesidad de vincular el trabajo a algún marco de referencia especificado, puede trabajarse con sistemas locales. Estos sistemas de referencia son generados con el único propósito de ejecutar ese trabajo en particular, y los puntos que lo materialicen deberán permanecer en el terreno al menos hasta que el trabajo se finalice.

Sistemas de coordenadas utilizados en Topografía

La posición de un punto en el plano se puede definir mediante un sistema de coordenadas rectangulares o a partir de un sistema de coordenadas polares. En Topografía suelen dividirse los trabajos en planimétricos y altimétricos. Por ese motivo es común trabajar la posición de los puntos en un sistema bidimensional, y de forma separada trabajar la componente altimétrica en un sistema unidimensional. Pero en ocasiones se opera con las tres coordenadas simultáneamente, como por ejemplo cuando se realiza un relevamiento taquimétrico con estación total. Independientemente de cuál sea el caso, en la etapa de cálculos, se trabaja de forma independiente la planimetría de la altimetría. Con las mediciones planimétricas se resuelve la posición bidimensional de los puntos y con las mediciones altimétricas se definen sus alturas.

La aplicación de cálculos topográficos trata sobre la resolución de problemas en dos dimensiones, es decir, en el plano.

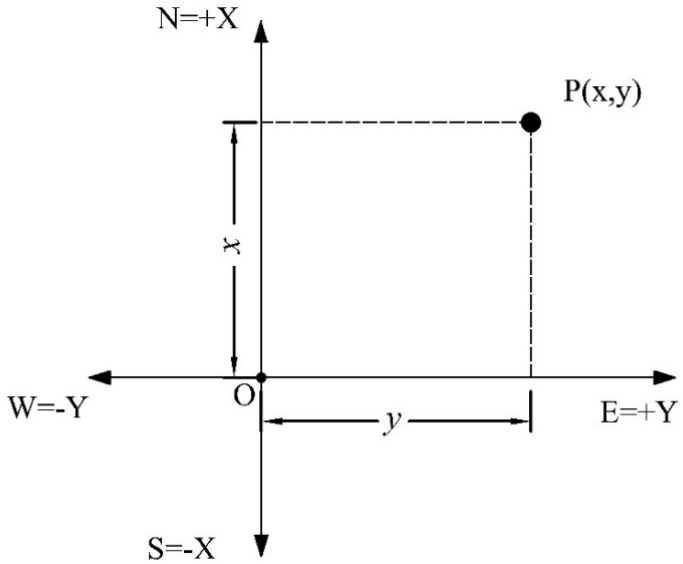
Sistemas de coordenadas Rectangulares

Dos líneas rectas que se corten formando un ángulo recto constituyen un sistema de ejes de coordenadas rectangulares, conocido también como sistema de coordenadas Cartesianas. En la intersección de las rectas se tiene el origen O de coordenadas.

En Topografía, el eje de ordenadas corresponde a las coordenadas X y tiene sentido Norte-Sur, mientras que el eje de abscisas es para las coordenadas Y en el sentido Este-Oeste (figura 6.1). Esta convención es opuesta a la que se utiliza en geometría.

El sentido de giro de los ángulos es igual al de las agujas del reloj (sentido horario) y en este sentido se enumeran los cuadrantes como I, II, III y IV. En este sistema rectangular a cada punto le corresponde un par de coordenadas (x,y).

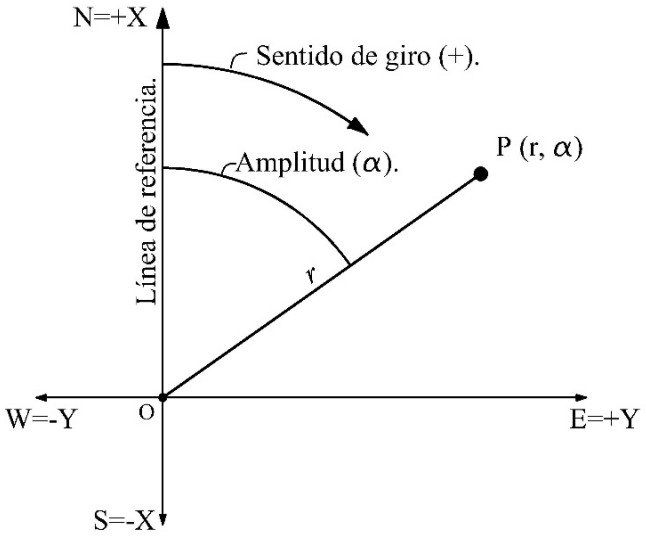
Figura 6.1. *Sistemas de Coordenadas Rectangulares (x, y).*



Sistemas de coordenadas Polares

Se representa el plano mediante dos ejes cartesianos X (Norte-Sur) e Y (Este-Oeste) tal como fue establecido en el punto anterior. Pero, en este caso, la posición de un punto P queda definida mediante el ángulo **α** entre el semi-eje de referencia +X y el segmento OP, y la distancia **r** al origen al punto (figura 6.2). El ángulo **α** y la distancia **r** constituyen las coordenadas polares del punto P.

Figura 6.2. *Sistema de Coordenadas Polares (r, α).*



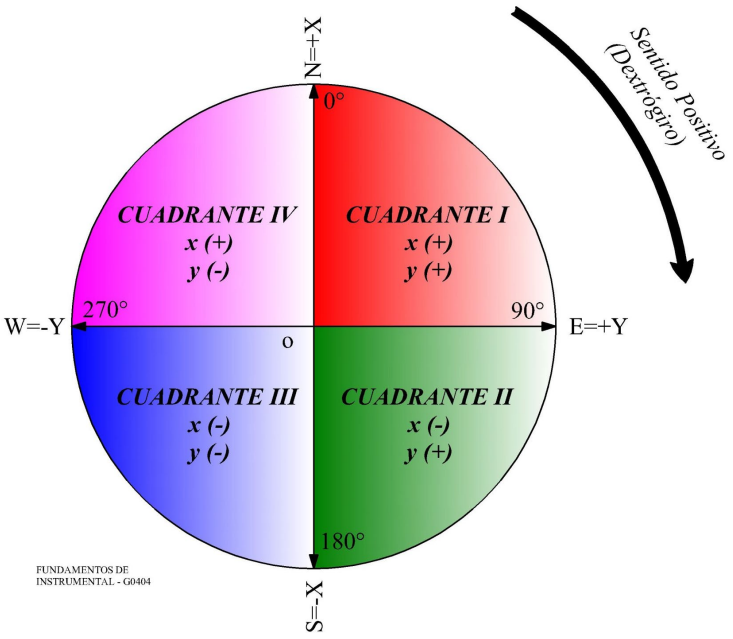
Cuadrantes

Los semiejes positivo y negativo de X e Y dividen al plano en cuadrantes (figura 6.3):

- Primer Cuadrante: X positivo e Y positivo.
- Segundo Cuadrante: X negativo e Y positivo.

- Tercer Cuadrante: X negativo e Y negativo.
- Cuarto Cuadrante: X positivo e Y negativo.

Figura 6.3. *Cuadrantes determinados por los ejes cartesianos.*



En Topografía el sentido de giro se considera positivo hacia la derecha (sentido horario o dextrógiro).

Acimutes, rumbos y ángulo de deflexión

Para realizar cálculos topográficos es fundamental poder determinar la orientación de una línea con respecto al Norte de cálculo (semi-eje +X). La orientación de una línea se puede expresar mediante Acimutes, como Rumbos o como ángulos de deflexión.

Acimutes

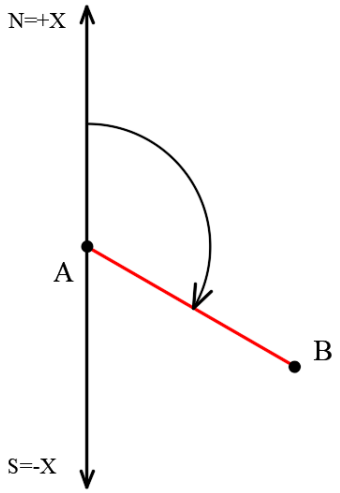
El Acimut de una línea es el ángulo que forma dicha línea con la dirección del Norte, se miden en sentido horario y su valor varía entre 0 y 360 grados (figura 6.4). Como se estudiará más adelante, en algunos casos y por cuestiones prácticas, se puede denominar como “Norte” cualquier línea tomada como referencia en un trabajo topográfico, sin que esta corresponda a la meridiana del lugar. Atendiendo a este criterio, se considerará como Norte de cálculo o semi-eje +X a la dirección con acimut de valor 0º (cero grados).

Para indicar que un valor angular es un acimut se pueden utilizar alguna de las siguientes alternativas:

Az AB= 120º o

(AB)= 120º

Figura 6.4. *Acimut de la línea AB.*



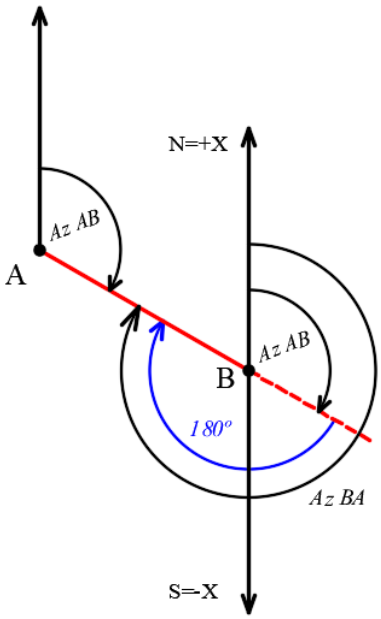
La línea definida por dos puntos A y B tiene dos direcciones, en el sentido de A hacia B y en el sentido de B hacia A, la diferencia entre los acimutes de ambas direcciones es de 180°.

$$\boldsymbol{Az\ BA = Az\ AB\ \pm 180°}$$

$$\boldsymbol{(BA) = (AB)\ \pm 180°}$$

La diferencia entre un acimut y su contra acimut es un ángulo llano (180º) como se puede ver en la figura 6.5.

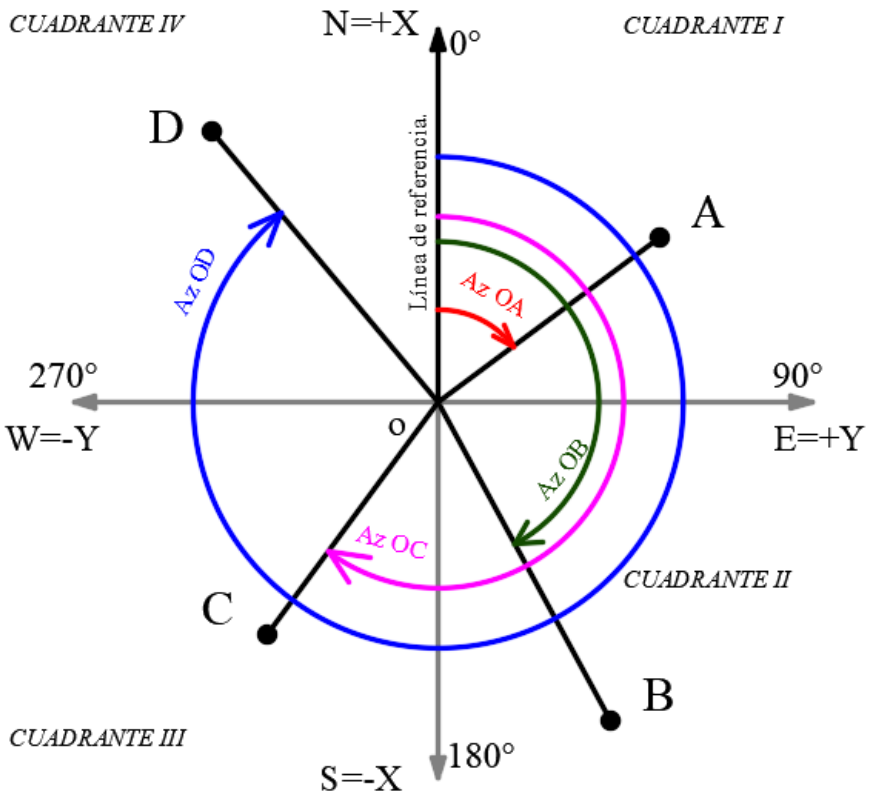
Figura 6.5. *Acimut (AB) y su contra acimut (BA).*



En la figura 6.6 se indica cómo se miden los acimutes en cada cuadrante:

- línea OA en el 1er cuadrante,
- línea OB en el segundo,
- línea OC en el tercero y
- línea OD en el cuarto cuadrante.

Figura 6.6. *Líneas con acimutes en diferentes cuadrantes.*



Rumbos

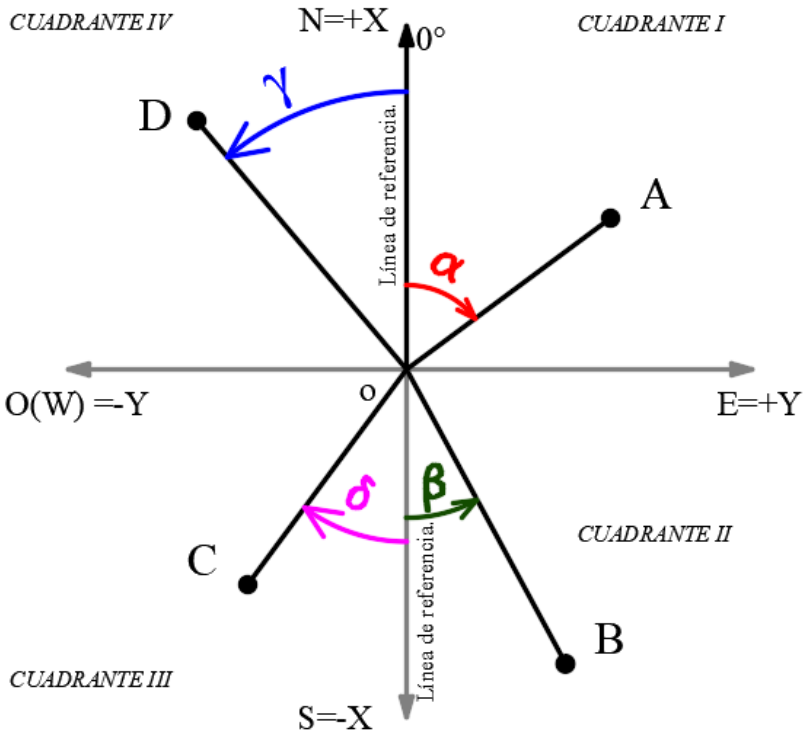
Se denomina rumbo de una línea al ángulo horizontal entre una línea de referencia (semieje +X o semieje -X) y la línea en cuestión. Este ángulo se mide ya sea desde el Norte o desde el Sur, y hacia el Este o el Oeste, por este motivo el valor de un rumbo nunca es mayor a 90°.

Es importante la forma en que se indica un rumbo, no alcanza solamente con definir un valor angular, también es requerido establecer en qué cuadrante se halla la línea en cuestión. El cuadrante en que se encuentra se indica comúnmente con la letra N o la S precediendo al valor numérico del ángulo, y la letra E u O (W), después de dicho valor.

En la figura 6.7 se muestran algunos ejemplos de cómo indicar el rumbo de una línea según el cuadrante en el que se encuentre:

Si **α**=40°00'00"	Rumbo OA= N 40°00'00" E
Si **β**= 20°00'00"	Rumbo OB= S 20°00'00" E
Si **δ**= 25°00'00"	Rumbo OC= S 25°00'00" O
Si γ= 30°00'00"	Rumbo OC= N 30°00'00" O

Figura 6.7. *Casos de rumbos en cada cuadrante.*



Conversión entre Rumbos y Acimutes

A partir de la figura 6.7:

α=40°00'00"	Rumbo OA= N 40°00'00" E	Az OA= 40°00’00”
β= 20°00'00"	Rumbo OB= S 20°00'00" E	Az OB= 180°-20°00'00"=160°00'00"
δ= 25°00'00"	Rumbo OC= S 25°00'00" O	Az OC= 180°+25°00'00"=205°00'00"
γ = 30°00'00"	Rumbo OC= N 30°00'00" O	Az OD=360°-30°00'00"=330°00'00"

En el primer cuadrante los valores angulares del acimut y el rumbo coinciden, en los otros tres cuadrantes hay que hacer operaciones de suma o resta según corresponda:

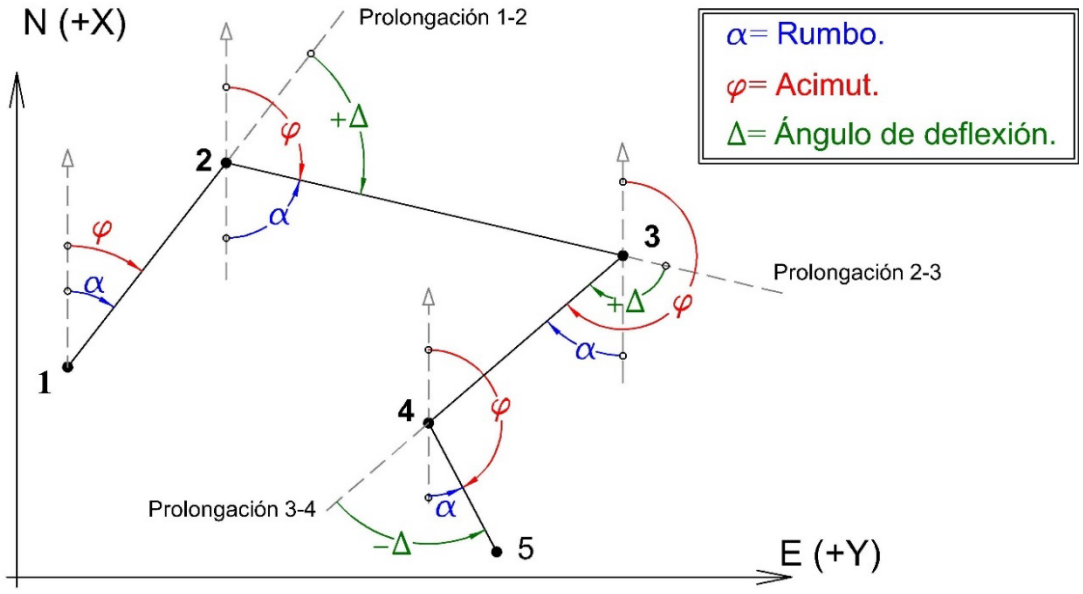
- 1er Cuadrante: Acimut= Rumbo
- 2do Cuadrante: Acimut= 180° - Rumbo
- 3er Cuadrante: Acimut= 180° + Rumbo
- 4to Cuadrante: Acimut= 360° - Rumbo

Ángulo de deflexión

En una poligonal, el ángulo de deflexión se define como el ángulo formado entre la prolongación del tramo anterior y el lado siguiente en la dirección de avance. Este ángulo se considera positivo cuando hay un giro hacia la derecha (en sentido horario), mientras que se registra como negativo cuando el giro es hacia la izquierda (en sentido antihorario).

En la figura 6.8 se puede ver una poligonal de cinco vértices (1 al 5) y los ángulos de deflexión (Δ), acimutes (φ) y rumbos (α) de cada lado.

Figura 6.8. *Ángulos de deflexión, rumbos y acimutes en una poligonal (sentido de avance de 1 hacia 5).*



Aplicación de los cálculos topográficos

Los cálculos topográficos que se analizarán son los empleados en Topografía para cambios entre sistemas de coordenadas: de rectangular a polar y viceversa.

Conversión de sistema polar a sistema rectangular

Se cuenta con los datos: distancia horizontal D y ángulo horizontal α:

$$x = D.\cos\alpha$$

$$y = D.\sin\alpha$$

Se obtienen como resultado las coordenadas xy (rectangulares) del punto.

Conversión de sistema rectangular a sistema polar

Dadas las coordenadas rectangulares de un punto P (x_p, y_p) se obtienen las polares:

$$D = \sqrt{{x_p}^2 + {y_p}^2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{y_p}{x_p}$$

Estas dos relaciones son válidas cuando el origen O del sistema de referencia coincide con unos de los vértices de la línea analizada. Caso contrario deben considerarse las magnitudes Δx y Δy.

De acuerdo con la figura 6.9, las relaciones geométricas existentes entre los puntos P1 (N_1 ; E_1) y P2 (N_2 ; E_2) quedan expresadas mediante las siguientes ecuaciones:

$$D_{1-2} = \sqrt{(E_2 - E_1)^2 + (N_2 - N_1)^2}$$

$$tg\alpha = \frac{\Delta E_{1-2}}{\Delta N_{1-2}} = \frac{E_2 - E_1}{N_2 - N_1}$$

En donde:

α= Acimut de la alineación P_1P_2

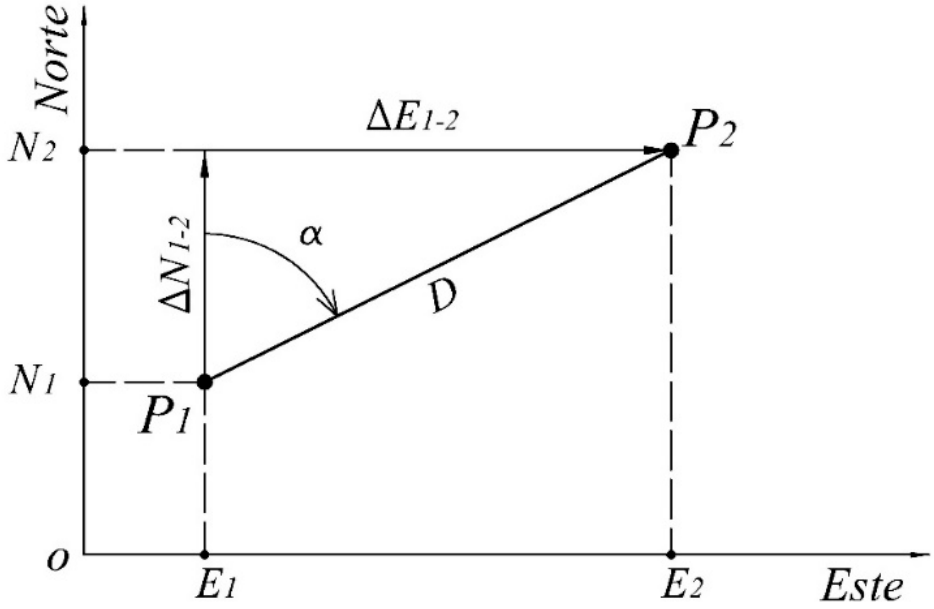
N_1 , E_1 = Coordenadas Rectangulares del P_1 (equivalente a x_1, y_1)

N_2 , E_2 = Coordenadas Rectangulares del P_2 (equivalente a x_2, y_2)

∆N, ∆E = Proyecciones sobre los ejes Norte y Este del segmento P_1P_2.

D = Distancia horizontal entre ambos puntos (D_{1-2})

Figura 6.9. *Cálculo del acimut y la longitud de una línea a partir de las coordenadas XY de sus extremos.*



Cálculo de proyecciones

En Topografía, dada una línea definida por dos puntos en un sistema de ejes cartesiano bidimensional XY, es importante definir las proyecciones de esta línea sobre los mencionados ejes. Estas proyecciones Δx (ΔN), Δy (ΔE) se utilizan para las transformaciones entre sistemas de coordenadas.

En la figura 6.9 se han indicado las proyecciones ΔN_{1-2} y ΔE_{1-2} entre los puntos P_1 y P_2. Ambas proyecciones y la distancia D entre los puntos conforman un triángulo rectángulo, por ello las distintas transformaciones entre sistemas de coordenadas podrán realizarse trabajando herramientas de trigonometría plana.

Conversión de un sistema polar a uno rectangular

Si son desconocidas las coordenadas rectangulares de los puntos, pero sí se cuenta con la distancia $D_{1\text{-}2}$ entre P1 y P2 y el acimut de esa línea, entonces se calcula:

$$\Delta x_{1-2} = D_{1-2} \,.\cos(P_1P_2)$$

$$\Delta y_{1-2} = D_{1-2} \,.\,\text{sen}(P_1P_2)$$

Las proyecciones pueden tener signo positivo (+) o negativo (-), ese signo dependerá del cuadrante en que se encuentre el acimut.

Calcular las proyecciones Δx y Δy utilizando como argumento para las funciones trigonométricas los acimutes, tiene como resultado que las proyecciones se obtienen con su signo (+) o (-) correspondiente, según la orientación de la línea. En las figuras 6.10 a 6.13 se muestran cuatro casos distintos, con acimutes en los cuatro cuadrantes.

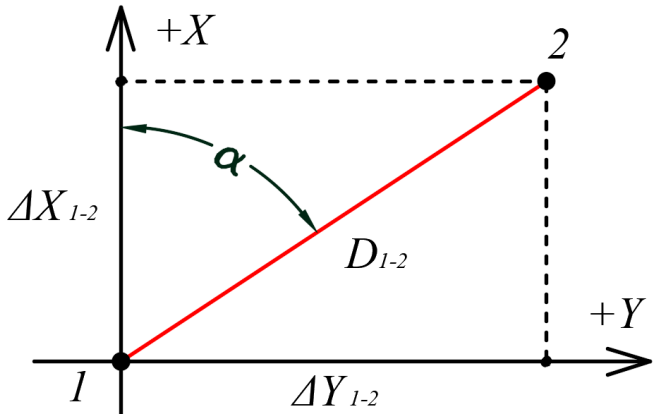
Primer cuadrante

α: acimut de una línea en el primer cuadrante (Δx>0 y Δy>0).

$$\Delta X_{1-2} = D_{1-2} \,.\cos\alpha$$

$$\Delta Y_{1-2} = D_{1-2} \,.\,\text{sen}\,\alpha$$

Figura 6.10. *Acimut de una línea en el primer cuadrante.*



Segundo cuadrante

β: acimut de una línea en el segundo cuadrante (Δx<0 y Δy>0).

$$\alpha = 180º - \beta$$

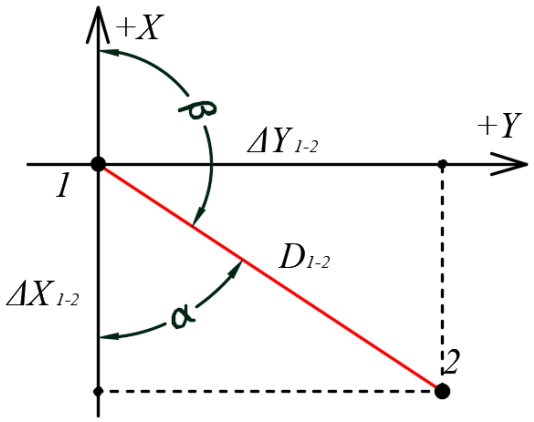
$$\cos\beta = -\cos\alpha$$

$$\sin\beta = \sin\alpha$$

$$\Delta X_{1-2} = D_{1-2} \,.\cos\beta$$

$$\Delta Y_{1-2} = D_{1-2} \,.\,\text{sen}\,\beta$$

Figura 6.11. *Acimut de una línea en el segundo cuadrante.*



Tercer cuadrante

φ: acimut de una línea en el tercer cuadrante (Δx<0 y Δy<0).

$$\alpha = \varphi - 180º$$

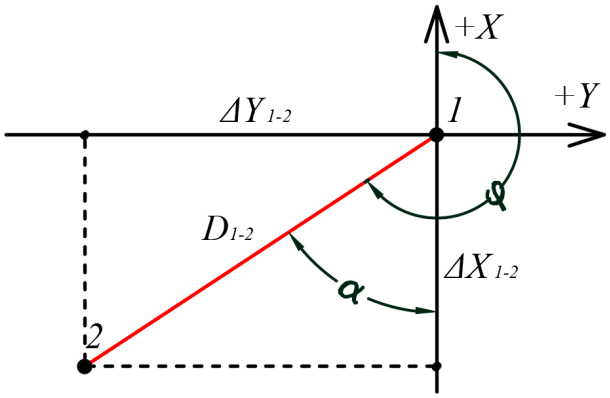
$$\cos\varphi = -\cos\alpha$$

$$\sin\varphi = -\sin\alpha$$

$$\Delta X_{1-2} = D_{1-2} \,.\cos\varphi$$

$$\Delta Y_{1-2} = D_{1-2} \,.\,\text{sen}\,\varphi$$

Figura 6.12. *Acimut de una línea en el tercer cuadrante.*



Cuarto cuadrante

g: acimut de una línea en el cuarto cuadrante (Δx>0 y Δy<0).

$$\alpha = 360º - \gamma$$

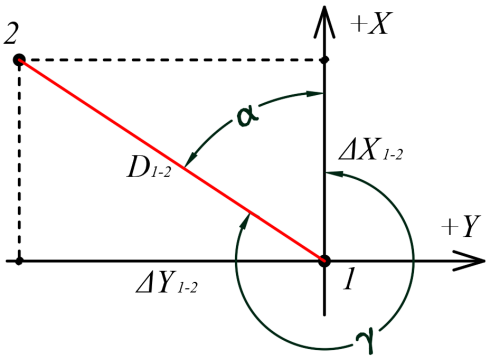
$$\cos\gamma = \cos\alpha$$

$$\sin\gamma = -\sin\alpha$$

$$\Delta X_{1-2} = D_{1-2} \,.\cos\gamma$$

$$\Delta Y_{1-2} = D_{1-2} \,.\,\text{sen}\,\gamma$$

Figura 6.13. *Acimut de una línea en el cuarto cuadrante.*



Aplicaciones

A continuación, se presentan algunos ejemplos de cálculos topográficos que abarcan diversas situaciones donde se requieren transformaciones entre sistemas de coordenadas en el plano. Comprender estos ejemplos es esencial ya que en el ámbito profesional se ha generalizado el uso de las estaciones totales, instrumentos que ejecutan estos cálculos de forma automática. Por ello, es importante conocer los criterios involucrados para interpretar correctamente los resultados y garantizar su precisión.

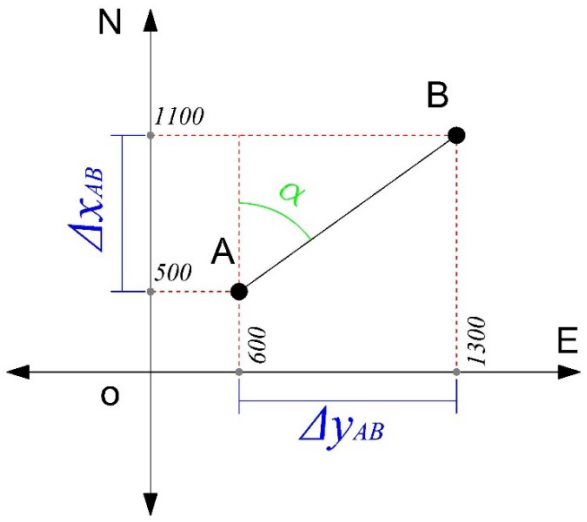
Ejemplo 6.1

Conocidas las coordenadas rectangulares de dos puntos A y B, calcular el acimut y la distancia del segmento de recta que determinan.

X_A= 500,00 X_B= 1.100,00

Y_A= 600,00 Y_B= 1.300,00

Figura 6.14. *Representación gráfica del ejemplo 6.1.*



Se calculan el rumbo y el acimut de la línea.

Rumbo AB y Acimut AB

$$\Delta x_{AB} = X_B - X_A = 1100{,}00 - 500{,}00 = 600{,}00$$

$$\Delta y_{AB} = Y_B - Y_A = 1300{,}00 - 600{,}00 = 700{,}00$$

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB}} = \frac{700{,}00\ m}{600{,}00\ m} = 1{,}166666667$$

$$\alpha = 49º\ 23'\ 55"$$

Dado que la alineación AB está en el primer cuadrante:

(AB)= 49º 23’ 55”

Luego se calcula la longitud del segmento AB y se presentan los resultados.

$$\overline{AB} = \sqrt{\Delta x_{AB}{}^2 + \Delta y_{AB}{}^2}$$

$$\overline{FG} = \sqrt{(700{,}00\ \text{m})^2 + (600{,}00\ \text{m})^2} = 921{,}95\ m$$

Resultados:

AB= ***921,95 m***

Az AB = ***49°23'55"***

Rumbo AB= ***N 49°23'55" E***

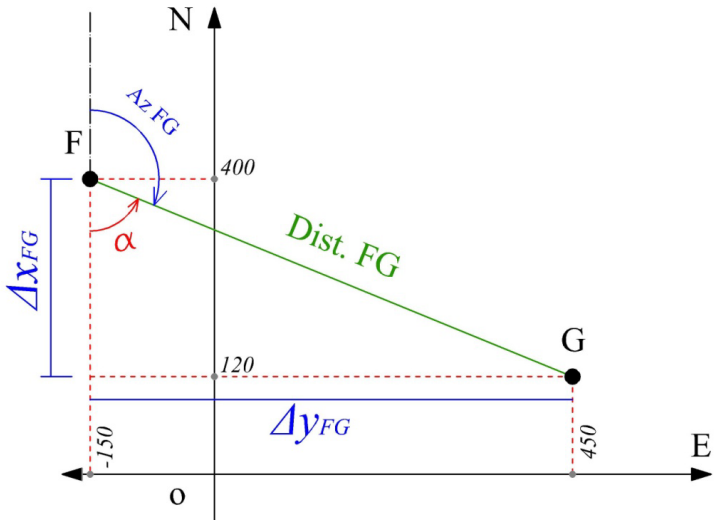
Ejemplo 6.2

Conocidas las coordenadas rectangulares de dos puntos F y G, se determina la dirección de la línea que determinan y la distancia.

X_F= 400,00 X_G= 120,00

Y_F= -150,00 Y_G= 450,00

Figura 6.15. *Representación gráfica del ejemplo 6.2.*



Cálculo del acimut (FG) del segundo cuadrante:

$$\Delta x_{FG} = X_G - X_F = 120{,}00 - 400{,}00 = -280{,}00$$

$$\Delta y_{FG} = Y_G - Y_F = 450{,}00 - (-150{,}00) = 600{,}00$$

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y_{FG}}{\Delta x_{FG}} = \frac{600{,}00\ m}{-280{,}00\ m} = -2{,}142857$$

$$\alpha = -64º\ 58'\ 59"$$

Analizando la figura 6.15 es posible apreciar que la línea FG pertenece al segundo cuadrante. El acimut de esta línea se calcula:

$$(FG) = 180º - 64º\ 58'\ 59" = 115º\ 01'\ 01"$$

Cálculo de la distancia FG:

$$\overline{\mathrm{FG}} = \sqrt{\Delta \mathrm{x_{FG}}^2 + \Delta \mathrm{y_{FG}}^2}$$

$$\overline{\mathrm{FG}} = \sqrt{(-280\ \mathrm{m})^2 + (600\ \mathrm{m})^2} = 662{,}12\ m$$

Resultados:

Dist. FG= 662,12 m

Az FG= 115º 01’ 01”

Rumbo FG= S 64º 58’ 59” E

Ejemplo 6.3

Conocidas las coordenadas rectangulares de un punto P, y la distancia y el acimut a un punto desconocido Q, se calculan las coordenadas de este último.

XP = 470,00 XQ= ?

YP = 510,00 YQ= ?

Az PQ= 230°00'00" Distancia PQ= 500,00 m.

$$\Delta X_{PQ} = \overline{PQ} \cos(PQ)$$

$$\Delta Y_{PQ} = \overline{PQ}\ \mathrm{sen}(PQ)$$

$$\Delta X_{PQ} = 500\ \mathrm{m} \cdot \cos 230°00'00" = -321{,}39$$

$$\Delta Y_{PQ} = 500\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{sen}\, 230°00'00" = -383{,}02$$

$$x_Q = x_P + \Delta X_{PQ}$$

$$y_Q = y_P + \Delta Y_{PQ}$$

$$x_Q = 470 + (-321{,}39) = 148{,}61$$

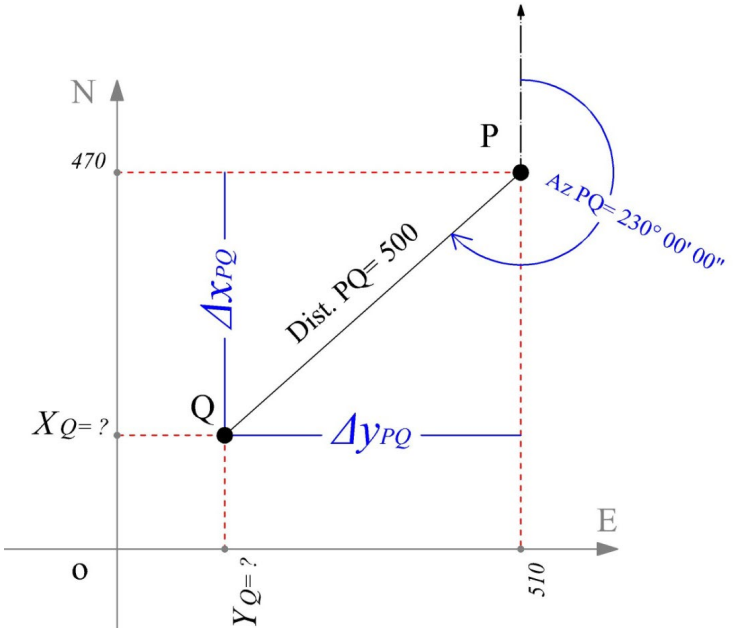
$$y_Q = 510 + (-383{,}02) = 126{,}98$$

Coordenadas del punto Q:

X_Q= 148,61

Y_Q= 126,98

Figura 6.16. *Representación gráfica del ejemplo 6.3.*

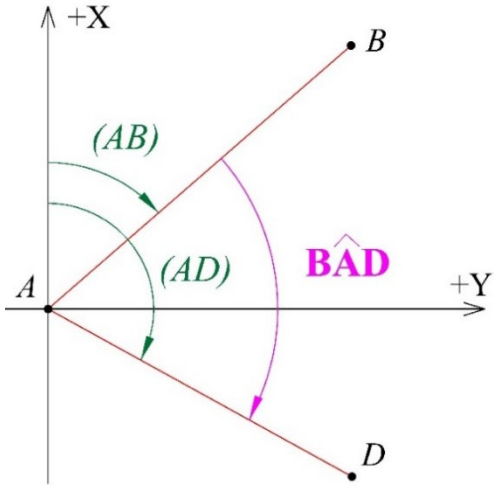


Ejemplo 6.4

Cálculo del ángulo formado por dos lados de un polígono. Se conocen las coordenadas de los puntos A, B y D y se necesita calcular el ángulo en el vértice A: $B\hat{A}D$.

X_A= 7.983,17	X_B= 8.089,02	X_D= 7.914,91
Y_A= 8.234,57	Y_B= 8.357,38	X_D= 8.357,77

Figura 6.17. *Representación gráfica del ejemplo 6.4.*



Dado que el vértice del ángulo es el punto A, y en Topografía los ángulos se miden en sentido horario, el ángulo buscado $B\hat{A}D$ se calcula haciendo la diferencia entre el acimut (AD) menos el acimut (AB).

$$\Delta X_{AB} = 8089{,}02 - 7983{,}17 = 105{,}85$$

$$\Delta Y_{AB} = 8357{,}38 - 8234{,}57 = 122{,}81$$

$$\Delta X_{AD} = 7914{,}92 - 7983{,}17 = -68{,}25$$
$$\Delta Y_{AD} = 8357{,}77 - 8234{,}57 = 123{,}20$$

Acimut (AB):

$$(AB) = arctg\frac{\Delta Y_{AB}}{\Delta X_{AB}} = arctg\frac{122{,}81}{105{,}85} = 49°\ 14'31"$$

Debido a que $\Delta x_{AB} > 0$ y además $\Delta y_{AB} > 0$ se concluye que este acimut pertenece al 1er cuadrante, por lo tanto, su valor será directamente el obtenido en el cálculo previo:

$$(AB) = 49°\ 14'\ 31"$$

Acimut (AD):

$$(AD) = arctg\frac{\Delta Y_{AD}}{\Delta X_{AD}} = arctg\frac{123{,}20}{-68{,}25} = -61°\ 00'\ 52"$$

Debido a que $\Delta x_{AD} < 0$ y además $\Delta y_{AD} > 0$ se concluye que este acimut pertenece al 2do cuadrante, por lo tanto, su valor será:

$$(AD) = 180º\ 00'00"\ -\ 61º\ 00'\ 52" = 118°\ 59'\ 08"$$

$\boldsymbol{B\hat{A}D}$= (AD) – (AB)= 118° 59’ 08” – 49° 14’ 31” = **69° 44’ 37”**

Ejemplo 6.5

Cálculo del ángulo formado por dos lados de un polígono. Se conocen las coordenadas de los puntos O, P y Q y se necesita calcular el ángulo en el vértice P.

X_O= 103,60	X_P= -28,03	X_Q= 27,98
Y_O= -37,90	Y_P= 17,79	X_Q= 106,94

$$\Delta X_{PO} = 103{,}60 - (-28{,}03) = 131{,}63$$
$$\Delta Y_{PO} = -37{,}90 - 17{,}79 = -55{,}69$$
$$\Delta X_{PQ} = 27{,}98 - (-28{,}03) = 56{,}01$$
$$\Delta Y_{PQ} = 106{,}94 - 17{,}79 = 89{,}15$$

Dado que el vértice del ángulo es el punto P, y en Topografía los ángulos se miden en sentido horario, el ángulo buscado $O\hat{P}Q$ se calcula haciendo la diferencia entre el acimut (PQ) y el acimut (PO).

Acimut (PO):

$$(PO) = arctg\frac{\Delta Y_{PO}}{\Delta X_{PO}} = arctg\frac{-55{,}69}{131{,}63} = -22°\ 55'\ 56"$$

Debido a que $\Delta x_{PO} > 0$ y además $\Delta y_{PO} < 0$ se concluye que este acimut pertenece al 4to cuadrante, por lo tanto, su valor será:

(PO)= 360º 00’ 00” - 22º 55’ 56” = **337º 04’ 04”**

Acimut (PQ):

$$(PQ) = arctg\frac{\Delta Y_{PQ}}{\Delta X_{PQ}} = arctg\frac{89{,}15}{56{,}01} = 57°\ 51'\ 37"$$

Debido a que $\Delta x_{PQ} > 0$ y además $\Delta y_{PQ} > 0$ se concluye que este acimut pertenece al 1er cuadrante, por lo tanto, su valor será directamente el obtenido en el cálculo previo:

(PQ)= 57º 51’ 37”

Cálculo del ángulo $O\hat{P}Q$:

$O\hat{P}Q = (PQ) - (PO) = 57º\ 51'37 - 337º\ 04'\ 04" = -279º\ 12'\ 27"$

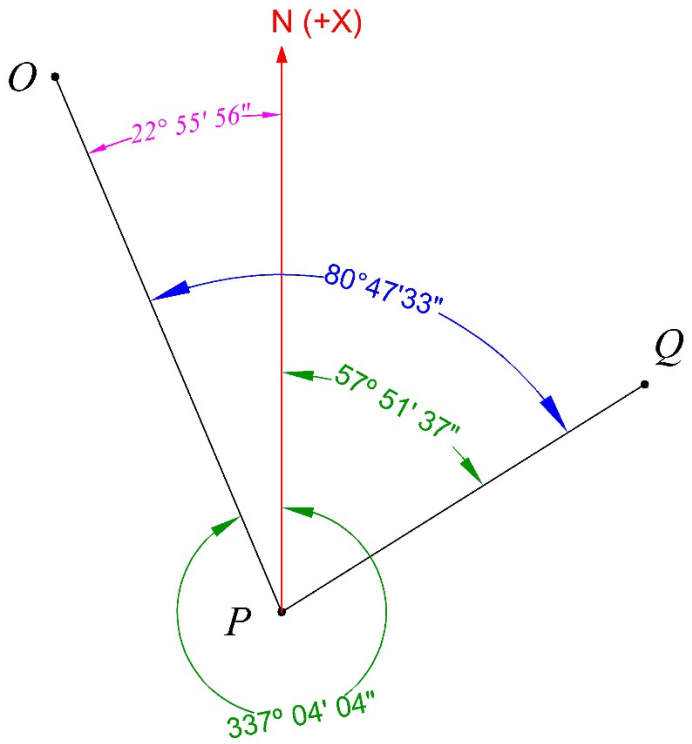
El resultado es obtenido con signo negativo debido a que la dirección Norte (acimut 0º) está entre los dos acimutes (PO) y (PQ). Por lo tanto, en este caso, el cálculo debe plantearse de la siguiente manera:

$O\hat{P}Q = (PQ) + [360º - (PO)]$

$O\hat{P}Q = 57º\ 51'37$ +(360º - 337º 04' 04")= $80º\ 47'\ 33"$

$$O\hat{P}Q = 80º\ 47'\ 33"$$

Figura 6.18. *Representación gráfica del ejemplo 6.5.*



Referencias

DOMÍNGUEZ GARCÍA-TEJERO, Francisco (2002). *Topografía General y Aplicada*. Ediciones Mundi-Prensa.

WOLF, Paul y GHILANI Charles (2016). *Topografía*. Alfaomega.

CAPÍTULO 7
Levantamiento de detalles por Radiación

Roberto José Romano

Métodos Planimétricos

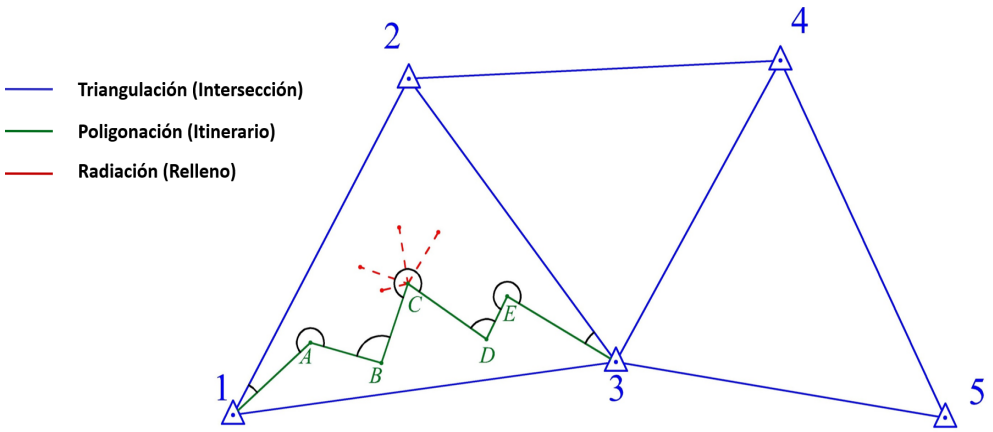
Dentro del ámbito de la Topografía, son así denominados los métodos que permiten determinar la posición (coordenadas XY) de puntos del terreno a partir de otros puntos con coordenadas conocidas y de mediciones que se realicen entre ellos.

En algunos trabajos es requerido que los levantamientos topográficos estén referidos a un sistema de referencia único oficial, esto posibilita, entre otras cosas, un registro único de los elementos del territorio que se han levantado.

En Topografía, un punto se considera mejor determinado cuanto menor sea el número de operaciones topográficas escalonadas necesarias para su determinación. De ello se deduce que todo trabajo topográfico debe realizarse en etapas, formando redes que se apoyan unas en otras de manera sucesiva. Esta necesidad dio lugar a la implementación de diversas técnicas y métodos de medición.

Aunque actualmente en desuso, las técnicas de triangulación permitían generar una red precisa y extensa, aunque poco densa, de puntos con coordenadas conocidas dentro de un único marco de referencia. Para densificar estas redes se pueden utilizar otras técnicas menos precisas, pero más rápidas, como las poligonaciones, que se apoyan en puntos de redes de mayor precisión. Finalmente, cuando el objetivo es levantar puntos de interés en el terreno, se requiere un método que garantice rapidez y precisión suficiente, en ese caso, el método planimétrico más adecuado es el de radiación.

Figura 7.1. *Redes planimétricas: Triangulación, Poligonación y Radiación.*



En la figura 7.1 se esquematizó una red de cinco puntos obtenida mediante una triangulación. Entre los puntos 1 y 3 se midió una poligonal para densificar la red original, obteniéndose los puntos A, B, C, D y E de orden menor. Desde el vértice C con orientación en B se realizó un levantamiento de detalles mediante una radiación planimétrica.

Triangulaciones y Poligonales topográficas

Previo al surgimiento del instrumental electrónico, como lo son las estaciones totales o los distanciómetros electrónicos autónomos, así como de la tecnología GNSS, los trabajos de precisión topográficos se basaban fundamentalmente en la medición de ángulos. Los métodos de triangulación empleados en Topografía utilizan casi exclusivamente mediciones de ángulos hechas con teodolitos, dado que en esa época era muy dificultoso medir grandes distancias con la precisión requerida.

Partiendo de una serie de puntos con coordenadas XY conocidas en un marco de referencia, se realizaban mediciones angulares para asignar coordenadas a nuevos puntos en dicho marco. Los métodos utilizados se denominan de intersección y pueden dividirse en dos grupos:

- Intersección hacia adelante: Se hace estación en puntos conocidos y se miden los ángulos determinados hacia puntos desconocidos. Dentro de estos se encuentran los métodos de “Intersección Directa”.
- Intersección hacia atrás: Se realizaba la estación del teodolito en puntos desconocidos y se medían los ángulos determinados hacia los puntos conocidos. Dentro de este grupo se pueden encontrar los métodos de Pothenot y de Hansen, entro otros.
- Existen casos mixtos como el método de “Intersección Lateral”, en el cual se mide desde un punto conocido y desde uno desconocido.

Estos métodos de intersección están ampliamente desarrollados en la bibliografía clásica de topografía y por ello no se profundizará aquí. Para más información consultar las referencias bibliográficas: (Müller, 1940; Domínguez García-Tejero, 2002; Chueca Pazos, 1996).

Actualmente, los equipos de estación total permiten realizar una operación que se denomina “estación libre”. Desde un punto desconocido se miden direcciones a tres puntos (o más) conocidos y el equipo calcula la posición del punto de estación, esta es una aplicación del método de Pothenot. Si se incorpora la medición de distancias la cantidad mínima de puntos puede reducirse a solamente dos. En el último caso ya no sería un método de intersección puro, dado que se incorpora la medición de distancias. La técnica de “estación libre” es de uso muy extendido y agiliza notablemente las tareas de campo dado que hace innecesario estacionar el instrumento sobre puntos medidos con anterioridad.

Los métodos de triangulación tienen como característica general:

- Cubren el conjunto del territorio con una red de puntos de la misma precisión.
- Sus puntos se denominan vértices.
- Son semejantes a las triangulaciones geodésicas de menor orden.

- Existen controles sobre la calidad del trabajo.

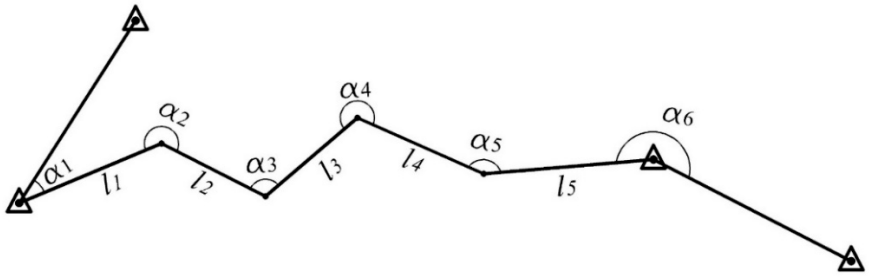
La densidad de los puntos sobre el terreno medidos por una triangulación no era suficiente para apoyar sobre ellos otras tareas topográficas como por ejemplo relevamientos de puntos de interés o trabajos de replanteo. Por lo que se medían poligonales topográficas para realizar una densificación del marco de referencia.

Actualmente, los trabajos necesarios para construir un marco de referencia suelen realizarse con técnicas GNSS. Dada una zona de relevamiento, salvo que sea muy reducida, es más conveniente establecer una primera red de puntos trabajando con receptores GNSS. Esa red será medida y ajustada, además puede ser vinculada a la red oficial del país POSGAR07. Posteriormente, los puntos de esta red podrán utilizarse para apoyar un relevamiento o un replanteo con estación total, o de ser necesario, realizar una segunda densificación.

El surgimiento de los distanciómetros electrónicos, y su posterior integración en los equipos de estación total, ha reemplazado en la mayoría de las actividades a los métodos que se basan en la medición exclusiva de ángulos. No obstante, los métodos de triangulación aún suelen aplicarse en casos especiales donde la distancia no puede ser medida con la precisión suficiente.

A diferencia de los métodos de triangulación que solamente se miden ángulos, en los métodos de poligonación se miden además distancias. Mediante los métodos de poligonación se enlazan puntos de orden superior conocidos (figura 7.2) mediante una línea quebrada en la cual la posición de los vértices es definida por la medición del ángulo en cada uno de esos puntos y de la distancia entre los puntos consecutivos. Los enlaces a los puntos conocidos proporcionan los controles de medición indispensables.

Figura 7.2. *Medición de ángulos αi y de distancias di de una poligonal.*



Las poligonales pueden cerrarse sobre el mismo vértice de inicio, constituyendo un polígono cerrado, o pueden comenzar en un punto y finalizar en otro. En cualquiera de los dos casos, las mediciones deben permitir los controles de cierre suficientes para garantizar la calidad del trabajo.

Las mediciones angulares realizadas para este método son menos rigurosas que en una triangulación, pero se realizan de forma más rápida; utilizando el método de Bessel se logra la precisión suficiente. Las distancias deben medirse en ida y vuelta, ya sean mediciones electrónicas o con cinta de Agrimensor.

Con las poligonales se busca una mayor velocidad de trabajo que con una triangulación, pero se reduce la precisión, no obstante, al apoyarse en puntos de mayor orden se pueden realizar los controles (o también ajustes) que permiten establecer la calidad del trabajo.

Si la cantidad y distribución de los puntos de un marco de referencia en una zona no son suficientes, se puede emplear una poligonal para medir nuevos puntos y densificar la red. Una vez obtenida una cantidad adecuada de puntos conocidos se puede comenzar con el relevamiento topográfico.

El objetivo de las triangulaciones y las poligonaciones es el de distribuir sobre el terreno una red o redes de puntos fijos pertenecientes a un mismo marco de referencia. Estos son trabajos necesarios para apoyar tareas topográficas de relevamiento o de replanteo.

En el ámbito de la planimetría, cuando se realizan relevamientos del terreno, uno de los métodos más utilizados es el de radiación. Mediante la medición rápida de una dirección (en CI) y de una distancia es posible establecer la posición (coordenadas XY) de un punto en un marco de referencia.

En muchos trabajos, como por ejemplo relevamientos con fines catastrales, la altura de los puntos no es de interés, siendo únicamente requerida la posición planimétrica de los objetos del terreno. Una de las alternativas más empleadas actualmente es el relevamiento con estación total aplicando el método de radiación planimétrica.

Método de Radiación

El procedimiento consiste en realizar un levantamiento desde un punto de estación, abarcando toda la superficie circundante dentro del alcance del instrumento y las condiciones de precisión requeridas, limitadas por los obstáculos que interfieran con las visuales. Los puntos levantados, denominados 'puntos de interés', se vinculan con la estación mediante las distancias y acimutes de las respectivas líneas visuales. Este método puede aplicarse en cualquier tipo de terreno.

Cada punto queda definido en coordenadas polares por su acimut y distancia al punto de estación, que puede ser el vértice de una poligonal o de una triangulación. Trabajando con un equipo de estación total, el acimut se calcula a partir de la medición de una dirección, mientras que la distancia se mide electrónicamente.

Antes de comenzar un levantamiento planimétrico por el método de radiación, es necesario contar con al menos dos puntos de coordenadas XY conocidas; idealmente tres para tener un control del trabajo. Dado que en la zona de trabajo es poco frecuente contar con esa cantidad de puntos conocidos es que se apela a los métodos de triangulación y poligonación para densificar redes preexistentes.

Los puntos que forman parte de una red y cuyas coordenadas son conocidas se denominan puntos fijos. Generalizando, se puede denominar así a cualquier punto topográfico con

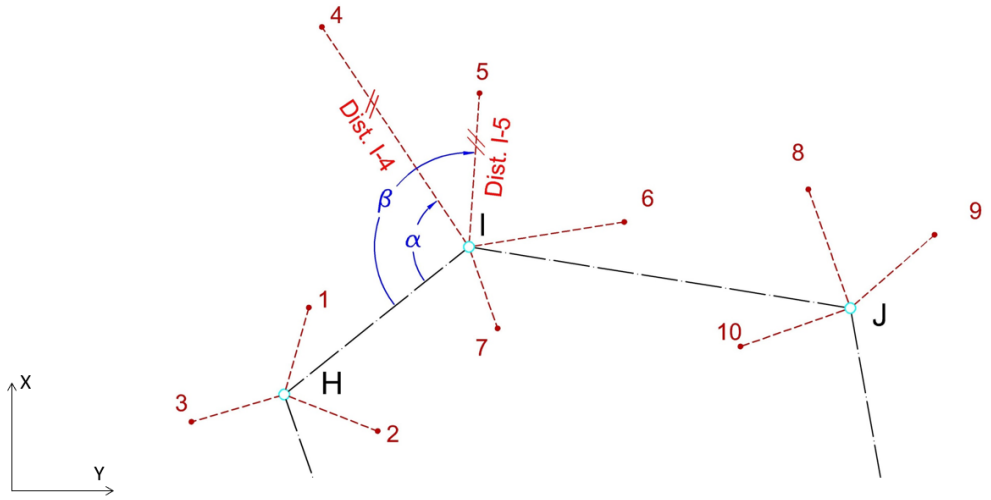
coordenadas XYZ, XY o solo Z, conocidas ya sea por una medición previa o asignadas de manera convencional.

El método de radiación, dado un punto de origen y una línea de referencia, consiste en vincular los puntos de interés mediante coordenadas polares. Al posicionar una estación total sobre un punto fijo y definir una línea visual hacia otro punto fijo mediante una dirección, los puntos de interés pueden relacionarse con dicha referencia usando coordenadas polares. Estas coordenadas polares se determinan a partir de la distancia horizontal y la dirección medidas en cada punto levantado. Luego, se realizan los cálculos necesarios para convertir el sistema de coordenadas polares a un sistema de coordenadas rectangulares XY.

Para la representación gráfica de los puntos es más conveniente contar con sus coordenadas rectangulares XY. Lo más habitual (y prácticamente de rigor) es la representación gráfica en programas de CAD o de SIG. Para realizar la carga de puntos de forma eficiente conviene contar con las coordenadas rectangulares en algún formato de archivo de intercambio (xls, xlsx, txt, csv, entro otros). Por lo tanto, en campo se trabaja con un sistema de coordenadas polares y luego en gabinete se realiza la transformación a coordenadas rectangulares XY. También es muy común al trabajar con estaciones totales, que los cálculos topográficos necesarios para la conversión de un sistema de coordenadas a otro, los realice de forma automática el equipo, sobre estas alternativas de trabajo se profundizará en capítulos posteriores.

A modo ilustrativo se analizará el siguiente caso. En una zona de trabajo se dispone de una serie de puntos fijos H, I y J de coordenadas XY conocidas. En este ejemplo, se requiere hacer un relevamiento topográfico de diez puntos de interés. La situación se ilustra en la figura 7.3.

Figura 7.3. *Radiación apoyada sobre los puntos H, I, J de una poligonación.*



El trabajo se planifica de la siguiente forma:

- Los puntos 1, 2 y 3 se levantan desde una estación de medición sobre el punto poligonal H, a partir de la referencia que constituye la línea HI,
- mientras que los puntos 4 a 7 se miden desde una estación sobre I, a partir de la línea IH y finalmente,

- los puntos 8, 9 y 10 se relevan desde una estación en el punto J tomando como referencia la línea JI.

Como caso particular se analizarán los puntos 4 y 5. Con una estación total sobre el punto I se comienza el trabajo midiendo la dirección al punto H, generando de ese modo una referencia de inicio. Luego, se mide la dirección al punto 4 y la distancia reducida al horizonte también a dicho punto. A continuación, se miden las mismas magnitudes para el punto 5.

Es necesario destacar que la estación total no mide la distancia horizontal, sino que la calcula a partir de la distancia geométrica y el ángulo vertical, pero para simplificar esta explicación se omitirá momentáneamente esa parte.

Volviendo al punto de interés denominado con el número 4, a partir de las direcciones medidas puede calcularse el ángulo:

$$\alpha: \mathrm{H\hat{I}4}$$

Recordando que en este método alcanza con medir únicamente en círculo izquierda (CI). Luego puede ser calculado el acimut (I4):

$$(\mathrm{I4}) = (\mathrm{IH}) + \alpha$$

El acimut (IH) es posible de calcularse dado que son conocidas las coordenadas XY de ambos puntos.

Dado que la distancia horizontal entre los puntos I y 4 se obtuvo con la estación total, es posible calcular:

$$\Delta x_{\mathrm{I4}} = \overline{\mathrm{I4}}\ \cos(\mathrm{I4})$$

$$\Delta y_{\mathrm{I4}} = \overline{\mathrm{I4}}\ \mathrm{sen}(\mathrm{I4})$$

Luego se calculan las coordenadas rectangulares del punto 4 a partir de las coordenadas conocidas del punto I:

$$X_4 = X_{\mathrm{I}} + \Delta x_{\mathrm{I4}}$$

$$Y_4 = Y_{\mathrm{I}} + \Delta y_{\mathrm{I4}}$$

Del mismo modo pueden ser calculadas las coordenadas del punto 5 a partir de contar con el ángulo β y la distancia $\overline{\mathrm{I5}}$ (figura 7.3). Aplicando la misma metodología se pueden relevar los 10 puntos desde las estaciones en H y J. Dado que los puntos H, I y J pertenecen al mismo marco de referencia, los resultados de la radiación, las coordenadas planas de los puntos de interés estarán en el mismo marco de referencia. Trabajando de este modo, puede conseguirse un modelo matemático que representa la ubicación de los puntos levantados, obteniéndose la posición relativa de dichos puntos.

Para garantizar un control sobre el trabajo realizado, es recomendable medir, como si fuera desconocido, alguno de los puntos fijos conocidos. En el ejemplo analizado, se tomaron como referencia los puntos I y H, y desde ellos se realizaron las mediciones; en este caso, el punto J se puede medir para control. Posteriormente, se calcula este punto como un punto de interés, y se comparan las coordenadas obtenidas con las conocidas previamente. Las diferencias encontradas deben ser menores a la tolerancia de trabajo adoptada. En el método de radiación no es posible controlar todos los puntos medidos, pero al menos debe controlarse un punto por cada estación.

Sistemas de referencia topográficos locales

En muchos trabajos de Agrimensura e Ingeniería puede prescindirse de los marcos de referencia nacionales o provinciales existentes y trabajar con un sistema de referencia local, generado a partir de convenciones que se adaptan a la zona de trabajo. En este tipo de sistemas de referencias, se toma como superficie de referencia a un plano horizontal, tangente a la superficie terrestre, en el que quedan contenidos los ejes cartesianos XY. La dirección del semi-eje X positivo, la dirección del acimut de 0º, puede elegirse de forma conveniente de acuerdo con alguna dirección predominante en la región de trabajo. La dirección de la gravedad será normal al plano XY en cualquiera de los puntos contenidos dentro de la zona de trabajo. En estos casos, se prioriza la posición relativa de los elementos del terreno y no su ubicación conjunta en un marco de referencia preexistente.

Para materializar este tipo de sistemas de referencia se realizan dos pasos:

1. Se asignan coordenadas a un punto (estaca, marca, etc.), estas coordenadas suelen ser arbitrarias (independientes de cualquier otro marco) y elegidas de forma conveniente.
2. Desde el punto seleccionado en el paso anterior, se le asigna un valor de acimut (0º u otro) a una línea de referencia que se materializa mediante un segundo punto. Puede colocarse otra marca o elegirse un elemento prexistente como el extremo de una antena o pararrayos.

Una vez materializado ese sistema local puede ser densificado mediante los métodos antes descriptos y/o apoyarse levantamientos de puntos por radiación sobre el mismo.

Esta alternativa es válida cuando lo único que se requiere es la posición relativa de cada punto con respecto a los demás, y se puede prescindir de la ubicación del conjunto de puntos en una región dada, provincia o país. Esta metodología de trabajo es adoptada con frecuencia en los relevamientos con estación total para trabajos de índole catastral urbanos en los que no se exige una vinculación a los marcos de referencias oficiales.

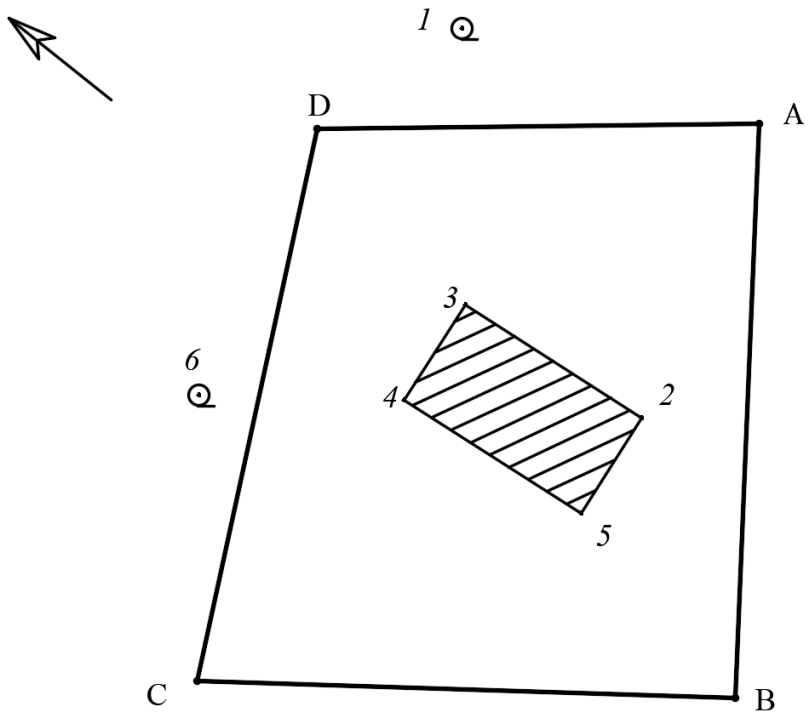
A continuación, se desarrolla un ejemplo de cálculo de una radiación efectuada con estación total.

Método de Radiación: Ejemplo de cálculo

Se practicó un levantamiento planimétrico por el método de radiación, realizando estaciones sobre los puntos A y C, tal como es ilustrado en la figura 7.4. En este ejemplo, utilizando un instrumento de estación total, se levantaron las direcciones y distancias necesarias para luego en gabinete calcular las coordenadas XY de los puntos medidos.

Al tratarse de una radiación, la dirección a cada punto levantado se midió únicamente en la posición del anteojo denominada círculo izquierda (CI), a su vez, la distancia a cada punto fue medida una sola vez. Se justifica esta metodología en que es necesario levantar una cantidad suficiente de puntos, en el menor tiempo posible, asegurando la precisión requerida para el trabajo. En este caso, se puede trabajar con precisión centimétrica.

Figura 7.4. *Los puntos ABCD constituyen un polígono cerrado, en tanto que los puntos 1 a 6 fueron relevados.*



Se trabajó con una estación total y se registraron direcciones y distancias reducidas al horizonte. Contando con cuatro puntos fijos conocidos en el terreno, se hicieron dos estaciones, en A y en C, para relevar una edificación y una serie de árboles:

- Desde A se realizó la orientación (dirección de referencia) con el punto D y se midió el punto B como control.
- Desde C se realizó la orientación con D y el control se hizo a B.

Los puntos ABCD constituyen los vértices de un polígono cerrado, sus coordenadas XY fueron medidas y compensadas (tabla 7.1) en un trabajo previo.

Tabla 7.1. *Coordenadas de los puntos A, B, C y D.*

	x	y
A	1279,37	1507,67
B	1090,74	1499,77
C	1096,26	1323,05
D	1277,75	1362,35

Las mediciones de direcciones y distancias efectuadas se encuentran en la tabla 7.2.

Tabla 7.2. *Direcciones y distancias registradas en campo.*

Estación	Punto Visado	Lectura Hz (CI)	H: distancia Hz. (m)	Descripción
A	Vértice D	14° 35' 45"	-	Orientación
	1	33° 03' 06"	102,55	Árbol
	Vértice B	287° 38' 06"	188,78	Control
	2	306° 59' 16"	104,09	Edificio
	3	343° 37' 34"	113,55	Edificio
	Vértice D	14° 35' 47"	-	Cierre
C	Vértice D	30° 28' 56"	-	Orientación
	4	54° 36' 28"	114,63	Edificio
	5	84° 37' 39"	137,61	Edificio
	Vértice B	110° 03' 09"	176,80	Control
	6	18° 33' 23"	93,89	Árbol
	Vértice D	30° 29' 01"	-	Cierre

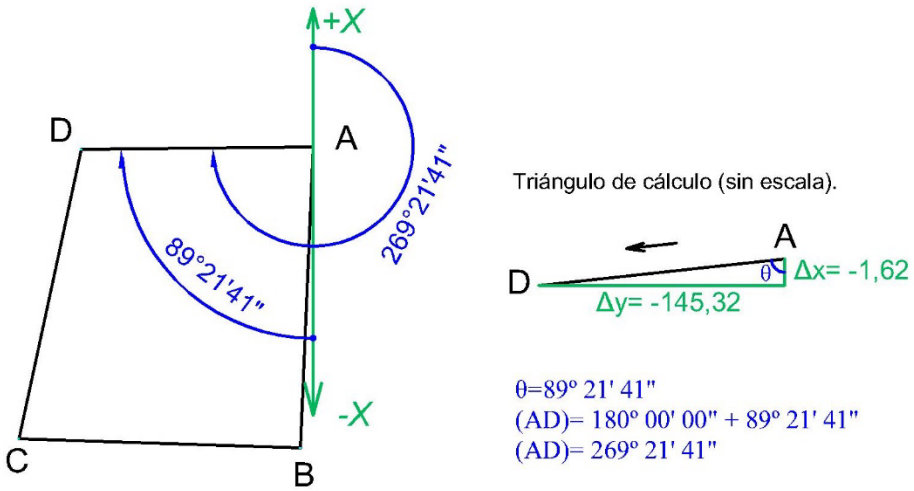
Resolución:

1- Cálculo del acimut de arranque (AD).

$$\tan\theta = \frac{\Delta y_{AD}}{\Delta x_{AD}} = \frac{1362{,}35 - 1507{,}67}{1277{,}75 - 1279{,}37} = \frac{-145{,}32}{-1{,}62}$$

θ= 89º 21’ 41”

Figura 7.5. *Cálculo del acimut (AD).*



Analizando los incrementos en X y en Y (**Δx<0** y **Δy<0**) es posible determinar que la alineación AD pertenece al 3er cuadrante. Por lo tanto, para obtener el acimut (AD) deben sumarse 180º al ángulo θ (figura 7.5).

El acimut (AD) resultante es:

(AD)= 269º 21’ 41”

2- Cálculo de los acimutes de los puntos levantados desde el vértice A.

Punto 1: Árbol

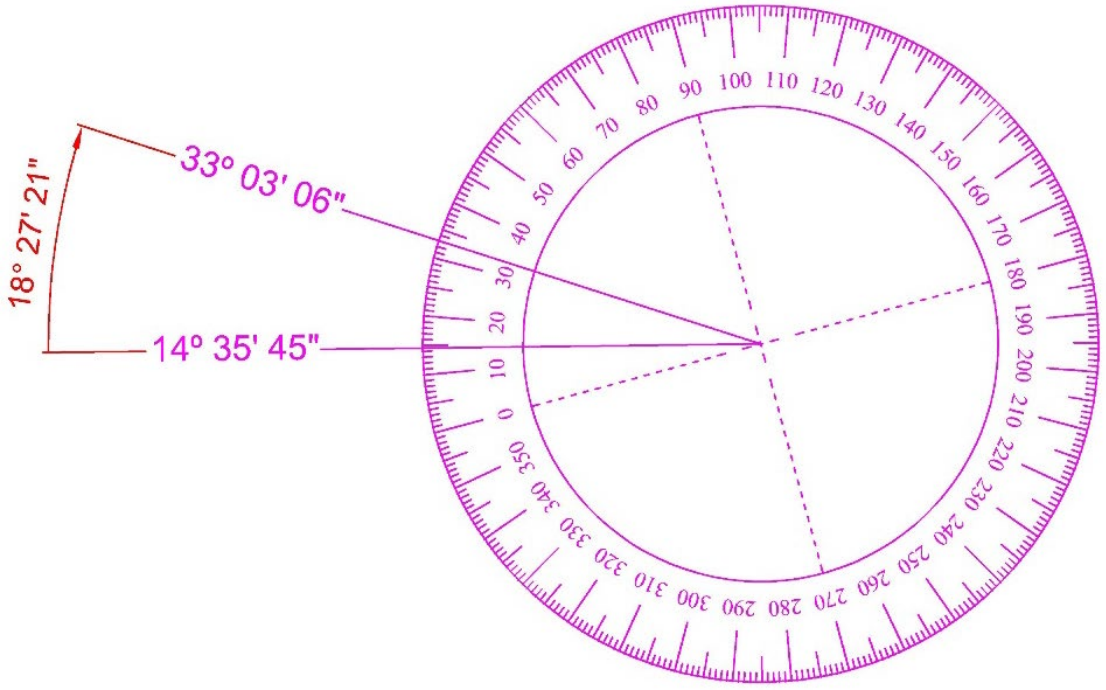
El acimut de la línea A1 (estación en A y visual hacia el punto 1) se calcula a partir del acimut conocido de la línea de orientación AD. Por lo tanto, hay que determinar el ángulo $D\hat{A}1$.

Los ángulos para los puntos medidos desde A se calculan a partir de la dirección de referencia 14º 35’ 45”:

$$D\hat{A}1 = 33º\ 03'06" - 14º\ 35'\ 47" = 18º\ 27'21"$$

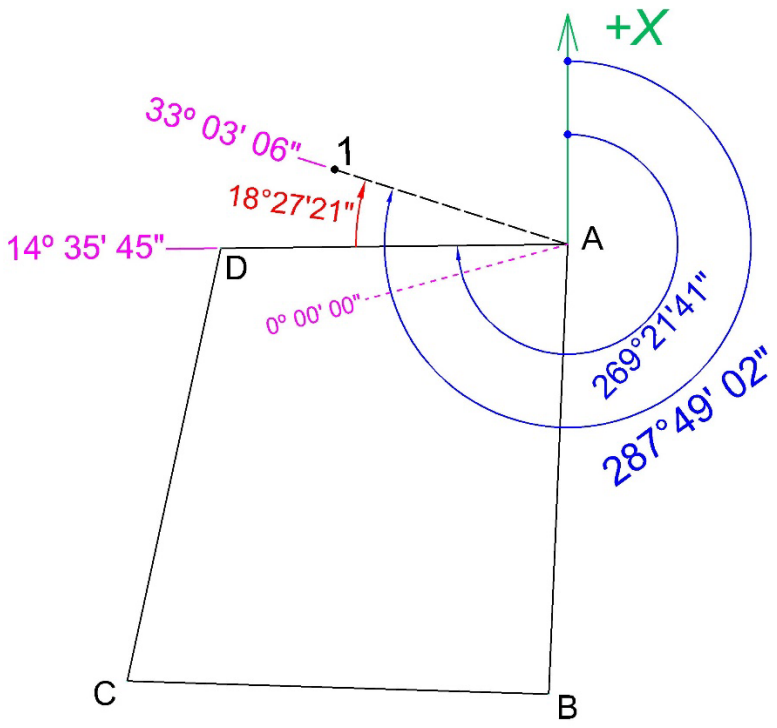
En las figuras 7.6 y 7.7 se representa la medición y el cálculo del ángulo horizontal $D\hat{A}1$, el cual es necesario determinar para luego poder obtener el acimut (A1). Esto se repite para cada punto medido desde A, restándole a las respectivas direcciones la medida 14º 35’ 45” se obtiene el ángulo para calcular el acimut.

Figura 7.6. *Medición del ángulo $D\hat{A}1$.*



En la figura 7.7 puede ser apreciada la posición de la marca correspondiente a cero grados del limbo horizontal (0º 00´00”), origen para la medición de direcciones. También se pude ver el semieje +X que es el origen para la medición de acimutes.

Figura 7.7. *Cálculo del ángulo* $D\hat{A}1$.



Una vez obtenido el ángulo horizontal, entre el punto de referencia D y el punto de interés 1, en este caso el ángulo $D\hat{A}1$, debe sumarse al acimut conocido (AD) y obtenemos el acimut (A1):

$$(A1) = (AD) + D\hat{A}1 = 269º\ 21'\ 41" + 18º\ 27'\ 21" = 287º\ 49'\ 02"$$

Vértice B: Control

Las coordenadas de B son conocidas, pero se tratará como si fuera un punto desconocido al igual que el resto de los que se midieron. De este modo podrán compararse las coordenadas conocidas con las coordenadas calculadas y así establecer un control o cierre para la estación A. Para ello, se calcula el ángulo horizontal $D\hat{A}B$, es decir, el ángulo comprendido entre la dirección leída al punto B y la dirección leída al punto D:

$$D\hat{A}B = 287º\ 38'06" - 14º\ 35'\ 45" = 273º\ 02'21"$$

Luego, sumándole el ángulo $D\hat{A}B$ al acimut conocido (AD), es obtenido el acimut (AB):

$$(AB) = (AD) + D\hat{A}B = 269º\ 21'\ 41 + 273°\ 02'\ 21 = 542º\ 24'\ 02"$$

En el sistema sexagesimal el giro completo equivale a 360°00'00", que equivale a los 0°. Por lo tanto, al resultado del acimut (AB)= 542° 24' 02" se le deben restar 360° para obtener el valor verdadero de esa magnitud angular:

$$(AB) = 542º\ 24'\ 02" - 360º\ 00'\ 00"$$

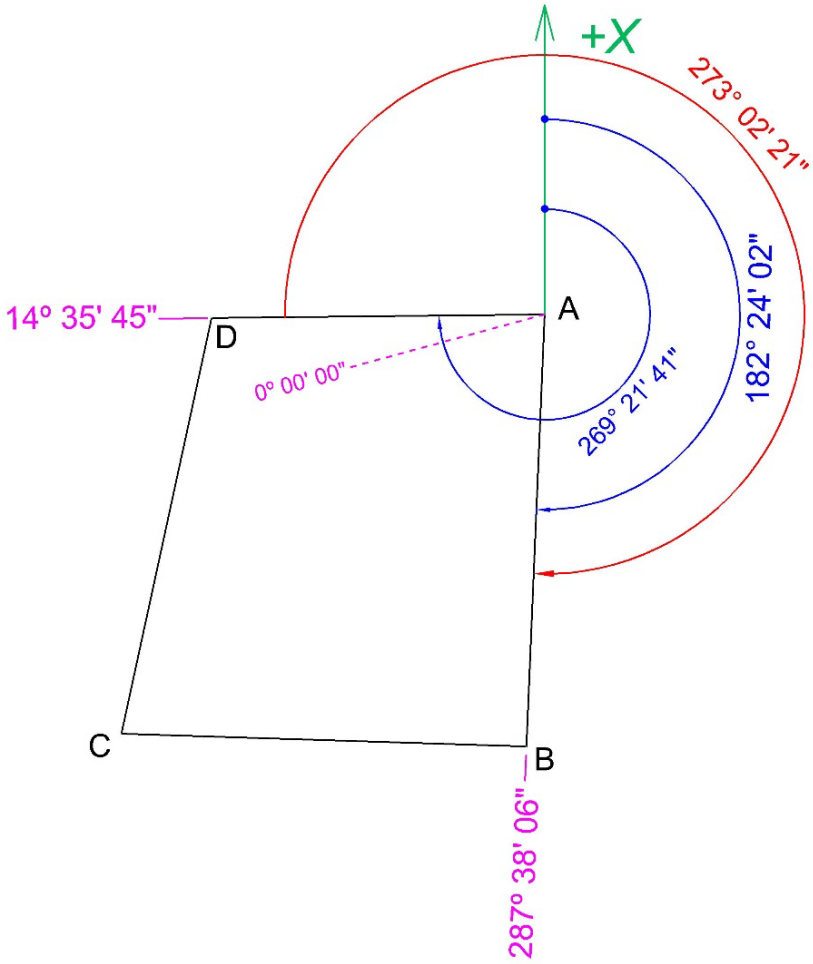
$$(AB) = 182º\ 24'\ 02"$$

Cada vez que el resultado de un cálculo angular de esta clase resulte en un valor superior a los 360° deberá aplicarse el mismo procedimiento.

En la figura 7.8 se ha esquematizado el cálculo del acimut (AB). En ese esquema se dibujaron los ángulos que se utilizaron en los cálculos de este acimut. Analizando los giros angulares,

siempre en sentido horario, es posible realizar la interpretación gráfica de la necesidad de restar 360° cuando el resultado supera el valor del giro angular completo.

Figura 7.8. *Cálculo del ángulo* $D\hat{A}B$.



Punto 2: Edificio

Siguiendo con la misma metodología, se calcula el ángulo $D\hat{A}2$ realizando la diferencia entre las direcciones:

$$D\hat{A}2 = 306º\ 59'16 - 14°\ 35'\ 45" = 292º\ 23'\ 31"$$

En la figura 7.9 se ilustra el cálculo de ese ángulo.

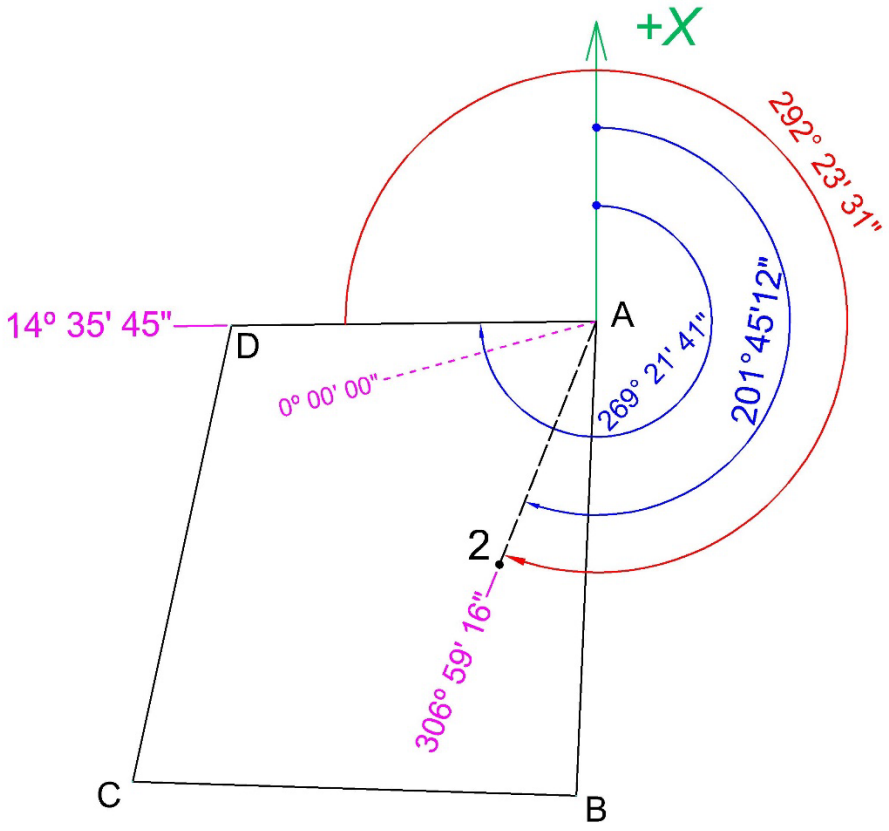
Sumándole el ángulo $D\hat{A}2$ al acimut conocido (AD) se obtienen como resultado el acimut (A2):

$$(A2) = (AD) + D\hat{A}2 = 269º\ 21'\ 41" + 292°\ 23'\ 31" = 561º\ 45'\ 12"$$

Nuevamente, debe restarse 360º al valor calculado (esto se realiza cada vez que el resultado de un acimut calculado supera los 360º):

$$(A2) = 201º\ 45'12"$$

Figura 7.9. *Cálculo del ángulo* $D\hat{A}2$.



Punto 3: Edificio

De la misma forma con que se vienen procediendo, se calcula el acimut (A3):

$$D\hat{A}3 = 343º\ 37'34" - 14º\ 35'\ 45" = 329º\ 01'\ 49"$$

$$(A3) = (AD) + D\hat{A}3 = 269º\ 21'\ 41" + 329º\ 01'\ 49" = 598º\ 23'\ 30"$$

$$(A3) = 238º\ 23'\ 30"$$

Vértice D: Cierre

Este punto se mide con el propósito de cerrar la medición angular y así verificar que durante toda la operación de medición desde A el limbo horizontal no sufrió ningún tipo de alteración. Con esta lectura no se realiza ningún cálculo. Si en campo se hubiera encontrado una diferencia que supere la apreciación de lectura del equipo, debería realizarse toda la medición de nuevo, no fue este el caso, la lectura de cierre 14º 35' 47" es solo 2" mayor a la lectura de orientación.

3- Cálculo de los acimutes de los puntos levantados desde el vértice C.

Para el cálculo de los acimutes de los puntos medidos desde C con orientación a D, debe calcularse primero el acimut (CD):

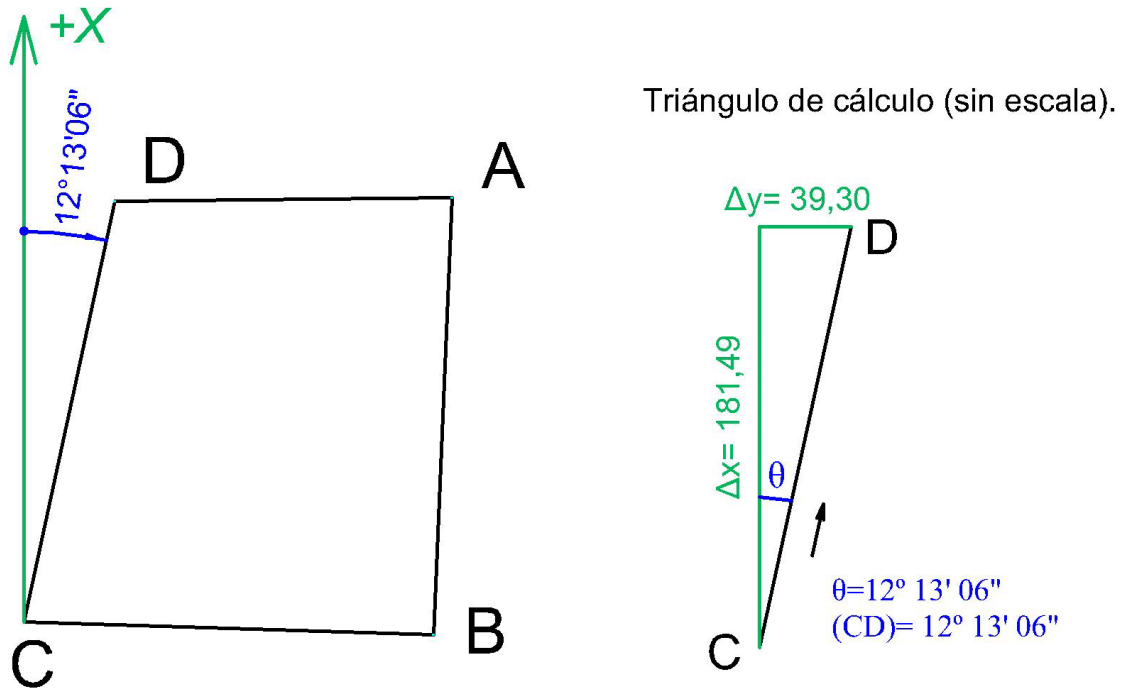
$$\tan\theta = \frac{\Delta y_{CD}}{\Delta x_{CD}} = \frac{1362{,}35 - 1323{,}05}{1277{,}75 - 1096{,}26} = \frac{39{,}30}{181{,}49}$$

θ= 12º 13' 06"

Analizando los incrementos en X y en Y (**Δx>0** y **Δy>0**) se puede determinar que la alineación CD pertenece al 1er cuadrante; por lo tanto, el ángulo θ coincide con el acimut.

(CD)= 12º 13’ 06”

Figura 7.10. *Cálculo del acimut (CD).*



Punto 4: Edificio

Los ángulos para los puntos medidos desde C se calculan tomando como referencia la dirección CD= 30º 28’ 56”, tal como es indicado en la figura 7.11. El ángulo de cálculo se obtiene a partir de las direcciones:

$$\mathrm{D\hat{C}4} = 54º\ 36' 28" - 30º\ 28'\ 56" = 24º\ 07' 32"$$

Luego se calcula el acimut (C4):

Debe sumarse al acimut (CD) el ángulo $D\hat{C}4$.

$$(\mathrm{C4}) = (\mathrm{CD}) + \mathrm{D\hat{C}4}$$

$$(\mathrm{C4}) = 12º\ 13' 06 + 24º\ 07' 32" = 36º\ 20' 38"$$

En la figura 7.12 se representa gráficamente el cálculo del acimut (C4) a partir del acimut de referencia (CD) y del ángulo calculado a partir de las direcciones medidas a los puntos D y 4 con el teodolito estacionado sobre C.

Es válido recordar que todas las mediciones que se están utilizando en este ejemplo son las que se expresan en la tabla 7.2.

Figura 7.11. *Medición del ángulo* $D\hat{C}4$.

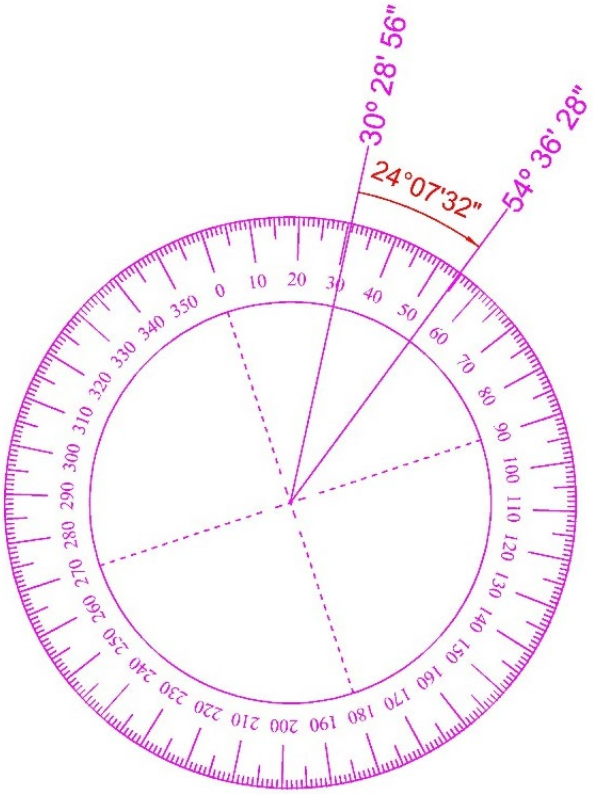
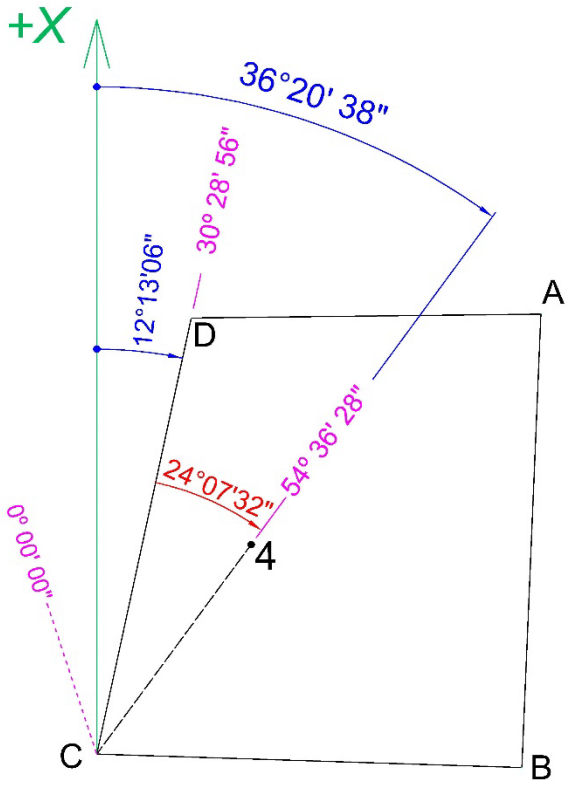


Figura 7.12. *Cálculo del acimut (C4).*



Punto 5: Edificio

$$D\hat{C}5 = 84º\ 37'\ 39"\ \text{-}\ 30º\ 28'\ 56" = 54º\ 08'\ 43"$$

$$(C5) = (CD) + D\hat{C}5 = 12º\ 13'\ 06 + 54º\ 08'\ 43" = 66º\ 21'\ 49"$$

Vértice B: Control

$$D\hat{C}B = 110º\ 03'\ 09"\ \text{-}\ 30º\ 28'\ 56" = 79º\ 34'\ 13"$$

$$(\mathrm{CB}) = (\mathrm{CD}) + \mathrm{D\hat{C}B} = 12º\ 13'\ 06 + 79º\ 34'\ 13" = 91º\ 47'\ 19"$$

Punto 6: Árbol

$$\mathrm{D\hat{C}6} = 18º\ 33'\ 23"\ \text{-}\ 30º\ 28'\ 56" = -11º\ 55'\ 33"$$

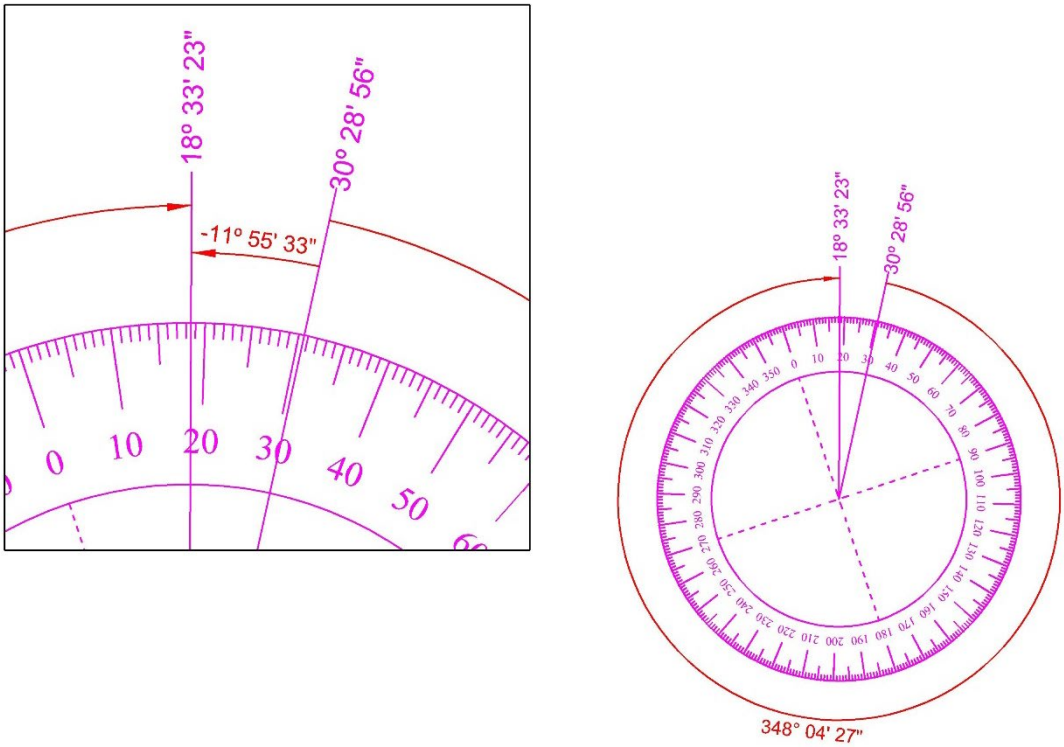
En este caso, el ángulo resultante es negativo porque la dirección medida es menor a la dirección de referencia CD. Entonces, para obtener el ángulo de cálculo se le deben sumar 360º. El signo negativo en el ángulo significa que se está considerando su giro en sentido antihorario.

En las figuras 7.13 y 7.14 se ilustra esta situación particular.

Finalmente es obtenido el ángulo buscado:

$$D\hat{C}6 = -11º\ 55'\ 33"\ +\ 360º\ 00'\ 00" = 348º\ 04'27"$$

Figura 7.13. *Cálculo del ángulo $D\hat{C}6$.*



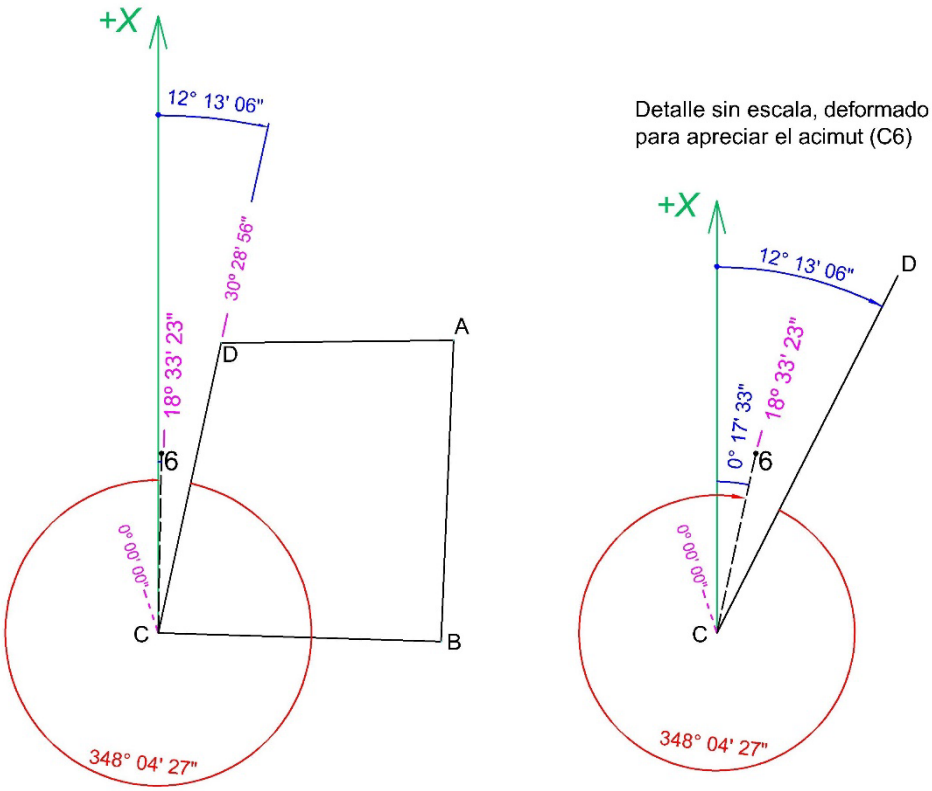
A continuación, se calcula el acimut (C6).

La referencia para este cálculo es el acimut (CD), que recordamos se calculó a partir de las coordenadas de los puntos C y D (tabla 7.1) del polígono. El otro elemento que se toma para el cálculo del acimut (C6) es el ángulo antes calculado 348º 04' 27".

$$(C6) = (CD) + D\hat{C}6 = 12º\ 13'\ 06" + 348º\ 04'\ 27" = 360º\ 17'\ 33"$$

$$(C6) = 0º\ 17'\ 33"$$

Figura 7.14. *Cálculo del acimut (C6).*



4- Cálculo de las coordenadas de los puntos levantados.

Desde A: Comenzando con el punto 1, se utiliza la distancia horizontal obtenida en campo, medida entre el punto de estación A y el punto de interés 1: H_{A1}= 102,55 m

$$\Delta x_{A1} = H_{A1} * \cos(A1) = 102{,}55\ m * \cos 287º\ 49'\ 02" = 31{,}38$$

$$\Delta y_{A1} = H_{A1} * \sin(A1) = 102{,}55\ m * \sin 287º\ 49'\ 02" = -97{,}63$$

Como el punto 1 se levantó desde A, se calcula a partir de x_A, y_A:

$$x_1 = x_A + \Delta x_{A1} = 1279{,}37 + 31{,}38 = 1310{,}75$$

$$y_1 = y_A + \Delta y_{A1} = 1507{,}67 + (-97{,}63) = 1410{,}04$$

De la misma forma se calculan las coordenadas de los restantes puntos medidos desde A, utilizando en cada caso el acimut y la distancia que corresponda, los resultados se pueden encontrar en la tabla 7.3.

Desde C: Comenzando con el punto 4:

$$\Delta x_{C4} = H_{C4} * \cos(C4) = 114{,}63\ m * \cos 36º\ 20'\ 38" = 92{,}33$$

$$\Delta y_{C4} = H_{C4} * \sin(C4) = 114{,}63\ m * \sin 36º\ 20'\ 38" = 67{,}93$$

En este caso, son utilizadas como referencia las coordenadas del punto de estación C:

$$x_4 = x_C + \Delta x_{C4} = 1096{,}26 + 92{,}33 = 1188{,}59$$

$$y_4 = y_C + \Delta y_{C4} = 1323{,}05 + 67{,}93 = 1390{,}98$$

De la misma forma se calculan las coordenadas de los restantes puntos, los resultados se pueden encontrar en la tabla 7.3.

Tabla 7.3. *Cálculos y resultados.*

Esta-ción	Punto Vi-sado	Acimut	Proyecciones		Coordenadas	
			Δx	Δy	x	y
A	Vértice D	269° 21' 41"	-	-	-	-
	1	287° 49' 02"	31.38	-97.63	1310.75	1410.04
	Vértice B	182° 24' 02"	-188.61	-7.91	1090.76	1499.76
	2	201° 45' 12"	-96.68	-38.58	1182.69	1469.09
	3	238° 23' 30"	-59.51	-96.70	1219.86	1410.97
	Vértice D	-	-	-	-	-
C	Vértice D	12° 13' 06"	-	-	-	-
	4	36° 20' 38"	92.33	67.93	1188.59	1390.98
	5	66° 21' 49"	55.17	126.07	1151.43	1449.12
	Vértice B	91° 47' 19"	-5.52	176.71	1090.74	1499.76
	6	0° 17' 33"	93.89	0.48	1190.15	1323.53
	Vértice D	-	-	-	-	-

5- Control.

Las coordenadas conocidas del punto B utilizado como control son:

x_B= 1090,74

y_B= 1499,77

A los fines del control, las coordenadas anteriores se asumen como “verdaderas”.

Como se ha mencionado antes, el vértice B se midió como si fuese un punto de interés desconocido. De este modo puede establecerse un control del relevamiento realizado desde cada estación.

.- Coordenadas de B obtenidas desde A

x'_B= 1090,76 Error= 1090,76 – 1090,74= 0,02 m

y'_B= 1499,76 Error= 1499,76 – 1499,77= -0,01 m

.- Coordenadas de B obtenidas desde C

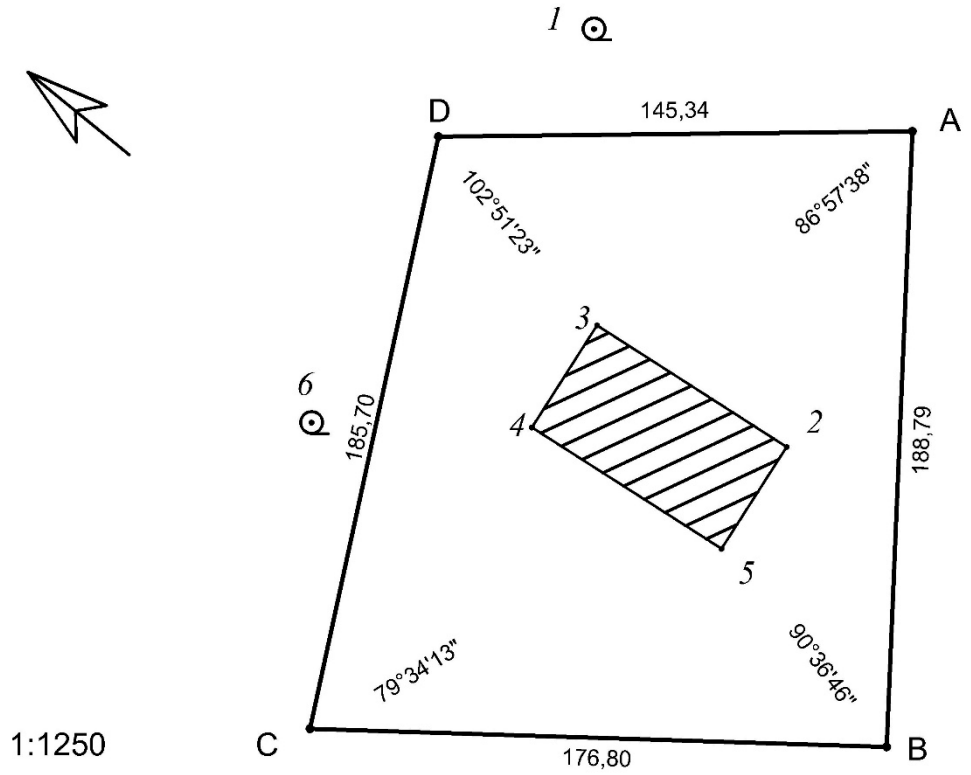
x''_B= 1090,74 Error= 1090,74 – 1090,74= 0,00 m

y''_B= 1499,76 Error= 1499,76 – 1499,77= -0,01 m

Los errores son considerados como admisibles y por lo tanto el trabajo es aceptado.

6- Representación Gráfica.

Figura 7.15. *Representación gráfica del trabajo realizado.*



La escala con denominador 1250 corresponde a una hoja A4 apaisada. La figura 7.15 es esquemática ya que no conserva la escala designada.

7- Cálculo del acimut (CB):

Como un aporte adicional a este ejemplo práctico, se muestran los cálculos de los acimutes (CB) del 2do cuadrante y (BD) del 4to cuadrante.

El cálculo del acimut (CB) a partir de las coordenadas de esos puntos no se requiere para el ejercicio de radiación, simplemente se lo realiza para demostrar cómo se efectúa.

$$\tan\theta = \frac{\Delta y_{CB}}{\Delta x_{CB}} = \frac{1499{,}77 - 1323{,}05}{1090{,}74 - 1096{,}26} = \frac{176{,}72}{-5{,}52}$$

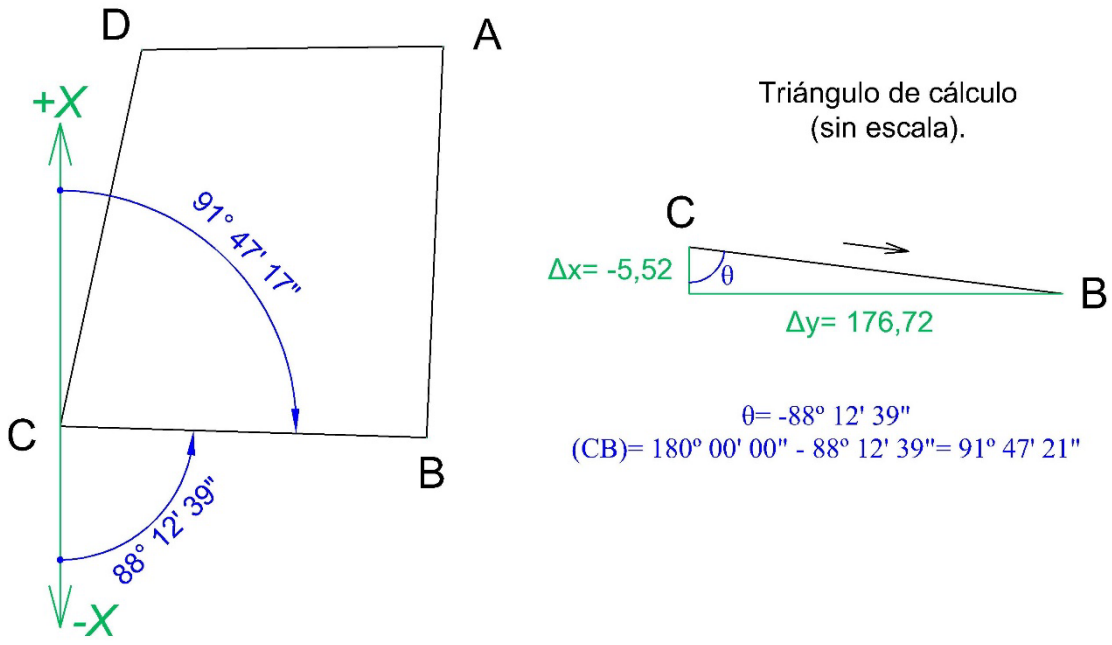
θ= -88º 12’ 39”

El signo negativo del ángulo significa que es un giro en sentido antihorario

Analizando los incrementos en X y en Y (**Δx<0** y **Δy>0**) se puede determinar que la alineación CB pertenece al 2do cuadrante; por lo tanto, a 180º debe restársele la magnitud del ángulo θ, este último ya es negativo así que simplemente se realiza una suma algebraica. Esta situación se muestra en la figura 7.16.

(CB)= 180º 00’ 00” – 88º 12’ 39” = 91º 47’ 21”

Figura 7.16. *Cálculo del acimut (CB).*



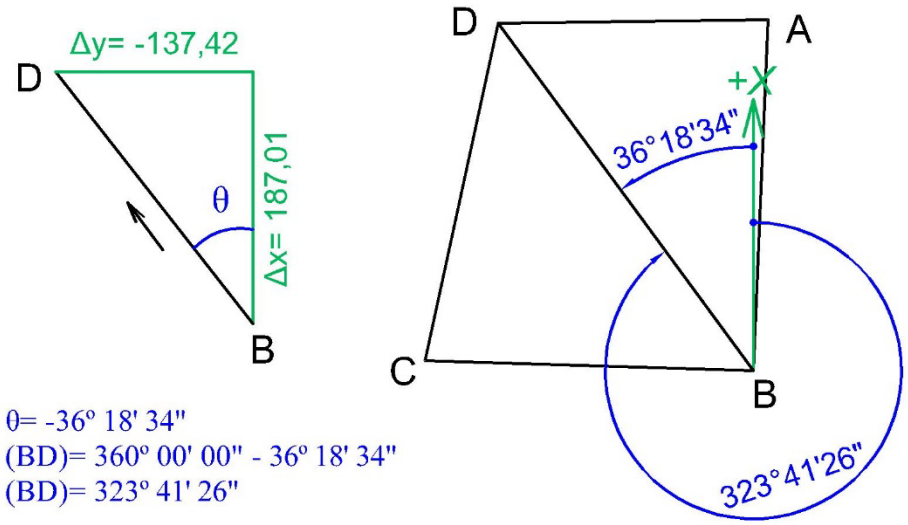
Se obtiene así el acimut: (CB)= 91º 47’ 21”

En la radiación, el acimut (CB) fue obtenido a partir de las mediciones de la estación en C, en ese caso el valor obtenido fue de 91º 47’ 19”, una diferencia perfectamente aceptable considerando que este último valor se calculó a partir de la medición de direcciones.

9- Cálculo del acimut (BD):

El acimut (BD) no tiene ninguna aplicación en el ejercicio de radiación, se lo calcula para aportar un ejemplo más a la metodología desarrollada.

Figura 7.17. *Esquematización del cálculo del acimut (BD)*



Cálculo del acimut (BD):

$$\tan\theta = \frac{\Delta y_{BD}}{\Delta x_{BD}} = \frac{1362{,}35 - 1499{,}77}{1277{,}75 - 1090{,}74} = \frac{-137{,}42}{187{,}01}$$

θ= -36º 18’ 34”

El signo negativo del ángulo indica que es un giro en sentido antihorario.

Analizando los incrementos en X y en Y (Δx>0 y Δy<0) se puede determinar que la alineación BD pertenece al 4to cuadrante (figura 7.17). Por lo tanto, a 360º debe restársele la magnitud del ángulo θ, este último ya es negativo así que simplemente se realiza una suma algebraica.

(BD)= 360º 00’ 00” – 36º 18’ 34” = 323º 41’ 26”

El valor del acimut es: (BD)= 323º 41’ 26”

Referencias

MÜLLER, Roberto (1940). *Compendio general de topografía teórico-práctica: Tomo 3, Vol.1. Triangulación y nivelación*. Librería: “EL ATENEO”.

DOMÍNGUEZ GARCÍA-TEJERO, Francisco (2002). *Topografía General y Aplicada*. Ediciones Mundi-Prensa.

CHUECA PAZOS, Manuel, HERRÁEZ BOQUERA, José, BERNÉ VALERO, Jose Luis (1996). *Tratado de Topografía 2: Métodos Topográficos*. Editorial Paraninfo.

CAPÍTULO 8
Relevamiento planimétrico con estación total

Roberto José Romano

Relevamiento topográfico con Estación Total

Una Estación Total es un dispositivo que combina los componentes de un teodolito electrónico y un distanciómetro MED, junto con un microprocesador para el procesamiento automático de datos topográficos. Su microprocesador cuenta con diversas funciones como la exploración electrónica del limbo, la presentación digital de los resultados, la corrección automática de las lecturas iniciales del limbo y la compensación de la distancia por variaciones en los valores de temperatura y presión del aire. En los modelos más precisos, también se tiene en cuenta la humedad relativa del aire para calcular las correcciones de distancia.

En el ámbito de la planimetría, la Estación Total se utiliza para determinar las coordenadas polares de los puntos mediante la medición de direcciones angulares y distancias. A través de su microprocesador, se calculan las coordenadas rectangulares correspondientes en un sistema de referencia seleccionado.

Este equipo permite medir tanto la distancia geométrica (inclinada o euclídea) a los puntos, como las observaciones angulares (horizontal y vertical). La computadora incorporada realiza el cálculo de la distancia reducida al horizonte, la cual se muestra en pantalla y puede ser utilizada para el cálculo de coordenadas rectangulares, 2D y 3D. Estos cálculos pueden efectuarse automáticamente, lo que permite obtener directamente las coordenadas XY de los puntos medidos. Estos datos pueden ser almacenados en la memoria interna del dispositivo y posteriormente descargados a una computadora para su análisis y procesamiento. En algunos modelos de equipos, la transferencia de datos puede realizarse en campo mediante una conexión Bluetooth, cargándolos en un teléfono celular o notebook.

La radiación planimétrica llevada a cabo con estación total es una técnica de medición altamente eficaz cuando se desea relevar una gran cantidad de puntos con una precisión centimétrica (± 0,01 m). Se miden la dirección en CI y la distancia en cada punto, y la estación total realiza automáticamente todos los cálculos necesarios, lo que resulta en un significativo ahorro de tiempo, y además permite llevar a cabo controles del trabajo en campo.

Sobre los casos de estudio

En los casos de estudio que se tratarán a continuación, será considerado el tipo de levantamiento topográfico más elemental, en el cual el sistema y el marco de referencia se generan al iniciar el relevamiento, sin la necesidad vincularse en algún marco previamente medido.

En estos casos, suele ser utilizado un sistema de referencia local arbitrario determinado por convenciones elegidas convenientemente, con un origen y orientación arbitrarios. Todos los puntos relevados tendrán sus coordenadas referidas a dicho sistema. La definición de local y arbitrario indica que la normal al plano de referencia utilizado será coincidente con la vertical del lugar. Pero el norte de cálculo (acimut 0º) no coincidirá con la meridiana del lugar.

El marco de referencia usualmente se conforma por puntos fijos materializados mediante estacas de madera o de hierro, y su permanencia en el terreno es necesaria solamente durante el tiempo requerido por el trabajo.

En todos los casos que se expondrán, las mediciones angulares se realizarán solamente en la posición del círculo vertical a la izquierda (CI). Para los trabajos que requieran mayor precisión, las direcciones angulares se podrán medir por el método de Bessel.

Tareas preliminares

Hechos todos los estudios previos necesarios, se debe realizar una inspección del terreno para identificar los puntos de interés a levantar, así como los sitios aproximados en los que se ubicará el instrumento. En general, el número de estaciones para completar el relevamiento dependerá del tipo de trabajo, la precisión y el nivel de detalle requeridos, longitud de las visuales, extensión de la zona a levantar, la presencia de obstáculos que impidan accesos o visuales limpias, y la necesidad de vincular el relevamiento a un sistema de referencia preexistente. Además, la distribución definitiva de las estaciones debe permitir algún tipo de control de cierre del trabajo.

Adopción de un sistema de referencia

Una vez determinado el número aproximado de estaciones y su ubicación en el terreno, se procede a establecer el sistema de referencia local arbitrario al que se referirán todas las observaciones. Se deberá colocar un punto (estaca o marca equivalente) donde se hará la primera estación. Esta marca deberá ser de carácter puntual, además deberá perdurar durante el tiempo que requiera el trabajo, por dicho motivo se los denomina también “Puntos Fijos”. Sobre este punto se estacionará y hará el calado de la estación total, recordando que el principio fundamental de esta operación es prácticamente el mismo que para un teodolito. Para cada Punto Fijo es conveniente realizar su correspondiente monografía de vértices.

En esta instancia es cuando se define en el instrumento el sistema de referencia en el que se realizarán las observaciones. Son variadas las marcas de equipos existentes y cada una posee diferentes modelos, aun así, el procedimiento general es el mismo en cualquier aparato. Este procedimiento consiste en la ubicación y la orientación de la estación total.

Definir la ubicación de la estación total implica ingresar en su programa de operación las coordenadas del punto topográfico sobre el cual está establecida. Para fines didácticos, se llamará a este punto de estación PF1 (Punto Fijo 1). Las coordenadas X e Y de este punto se eligen de manera arbitraria, y los criterios para asignarlas pueden variar según la forma y extensión del terreno. Lo más habitual es usar valores múltiplos de 100 o 1000, asignando valores distintos a X y a Y, de manera que no coincidan entre sí. Además, es conveniente seleccionar coordenadas para el primer punto fijo que eviten la aparición de valores negativos.

Sean, por ejemplo, las coordenadas adoptadas para el PF1:

X_1= 1.000,000 Y_1= 5.000,000

Una vez que se han cargado esas coordenadas, el instrumento ya se ha ubicado, pero para determinar un sistema de referencias es necesario realizar la operación denominada orientación. Para orientar la estación total es necesario indicarle al software cual es la dirección que se tomará como norte (+X) de cálculo o de cuadrícula, o sea el acimut con valor angular 0º 00’ 00”. La elección de esta dirección es también arbitraria, pero al igual que con la elección de las coordenadas del punto de estación, resulta beneficioso considerar algunos criterios prácticos.

Muchas veces la zona de trabajo es de una extensión tal que ofrece una dirección preponderante, como por ejemplo parcelas de forma rectangular, un camino, una zona de vías, un canal, etc. En estos casos siempre será conveniente que la dirección norte elegida tenga esa orientación. Algunos ejemplos se ilustran en las figuras 8.1, 8.2 y 8.3.

Figura 8.1. *Dirección del norte de cuadrícula coincidente con el lado más largo de la parcela.*

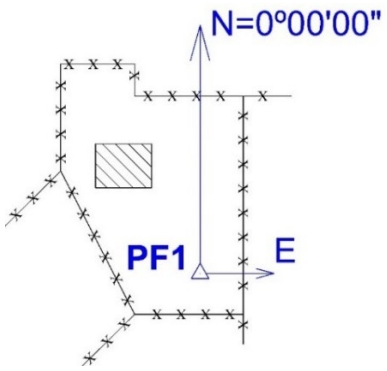


Figura 8.2. Dirección norte es seleccionada de acuerdo con la orientación del camino.

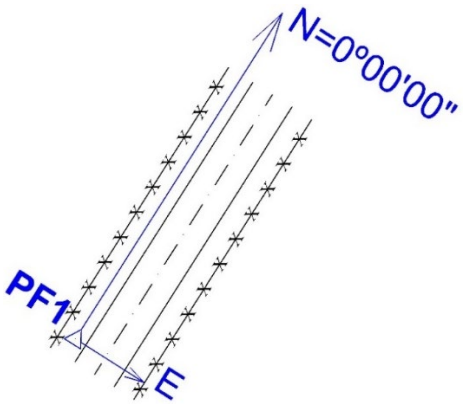
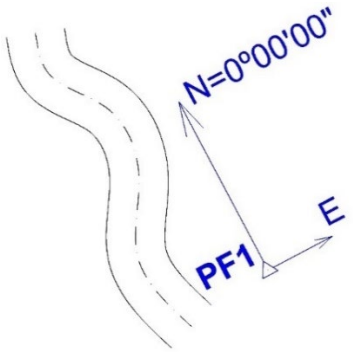


Figura 8.3. Dirección del norte coincidente con la predominante del cauce.



También es importante que, con esta elección, el Norte Geográfico (verdadero) mantenga una dirección comprendida entre los 315° y los 45° en el sistema generado.

Seleccionada una dirección para el semieje +X (norte), es necesario materializarla mediante algún otro punto ubicado a cierta distancia del PF1. Para minimizar los efectos del error de dirección, conviene que sea una distancia lo más larga posible, en relación con las involucradas en el trabajo. Esta marca puede ser del mismo tipo que el punto de estación.

Otra opción es elegir algún tipo de marca o señal existente (antena, vértice, filo de algún elemento bien definido, etc.) de carácter permanente, tal que la dirección que determine la visual a este objeto sea el norte de cálculo elegido. Es fundamental que la colimación a este elemento puede repetirse en posteriores mediciones con total exactitud.

Antes de comenzar con el relevamiento propiamente dicho conviene materializar otros puntos fijos, por ejemplo: PF2 y PF3, realizando las correspondientes monografías de vértices. Estos puntos se podrán utilizar como puntos de estación, de orientación o de control, según avance el trabajo. Estos puntos fijos deben ser medidos con el máximo cuidado ya que materializan el sistema de referencias, la incertidumbre de medida de estos puntos se propagará al resto de las mediciones.

Para la medición de puntos con estación total se requiere colocar un bastón con prisma sobre estos. Los equipos modernos están equipados con memorias internas que permiten almacenar las observaciones para ser descargadas posteriormente en gabinete. No obstante ello, es recomendable utilizar una libreta de campaña en la que se anoten los puntos fijos con sus coordenadas, monografía y cualquier otro detalle que facilite su descripción y ubicación.

Medición

Una vez que el instrumento ha sido estacionado y nivelado, y se ha definido y materializado un sistema de referencia se procederá con el levantamiento de los puntos de interés. Esto incluye también a los puntos extras que se medirán para controlar la calidad del trabajo realizado.

En este tipo de levantamiento, la medición de un punto con la estación total requiere colocar un bastón con un prisma sobre el punto a medir. Luego se colima al prisma y se efectúa la medición electrónica de la distancia, al mismo tiempo que el equipo registra la dirección correspondiente a esa línea visual. Con estos datos, el instrumento calcula las coordenadas X e Y del punto

medido y las muestra en la pantalla. El operador tiene la opción de registrar manualmente esta información en una libreta de campo y/o almacenarla en la memoria interna del equipo.

Cuando se trabaja almacenando las observaciones en la memoria de la estación total, el software del instrumento permite adjuntar al par de coordenadas XY datos adicionales, como un número de orden y una descripción. Esta forma de almacenar los datos de cada punto resulta muy útil al momento de transferir esa información a un archivo CAD.

Dado que este levantamiento es de naturaleza planimétrica, no es necesario medir ni registrar la altura del instrumento sobre el punto de estación ni la altura del prisma sobre cada punto medido. Estas mediciones solo son necesarias cuando se requiere levantar las alturas de los puntos.

Con el equipo operando desde el PF1 se relevan todos los puntos de interés visibles, estos se medirán una única vez en posición directa (CI). Terminado ello se mide nuevamente el PF2, o el PF3, para asegurarse que los valores medidos en esta segunda oportunidad coinciden con los que se obtuvieron inicialmente, asegurando que el instrumento no sufrió ningún tipo de perturbación.

Finalizada la primera etapa del trabajo, se realizará la segunda estación en el siguiente punto fijo (PF2) para proseguir con el relevamiento. Se procede a estacionar y calar el instrumento en el nuevo punto, luego se le indica al software del equipo las coordenadas de la nueva ubicación (Introduciendo los valores manualmente o importándolos desde la memoria del dispositivo). Estas coordenadas XY fueron medidas previamente desde el PF1. Luego, la estación total debe ser orientada nuevamente para que la nueva dirección del norte (+X) coincida exactamente con la primera, esta tarea se consigue apuntando cuidadosamente a uno de los dos puntos fijos restantes. Utilizando, en este ejemplo el PF1, se le indica al software del instrumento cuál es el punto de orientación, el procesador calcula el valor del acimut (PF2 PF1) y le asigna ese valor a la dirección establecida mediante la puntería. Como control se mide desde la nueva estación el punto PF3 y se verifica que los valores observados para X e Y no difieran de los obtenidos desde la primera estación en un valor mayor a la tolerancia de trabajo adoptada.

Entonces, el sistema de referencia local generado al principio del relevamiento ha sido reconstruido en el nuevo punto de estación PF2, y todos los puntos que se releven desde allí estarán referidos a dicho sistema.

Desde esta nueva estación se podrán relevar todos los elementos que se requieran, y si es necesario, se medirán nuevos puntos fijos. Se continúa operando de este modo en cada nueva estación que se realice, avanzando siempre que sea posible como el itinerario de una poligonal cerrada. Procurando que desde la última estación pueda ser medido el PF1, consiguiendo así un control de cierre. El error de cierre resultante podrá ser contrastado con el valor de la tolerancia de trabajo empleada. Dado que la estación total calcula en tiempo real las coordenadas XY de todos los puntos medidos, en un único sistema de referencia, es posible obtener el control de cierre en campo y no tener que esperar hasta resolver los cálculos en gabinete.

Debe tenerse en cuenta que tal vez no sea necesario hacer estación sobre todos los puntos fijos medidos, algunos de ellos solo se utilizarán para mediciones de control. Tampoco es

necesario avanzar estacionando en los puntos fijos de acuerdo con el orden en que se fueron midiendo. Es importante volver a destacar que todos los puntos relevados pertenecen al mismo marco de referencia independientemente de la estación de la que se hayan medido.

Es fundamental que los puntos fijos se midan con mayor precisión que los puntos de interés del terreno. Los errores presentes en los puntos fijos se propagarán a las mediciones realizadas desde la estación sobre estos puntos. Es decir, la precisión de las mediciones en los puntos de interés estará influenciada por la rigurosidad con la que se midieron los puntos fijos. Por lo tanto, es fundamental asegurar una correcta y precisa medición de los puntos fijos para garantizar la calidad y precisión de todo el levantamiento topográfico.

Finalizado el relevamiento y hechos los controles de rigor, la información levantada en campo se encontrará almacenada en el equipo o registrada en la libreta de campo, con lo cual lo siguiente será el procesamiento de esta para su representación gráfica.

Levantamiento planimétrico con estación total - Ejemplo

A continuación, se presenta un ejemplo práctico que ilustra la metodología de trabajo previamente explicada. A través de esta situación hipotética, se detallarán paso a paso todas las etapas, desde la planificación hasta la representación gráfica. Es importante destacar que este caso es ficticio y ha sido diseñado exclusivamente para ejemplificar la metodología dentro de este material de estudio.

El ejemplo se basa en diversas experiencias profesionales y académicas relacionadas con el relevamiento de parcelas rurales. En este caso de estudio, el objetivo es únicamente determinar la posición planimétrica de los elementos del terreno, es decir, trabajar con coordenadas XY sin incluir la medición de las alturas.

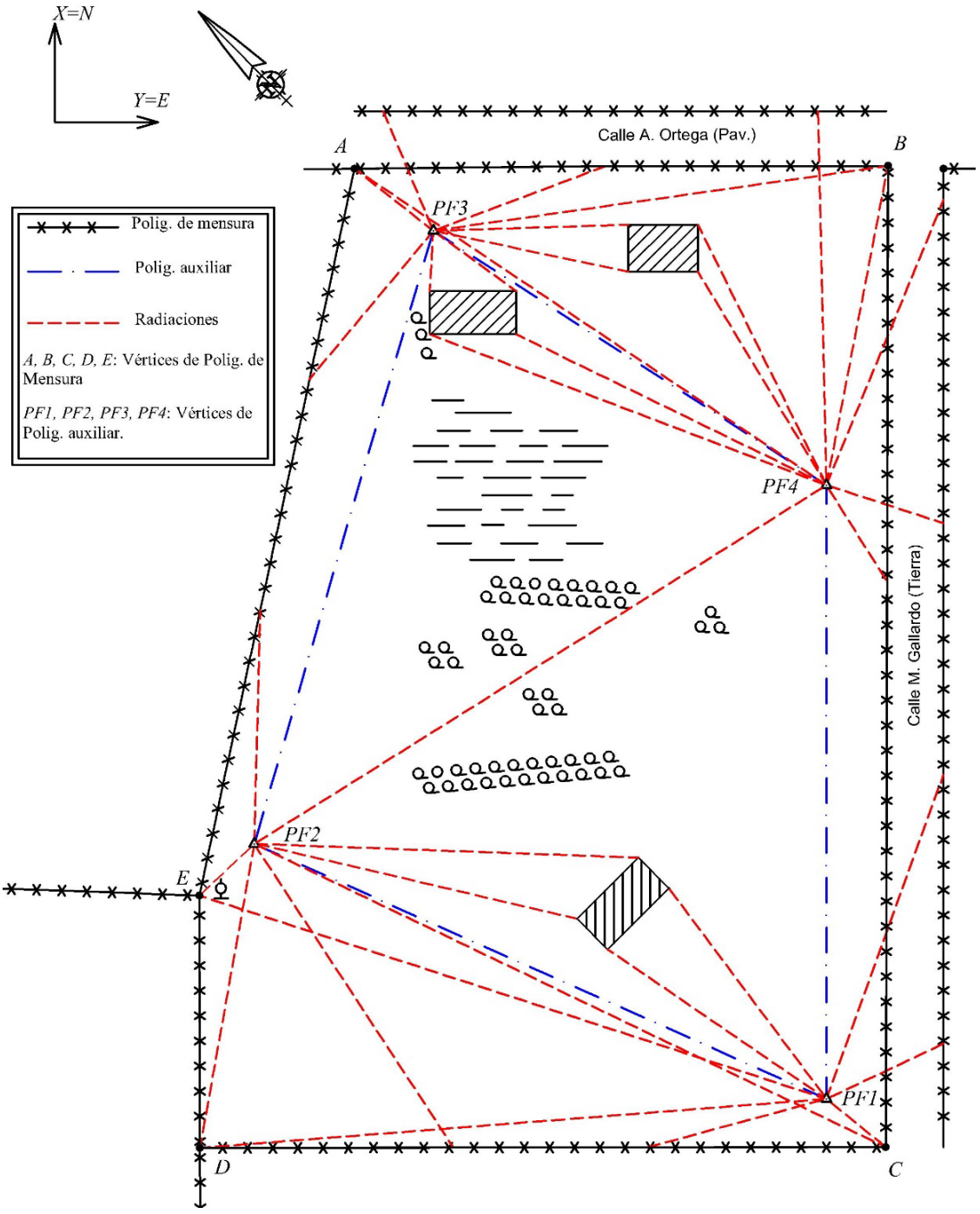
El enfoque principal de este caso práctico está en las actividades de campo, tanto para el relevamiento como para el control de la información obtenida. Además, se explicarán algunas alternativas para el procesamiento de los datos crudos y su representación gráfica posterior. Como resultado final, se obtendrá un producto cartográfico que servirá como base para la confección de planos.

Planificación

En este caso de estudio, para confeccionar el plano de la parcela es necesario determinar sus medidas lineales, angulares y su superficie. Se considera además el relevamiento de las edificaciones existentes en su interior, juntamente con los anchos de las calles que la circundan.

Estudiada previamente la documentación de la parcela, se realiza el recorrido del lugar para planificar la metodología de trabajo, estableciendo el número de estaciones y su ubicación a partir de la posibilidad de visuales, los elementos a relevar conjuntamente con los cierres y controles necesarios.

Figura 8.4. *Distribución de los puntos fijos y las visuales de las mediciones realizadas.*



La parcela de este ejemplo tiene su perímetro cubierto por alambrados (figura 8.4), definidos fundamentalmente por postes de madera dura. En su interior existen algunas edificaciones y distintas arboledas, estos elementos condicionan las posibles visuales a efectuar. La poligonal de mensura de la parcela se compone por los vértices designados como A, B, C, D y E.

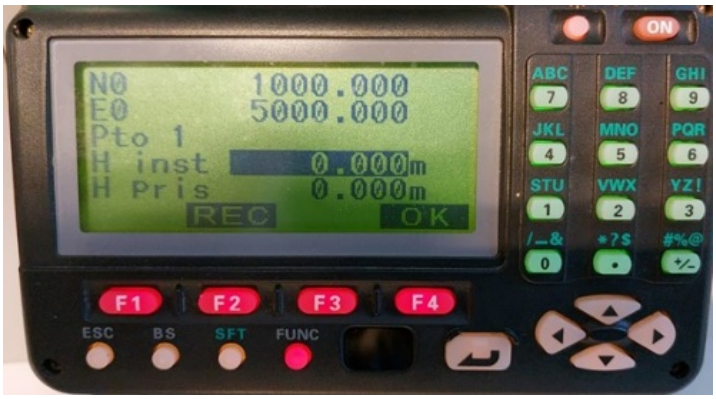
Las mediciones se realizarán mediante una poligonal auxiliar de cuatro vértices, estos son los puntos fijos 1, 2, 3 y 4. Se define el sistema de referencia asignando al PF1 las coordenadas

1.000,000 para X (norte) y 5.000,000 para Y (este). La dirección Norte (+X) se adopta en correspondencia con el lado mayor de la parcela (sobre calle M. Gallardo). Por ello la dirección de la línea definida desde el PF1 hacia el PF4 corresponderá al acimut 0º00'00".

Relevamiento planimétrico

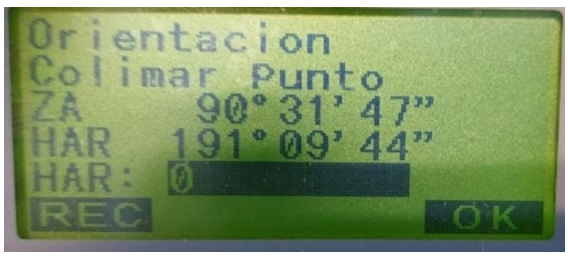
Estacionado el equipo sobre el PF1 se ingresa al menú de operaciones, y en la sección correspondiente, se le asignan las coordenadas a este punto (figura 8.5). En este ejemplo se utilizará una estación total del Dpto. de Agrimensura FI UNLP.

Figura 8.5. *Ingreso de coordenadas del punto de estación (PF1).*



Luego, se procede a orientar el equipo asignando un valor acimutal de 0º (figura 8.6) a la dirección correspondiente al punto PF4. En este ejemplo, el PF4 será la marca que materialice la dirección Norte desde el PF1. Este PF4, por su intervisibilidad con el resto de los puntos fijos, será utilizado también como punto de control. Entonces, ya estacionado el equipo sobre el PF1, y cargadas las coordenadas de dicho punto, se procede a su orientación. Se colima al PF4 y se le indica al instrumento que esa dirección es la del Norte del sistema adoptado. En este equipo en particular, esta acción se realiza ingresando a la opción "Acimut Manual". Desde esa opción se asigna un acimut de valor cero grados (figura 8.6).

Figura 8.6. *A la línea visual definida desde el PF1 hacia el PF4 se le asigna el acimut de 0º00'00".*



Inmediatamente después se mide y se registran las coordenadas del PF4. El equipo muestra en el display las coordenadas XY calculadas por el instrumento. En la figura 8.7 se aprecia el resultado de esta medición, la coordenada X se identifica con la letra N (Norte), mientras que la

coordenada Y se indica con la letra E (Este). La medición de este punto debe realizarse con el mayor cuidado posible.

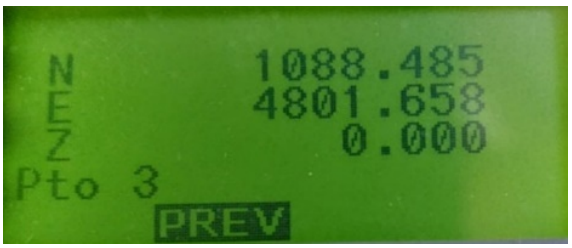
Para la medición de puntos fijos, que podrán utilizarse tanto para estacionarse como para control, se recomienda colimar hacia la parte más baja del bastón para definir con mayor precisión la dirección. Luego, manteniendo la alidada frenada y conservando la dirección establecida, se eleva el anteojo para medir la distancia al prisma. Este procedimiento evita que la posible falta de verticalidad del bastón portaprisma influya en la precisión de la dirección medida.

Figura 8.7. *Coordenadas del PF4 calculadas y mostradas por el equipo.*



Con posterioridad a realizar la orientación y medición del PF4, se procede a medir el PF2 , también con toda la rigurosidad requerida. Nuevamente, el equipo calcula las coordenadas planas y las muestra en la pantalla, tal como se aprecia en la figura 8.8.

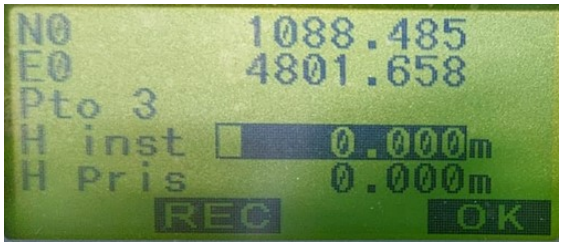
Figura 8.8. *Coordenadas del PF2 medidas desde la estación en PF1.*



Luego, se comienza con el relevamiento mediante una radiación desde el PF1, tomando la precaución de medir todos los puntos necesarios. Para los puntos de interés se colima directamente al prisma, no es necesaria la previa colimación de la parte inferior del bastón. Relevados todos los puntos de interés, se procese al cierre de esa estación midiendo nuevamente el punto de orientación PF4, verificando en el momento las diferencias obtenidas y registrando la medición.

Nótese que, con esta técnica de trabajo, cada punto se mide angularmente solo en CI y las distancias se miden una única vez. Es un método de radiación convencional, la diferencia radica en que los cálculos son realizados automáticamente por la estación total en campo.

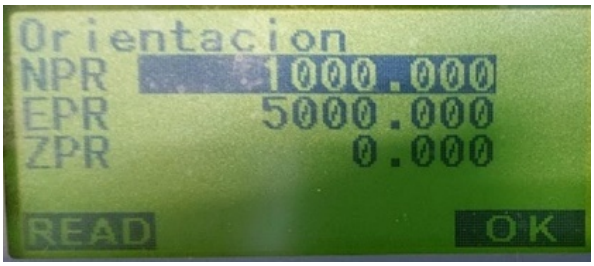
Figura 8.9. *Configuración de la segunda estación sobre el PF2.*



Una vez que se levantaron todos los puntos de interés visibles desde PF1, y realizado el control mencionado, se continuará el levantamiento haciendo una estación del equipo sobre el PF2. Una vez estacionado y nivelado el equipo sobre el PF2, deben ingresarse las coordenadas de ese punto de estación, estas fueron determinadas previamente desde la primera estación en PF1 (figura 8.9).

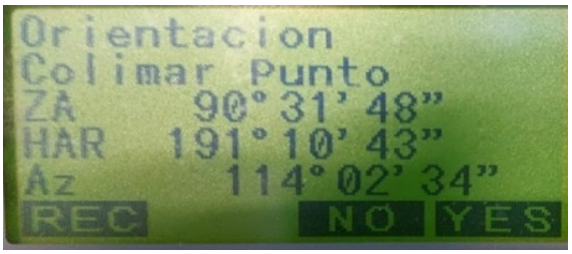
El paso siguiente consiste en realizar la orientación de la estación total. Para ello, se deberá colimar un punto conocido, de entre los puntos fijos antes medidos, y asignar el acimut correspondiente a esa línea visual. Para esta operación se elige al PF1 (figura 8.10) y se realiza la colimación con el mayor de los cuidados para minimizar los errores en esa dirección. Luego deberán ser cargadas las coordenadas X e Y de ese punto de orientación, ya sea digitándolas o cargándolas desde la memoria.

Figura 8.10. *Orientación del equipo en la segunda estación sobre el PF2. Se orienta con el PF1.*



En esta instancia, en el programa de manejo del instrumento, ya se han cargado las coordenadas XY del punto de estación y también las del punto de orientación, con esa información calcula el acimut (PF2 PF1) y se lo asigna a la visual indicada. Automáticamente el programa de manejo de la estación total calcula el acimut 114º 02’ 34” (figura 8.11) a partir de las coordenadas de los dos puntos fijos. En la misma pantalla, al elegir la opción “YES” se le asigna ese acimut a la línea visual dirigida al punto PF1 (figura 8.11). Para reducir el efecto del error de dirección, debe realizarse la orientación con el punto fijo visible más lejano.

Figura 8.11. *El programa calcula el acimut (PF2 PF1) con valor 114º02'34".*



Tras la serie de operaciones realizadas, en la estación total se ha reconfigurado el sistema de referencias creado en la primera estación. Los puntos que se releven a continuación estarán referidos al mismo marco de referencia que los ya relevados previamente.

El primer punto en medirse y registrar es el PF1 de orientación, para ello se debe apuntar al prisma y luego medir la distancia, el equipo muestra las coordenadas de este punto. Se debe controlar que coinciden con las registradas previamente, aceptando una diferencia razonable.

Posteriormente y a modo de control se mide el nuevamente el PF4, verificándose las diferencias obtenidas y registrando los valores. A continuación, se procede a medir y registrar el PF3, siguiente punto de la poligonal de apoyo, con la rigurosidad requerida para un punto fijo. Solamente después de esto se comienza con la radiación desde ese punto de estación, tomando todos aquellos puntos de interés necesarios y visibles. Se cierra la radiación desde esta estación midiendo y registrando el PF1.

Se prosigue con el relevamiento repitiendo esta metodología, estacionando posteriormente en el PF3 y finalmente en el PF4, desde donde se cierra la poligonal midiendo y registrando al PF1, verificando que la diferencia obtenida es menor a la tolerancia. En cada nueva estación se procede a cargar las coordenadas del punto de estación y luego las del punto de orientación, repitiendo el procedimiento ya descripto.

Es importante destacar que los postes esquineros del predio se midieron desde diferentes estaciones, cada uno de ellos fue tomado al menos desde dos vértices distintos, ya que los mismos constituyen los vértices de la poligonal de mensura ABCDEA. En la figura 8.4 se aprecian la poligonal interna y las radiaciones para el relevamiento de los puntos representativos de la parcela, considerando los controles necesarios para las poligonales auxiliar y de mensura.

A medida que se avanza con el relevamiento deben analizarse las diferencias obtenidas en las coordenadas de los puntos medidos desde distintas estaciones. Controlando que la magnitud de las diferencias encontradas sea menor a la tolerancia adoptada. Al contarse con las coordenadas XY de los puntos medidos, en un único sistema de coordenadas, para todas las estaciones, este control puede realizarse directamente en campo mientras se avanza con el trabajo.

Descarga y procesamiento de datos

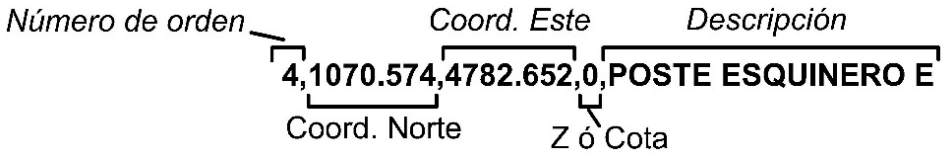
Una vez finalizadas las tareas de campo, se procederá en gabinete a la descarga de los datos de la estación total a una computadora. La mayoría de los equipos modernos dispone de conexión USB, ya sea a través de una tarjeta SD, pendrive o cable, mientras que algunos modelos más antiguos utilizan una conexión RS232. Además, las estaciones totales más recientes permiten el intercambio de datos mediante conexión Bluetooth.

Independientemente del método de transferencia, este puede emplearse tanto para descargar como para cargar información en el equipo. Esta última opción es utilizada en trabajos de replanteo, donde se cargan puntos en formato de texto o datos en formato CAD, e incluso, en algunos casos, archivos en formato ráster, como ortomosaicos, modelos digitales de terreno (MDT) o modelos digitales de elevación (MDE).

En general, la información puede descargarse en formato de texto ASCII (*.csv o .txt) o en formato CAD (.dxf o *.dwg), ambos compatibles con la mayoría de los instrumentos actuales, como receptores GNSS, estaciones totales y niveles electrónicos, así como con la mayoría de los softwares disponibles. El caso más común y básico es la descarga de datos en formato de texto.

En el formato de texto (txt o csv), el archivo puede abrirse con un editor de textos, permitiendo visualizar la estructura original de los datos. En cada línea, los campos están separados por comas, mientras que el separador decimal se representa con un punto, y no se emplea separador de miles. Para interpretar correctamente estos caracteres, la configuración regional de la computadora debe estar ajustada a este formato, de modo que la coma "," y el punto "." se procesen adecuadamente según la estructura del archivo. En la figura 8.12 se muestra un ejemplo de una línea de datos.

Figura 8.12. *Línea de archivo de texto que representa a un punto levantado.*



Otra forma de visualizar los datos es mediante un software de hojas de cálculo, donde la información se distribuye en celdas, organizándose en filas y columnas. En un archivo CSV, la primera columna contiene los números de orden de cada punto; la segunda, las coordenadas Norte; la tercera, las coordenadas Este; la cuarta, la coordenada Z o cota (que en este caso tiene valor cero por tratarse de un relevamiento planimétrico); y, en la última columna, se encuentra la descripción de cada punto (ver figura 8.13).

Figura 8.13. *Visualización de datos con planilla de cálculos.*

Número de orden	*Coord. Norte*	*Coord. Este*	*Cota*	*Descripción*
4	1070.574	4782.652	0	POSTE ESQUINERO E

En la figura 8.14 se muestran los datos relevados utilizando dos formas de visualización.

Figura 8.14. *Datos en formato de texto, visualizados con dos diferentes alternativas.*

Visualizador de textos.	Planilla de cálculo.				
1,1000,5000,0,PF1	1	1000.000	5000.000	0	PF1
2,1213.06,5000,0,PF4	2	1213.060	5000.000	0	PF4
3,1088.485,4801.658,0,PF2	3	1088.485	4801.658	0	PF2
4,1070.574,4782.652,0,POSTE ESQUINERO E	4	1070.574	4782.652	0	POSTE ESQUINERO E
5,982.999,4782.867,0,POSTE ESQUINERO D	5	982.999	4782.867	0	POSTE ESQUINERO D
6,1051.905,4924.193,0,EDIFICIO	6	1051.905	4924.193	0	EDIFICIO
7,1073.118,4945.406,0,EDIFICIO	7	1073.118	4945.406	0	EDIFICIO
8,983.166,4938.003,0,ALAMBRADO	8	983.166	4938.003	0	ALAMBRADO
9,983.258,5020.607,0,POSTE ESQUINERO C	9	983.258	5020.607	0	POSTE ESQUINERO C
10,1019.125,5040.607,0,ALAMBRADO	10	1019.125	5040.607	0	ALAMBRADO
11,1112.53,5040.607,0,ALAMBRADO	11	1112.530	5040.607	0	ALAMBRADO
12,1213.062,5000.001,0,PF4 - CIERRE	12	1213.062	5000.001	0	PF4 - CIERRE
13,1000.002,4999.997,0,PF1 - ORIENT.	13	1000.002	4999.997	0	PF1 - ORIENT.
14,1213.059,4999.995,0,PF4 - CONTROL	14	1213.059	4999.995	0	PF4 - CONTROL
15,1301.326,4863.738,0,PF3	15	1301.326	4863.738	0	PF3
16,1169.562,4803.726,0,ALAMBRADO	16	1169.562	4803.726	0	ALAMBRADO
17,1070.591,4782.642,0,POSTE ESQUINERO E	17	1070.591	4782.642	0	POSTE ESQUINERO E
18,982.991,4782.839,0,POSTE ESQUINERO D	18	982.991	4782.839	0	POSTE ESQUINERO D
19,983.09,4870.708,0,ALAMBRADO	19	983.090	4870.708	0	ALAMBRADO
20,1062.511,4913.587,0,EDIFICIO	20	1062.511	4913.587	0	EDIFICIO
21,1083.724,4934.8,0,EDIFICIO	21	1083.724	4934.800	0	EDIFICIO
22,983.247,5020.59,0,POSTE ESQUINERO C	22	983.247	5020.590	0	POSTE ESQUINERO C
23,999.999,4999.998,0,PF1 - CIERRE	23	999.999	4999.998	0	PF1 - CIERRE
24,1088.482,4801.657,0,PF2- ORIENT.	24	1088.482	4801.657	0	PF2- ORIENT.
25,1213.065,5000.001,0,PF4 - CONTROL	25	1213.065	5000.001	0	PF4 - CONTROL
26,1280.383,4892.462,0,EDIFICIO	26	1280.383	4892.462	0	EDIFICIO
27,1280.389,4862.462,0,EDIFICIO	27	1280.389	4862.462	0	EDIFICIO
28,1249.802,4820.82,0,ALAMBRADO	28	1249.802	4820.820	0	ALAMBRADO
29,1322.852,4836.383,0,POSTE ESQUINERO A	29	1322.852	4836.383	0	POSTE ESQUINERO A
30,1342.852,4846.403,0,ALAMBRADO	30	1342.852	4846.403	0	ALAMBRADO
31,1323.811,4923.599,0,ALAMBRADO	31	1323.811	4923.599	0	ALAMBRADO
32,1323.831,5021.343,0,POSTE ESQUINERO B	32	1323.831	5021.343	0	POSTE ESQUINERO B
33,1303.434,4931.301,0,EDIFICIO	33	1303.434	4931.301	0	EDIFICIO
34,1287.076,4931.327,0,EDIFICIO	34	1287.076	4931.327	0	EDIFICIO
35,1088.482,4801.659,0,PF2 - CIERRE	35	1088.482	4801.659	0	PF2 - CIERRE
36,1301.325,4863.736,0,PF3- ORIENT.	36	1301.325	4863.736	0	PF3- ORIENT.
37,1000.003,5000.002,0,PF1 - CONTROL	37	1000.003	5000.002	0	PF1 - CONTROL
38,1088.48,4801.659,0,PF2 - CONTROL	38	1088.480	4801.659	0	PF2 - CONTROL
39,1265.369,4862.475,0,EDIFICIO	39	1265.369	4862.475	0	EDIFICIO
40,1265.383,4892.462,0,EDIFICIO	40	1265.383	4892.462	0	EDIFICIO
41,1322.85,4836.392,0,POSTE ESQUINERO A	41	1322.850	4836.392	0	POSTE ESQUINERO A
42,1287.076,4955.468,0,EDIFICIO	42	1287.076	4955.468	0	EDIFICIO
43,1303.434,4955.423,0,EDIFICIO	43	1303.434	4955.423	0	EDIFICIO
44,1342.852,4997.074,0,ALAMBRADO	44	1342.852	4997.074	0	ALAMBRADO
45,1323.812,5021.326,0,POSTE ESQUINERO B	45	1323.812	5021.326	0	POSTE ESQUINERO B
46,1312.002,5040.607,0,ALAMBRADO	46	1312.002	5040.607	0	ALAMBRADO
47,1199.806,5040.607,0,ALAMBRADO	47	1199.806	5040.607	0	ALAMBRADO
48,1180.182,5020.607,0,ALAMBRADO	48	1180.182	5020.607	0	ALAMBRADO
49,1301.327,4863.737,0,PF3 - CIERRE	49	1301.327	4863.737	0	PF3 - CIERRE

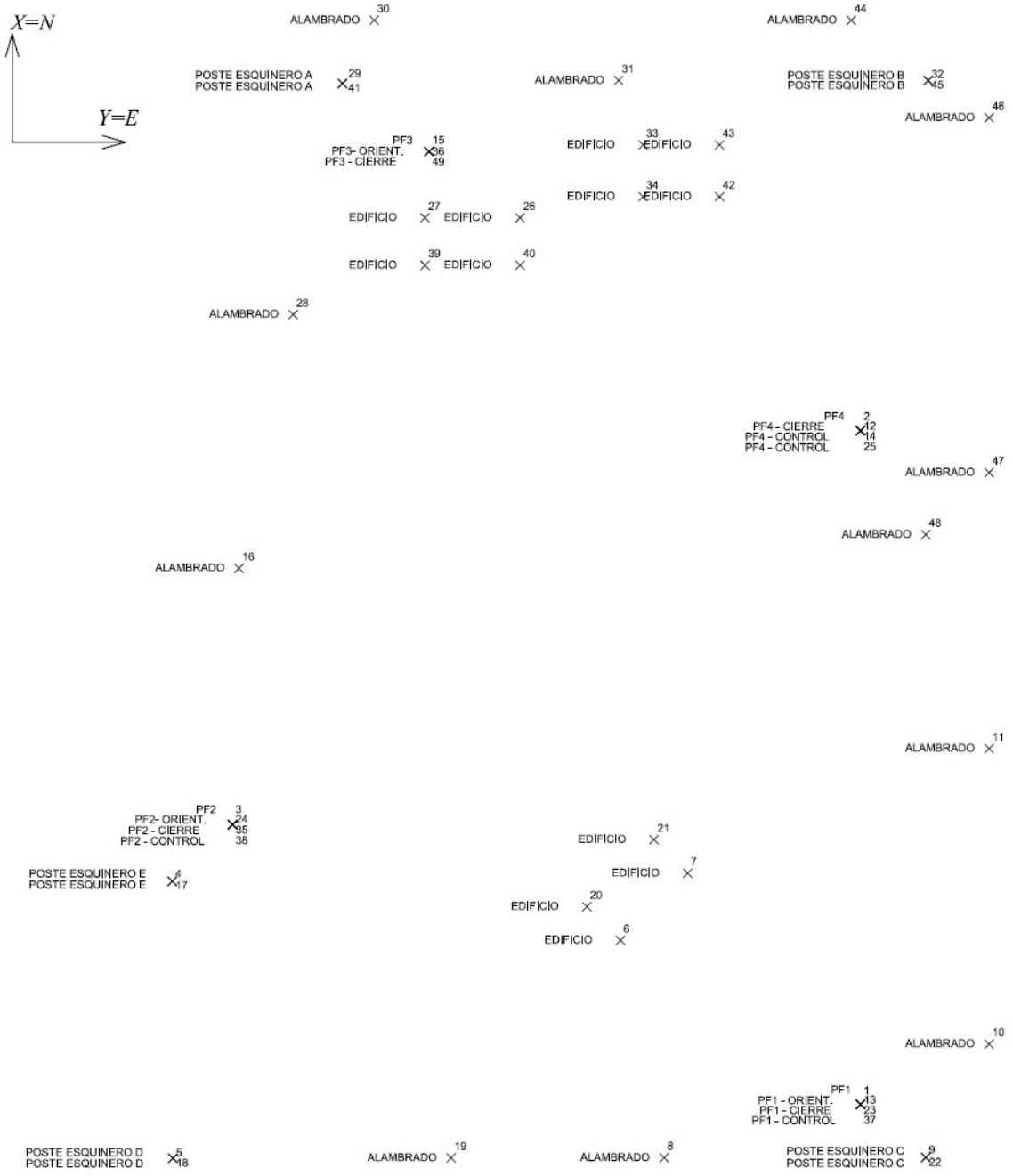
Para una comprensión más sencilla de los datos, en la figura 8.15 se han dividido los puntos de acuerdo con el PF desde el cual fueron medidos. Además, se indican los cambios de estación, y se incluye una columna adicional con “Observaciones” donde se agregan más detalles. Se recomienda hacer el análisis de esa tabla de manera conjunta con la figura 8.4.

Figura 8.15. *Análisis de los datos a partir del punto de estación desde donde fueron tomados.*

EST.	N° DE PTO.	NORTE	ESTE	COTA	DESIGNACION	OBSERVACIONES
PF1	1	1000.000	5000.000	0	PF1	No fue medido, sino cargado manualmente y registrado
	2	1213.060	5000.000	0	PF4	Medido por primera vez
	3	1088.485	4801.658	0	PF2	Medido por primera vez
	4	1070.574	4782.652	0	POSTE ESQUINERO E	Relevamiento de puntos de interés desde PF1
	5	982.999	4782.867	0	POSTE ESQUINERO D	
	6	1051.905	4924.193	0	EDIFICIO	
	7	1073.118	4945.406	0	EDIFICIO	
	8	983.166	4938.003	0	ALAMBRADO	
	9	983.258	5020.607	0	POSTE ESQUINERO C	
	10	1019.125	5040.607	0	ALAMBRADO	
	11	1112.530	5040.607	0	ALAMBRADO	
	12	1213.062	5000.001	0	PF4 - CIERRE	Cierre de la Radiación
CAMBIO DE ESTACION						
PF2	13	1000.002	4999.997	0	PF1 - ORIENT.	Orientación con PF1
	14	1213.059	4999.995	0	PF4 - CONTROL	Control con PF4
	15	1301.326	4863.738	0	PF3	Medido por primera vez
	16	1169.562	4803.726	0	ALAMBRADO	Relevamiento de puntos de interés desde PF2
	17	1070.591	4782.642	0	POSTE ESQUINERO E	
	18	982.991	4782.839	0	POSTE ESQUINERO D	
	19	983.090	4870.708	0	ALAMBRADO	
	20	1062.511	4913.587	0	EDIFICIO	
	21	1083.724	4934.800	0	EDIFICIO	
	22	983.247	5020.590	0	POSTE ESQUINERO C	
	23	999.999	4999.998	0	PF1 - CIERRE	Cierre de la Radiación
CAMBIO DE ESTACION						
PF3	24	1088.482	4801.657	0	PF2- ORIENT.	Orientación con PF2
	25	1213.065	5000.001	0	PF4 - CONTROL	Control con PF4
	26	1280.383	4892.462	0	EDIFICIO	Relevamiento de puntos de interés desde PF3
	27	1280.389	4862.462	0	EDIFICIO	
	28	1249.802	4820.820	0	ALAMBRADO	
	29	1322.852	4836.383	0	POSTE ESQUINERO A	
	30	1342.852	4846.403	0	ALAMBRADO	
	31	1323.811	4923.599	0	ALAMBRADO	
	32	1323.831	5021.343	0	POSTE ESQUINERO B	
	33	1303.434	4931.301	0	EDIFICIO	
	34	1287.076	4931.327	0	EDIFICIO	
	35	1088.482	4801.659	0	PF2 - CIERRE	Cierre de la Radiación
CAMBIO DE ESTACION						
PF4	36	1301.325	4863.736	0	PF3- ORIENT.	Orientación con PF3
	37	1000.003	5000.002	0	PF1 - CONTROL	Cierre Polig. y Control con PF1
	38	1088.480	4801.659	0	PF2 - CONTROL	Control con PF2
	39	1265.369	4862.475	0	EDIFICIO	Relevamiento de puntos de interés desde PF4
	40	1265.383	4892.462	0	EDIFICIO	
	41	1322.850	4836.392	0	POSTE ESQUINERO A	
	42	1287.076	4955.468	0	EDIFICIO	
	43	1303.434	4955.423	0	EDIFICIO	
	44	1342.852	4997.074	0	ALAMBRADO	
	45	1323.812	5021.326	0	POSTE ESQUINERO B	
	46	1312.002	5040.607	0	ALAMBRADO	
	47	1199.806	5040.607	0	ALAMBRADO	
	48	1180.182	5020.607	0	ALAMBRADO	
	49	1301.327	4863.737	0	PF3 - CIERRE	Cierre de la Radiación

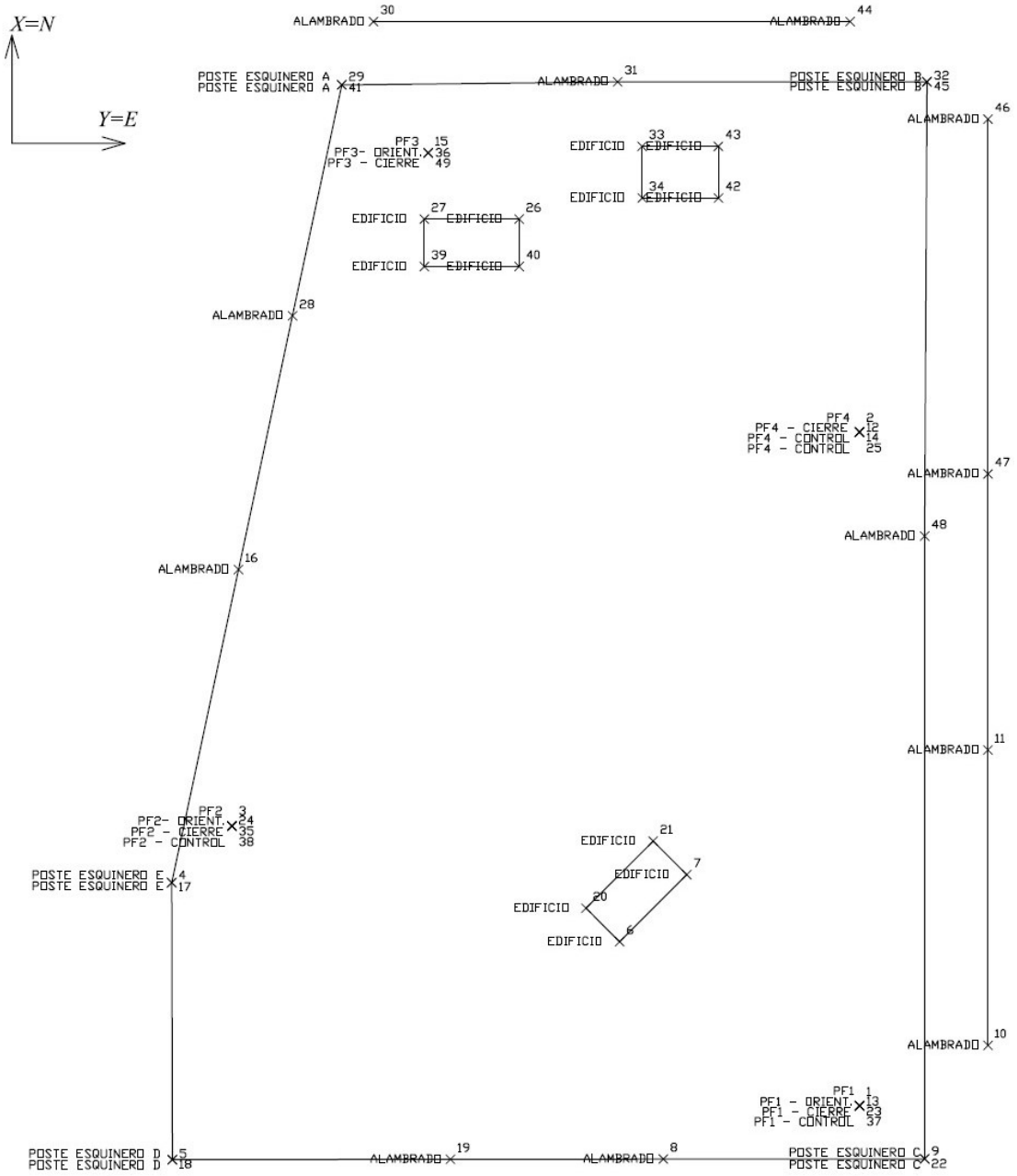
Los datos en formato ASCII pueden convertirse a un formato gráfico tipo CAD, generando una "Nube de Puntos", como se observa en la figura 8.16. En los puntos medidos con redundancia, se visualizarán repetidamente los textos correspondientes a la descripción, así como los números de punto asociados.

Figura 8.16. *Datos en formato CAD.*



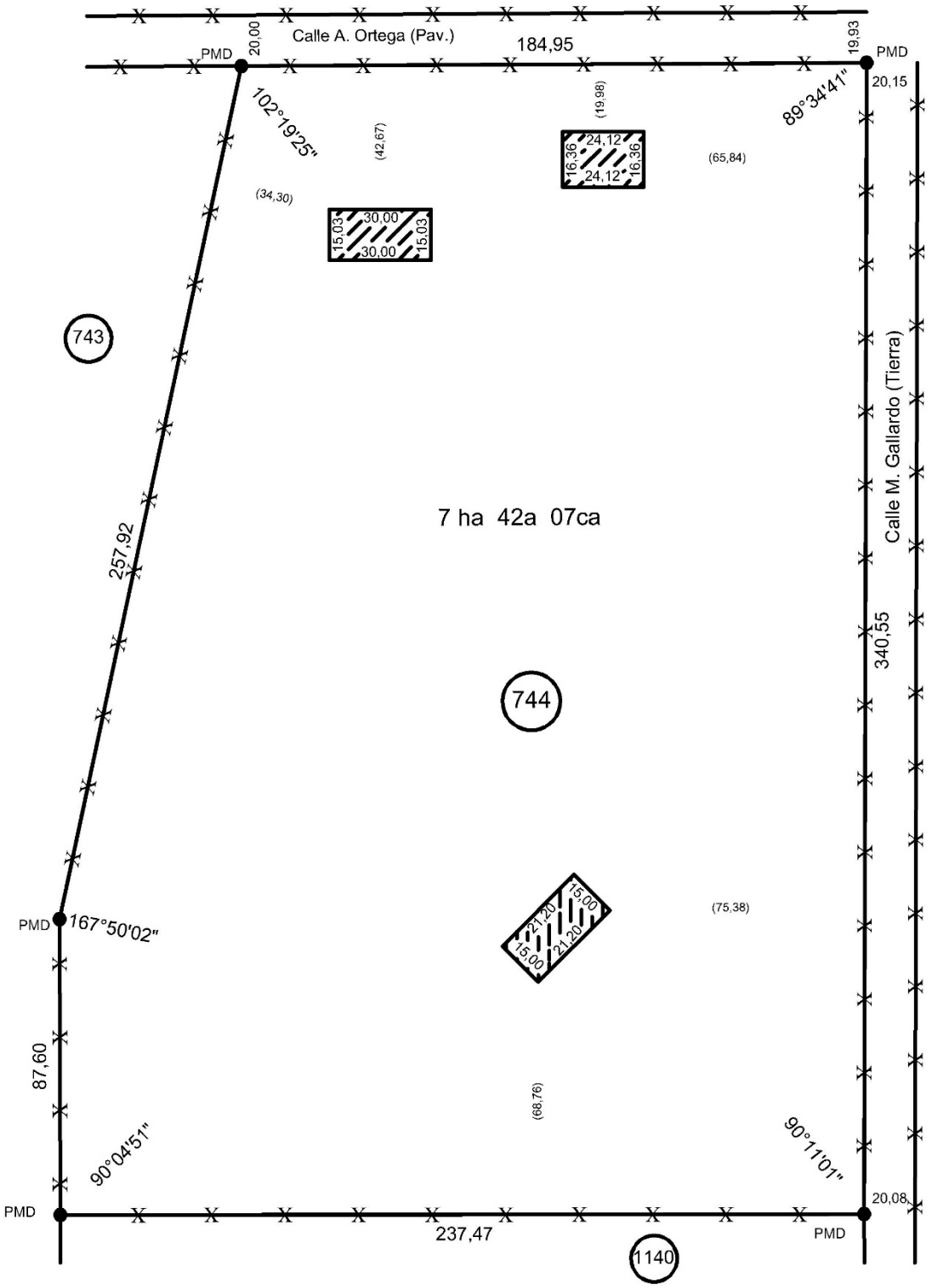
A partir de la nube de puntos y con la ayuda de los croquis confeccionados en campo, se dibujan los elementos relevados. Interpretando y editando los datos levantados se genera el documento gráfico con la información que será utilizada para la toma de decisiones, generación de planos de mensura, planos para proyectos de ingeniería, etc. En el ejemplo en cuestión, se dibujan las líneas correspondientes a alambrados y edificaciones (figura 8.17). De este modo, partiendo de la nube de puntos se genera una primera versión del relevamiento.

Figura 8.17. *Generación de información cartográfica a partir de los datos levantados.*



Posteriormente, con la información obtenida se procede a confeccionar el plano, de acuerdo con las características requeridas y completando con todas las medidas necesarias, las cuales puede extraerse directamente del relevamiento. En la figura 8.18 se muestra una esquematización elemental con algunos de los elementos que pueden conformar la representación gráfica de la parcela en un plano.

Figura 8.18. *Información refinada (la designación de la escala es solamente indicativa).*



Relevamientos Plani-Altimétricos

Cuando los datos requeridos del terreno incluyen la componente vertical (alturas), la metodología de trabajo es similar a la previamente descrita. Al inicio se establece un sistema de

referencia planimétrico para la observación de los puntos, como ya se ha explicado. Las alturas de los puntos a relevar se determinarán a partir de la altura del punto de estación, la cual puede estar referida a una cota IGN o a otro sistema vertical, según corresponda. Por lo tanto, antes de realizar el relevamiento planialtimétrico con estación total, es necesario nivelar los puntos fijos utilizando un método de mayor precisión, como la nivelación geométrica.

Una vez conocidas las alturas de los puntos fijos, se podrá utilizar la estación total para medir las tres coordenadas de los puntos de interés. Las alturas de los puntos relevados se obtendrán mediante el método de nivelación trigonométrica. Este método de trabajo, que combina la radiación planimétrica con la nivelación trigonométrica, se denomina taquimetría y será desarrollado en los capítulos siguientes.

Referencias

WOLF, Paul y GHILANI Charles (2016). *Topografía*. Alfaomega.

CAPÍTULO 9
Nivelación Trigonométrica

Roberto José Romano y Liliana Teresa Quispe Gutierrez

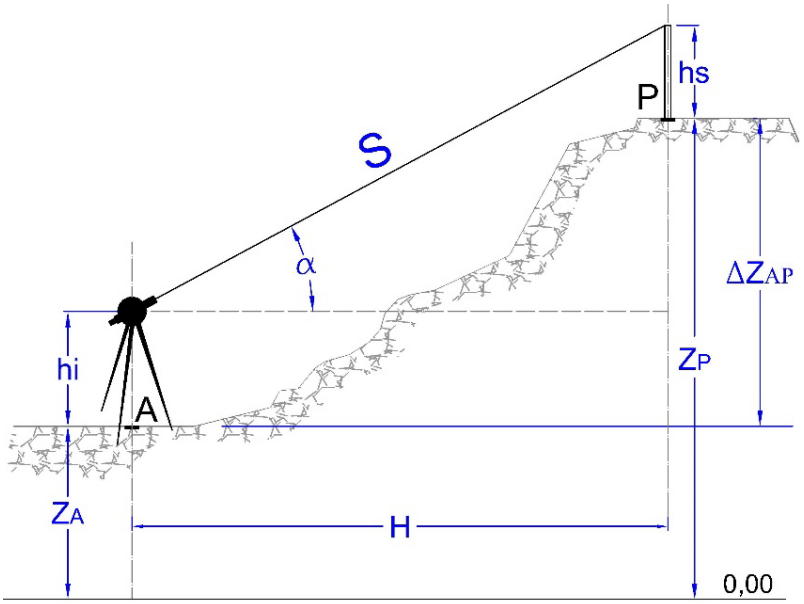
Generalidades del método de Nivelación Trigonométrica

La nivelación trigonométrica es un método topográfico utilizado para medir cotas (o alturas) mediante un teodolito o una estación total, instrumentos que permiten establecer visuales inclinadas y medir ángulos verticales. Aunque el enfoque principal de este método es la obtención de ángulos verticales, también es fundamental determinar, mediante mediciones directas o indirectas, al menos una distancia de referencia.

El principio básico de esta técnica se basa en dirigir visuales inclinadas hacia objetos cuya cota se desea determinar. Aunque puede emplearse tanto el teodolito como la estación total, en la actualidad este último es el instrumento de uso más habitual.

En la figura 9.1 se analiza el caso más simple de una determinación por nivelación trigonométrica. Sobre un punto A, de cota conocida, se ha estacionado un instrumento (teodolito o estación total) con el objetivo de obtener la cota del punto P, realizando mediciones desde A. Para ello, deben medirse el ángulo vertical de la visual inclinada dirigida hacia la señal en P, la distancia geométrica (o inclinada) entre ambos puntos, y las alturas del instrumento y de la señal.

Figura 9.1. *Esquema fundamental del método de nivelación trigonométrica.*



En la figura 9.1 se representa de modo esquemático el método de nivelación trigonométrica y los distintos parámetros involucrados, a definir:

- Z_A: Cota del Punto A (Conocido).
- Z_P: Cota del Punto P (objeto de medición).
- h_i: altura del Instrumento en A.
- h_s : altura de la señal en P.
- ΔZ_{AP}: Desnivel entre A y P.
- α: Angulo de inclinación de la visual (ángulo de altura)

Si se conoce la cota de A, puede plantearse:

$$Z_P = Z_A + h_i + S \cdot \text{sen } \alpha - h_s$$

La distancia por lo general se mide en forma inclinada (S) en este caso, luego deberá hacerse la reducción al horizonte obteniéndose así H:

$H = S \cdot \cos \alpha$

El uso de distanciómetros electrónicos en la determinación de S simplifica considerablemente la operación, es más preciso y simple que otros métodos tales como la estadimetría o la medición directa con cinta. Cuando se trabajaba con teodolitos ópticos era común recurrir a métodos estadimétricos para la obtención de las distancias, pero estas alternativas ya prácticamente son obsoletas.

Hay que tener en cuenta que la nivelación trigonométrica puede emplearse para determinar las alturas de puntos ubicados a grandes distancias. En estos casos, cuando las distancias sean importantes, debe considerarse la corrección por curvatura y refracción.

Nivelación trigonométrica con instrumento de estación total

La estación total es un instrumento que combina un teodolito y un distanciómetro, ambos electrónicos. Por lo tanto, es posible medir con un mismo equipamiento el ángulo vertical y la distancia inclinada. Luego, la computadora interna del equipo es capaz de calcular la distancia reducida al horizonte y el desnivel.

Si bien existen estaciones totales que miden distancia por reflexión directa, aquí serán consideradas las distancias producto de la medición con un prisma reflector. Es poco habitual realizar un levantamiento masivo de puntos por reflexión directa, sobre todo si son puntos del terreno.

Cuando se realiza un levantamiento planialtimétrico con estación total, las alturas son determinadas por nivelación trigonométrica. Por cada punto se miden un ángulo vertical (cenital por lo general) y la distancia inclinada. Deben registrarse además la altura del instrumento y la altura de la señal, esta última suele llamarse en estos casos altura del prisma.

En la medición de ángulos con un teodolito electrónico, como en el caso de la estación total, se utilizan limbos codificados. Estos elementos no tienen una graduación numerada como en los teodolitos mecánicos y ópticos, es por ese motivo que la graduación del cero puede ser

configurada a preferencia del operador; en el cenit, en el nadir o en el horizonte. Debe tenerse presente que el error de índice también puede estar presente en estos equipos.

Medición de la altura del instrumento

La altura del instrumento (hi) se mide entre el punto de estación (altura de referencia o conocida) y una marca sobre la estación total (figura 9.2), para ello se utiliza una cinta métrica convencional. Existen estaciones totales que poseen distanciómetros especialmente adaptados para medir su altura sobre la marca de referencia en el terreno, no obstante, son casos muy particulares.

Figura 9.2. *Altura del instrumento (hi).*

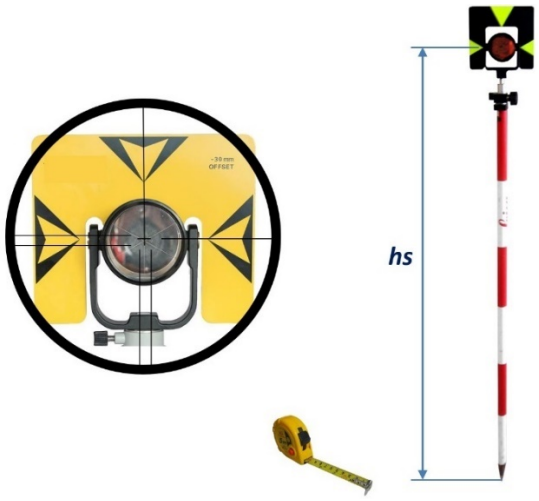


Para medir la altura del instrumento, estos equipos cuentan con marcas de referencia que indican desde dónde se debe medir la altura hasta el punto en el terreno. Esta marca de referencia generalmente coincide con la posición del eje secundario del teodolito o de la estación total.

Medición de la altura de la señal

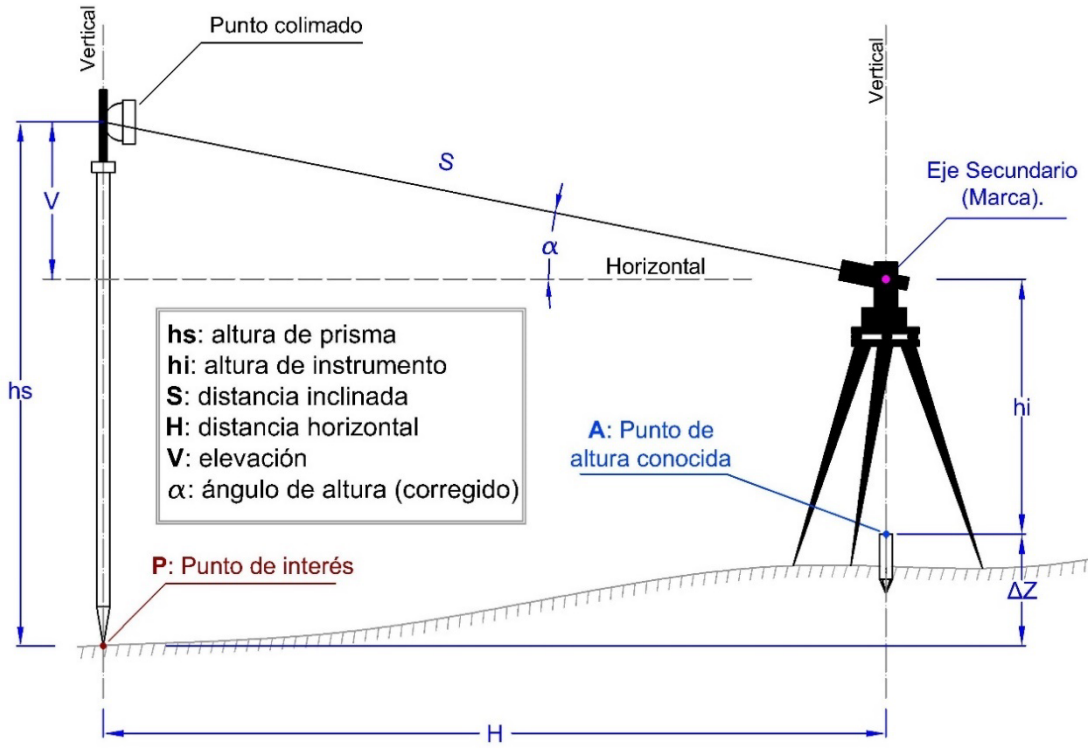
Para le medición de las distancias se utiliza normalmente un prisma reflector, este se monta sobre un bastón verticalizador. El soporte que permite anclar el prisma al bastón viene acompañado con una señal de puntería que favorece la correcta colimación de este elemento reflector (figura 9.3). La altura de la señal (hs) debe ser medida desde las marcas horizontales de la señal de puntería hasta el extremo aguzado (punta) del bastón. Las marcas triangulares de la señal de puntería son utilizadas como referencia para enrazar los hilos del retículo durante la colimación del prisma.

Figura 9.3. *Medición de la altura del prisma o de la señal (hs).*



En el esquema planteado en la figura 9.4 se exponen los fundamentos de la nivelación trigonométrica cuando se utiliza una estación total midiendo a un prisma reflector sobre un bastón portaprisma.

Figura 9.4. *Fundamentos de la nivelación trigonométrica con estación total.*



De acuerdo con la figura 9.4, los diferentes elementos involucrados en la determinación de las alturas de los puntos nivelados con estación total son los siguientes:

Datos:

- Z_A: Cota del punto A.

Mediciones Fundamentales:

- **α**: ángulo vertical (de altura, cenital o nadiral).
- **S**: distancia geométrica (o inclinada).

Mediciones Complementarias:

- **hi**: altura del instrumento.
- **hs**: altura del prisma (o señal).

Incógnita:

- **Z_P**: Cota del punto adelante P.

Otras magnitudes calculadas:

- **H**: distancia reducida al horizonte.
- **V**: desnivel entre el centro geométrico del instrumento y el centro óptico del prisma.

Ejemplo de cálculo

Dato:

- **Z_A**= 16,652 m

Mediciones Fundamentales:

- **α**= 23º 05’ 30”
- **S**= 136,25 m

Mediciones Complementarias:

- **hi**= 1,56 m
- **hs**= 2,00 m

Incógnita:

- **ZP**=????

Cálculo:

$$Z_P = 16{,}652 + 1{,}56 + 136{,}25\,.\,sen(23º\ 05'\ 30") - 2{,}00 = 69{,}649\ \text{m}$$

Resultado:

$$\boldsymbol{Z_P = 69{,}65\ m}$$

Es fundamental considerar que el resultado obtenido en la medición se expresa en centímetros, es decir, con dos decimales de precisión. Si bien es posible que la cota del punto de estación A se conozca con una precisión superior, la calidad del resultado de la nivelación trigonométrica está determinada por varios factores. Por ejemplo, la medición del ángulo vertical, la distancia inclinada, y las alturas del prisma y de la señal son elementos que pueden introducir errores en los resultados. Adicionalmente, la incidencia del medio, como la variación en la densidad del aire y otros factores atmosféricos, también puede afectar la precisión de las mediciones involucradas. Estas influencias pueden degradar el resultado final, impidiendo asegurar una precisión mayor a la del centímetro.

En este ejemplo analizado, pueden determinarse además la distancia reducida al horizonte (H) y la componente en altura (V):

$$H = S\ \cos\alpha = 136{,}25\ m\ \cos 23º\ 05'\ 30" =\ 125{,}33\ m$$

$$V = S\ \operatorname{sen}\alpha = 136{,}25\ m\ \operatorname{sen} 23º\ 05'\ 30" =\ 53{,}44\ m$$

Correcciones para considerar

Hasta ahora, la nivelación trigonométrica se ha analizado únicamente desde un enfoque geométrico. Sin embargo, es importante considerar que este tipo de mediciones puede verse afectado por factores adicionales, como la curvatura de la Tierra y la refracción atmosférica. Por ese motivo, cuando las distancias involucradas en nivelación trigonométrica superen los 300 m, la ecuación utilizada contiene el término Cr:

$$\boldsymbol{Z_P = Z_A + h_i + S\ .\ sen\ \alpha - h_s + C_r}$$

Ejemplo de cálculo:

Dato:

- **Z_A**= 16,652 m

Mediciones Fundamentales:

- **α**= 14º 37’ 12”
- **S**= 522,43 m

Mediciones Complementarias:

- **hi**= 1,56 m
- **hs**= 1,50 m

Incógnita:

- **ZP**=????

Cálculo:

La distancia entre los puntos supera los 300 m, por lo tanto se considera la corrección:

$$C_r = 0{,}87\frac{d^2}{2.R} = 0{,}87\ \frac{(522{,}43\ m)^2}{2.\ 6.370.000\ m} = 0{,}018\ m$$

Se redondea C_r= 0,02 m.

Se calcula la cota de P:

$$Z_P = 16{,}652\ \text{m} + 1{,}56\ \text{m} + 522{,}43\ \text{m}\ .sen(14º\ 37'12") \ -\ 1\ ,50\ \text{m} + 0{,}02\ \text{m} = 148{,}597\ \text{m}$$

Resultado:

$$\boldsymbol{Z_P = 148,60\ m}$$

Otro factor que deberá tenerse en consideración es el error de índice que puede afectar la medición de ángulos verticales, independientemente que se utilice un teodolito convencional o una estación total. Antes de realizar el cálculo de una altura por nivelación trigonométrica deben corregirse el ángulo medido en CI por error de índice. Posteriormente, se calculará el ángulo de altura (elevación o depresión) utilizando el ángulo ya corregido, considerando el tipo de limbo vertical (posición del 0º) con que cuenta la estación total o teodolito.

Casos resueltos

Ejemplo 9.1

Determinación de alturas por nivelación trigonométrica en puntos cercanos.

Se levantaron dos puntos, P1 y P2, utilizando una estación total, registrando en el campo la distancia inclinada (S) y el ángulo cenital en CI correspondiente a cada uno, tal como se detalla en la tabla 9.1.

Antes de llevar a cabo estas observaciones, se midió el ángulo vertical de una antena mediante el método de Bessel. Este procedimiento se realizó con el objetivo de determinar si el equipo posee un error de índice y, en caso afirmativo, determinar tanto su magnitud como su signo.

El objetivo del trabajo es calcular las cotas de los puntos P1 y P2. Se cuenta con la cota del punto O (Z_O) y la altura del instrumento (h_i):

- Z_O= 45,081 m
- h_i= 1,61 m

Tabla 9.1. *Planilla de mediciones del ejemplo A.*

Estación	Punto Visado	Altura de la señal (hs)	Distancia Inclinada (S)	Lecturas cenitales	
				CI	CD
O	Antena	-	-	57° 29' 01"	302° 29' 49"
	P1	2.50	188.73	91° 23' 48"	-
	P2	1.50	71.49	88° 00' 29"	-

Resolución: El primer paso es determinar si el equipo tiene error de índice, y de ser así cuál es su signo y magnitud. Por ello fue por lo que se midió al extremo de una antena por el método de Bessel.

- Cálculo del error de índice (ε)

$$\varepsilon = \frac{57°29'01 + 302º29'49" - 360°00'00"}{2} = \mathbf{-0°\ 00'35"}$$

La estación total tiene un error de índice y su valor es -35”

Control:

Cálculo de las lecturas corregidas

CI= 57° 29’ 01 – (-0° 00’ 35”) = 57° 29’ 36”

CD= 302° 29’ 49” – (-0° 00’ 35”) = 302° 30’ 24”

CI+CD= 57° 29’ 36” + 302° 30’ 24” = 360° 00’ 00”

Al verificar que las lecturas corregidas suman exactamente 360°00’00” se puede verificar que el error de índice se calculó correctamente.

Cálculo de la cota de P1:

Al ser la distancia menor a 300 m no se requiere aplicar corrección por curvatura y refracción.

CI_c: CI corregido

$$CI_c = CI - \varepsilon = 91° 23'48" - (-0° 00' 35") = 91° 24' 23"$$

$$h = \text{ 90° 00' 00 - 91° 24' 23"} = -1° 24'23"$$

En un sistema de lectura cenital, cuando un ángulo de altura es negativo, significa que la visual está por debajo del horizonte.

$$Z_{P1} = Z_O + h_i + S\,.\,sen\,\alpha - h_s$$

$$Z_{P1} = 45{,}081\,m + 1{,}61\,m + 188{,}73\,m\,.\,\sin(-1° 24'23") - 2{,}50\,m = 39{,}558\,m$$

La altura de P1 es **39,56 m**

Cálculo de la cota de P2:

$$CI_c = CI - \varepsilon = 88° 00' 29" - (-0° 00' 35") = 88° 01' 04"$$

$$h = \text{ 90° 00' 00 - 88° 01' 04"} = 1° 58'56"$$

Debe notarse que la altura de la señal cambia para P2

$$Z_{P2} = Z_O + h_i + S\,.\,sen\,\alpha - h_s$$

$$Z_{P2} = 45{,}081\,m + 1{,}61\,m + 71{,}49\,m\,.\,\sin(1° 58'56") - 1{,}50\,m = 47{,}664\,m$$

La cota de P2 es **47,66 m**

Ejemplo 9.2

Determinación de la altura de un punto lejano.

Se desea conocer, mediante nivelación trigonométrica, la cota de un punto distante a 550,00 m, empleando una estación total con limbo vertical de lecturas nadirales con el siguiente registro de campo:

Error de índice= + 2´ 30´´ Cota del punto estación: +28,15;

Altura del Instrumento: 1,56 Lectura Vertical en CI= 114° 12' 56''

La puntería se realizó directamente al punto, es decir no se utilizó señal de puntería. La distancia es la reducida al horizonte (se obtuvo mediante una técnica de medición diferente).

Resolución:

h_s= 0 ya que no se utiliza señal de puntería.

Dada la distancia a la que se encuentra el punto debe aplicarse corrección por curvatura y refracción.

Se comienza corrigiendo la lectura por el efecto del error de índice:

$$CI_c = CI - \varepsilon = 114° 12'56" - (+0° 02' 30") = 114° 10' 26"$$

Cálculo del ángulo de altura:

$$h = 114° 10'26 \text{ - } 90° 00' 00 = 24° 10'26"$$

Cálculo de la corrección por curvatura y refracción:

$$C_r = 0{,}87\frac{D^2}{2R} = 0{,}87\frac{(550\,m)^2}{2\,.\,6370000\,m} = 0{,}02\,m$$

Cálculo de la cota del punto:

La distancia es reducida al horizonte por lo tanto la función trigonométrica utilizada es la tangente.

$$Z_P = 28{,}15\ m + 1{,}56\ m + 550{,}00\ m\ .\ \tan 24°\ 10'26" + 0{,}02\ m = 276{,}61\ m$$

Resultado:

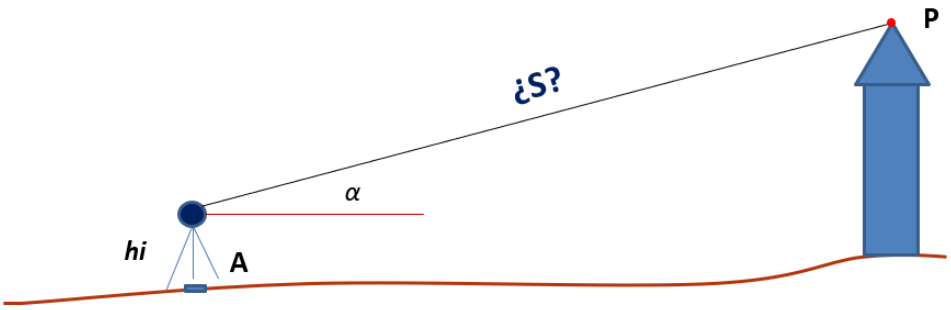
La cota del punto es de **276,61 m**

Determinación de la altura de un punto inaccesible

En muchas ocasiones debe determinarse la altura de puntos inaccesibles, es decir, puntos ubicados en lugares a los que no se puede acceder para colocar una señal de puntería o un prisma reflector. La técnica de nivelación trigonométrica permite resolver este problema, siempre que el punto sea visible y posible de ser colimado. Pero para alcanzar una solución es necesario determinar la distancia entre el punto a nivelar y el punto de estación.

En la figura 9.5 se ilustra la situación en la que se necesita obtener la cota de un punto P inaccesible, mediante nivelación trigonométrica con un teodolito estacionado sobre el punto A de cota conocida. El punto P es visible desde A, pero la distancia no puede ser medida, ya que P no es accesible.

Figura 9.5. *Determinación del desnivel a un punto inaccesible.*



Una alternativa posible es calcular mediante algún método de medición indirecto la distancia reducida al horizonte (H). En este caso la expresión para el cálculo de la altura por nivelación trigonométrica queda ligeramente modificada. La función trigonométrica utilizada es la tangente, además, la altura de la señal (hs) es cero porque apuntamos directamente al punto:

$$Z_P = Z_A + h_i + H\ .tan\ \alpha + C_r$$

Se aplicará la corrección por curvatura y refracción si la distancia supera los 300 m.

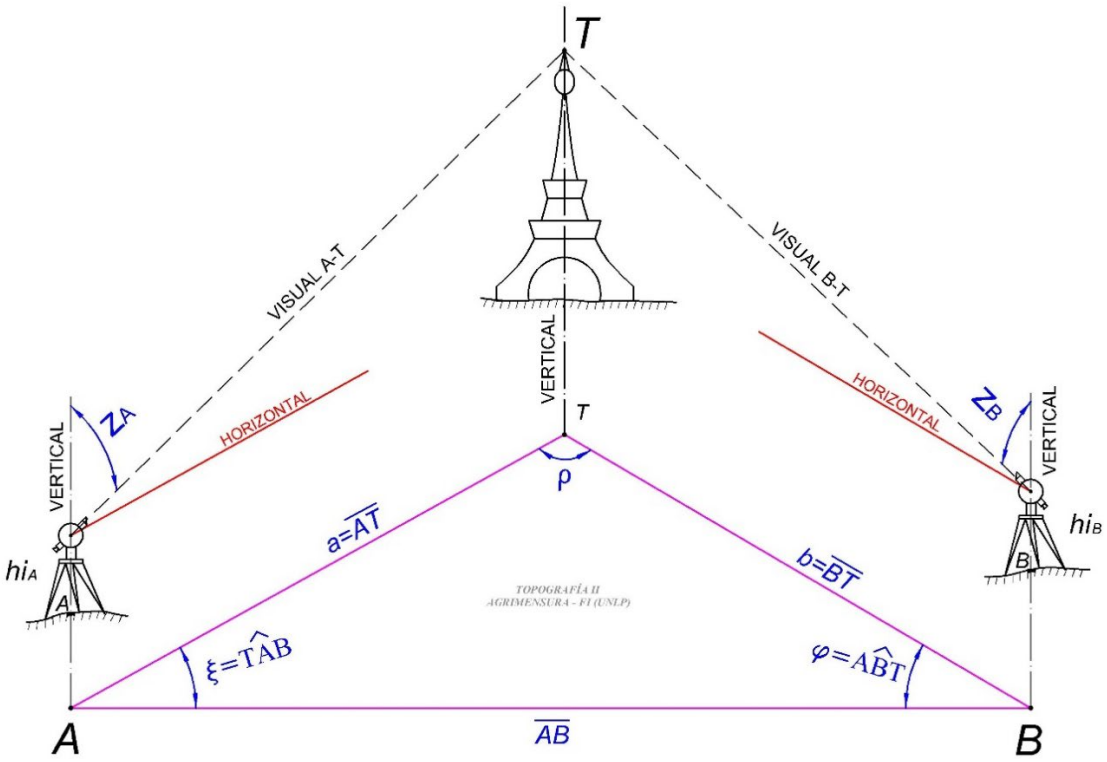
Existen dos métodos empleados comúnmente en topografía para resolver este problema (VOLQUARDTS, 1956):

1- Método de la Base enfrentada al punto inaccesible.
2- Método de la Base Alineada con el punto inaccesible.

Método de Base Enfrentada

Considérese un punto inaccesible cuya cota debe medirse, sea este el punto T extremo superior de una torre (figura 9.6).

Figura 9.6. *Esquema general del método de la base enfrentada.*



Los puntos A y B conforman lo que se denomina una línea base. Esta base debe ser transversal al punto inaccesible T. Los puntos A y B se eligen de forma conveniente de acuerdo con las características del trabajo.

Los puntos A y B serán puntos de estación para las mediciones requeridas en este método, por ello, deberá existir intervisibilidad entre ambos. Además, desde estos puntos que conforman la base enfrentada debe ser posible de colimarse el punto T.

Las cotas de A y de B deben ser conocidas, lo usual es realizar una nivelación geométrica, vinculada o no a una red altimétrica.

En campo se deberán realizar las mediciones necesarias para resolver el triángulo horizontal ATB midiendo:

- Ángulos acimutales: $\boldsymbol{\xi}=T\hat{A}B$, $\boldsymbol{\varphi}=A\hat{B}T$ (se medirá por Bessel u otro método más preciso)
- Distancia reducida al horizonte $\overline{AB}$ (al menos dos mediciones, una de ida y otra de vuelta)

Lo que permite calcular las distancias horizontales desde cada punto de la base hasta el punto inaccesible, estas distancias se indican como:

$$a = \overline{AT}$$

$$b = \overline{BT}$$

Se resuelve de ese modo el problema de las distancias desconocidas.

Además, tanto desde A como desde B se miden los ángulos verticales a T: z_A y z_B

También deben medirse las alturas de instrumento h_{iA} y $h_{iB.}$

Resolución del problema:

Etapa 1: Resolver el triángulo plano ATB para obtener las distancias AT y BT

En el triángulo plano ATB se cumple la condición de cierre angular:

$$\xi + \varphi + \rho = 180^o$$

Donde el ángulo desconocido ρ se calcula:

$$\rho = 180^o - \xi - \varphi$$

En la mayoría de los problemas de Topografía, la condición de cierre geométrico de un polígono cerrado, en este caso de un triángulo, se utiliza para controlar las observaciones, no para obtener resultados. Sin embargo, en el método de la base enfrentada esta condición es una de las pocas ocasiones en las que puede emplearse para calcular un ángulo desconocido, ya que no se disponen de suficientes datos para determinar el ángulo opuesto a la base por otro método. El principal inconveniente de este método es que, si existe un error en la medición de alguno de los dos ángulos, no es posible detectarlo.

Una vez calculado el ángulo opuesto a la base, se aplica el teorema del seno:

$$\frac{sen\ \rho}{\overline{AB}} = \frac{sen\ \varphi}{a} = \frac{sen\ \xi}{b}$$

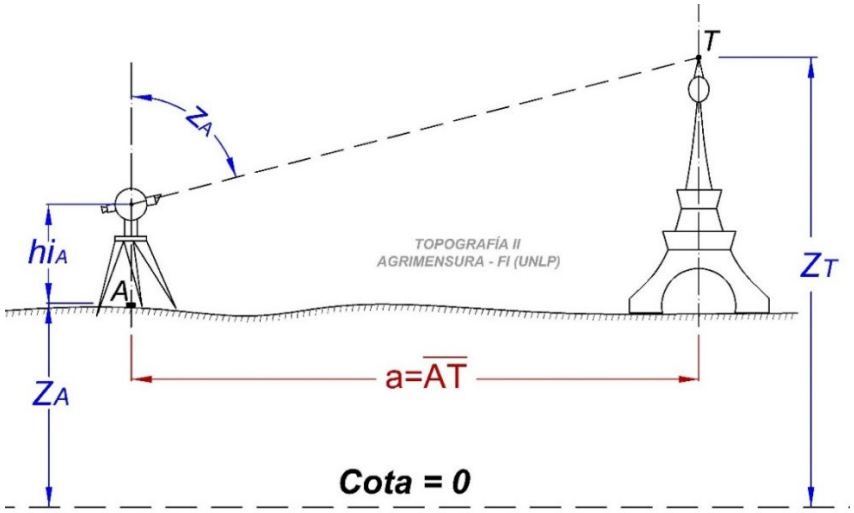
Obteniéndose de este modo las distancias *a* y *b*.

Etapa 2: Se trabaja sobre los triángulos verticales de cada estación.

Estación en A:

Una vez calculada la distancia horizontal *a* (entre A y T), se utiliza la expresión de cálculo ya vista en la nivelación trigonométrica, considerando el uso de la función tangente y asumiendo que la altura de la señal es cero. El cálculo de la altura del punto T mediante nivelación trigonométrica desde el punto A se ilustra en la figura 9.7, con un mayor detalle sobre los elementos de cálculo mostrados en la figura 9.8.

Figura 9.7. *Nivelación trigonométrica desde el punto A.*

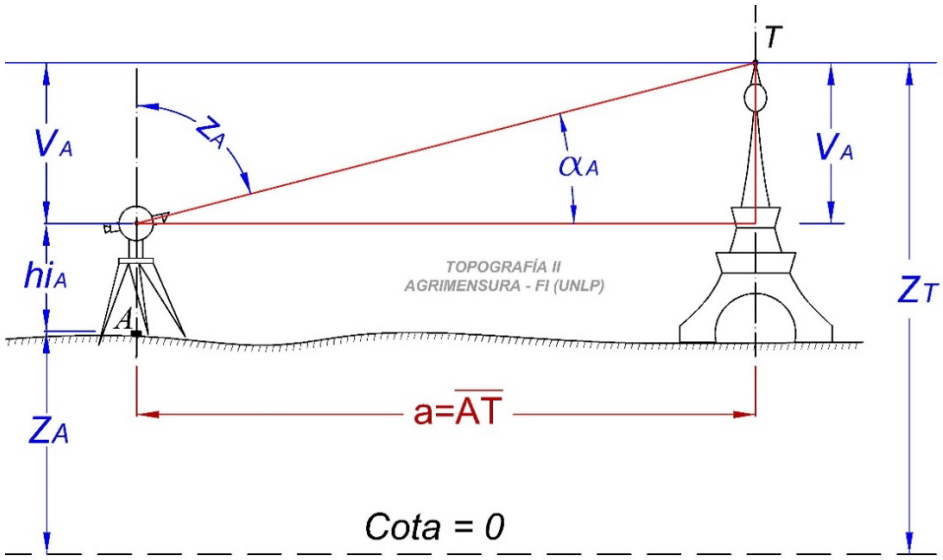


Z_T^A : Cota de la torre obtenida desde A

$$Z_T^A = Z_A + hi_A + a\,tan\,\alpha_A + C_{ra}$$

C_{ra}: Corrección por curvatura y refracción. Se aplica solamente si a > 300 m.

Figura 9.8. *Elementos de cálculo para la nivelación trigonométrica desde el punto A.*



Estación en B:

Z_T^B : Cota de la torre obtenida desde B

$$Z_T^B = Z_B + hi_B + b\,tan\,\alpha_B + C_{rb}$$

C_{rb}: Se aplica solamente si b > 300 m.

Este cálculo se ilustra en las figuras 9.9 y 9.10.

Figura 9.9. *Nivelación trigonométrica desde el punto B.*

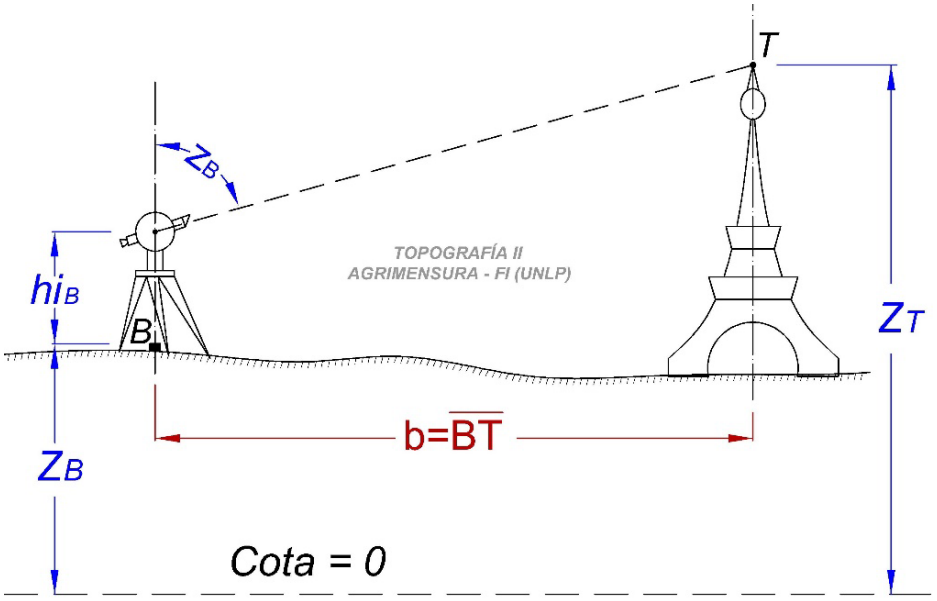
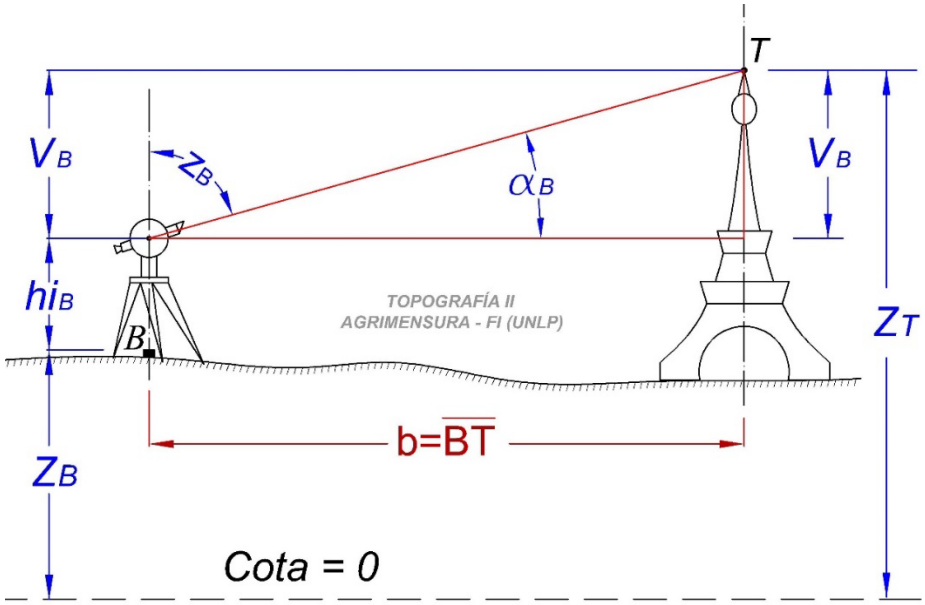


Figura 9.10. *Elementos de cálculo para la nivelación trigonométrica desde el punto B.*



Etapa 3. Control y presentación del resultado:

Debe ser analizada la diferencia entre Z_T^A y Z_T^B, esta no debe superar la tolerancia que se haya adoptado.

La elección del valor de tolerancia se determina según la naturaleza de la tarea en cuestión. Se tienen en cuenta las condiciones de medición, la magnitud de las distancias involucradas, la precisión de los instrumentos utilizados y, sobre todo, la finalidad específica del trabajo. Es evidente que, a medida que se busca un resultado más preciso, se debe reducir el valor de tolerancia para asegurar el control de la calidad del trabajo.

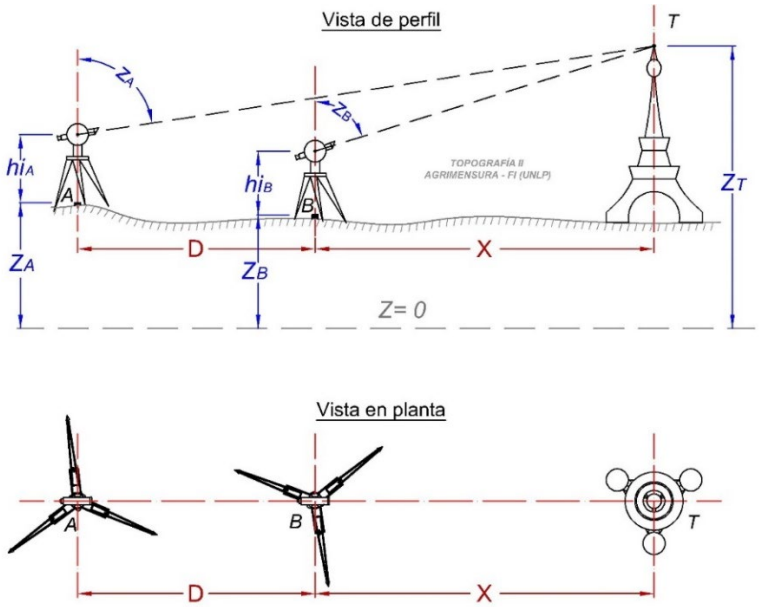
Finalmente, si la diferencia entre las cotas obtenidas desde ambos extremos de la base es aceptada, se puede calcular el promedio. Expresándose el resultado de la cota de la torre:

$$Z_T = \frac{Z_T^A + Z_T^B}{2}$$

Método de Base Alineada

Este método se utiliza cuando no hay espacio suficiente para ubicar una base transversal al punto de altura inaccesible. Se seleccionan dos puntos, A y B, ambos de cotas conocidas, separados por una distancia D, de manera que A, B y T estén perfectamente alineados. La alineación de los tres puntos se asegura utilizando el anteojo del instrumento empleado (teodolito o estación total).

Figura 9.11. *Método de la base alineada.*



La figura 9.11 muestra un esquema que ilustra el método de la base alineada, con una vista de perfil en la parte superior y una vista en planta en la parte inferior. En la aplicación de este método, es esencial asegurar la alineación precisa entre los tres puntos. Según el planteo de la figura 9.11, el punto T representa el elemento cuya cota se necesita determinar, en este caso, el extremo de una torre inaccesible.

Para obtener la altura del punto T, primero se selecciona estratégicamente el punto A. Con el instrumento ya estacionado en A, se apunta hacia el punto T, y sin modificar el ángulo acimutal, se baja el anteojo para materializar el punto B en el terreno. Como medida de control, se verifica que, con la alidada frenada, al subir el anteojo se puede pasar de colimar el punto B a colimar el punto T, sin la necesidad de hacer ningún ajuste con el tornillo de pequeños movimientos horizontales.

A continuación, se mide la distancia reducida al horizonte D. Una vez definidos en el terreno los puntos A y B, se realizan las demás mediciones necesarias: ángulos verticales y alturas de instrumento. La distancia D debe medirse en ambos sentidos (en ida y vuelta), es decir, desde A hacia B y recíprocamente, desde B hacia A.

Los puntos A y B conforman la base alineada con el punto inaccesible T.

En este tipo de método se cuenta con los siguientes elementos:

Valores conocidos (datos):

- Z_A: cota del punto A.
- Z_B: cota del punto B.

Valores medidos:

- z_A: ángulo cenital medido en A.
- z_B : ángulo cenital medido en B.
- D: distancia horizontal entre A y B.

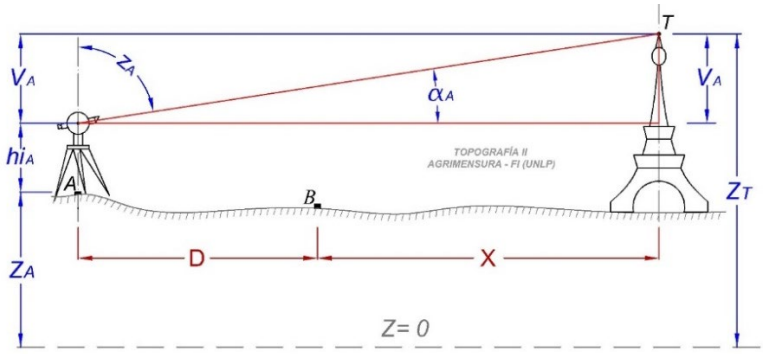
- hi_A: altura del instrumento en A.
- hi_B: altura del instrumento en B.

Incógnitas:

- Z_T: cota del punto inaccesible T
- X: distancia entre el punto T y el punto más próximo de la base alineada.

La solución de este método topográfico requiere que se calcule la distancia entre el punto T y el más cercano de la base, denominada X en la figura 9.11. Para ello se establece un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, a partir del planteo de la altura del punto T desde ambos puntos de estación. Planteo de la situación desde A (figura 9.12).

Figura 9.12. *Método de la base alineada. Nivelación trigonométrica desde el punto A.*



Se plantea al cálculo de la cota de T desde el punto A aplicando la ecuación general de la nivelación trigonométrica para un punto inaccesible (figura 9.12):

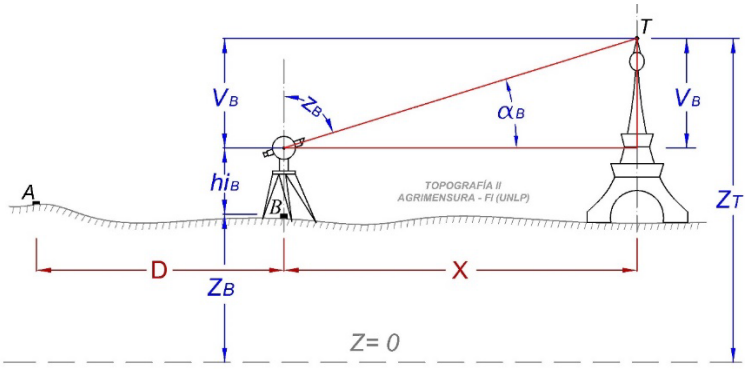
$$Z_T = Z_A + hi_A + (D + X)\tan\alpha_A$$

Donde puede denominarse como V_A al elemento:

$$V_A = (D + X)\tan\alpha_A$$

Un planteo equivalente para la altura del punto T puede realizarse desde el punto B, tal como se ilustra en la figura 9.13. En este caso se utilizan los datos y mediciones correspondientes a la estación en B.

Figura 9.13. *Nivelación trigonométrica desde el punto B.*



De acuerdo con la figura 9.13:

$$Z_T = Z_B + hi_B + (X)\tan\alpha_B$$

$$V_B = X\tan\alpha_B$$

A partir de las dos expresiones para la cota Z_T, es posible plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$Z_T^A = Z_A + hi_A + (D + X)\tan\alpha_A \quad (1)$$

$$Z_T^B = Z_B + hi_B + (X)\tan\alpha_B \quad (2)$$

A partir del planteo múltiple de la cota de T, es posible alcanzar una solución igualando las ecuaciones 1 y 2:

$$Z_A + hi_A + (D + X)\tan\alpha_A = Z_B + hi_B + (X)\tan\alpha_B$$

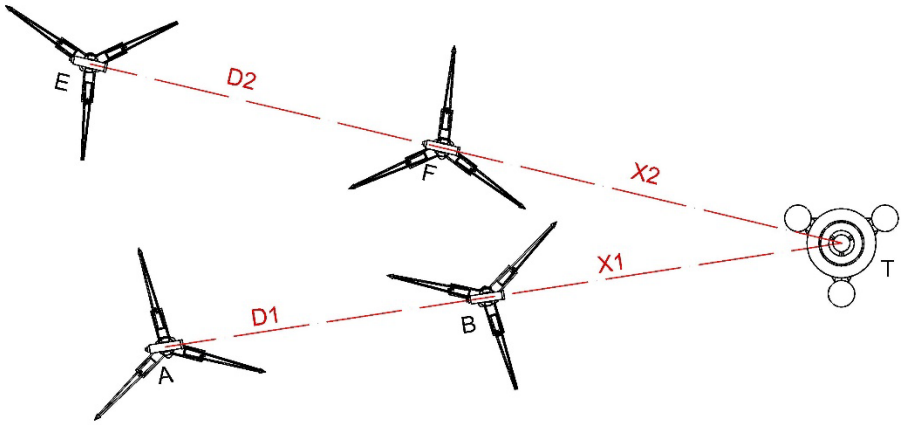
Resolviendo la igualdad entre ambas ecuaciones es posible obtener el valor para la distancia desconocida X:

$$X = \frac{Z_B + hi_B - Z_A - hi_A - D\,.\tan\alpha_A}{\tan\alpha_A - \tan\alpha_B}$$

Finalmente, ya obtenido el valor de la distancia X, se resuelven las ecuaciones 1 y 2, alcanzando así el valor de la cota de T.

El método de la base alineada no posee los controles que provee la alternativa de la base enfrentada. Para tener un control con este método debería repetirse más de una vez, tal como se expone en la figura 9.14. En ese caso, se plantean dos bases alineadas con el punto T, si la diferencia entre las dos soluciones es admisible, se calculará un promedio de ambos.

Figura 9.14. *Dos bases alineadas con el punto T.*



Referencias

DOMÍNGUEZ GARCÍA-TEJERO, Francisco (2002). *Topografía General y Aplicada*. Ediciones Mundi-Prensa.

MÜLLER, Roberto (1940). *Compendio general de topografía teórico-práctica: Tomo 3, Vol.1. Triangulación y nivelación*. Librería: “EL ATENEO”.

VOLQUARDTS, G y AGÜERO VERA, N (1956). *Tratado de Agrimensura General y Aplicada (Tomo I- Agrimensura General)*. Editorial Labor.

CAPÍTULO 10
Taquimetría Electrónica

Roberto José Romano y Liliana Teresa Quispe Gutierrez

Principios de la taquimetría

El nombre de la operación topográfica denominada Taquimetría proviene del griego:

- *tachys*= rápido
- *metron*= medida

Puede definirse como aquella parte de la Topografía que se ocupa de los métodos de levantamiento que permiten la determinación simultanea de la posición planimétrica (X,Y) y altimétrica (Z) de los puntos del terreno. Tiene por objetivo la obtención del plano de puntos acotados de una zona, lo cual posibilita representar gráficamente el relieve terrestre.

En este tipo de trabajos las alturas o cotas (Z) son obtenidas por nivelación trigonométrica, mientras que las coordenadas planas (X, Y) por el método planimétrico de Radiación.

Transformación entre coordenadas polares (3D) y rectangulares

En una taquimetría, las mediciones topográficas que se realizan para el levantamiento de un punto son:

- una distancia inclinada (S),
- un ángulo vertical (generalmente cenital) y
- una dirección (medida del limbo horizontal).

Estas tres magnitudes constituyen las coordenadas polares tridimensionales, o coordenadas esféricas del punto. Para su mejor aprovechamiento deberán transformarse a coordenadas rectangulares XYZ.

En campo son medidas las coordenadas esféricas de cada punto (figura 10.1) y luego se calculan sus coordenadas rectangulares XYZ (figura 10.2) en un marco de referencia dado. Las expresiones de cálculo general son las siguientes:

$$x_P = (S \,.\cos\alpha) \,.\cos Hz$$

$$y_P = (S \,.\cos\alpha) \,.\,\mathrm{sen}\, Hz$$

$$z_P = S \,.\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Donde:

- Hz: ángulo horizontal. Se calcula a partir de las direcciones medidas.

- α: ángulo vertical.
- S: distancia inclinada.
- x_P, y_P. z_P: coordenadas rectangulares del punto de interés P.

Figura 10.1. *Coordenadas esféricas de un punto P.*

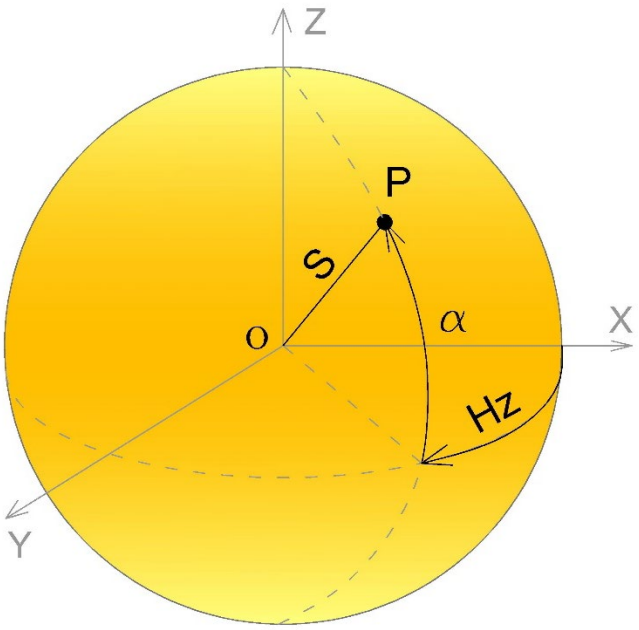
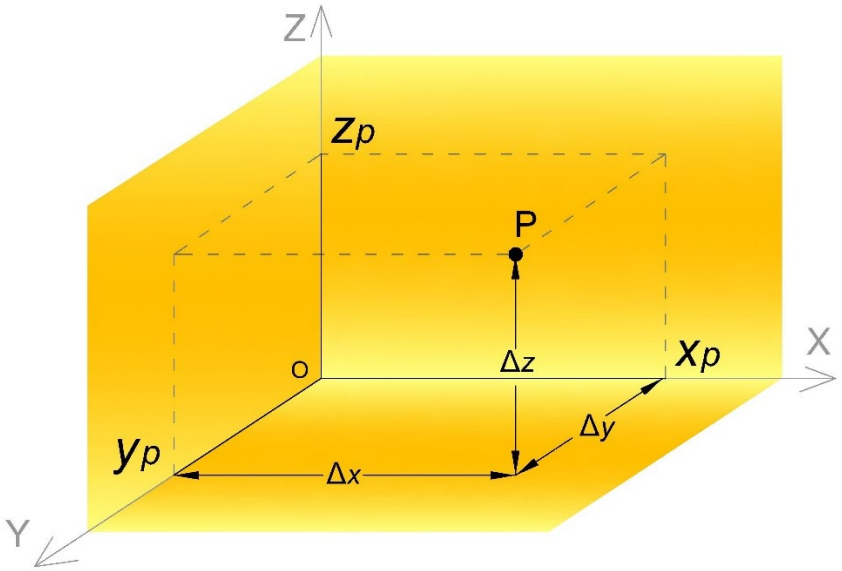


Figura 10.2. *Coordenadas rectangulares de un punto P.*



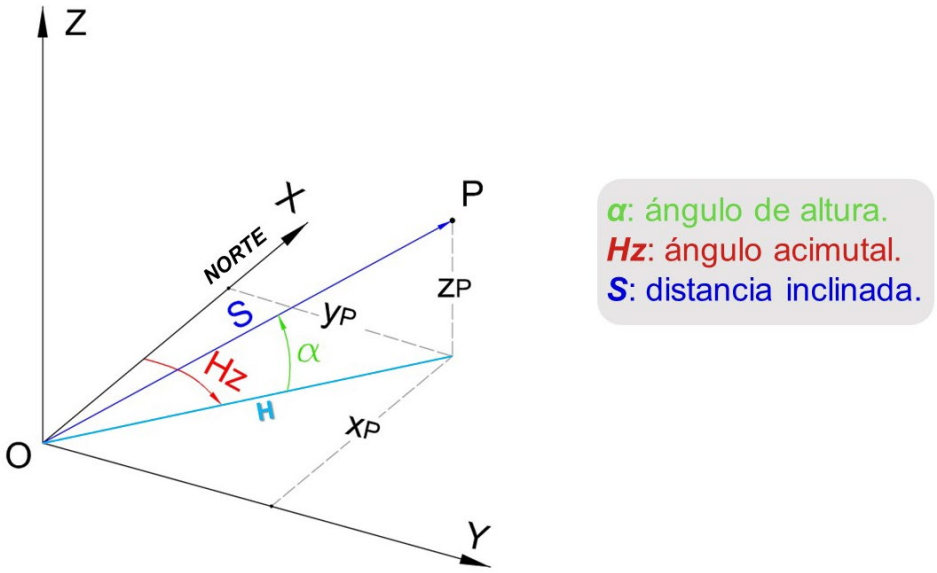
Durante el proceso de cálculo es obtenida la distancia reducida al horizonte (H):

$$H = S \cdot \cos \alpha$$

Las ecuaciones de transformación dadas son válidas cuando el origen O del sistema de referencia, al cual están referidas las coordenadas XYZ, es el punto de estación desde el cual se relevaron las coordenadas esféricas de dicho punto.

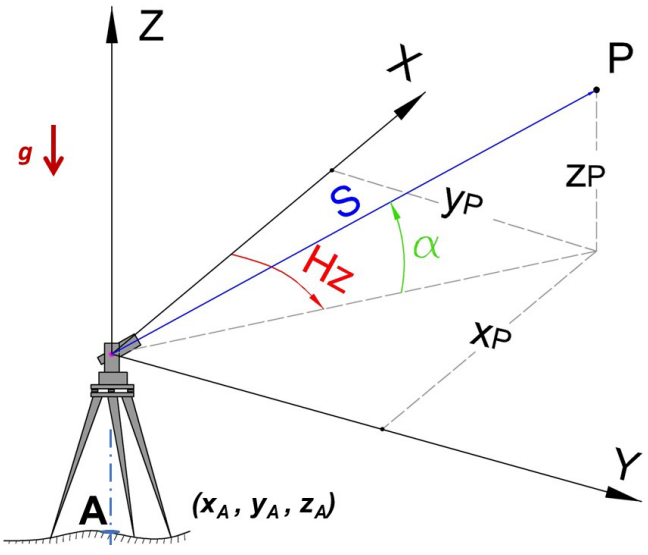
En la figura 10.3 se ilustran los dos sistemas de coordenadas que dan la posición de un punto P. En este esquema, se ha supuesto que la estación se realiza sobre un punto que es el origen del sistema de referencia.

Figura 10.3. *Relación entre las coordenadas esféricas y las coordenadas rectangulares de un punto P.*



Sin perjuicio de lo mencionado hasta aquí, lo más habitual es que el punto de estación no coincida con el origen del sistema de referencia O. En los trabajos de relevamiento de puntos por taquimetría suele suceder que el punto de estación tiene coordenadas distintas a cero. En la figura 10.4 se plantea la situación de un equipo de estación total estacionado sobre el punto A de coordenadas x_A, y_A, z_A distintas a cero.

Figura 10.4. *Taquimetría efectuada desde un punto A de coordenadas conocidas: x_A, y_A, z_A.*



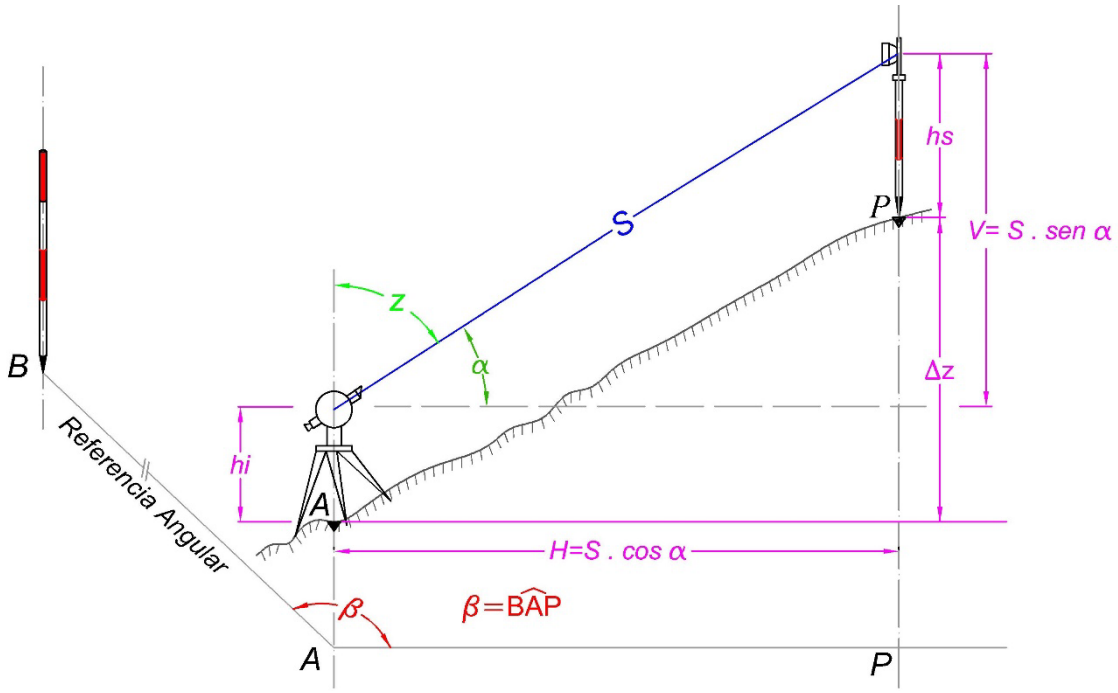
El procedimiento de cálculo que se realiza a partir de las mediciones permitirá referir la posición de los puntos relevados (como el punto P en la figura 10.4) a la posición del punto de estación A. De modo que todos los puntos, tanto relevados como de estación, pertenezcan al mismo marco de referencia.

Cálculos desarrollados en una taquimetría

Debe tenerse presente que las coordenadas XY de cada punto levantado se obtienen por el método planimétrico de Radiación, mientras que su altura o coordenadas Z es obtenida por el método de nivelación trigonométrica. Las posiciones de todos los puntos involucrados, conocidos y desconocidos deben pertenecer a un mismo marco de referencia.

El planteo general de un levantamiento de puntos de interés por taquimetría se resume en la figura 10.5, donde se indica como A el punto conocido y como P el punto de interés, desconocido.

Figura 10.5. *Esquema general de un levantamiento por taquimetría.*



Para poder establecer un marco de referencia (preexistente o no) para el levantamiento se debe contar con un mínimo de datos:

- Punto de coordenadas conocidas: X_A, Y_A, Z_A.
- Acimut de referencia: (AB) o conocidas X_B, Y_B.

Además, es conveniente contar con puntos adicionales para tener un control sobre el trabajo.

Se deberán levantar de cada punto de interés las siguientes mediciones:

- Ángulo horizontal $\beta = B\hat{A}P$.
- Ángulo vertical α.

- Distancia inclinada S.

Debe tenerse en cuenta que el ángulo horizontal se obtiene como la diferencia entre dos direcciones: una tomada como referencia y otra medida hacia el punto de interés. La distancia inclinada se mide con un distanciómetro electrónico, dado que este trabajo se realiza con estación total. Antes del surgimiento de los instrumentos electrónicos, este tipo de distancias solían medirse mediante estadimetría. Para obtener el ángulo vertical, primero debe corregirse el error de índice, y solo entonces se calculará el ángulo de elevación.

Además, al realizarse una nivelación trigonométrica, deben medirse:

- Altura del instrumento: hi.
- Altura de la señal: hs.

Conocidas las coordenadas del punto de estación A y contando con un punto B también conocido, se realiza una estación de instrumento en el primero y se toma como línea de referencia la dada por el segundo. El objetivo es obtener las coordenadas rectangulares XYZ del punto P.

Las coordenadas rectangulares del punto P se calculan desde el punto conocido A:

$$x_P = x_A + \Delta x_{AP}$$

$$y_P = y_A + \Delta y_{AP}$$

$$z_P = z_A + \Delta z_{AP}$$

Los incrementos sobre cada eje XYZ se calculan a partir de las observaciones

$$\Delta x_{AP} = \overline{AP}\ \cos(AP)$$

$$\Delta y_{AP} = \overline{AP}\ \sin(AP)$$

$$\Delta z_{AP} = h_i + S\,.\sin\alpha - h_s$$

Para el cálculo de esos incrementos antes debieron obtenerse el acimut (AP) y la distancia horizontal $\overline{AP}$:

$$(AP) = (AB) + B\hat{A}P$$

$$\overline{AP} = H = S\cos\alpha$$

Debe considerarse el tratamiento previo necesario para procesar las mediciones crudas antes de calcular el ángulo vertical α y el ángulo horizontal $B\hat{A}P$.

Si la distancia entre el instrumento y el punto de interés superara los 300 m se aplicará la corrección por curvatura y refracción.

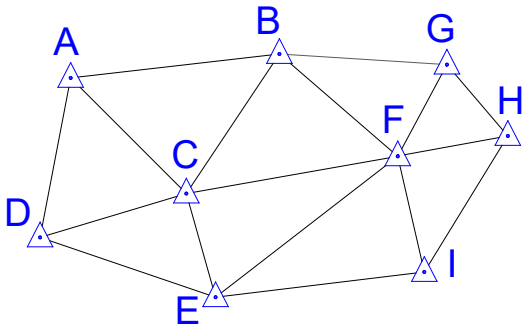
Redes de apoyo para la Taquimetría

La operación de taquimetría debe apoyarse sobre una red de puntos fijos pertenecientes a un determinado marco de referencia. Estos puntos tendrán determinada su posición y su cota, es decir, se conocen sus tres coordenadas. Los métodos empleados para esa tarea suelen dividirse entre planimétricos y altimétricos.

Los métodos planimétricos pueden incluir los mencionados anteriormente, como la triangulación y la poligonación, en el contexto de la topografía más tradicional. En la actualidad, suele ser

más viable medir la red planimétrica utilizando la técnica GNSS, realizando los ajustes y controles correspondientes.

Figura 10.6. *Red planimétrica de puntos fijos.*



Para la obtención de las cotas (o alturas) de los puntos de la red podrían utilizarse también la técnica GNSS (con un modelo para transformación de alturas) pero si se busca la mejor precisión alcanzable deberá realizarse una nivelación geométrica. Podrá utilizarse una nivelación geométrica cerrada (rodeo o enlace).

La materialización de los puntos de la red puede realizarse con diferentes elementos (figura 10.7), dependiendo de las características del trabajo y del terreno, como por ejemplo estacas de madera o de hierro, clavos de acero, mojones, pilares, etc.

Figura 10.7. *Algunos tipos de puntos que pueden conformar una red planialtimétrica.*



Instrumental taquimétrico

La taquimetría está orientada a relevar la mayor cantidad de puntos en el menor tiempo posible, manteniendo la precisión requerida y efectuando todos los controles necesarios. Las mediciones angulares se realizan solamente en CI y las distancias se toman solo una vez. La medición de distancia se realiza por métodos indirectos, actualmente electrónicos. Previo al surgimiento y masificación del instrumental electrónico, la taquimetría se realizaba con teodolitos.

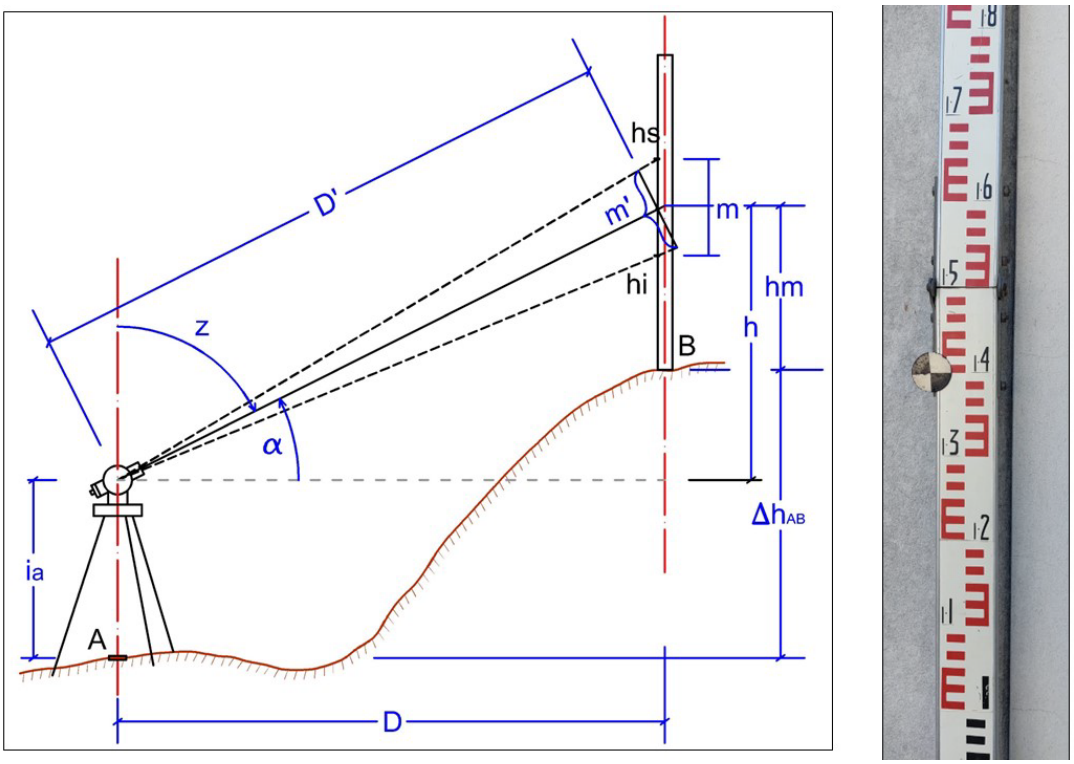
Taquímetros ópticos

Este tipo de taquímetros prácticamente son obsoletos, consistían en teodolitos ópticos para las mediciones angulares (solamente en CI). Mientras que la medición de las distancias se hacía por estadimetría (figura 10.8). En estos casos se empleaban teodolitos con anteojos estadimétricos y se colocaban miras topográficas sobre los puntos de interés. La colimación generalmente se hacía a una marca fija (señal de puntería) establecida sobre la mira. En este caso se colimaba a la señal de puntería en cada apunto, con lo cual la altura de la señal coincidía con la lectura de hilo medio, lo que facilitaba el cálculo. Las lecturas de los hilos superior e inferior variaban de acuerdo con la distancia.

Se medía, por cada punto levantado:

- Una dirección.
- Un ángulo vertical.
- Los tres hilos al milímetro. Hilo medio para obtener el desnivel. Hilos superior e inferior para la distancia (por estadimetría).

Figura 10.8. *Esquema general de una taquimetría con teodolito. La señal de puntería se ha colocado en la lectura de 1,400 m de la mira.*



El uso de teodolitos ópticos y la aplicación de la estadimetría para la obtención de las distancias fue dejado de lado con la aparición del instrumental electrónico. La principal diferencia radica en que, la medición electrónica de distancias es mucho más precisa, más sencilla y rápida. La precisión de las distancias obtenidas por estadimetría es del orden del decímetro (± 0,10 m) mientras que la medición electrónica de distancias pude garantizar el centímetro (± 0,01 m).

En una taquimetría con teodolito, todas las mediciones debían ser registradas en una libreta de campo. Luego, en gabinete se realizaban los cálculos necesarios para obtener las coordenadas XYZ de cada punto levantado.

Existían teodolitos denominados “Autorreductores” o taquímetros de autorreducción (VALDÉS DOMÉNECH, 1982). Mediante sistemas ópticos especiales permitían determinar, sin la necesidad de hacer cálculos posteriores, las distancias reducidas al horizonte. Se empleaban diferentes técnicas para la construcción de estos equipos, entre ellas retículos especiales, sistemas de prismas, se empleaban con miras verticales u horizontales según el sistema de medida. Han sido completamente reemplazados por instrumental electrónico.

Taquímetros electrónicos (estaciones totales)

Los equipos de estación total son instrumentos topogeodésicos que combinan tres componentes básicos:

- un distanciómetro electrónico,
- un teodolito electrónico
- y un procesador.

A lo largo de la evolución entre los taquímetros ópticos y los electrónicos, surgieron diferentes modelos y combinaciones de instrumentos anteriores antes de llegar a la estación total. A continuación, se describen algunos de estos modelos:

- Estación semitotal: Teodolito óptico con acoplamiento de distanciómetro electrónico. Se trataba de dos equipos independientes (figura 10.9) que eran utilizados en conjunto mediante un acople mecánico que sujetaba al distanciómetro (o una parte de este) sobre el teodolito.

Figura 10.9. *Teodolito óptico con distanciómetro electrónico*



- Estación modular: Teodolito electrónico con acoplamiento de distanciómetro electrónico. Ambos equipos son independientes, pero podía establecerse una conexión por cable entre

ambos y obtenerse medidas deducidas tales como la distancia inclinada o diferencias de altura (figura 10.10).

Figura 10.10. *Teodolito electrónico con distanciómetro electrónico.*



- Estación integrada: Teodolito y distanciómetro electrónico integrados en un mismo instrumento, junto a un sistema de computación embebido (figura 10.11). Son estas las estaciones totales convencionales utilizadas en la actualidad. Entre otras funciones: permiten procesamiento de datos en campo, tiene compensador automático de doble eje, memoria interna para almacenamiento de datos y posibilitan la aplicación automática de correcciones.

Figura 10.11. *Estación total integrada (convencional).*



- Estación robótica: Estación total integral que puede ser comandada a distancia mediante una controladora inalámbrica (figura 10.12). Los giros de alidada y anteojo, así como el enfoque, se realizan mediante servomotores que permiten un control preciso del

movimiento. Se suelen utilizar en combinación con prismas de 360º para facilitar la colimación automática. También están equipadas con seguimiento automático del prisma. La controladora es una computadora de campo donde se aloja el programa de manejo del equipo, permite el almacenamiento y edición de datos, posibilita además el manejo simultaneo de otros instrumentos como receptores GNSS. Es posible con este tipo de tecnología realizar en forma combinada una taquimetría y un relevamiento GNSS RTK, levantando todos los datos en el mismo marco de referencia y almacenándolos en conjunto.

Figura 10.12. *Estación total robótica.*



- Estación total con escáner 3D. Utilizan el mismo principio de la estación total para mediciones angulares y de distancias. Permiten el levantamiento de nubes de puntos. Combinan medición, adquisición de imágenes y escaneo 3D. Este tipo de equipos difieren de una estación total en el sentido estricto de la palabra, pero sus fundamentos son equivalentes.

Levantamiento de puntos fijos y de puntos de interés

En un trabajo topográfico, es común observar que la precisión y el cuidado aplicados al levantamiento de distintos puntos pueden variar. Por esta razón, se establece una distinción entre los procedimientos utilizados para registrar los puntos de interés y aquellos empleados para medir puntos fijos.

Medición de puntos de interés

Los puntos de interés para la topografía son aquellos que representan elementos del territorio, tanto naturales como artificiales, y que son levantados con algún propósito (Ingeniería, Catastro, etc.). Conforman a los elementos que están sobre el terreno o pueden ser puntos que describen el relieve. Estos puntos se miden en posición de círculo izquierda, con una sola medición de distancia. Se colima al prisma directamente haciendo la coincidencia de los hilos del retículo con las marcas de la señal de puntería, tal como se indica en la figura 10.13.

Figura 10.13. *Forma de colimar al prisma cuando se miden puntos de interés.*



Medición de Puntos Fijos

Cuando se midan puntos fijos (puntos que materializan el marco de referencia), es importante hacerlo con la precisión suficiente de acuerdo con las características del trabajo. Los puntos fijos son aquellos sobre los que se realizará una estación del instrumento en una etapa posterior del relevamiento. Es imperativo tener en cuenta que los errores de medición en los puntos fijos se propagarán a los puntos medidos a partir de ellos.

Además, los puntos fijos pueden desempeñar el papel de puntos de control. Estos últimos se miden desde múltiples estaciones, y los resultados de dichas mediciones se comparan para verificar si las discrepancias son aceptables.

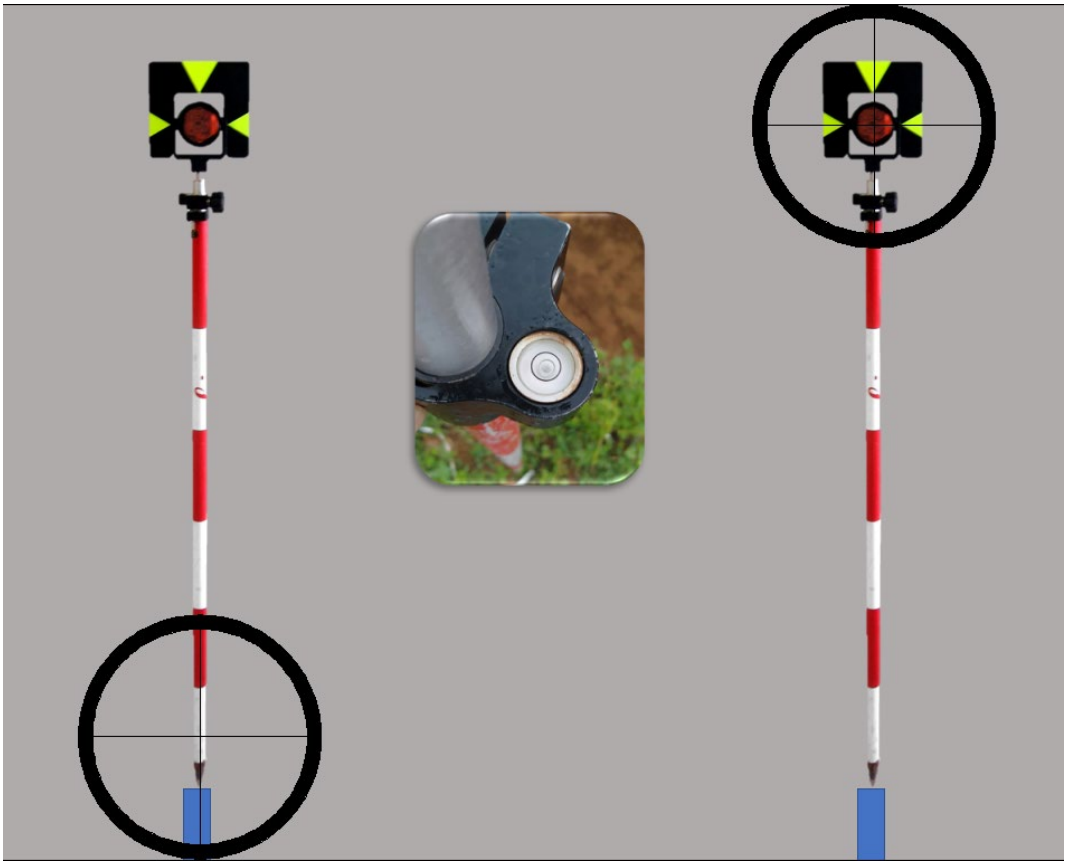
Cuando se miden puntos fijos deberá colimarse bisectando[2] la parte baja del bastón (figura 10.14 parte izquierda) y luego, manteniendo el ángulo acimutal invariable se eleva el anteojo hasta apuntar al prisma (figura 10.14 parte derecha); finalmente se mide el punto.

Midiendo de la manera señalada se reduce notablemente los errores debidos a la imperfecta verticalidad del bastón.

En estos casos, también es recomendable repetir estas mediciones para analizar la existencia de posibles errores groseros.

Para la medición de puntos fijos, sean para estación o de control, los resultados serán mejores si se emplea el método de Bessel.

Figura 10.14. *Procedimiento para la medición de Puntos Fijos y Puntos de Control.*



Métodos operatorios: Taquimetría Común y Taquimetría Digital

En la actualidad, los trabajos de taquimetría se realizan con taquímetros electrónicos, es decir, con estaciones totales, ya sean integradas o versiones más modernas. Sin embargo, al utilizar este tipo de equipos, existen dos alternativas posibles:

[2] Al realizar la colimación con un anteojo topográfico, la bisección se logra al dividir la imagen del objeto, en este caso de un bastón, en dos partes iguales mediante el hilo vertical del retículo. Cuando se miden direcciones, este es el tipo de puntería más apropiado.

- Taquimetría común: Puede realizarse con taquímetros ópticos o con taquímetros electrónicos (estación total).
- Taquimetría digital: Solamente puede realizarse con taquímetros electrónicos (estación total).

Que una taquimetría sea óptica o digital depende únicamente del tipo de datos que nos llevamos del campo; esta clasificación no depende del tipo de taquímetro.

Dado que en la actualidad el uso de teodolitos ópticos es prácticamente nulo, se describirán los diferentes métodos taquimétricos utilizando como instrumento una estación total.

Taquimetría Común

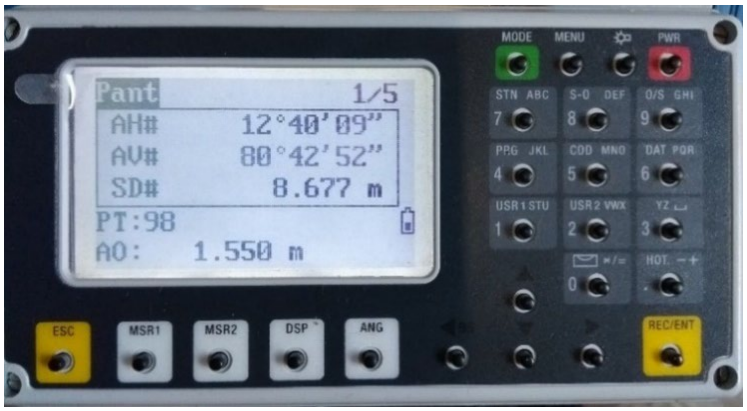
Trabajando con una estación total, se miden y registran en campo las mediciones crudas de cada punto (distancia inclinada, dirección y ángulo vertical). En la figura 10.15 se ilustra una taquimetría común con una estación total en particular, donde:

- AH#: dirección medida al punto de interés en CI.
- AV#: ángulo cenital medido al punto de interés en CI.
- SD#: distancia inclinada medida al punto de interés.
- A0: altura de la señal (prisma).

Posteriormente en gabinete los datos son procesados y se realizan los cálculos hasta obtener las coordenadas rectangulares XYZ de cada punto en un marco de referencia determinado.

En campo se trabaja en todo momento con coordenadas esféricas (α, β, S).

Figura 10.15. *Observaciones realizadas con estación total para levantar un punto por taquimetría común.*

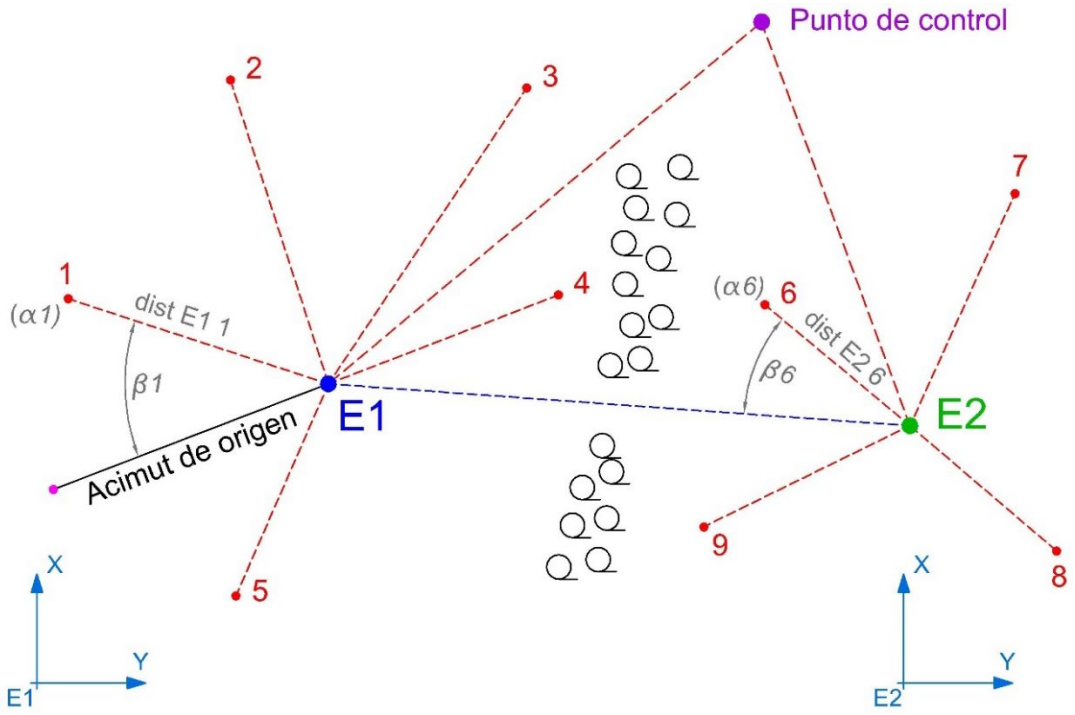


Es muy común no poder medir todos los puntos requeridos desde una única estación, ya sea debido a obstrucciones visuales, a la precisión requerida o al límite de alcance del equipo. En estos casos, es necesario realizar múltiples estaciones para completar el levantamiento. En esta tarea, cada estación establece un sistema de referencia independiente, donde los puntos se registran a través de sus coordenadas esféricas (mediciones crudas). La unificación de todos los

puntos relevados en un único marco de referencia se realiza posteriormente en gabinete, mediante cálculos.

Se desarrollará a continuación un ejemplo a modo ilustrativo: Se requiere un levantamiento planialtimétrico de un sector del terreno que consiste en relevar los puntos del 1 al 9 de la figura 10.16. Los árboles presentes en el lugar impiden realizar el relevamiento desde una sola estación. El trabajo se realiza mediante dos estaciones del instrumento: primero E1 y posteriormente E2.

Figura 10.16. *Esquema de un levantamiento por taquimetría común.*



El trabajo comienza estableciendo la estación sobre el punto E1, tomando como referencia planimétrica la dirección indicada como "Acimut de origen". En este primer punto solo se medirá la dirección, debido a que se utiliza únicamente para orientar el levantamiento, no se considera un punto a levantar y por ello no es necesario medir una distancia.

Posteriormente, se registran la dirección, la distancia inclinada y el ángulo vertical hacia cada uno de los puntos de interés: 1, 2, 3, 4 y 5. Al tratarse de una taquimetría, deberá registrarse la altura del instrumento, y en cada punto levantado registrarse la altura de la señal.

Además, se mide un punto de control para verificar la calidad del trabajo posteriormente en gabinete. También se mide desde E1 el siguiente punto de estación, denominado E2. Todos los puntos levantados (de interés, de control y de estación) están referidos a E1 mediante sus coordenadas esféricas (polares 3D). Para cerrar el trabajo, se mide nuevamente a modo de control la dirección al primer punto medido, el punto de orientación.

Luego se realiza una estación del instrumento sobre el punto denominado E2. El primer punto que se colima es E1, para así poder orientar la estación desde E2. Entonces, se miden a E1 las tres magnitudes correspondientes a la dirección, el ángulo vertical y la distancia inclinada, estos datos se registran. A continuación, se realizan las mediciones a los demás puntos de interés: 6,

7, 8 y 9. Además, se releva el punto de control antes medido desde E1. Para terminar, se cierra la estación E2 midiendo nuevamente al punto E1, comprobando que el equipo no sufrió ningún tipo de perturbación.

De este modo, se ha finalizado el trabajo de campo. Ténganse en cuenta que el punto de control ha sido medido desde las dos estaciones E1 y E2, pero las coordenadas esféricas en cada caso serán diferentes. La distancia medida desde el punto de control a E1 es distinta a la medida desde E2, lo mismo sucede para las mediciones angulares.

En una instancia posterior, en gabinete, se realiza la transformación del sistema de coordenadas esféricas a rectangulares, expresando las posiciones tridimensionales de los puntos en un único marco de referencia. En ese caso, las coordenadas rectangulares XYZ del punto de control deberán ser las mismas al calcularse desde las dos estaciones, admitiéndose una pequeña diferencia acorde a las precisiones de este trabajo. Transformar las coordenadas de los puntos a un sistema rectangular tiene como principal objetivo referir todos los puntos a un mismo marco de referencia.

En la etapa de cálculo conviene iniciar por la parte planimétrica, para ello, en este ejemplo, se adopta un sistema de referencia local arbitrario y se procede como en una radiación convencional. Se le asignan coordenadas XY al punto A, y un valor al acimut de origen. Trabajando con las direcciones medidas y obteniendo las distancias reducidas al horizonte, se calculan las coordenadas XY de cada punto medido.

La parte altimétrica se resuelve por nivelación trigonométrica, considerando que es conocida la altura del punto A, y se utilizan las mediciones de ángulos verticales y distancias inclinadas. También debe contarse con la altura del instrumento y la altura de la señal en cada punto.

A partir de las mediciones realizadas desde E1, se calcula el acimut (E1 E2) y luego las coordenadas XYZ del punto E2. También es posible calcular las coordenadas del punto de control y de los restantes puntos de esa estación.

A continuación, se realizan los cálculos de los puntos medidos desde E2. El proceso es similar al realizado antes, solo que se toman para E2 las coordenadas calculadas desde E1, y los acimutes para los puntos medidos desde E2 se calculan a partir del acimut (E2 E1) considerando que (E2 E1)= (E1 E2) ± 180º. De esta manera, se calculan las coordenadas de todos los puntos medidos desde E2, incluso las del punto de control.

Debe verificarse que las coordenadas XYZ del punto de control obtenidas por los dos caminos sean las mismas. Admitiendo una pequeña diferencia que debe ser menor a la tolerancia adoptada. Si se trabaja con distancias cortas, que no superen los 300 m, para no requerir aplicar correcciones por curvatura y refracción que degraden la precisión de las alturas, podrán admitirse como tolerancia ± 0,02 m en las tres coordenadas.

Ejemplo 10.1: Taquimetría Clásica con estación total

Caso de estudio: Taquimetría realizada desde un único punto de estación A hacia los puntos 1, 2 y 3.

Datos:

- Error de índice= -0° 00’ 20”
- Altura del instrumento (hi)= 1,53 m
- Tipo de limbo vertical: ***Cenital***.
- Coordenadas del Punto A: X_A=500,00 m Y_A=1000,00 m Z_A=16,485 m
- Acimut de Referencia *(AC): 135º 00’ 00”*

Las mediciones para este ejemplo se encuentran en la tabla 10.1. La designación (o código) “TN” significa Terreno Natural.

Tabla 10.1. *Planilla de mediciones del ejemplo 10.1.*

Estación		Punto Visado			Mediciones		
Punto	hi (m)	Nº	Designación	hs (m)	CI horizontal	CI vertical	S (m)
A	1,53	1	Vértice C	1,50	0º 20' 35"	82º 23' 09"	123,44
		2	TN	1,50	12º 56' 02"	87º 00' 43"	23,55
		3	TN	2,00	30º 25' 58"	91º 44' 56"	38,95

Expresiones de cálculo:

$(AP) = (AB) + Hz$

$X_P = X_A + S \times sen(z) \times \cos(AP)$

$Y_P = Y_A + S \times sen(z) \times sen(AP)$

$Z_P = Z_A + hi + cos(z) - hs$

Resolución:

Altimetría

1- Cálculo de ***α***:

Error de índice= -0° 00’ 20” => Corrección= + 0° 00’ 20”

Primero debe corregirse la lectura del CI vertical y luego se calcula el ángulo α:

$\alpha_1 = 90° - (82° 23' 09"+0º 00' 20") = 7° 36' 31"$

$\alpha_2 = 90° - (87° 00' 43"+0º 00' 20") = 2° 58' 57"$

$\alpha_3 = 90° - (91° 44' 56+0º 00' 20") = -1° 45' 16"$

2- Cálculo de ***H***:

$H_1 = S_1 * \cos \alpha_1 = 123{,}44\ m * \cos 7° 36' 31" = 122{,}35\ m$

$H_2 = S_2 * \cos \alpha_2 = 23{,}55\ m * \cos 2° 58' 57" = 23{,}52\ m$

$H_3 = S_3 * \cos \alpha_3 = 38{,}95\ m * \cos(-1° 45' 16") = 38{,}93\ m$

3- Cálculo de ***V***:

$V_1 = S_1 * \sin \alpha_1 = 123{,}44\ m * \sin 7° 36' 31" = +16{,}34\ m$

$V_2 = S_2 * \sin \alpha_2 = 23{,}55\ m * \sin 2° 58' 57" = +1{,}23\ m$

$V_3 = S_3 * \sin \alpha_3 = 38{,}95\ m * \ \sin(-1° 45' 16") = -1{,}19\ m$

4- Cálculo de ***Δh***:

$\Delta_{h1} = V_1 + hi - hs_1 = 16{,}34 + 1{,}53 - 1{,}50 = +16{,}37$

$\Delta_{h2} = V_2 + hi - hs_2 = 1{,}23 + 1{,}53 - 1{,}50 = +1{,}26$

$\Delta_{h3} = V_3 + hi - hs_3 = -1{,}19 + 1{,}53 - 2{,}00 = -1{,}66$

5- Cálculo de ***Z (Cota)***:

Las cotas resultantes se redondean al centímetro (dos decimales), debido a que los desniveles se determinan con esa precisión:

$Z_1 = Z_A + \Delta_{h1} = 16{,}485 + 16{,}37 = 32{,}86\ m$

$Z_2 = Z_A + \Delta_{h2} = 16{,}485 + 1{,}26 = 17{,}75\ m$

$Z_3 = Z_A + \Delta_{h3} = 16{,}485 + (-1{,}66) = 14{,}83\ m$

Planimetría

6- Cálculo de *Acimutes*:

El punto 1 (planilla de datos) es el vértice C, y el acimut (AC) es dato:

$(AC) = 135° 00' 00"$

Los acimutes de los dos restantes puntos 2 y 3 deben calcularse a partir de los ángulos horizontales medidos en CI:

$$(AP_2) = (AC) + \left(C\hat{A}P_2\right) = 135° 00' 00 + (12° 56' 02 - 0° 20' 35") = \ 147° 35' 27"$$

$$(AP_3) = (AC) + \left(C\hat{A}P_3\right) = 135° 00' 00 + (30° 25' 58 - 0° 20' 35") = \ 165° 05' 23"$$

7- Cálculo de coordenadas planas ***X, Y***:

$X_1 = X_A + H_1 * \cos(AC) = 500{,}00 + 122{,}35 * \ \cos 135° 00' 00" = \ 413{,}48$

$Y_1 = Y_A + H_1 * \sin(AC) = 1000{,}00 + 122{,}35 * \ \sin 135° 00'00" = \ 1086{,}51$

$X_2 = X_A + H_2 * \cos(AP_2) = 500{,}00 + 23{,}52 * \ \cos 147° 35' 27" = \ 480{,}14$

$Y_2 = Y_A + H_2 * \sin(AP_2) = 1000{,}00 + 23{,}52 * \ \sin 147° 35' 27" = \ 1012{,}61$

$X_3 = X_A + H_3 * \cos(AP_3) = 500{,}00 + 38{,}93 * \ \cos 165° 05' 23" = \ 462{,}38$

$Y_3 = Y_A + H_3 * \sin(AP_3) = 1000{,}00 + 38{,}93 * \ \sin 165° 05' 23" = \ 1010{,}02$

Tabla 10.2. *Resumen de cálculos.*

Punto Visado			α	H (m)	V (m)	∆h (m)
Nº	Designación	hs (m)				
1	Vértice C	1,50	7º 36' 31"	122,35	+16,34	+16,37
2	TN	1,50	2º 58' 57"	23,52	+1,23	+1,26
3	TN	2,00	-1º 45' 16"	38,93	-1,19	-1,66

8- Resultados

Los resultados fueron volcados en la planilla 10.3.

Tabla 10.3. *Planilla de resultados.*

Punto Visado			Coordenadas (m)		
Nº	Designa-ción	hs (m)	X	Y	Z (Cota)
1	Vértice C	1,50	413,48	1086,51	32,86
2	TN	1,50	480,14	1012,61	17,75
3	TN	2,00	462,38	1010,02	14,83

En este ejemplo se trabajó con solo tres puntos, ya que el objetivo del ejercicio es mostrar la metodología de cálculo aplicada tras el levantamiento de los puntos mediante taquimetría común. Sin embargo, esta misma técnica es aplicable a cualquier número de puntos.

En caso de haber realizado el levantamiento desde múltiples estaciones, se procederá de la misma manera con la estación E1 (primera estación). Para las estaciones siguientes, los cálculos se iniciarán utilizando las coordenadas de los puntos determinados desde la estación anterior; el acimut de partida será el correspondiente a la línea definida por esa estación y la anterior.

Taquimetría Digital

Este método de trabajo se lleva a cabo con una estación total, aprovechando la capacidad del equipo para procesar y almacenar datos. Las mediciones crudas (distancia inclinada, dirección acimutal y ángulo vertical) tomadas en cada punto de interés son utilizadas por el equipo para calcular sus coordenadas XYZ, las cuales se muestran en pantalla. Tanto las mediciones como las coordenadas calculadas pueden almacenarse en la memoria interna de la estación total, evitando errores de anotación y ahorrando una considerable cantidad de tiempo.

Los cálculos realizados por la computadora de la estación total para transformar las coordenadas de esféricas a rectangulares son equivalentes a los ya analizados en secciones anteriores. Todas las mediciones empleadas en los cálculos son corregidas previamente por los errores sistemáticos correspondientes.

Todos los puntos levantados, ya sea desde una o más estaciones, tendrán coordenadas rectangulares XYZ dentro del mismo marco de referencia. La vinculación entre estaciones, así como el resto de los cálculos, se resuelven automáticamente en campo.

Durante un relevamiento de puntos mediante taquimetría digital, los cálculos topográficos realizados por la estación total consisten en transformar las coordenadas de los puntos, referidas a cada estación en un sistema esférico, a un sistema rectangular único para todo el relevamiento. En el replanteo, el proceso es el inverso: se cargan en el equipo, ya sea manualmente o por

transferencia de datos, las coordenadas rectangulares y el equipo las convierte a coordenadas esféricas, necesarias para la marcación precisa de los puntos en el terreno.

Definición de un marco de referencia para la taquimetría digital

Para que la estación total calcule automáticamente las coordenadas rectangulares XYZ de los puntos medidos, se debe establecer en el instrumento un sistema de referencia, para lo cual es necesario realizar dos tareas en el siguiente orden:

1. Ingresar las coordenadas del punto de estación.
2. Orientar el instrumento.

Al momento de iniciar el trabajo se pueden presentar dos situaciones:

- Existe una red de puntos fijos disponibles para trabajar.
- No hay puntos fijos en el sitio y debe marcarse y medirse una red.

En el último caso, es posible trabajar en un sistema de referencia local arbitrario generado solamente para ese levantamiento. También puede suceder que existan puntos fijos que estén vinculas parcialmente a una red. Por ejemplo, puntos que tengan cota IGN pero no tengan medidas sus coordenadas XY. O el caso contario, puntos vinculados a la red POSGAR 07, pero sin cotas IGN.

Ingresar las coordenadas del punto de estación

Tras calar el instrumento sobre el punto de estación, se procederá a ingresar las coordenadas correspondientes en la computadora del equipo. Puede presentarse la circunstancia donde, en la región, no existan puntos fijos medidos previamente. En este caso, se presupone que no se han llevado a cabo mediciones previas, por lo que se deberán materializar y medir los puntos fijos.

En ausencia de un marco de referencia conformado por puntos fijos previamente medidos, se procede a establecer un sistema local mediante el uso de la estación total. En este proceso, se asignan coordenadas arbitrarias al punto de estación, seguido de la orientación con un acimut también arbitrario. Como se detalla en el Capítulo 8, en la elección de coordenadas y acimuts arbitrarios pueden aplicarse criterios prácticos específicos que simplificarán la tarea de medición.

Al tratarse de un trabajo de taquimetría, se ingresan las coordenadas XYZ del punto donde se ubica el instrumento. En esta etapa del trabajo, también se incluyen las alturas del instrumento (hi) y la altura de la señal (hs). La Figura 10.17 ejemplifica, de manera ilustrativa, cómo cargar las coordenadas XYZ de un punto de estación en un equipo de estación total. Asimismo, en dicha figura, se detalla el procedimiento para ingresar la altura del instrumento (AI) con un valor de 1,500 m. Durante este proceso, se designa al punto con el nombre "E1".

Figura 10.17. *Definición del punto de estación.*



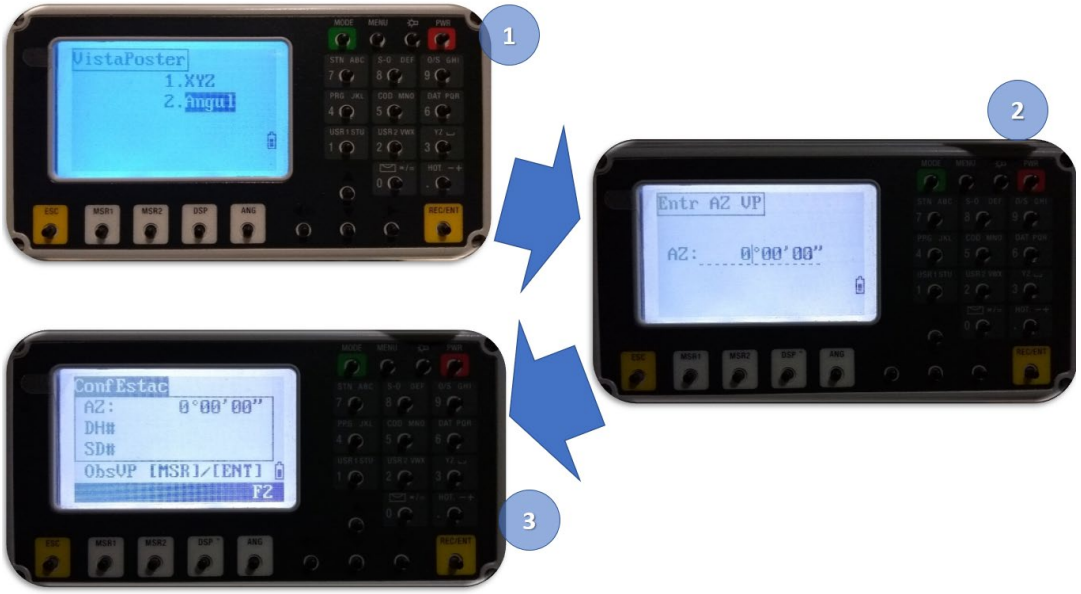
Orientar el instrumento

La orientación de la estación total es la operación para establecer, directa o indirectamente, en el equipo la dirección correspondiente al acimut de 0º, existen dos alternativas:

- Acimut manual.
- Punto acimut.

Acimut manual: Consiste en asignar un valor acimutal a una dirección específica fijada con el anteojo del instrumento. Directa o indirectamente, se define la dirección del semieje +X (acimut 0º), esta dirección de referencia es el también denominado norte de cálculo.

Figura 10.18. *Orientación del equipo por "Acimut manual".*



El procedimiento es directo cuando se asigna a una visual dada al valor de acimut 0º. En cambio, es indirecto cuando el valor asignado a una visual es distinto de cero; sin embargo, esa referencia permite encontrar la posición del 0º girando la alidada después de la orientación.

La tarea consiste en colimar al punto de acimut conocido para luego ingresarle su valor angular manualmente. Si no existe una red de puntos fijos, se elegirá un punto convenientemente y se le asignará un valor acimutal mediante algún criterio práctico.

En la figura 10.18 se muestra una secuencia de pasos para realizar la tarea de orientación por "Acimut manual" con una estación total:

1- dentro del menú correspondiente, se selecciona la opción “Angul”,

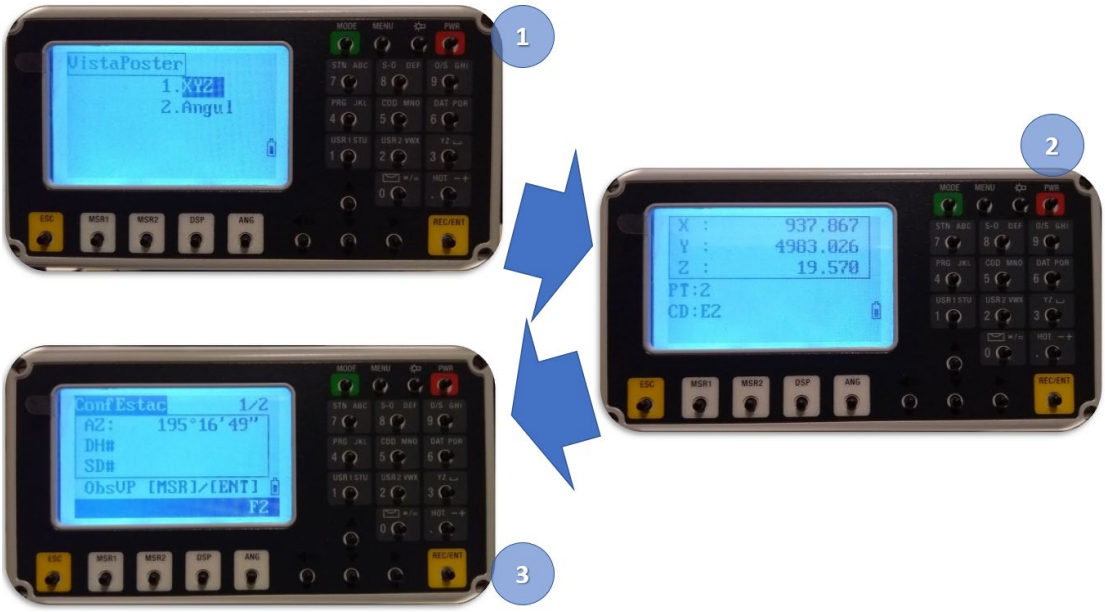
2- luego, se ingresa el valor del acimut que corresponde para esa dirección (0º 00’ 00”) y

3- finalmente se establece ese valor angular a la dirección dada por el anteojo.

Muchas estaciones totales brindan la posibilidad de realizar esta tarea utilizando las dos posiciones del anteojo, se colimará primero en CI y luego en CD. De este modo se mejora la precisión del procedimiento, ya que el equipo definirá la dirección de orientación mediante el promedio de dos observaciones, y no una sola. La referencia se toma con la colimación en CI, pero se utiliza la medición al mismo punto en CD para eliminar efectos sistemáticos y compensar parte de los errores accidentales inevitables.

Punto acimut: Esta alternativa consiste en indicarle al instrumento las coordenadas XYZ del punto que está siendo colimado. El instrumento calcula el acimut a partir de las coordenadas del punto de estación y del punto de orientación, luego fija ese acimut a la dirección dada por el anteojo (figura 10.19).

Figura 10.19. *Orientación del equipo por “Punto acimut”.*



En la figura 10.19 se muestran los pasos para realizar la tarea de orientación por “Punto acimut” con una estación total:

1- Se selecciona el tipo de orientación,

2- se ingresan las coordenadas del punto para orientación (o se cargan desde la memoria del equipo) y finalmente el equipo calcula el acimut y lo muestra en pantalla (195º16’49”).

3- Finalmente se asigna el acimut calculado a la dirección dada por el anteojo.

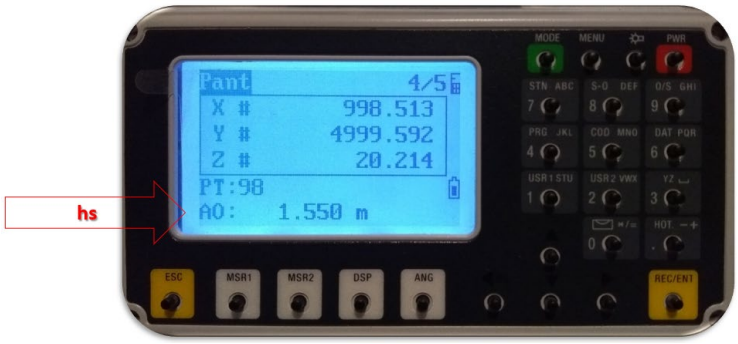
Una vez cargadas las coordenadas del punto de estación y orientado el equipo es posible comenzar con el relevamiento por taquimetría digital.

Levantamiento de puntos por taquimetría digital

Las coordenadas rectangulares serán calculadas por la estación total a partir de las mediciones de una dirección, un ángulo vertical y la distancia inclinada. Estas coordenadas estarán referidas al sistema de referencia cargado en el equipo. El instrumento muestra las coordenadas XYZ del punto de interés medido, estas pueden anotarse en una libreta de campo y/o almacenarse en la memoria del equipo. En este último caso, es posible asignar al punto un código para designar el tipo de elemento del terreno que se midió.

Tal como se muestra en la figura 10.20, las coordenadas calculadas para el punto se muestran en pantalla. El parámetro A0 es la altura del prisma (hs), esta puede modificarse para cada punto.

Figura 10.20. *Medición de un punto por "taquimetría digital".*



Enlace de estaciones (cambios de estación)

Trabajando en campo con coordenadas rectangulares se facilita el enlace de las estaciones y la transmisión de la orientación. Es decir, el sistema de referencia adoptado en la primera estación puede ser utilizado en los siguientes puntos de estación. De esta manera, todos los puntos levantados estarán en el mismo marco de referencia, evitando realizar los cálculos que requiere esta tarea en gabinete. Esto además permite realizar controles adicionales en campo, ya que se pueden verificar las coordenadas de los puntos de control inmediatamente después de medirlos.

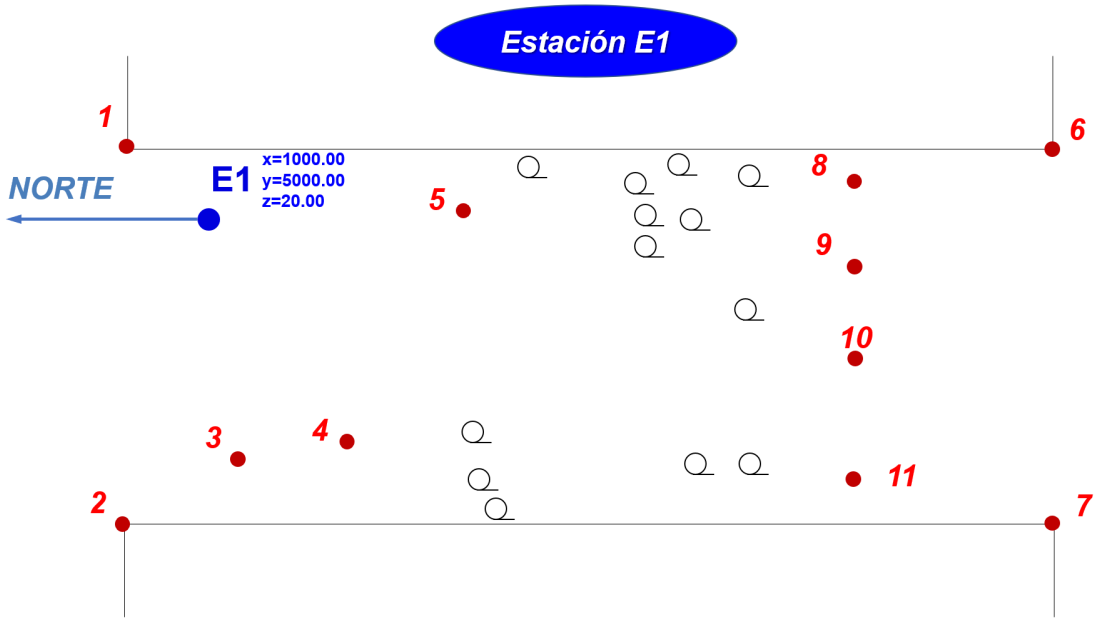
Para reconfigurar un marco de referencia en la estación total se necesitan dos puntos fijos: uno para la estación y otro para la orientación. Sin embargo, es recomendable disponer de puntos fijos adicionales para controlar y verificar la precisión del trabajo.

Desarrollo de un ejemplo de taquimetría digital

Se desarrolla a continuación un caso a modo de ejemplo de un relevamiento mediante una taquimetría digital, para ello debe utilizarse un instrumento de estación total. En este desarrollo práctico, los puntos de interés son los identificados con los números del 1 al 11 en la figura 10.21.

En la figura 10.21 se esquematiza la zona de trabajo y cómo se define la primera estación y el sistema de referencia local arbitrario.

Figura 10.21. *Ejemplo de levantamiento por taquimetría digital.*



Se comienza el trabajo colocando una estaca de madera que constituirá el punto fijo denominado E1 (figura 10.21), sobre este punto se realiza la primera estación del equipo. En el menú de trabajo de la estación total se establece el sistema de referencia asignando al punto E1 las coordenadas (1000,00 ; 5000,00 ; 20,00). Se orienta el equipo con la opción Acimut manual, definiendo el acimut de 0º en una dirección conveniente. En la figura 10.21 se indica con una flecha color azul claro la dirección del acimut 0º, esta dirección constituye la del semieje positivo de X (+X). En la figura, la denominación de "Norte" se asigna a la dirección del acimut 0º, aunque esto no implica necesariamente que coincida con la dirección del norte geográfico.[3]

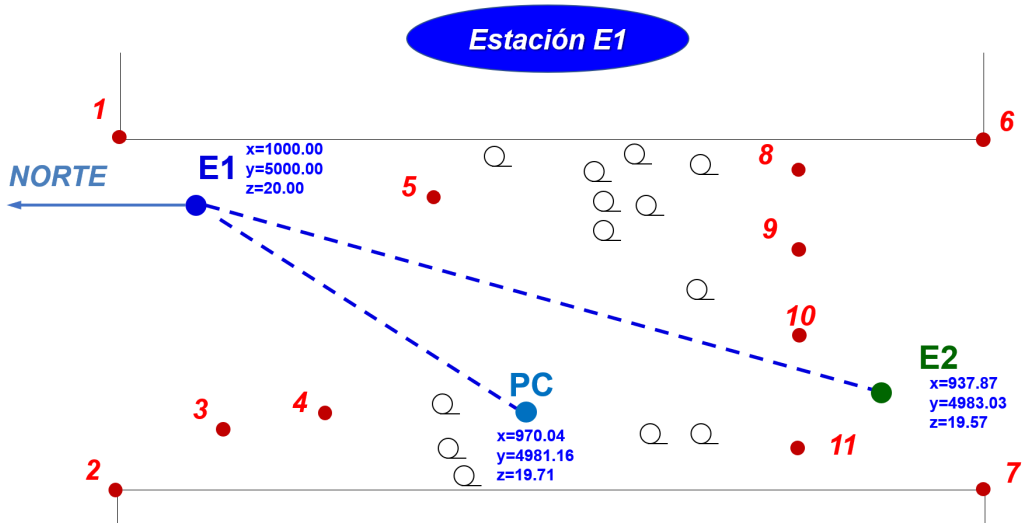
Constituido el sistema de referencia se medirán los demás puntos que conformarán el marco de referencia.

Desde E1 no podrá completarse la totalidad del relevamiento debido a la existencia de obstáculos a las visuales. Por lo tanto, debe plantearse un segundo punto de estación E2, ubicado convenientemente, y un punto de control PC; ambos se materializan también mediante estacas de madera. Para la medición de estos dos puntos se debe colocar un bastón con prisma sobre cada uno de ellos para poder medir la distancia, la dirección y el ángulo vertical, tomando los cuidados necesarios dado que son puntos fijos.

Desde E1 se miden y registran en la memoria de la estación total las coordenadas XYZ de los puntos E2 y PC. Es conveniente, además, realizar un croquis de la zona de trabajo y registrar las coordenadas de estos puntos en una libreta de campo.

[3] En caso de que sea necesario alinear la orientación del semieje +X con la dirección del norte geográfico, se requerirán trabajos adicionales. Una opción viable es llevar a cabo mediciones de puntos fijos utilizando un equipo GNSS.

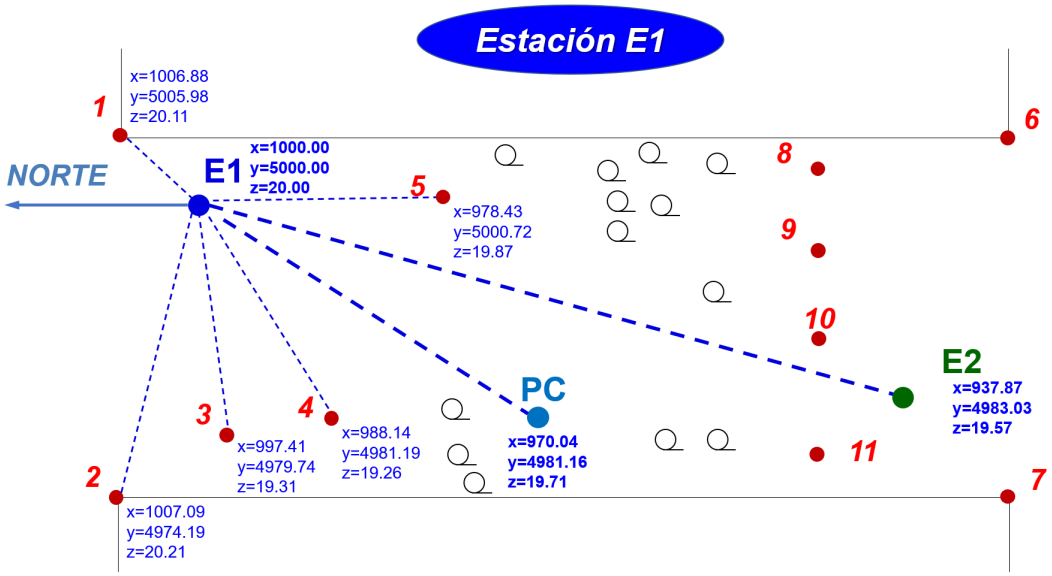
Figura 10.22. *Medición de los puntos E2 y PC que, junto con E1, conforman el marco de referencia.*



Posteriormente, se inicia el proceso de levantamiento mediante taquimetría digital, levantando todos los puntos de interés visibles desde E1. Dichos puntos de interés serán medidos mediante un bastón equipado con un prisma reflector. Debe asegurarse que la altura del prisma (altura de la señal) indicada al equipo sea la misma que tiene el bastón en el momento de la medición. Durante el trabajo de taquimetría, es común ajustar en varias ocasiones la altura del prisma sobre el bastón, según el elemento que se levante; en cada caso debe verificarse la altura ingresada en el instrumento.

En ciertas ocasiones, como al medir puntos correspondientes a edificaciones, postes, luminarias, árboles, etc., donde la altura del punto no es necesaria, es posible elegir la medición sin prisma (reflexión directa). Prácticamente todas las estaciones totales disponibles en el mercado incorporan este método de medición. Utilizarlo conlleva una gran ventaja, ya que permite imprimir una mayor velocidad al relevamiento. Además, esta metodología posibilita la medición de puntos que son inaccesibles para el operador que transporta el bastón con prisma.

Figura 10.23. *Levantamiento de puntos de interés desde E1.*



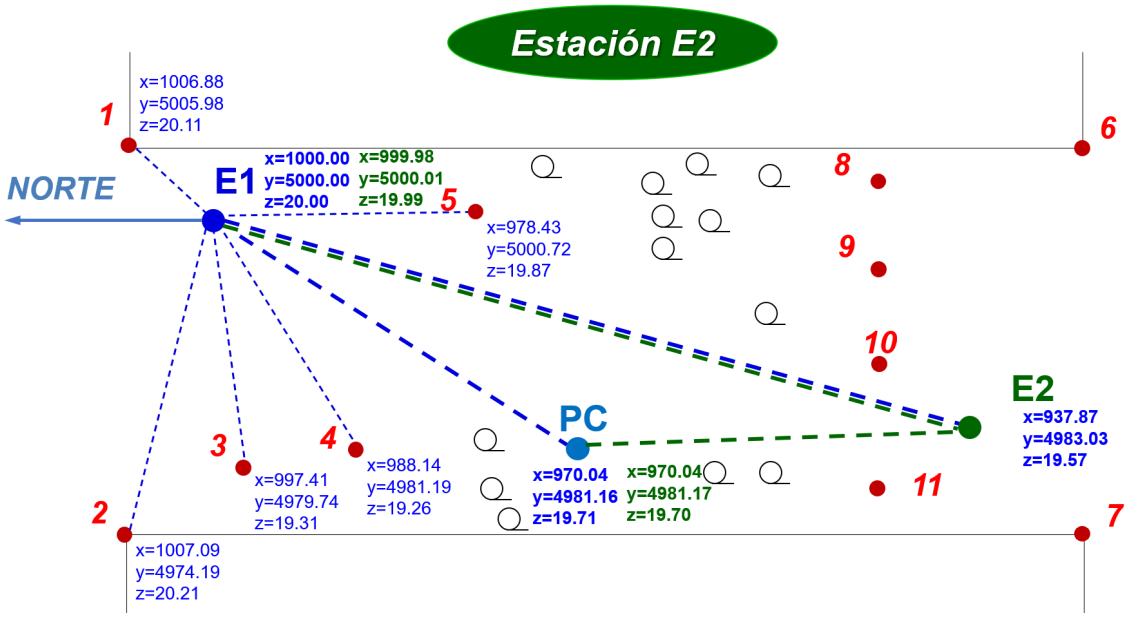
Las estaciones totales modernas están equipadas con los dos métodos para medición de distancias, con prisma y sin prisma. Este último funciona por reflexión directa de la señal emitida por el instrumento sobre la superficie del elemento que se mide. Es usual trabajar intercalando las dos alternativas, con y sin prisma, aunque en cada caso se debe reconfigurar el valor de constante del prisma y altura de la señal. Cuando se midan puntos por reflexión directa, la constante del prisma y la altura de la señal se configuran con valor cero.

En el ejemplo que se está desarrollando, todos los puntos se miden con prisma. De este modo, se levantan desde E1 los puntos de interés del 1 al 5 (figura 10.23). En cada caso el equipo calcula las coordenadas XYZ para luego ser almacenadas en su memoria interna. A cada punto medido se le asigna un número de orden y un código, parámetros que se almacenan con el resto de los datos. Cuando se hayan medido todos los puntos, desde E1 es conveniente realizar una medición a modo de cierre al punto E2 (o al PC), esta medición permite verificar que el equipo no sufrió ninguna perturbación.

Una vez medidos todos los puntos visibles desde E1, se continúa el trabajo midiendo desde el punto E2. Sobre este punto se realiza la puesta en estación y calado del instrumento. Posteriormente, se procede a cargar en el programa las coordenadas del punto E2 y la nueva altura del instrumento. En esta oportunidad, para realizar la orientación con el punto E1 se utiliza la opción “Punto acimut”. Asignadas las coordenadas XYZ del punto de estación E2, se asigna como punto de orientación E1, el equipo calcula el acimut para la orientación y lo muestra en pantalla (15º 16’ 37”), luego el operador debe aceptar ese valor, controlando que la colimación del anteojo corresponde exactamente al punto E1.

Este procedimiento, que implica trasladar el equipo de un punto a otro de estación manteniendo el mismo sistema de referencia, se denomina cambio de estación. Este método permite continuar el relevamiento de puntos dentro del mismo marco de referencia, desde un nuevo punto de estación previamente medido.

Figura 10.24. *Puesta en estación sobre el punto E2.*

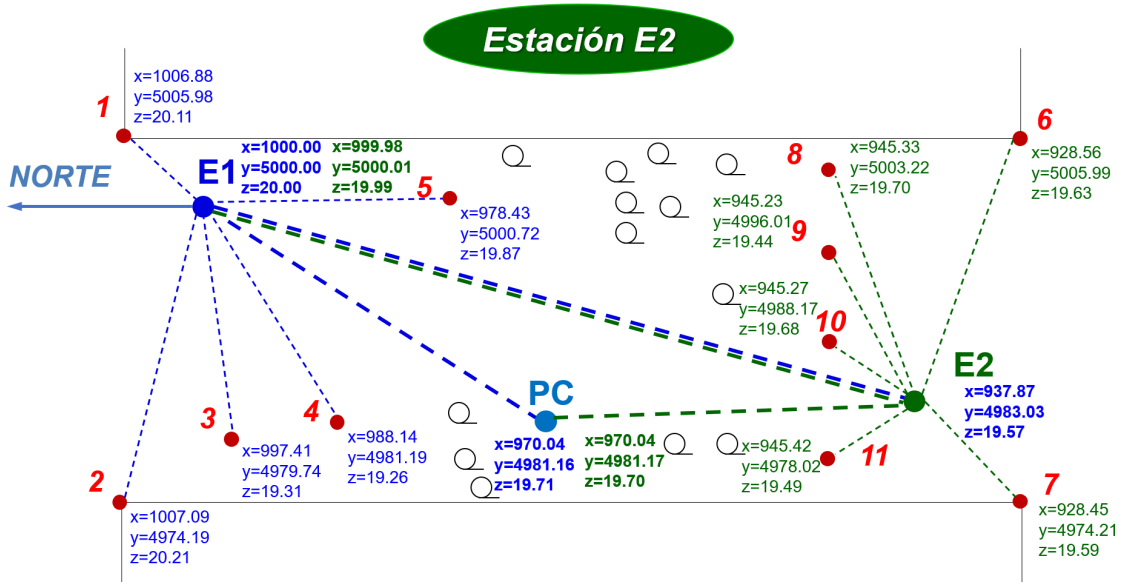


Antes de comenzar con el relevamiento topográfico desde E2, es conveniente realizar una serie de controles tendientes a asegurar que el cambio de estación se hizo sin cometer errores groseros. Un error típico es ingresar mal el punto de estación o el de orientación, con lo cual no se estará trabajando en el marco de referencia original. El primer control que se realiza desde E2 es medir al punto E1 inmediatamente después de haber realizado la orientación, en este paso debe verificarse que la altura del prisma ingresada es la correcta.

En la figura 10.24 se aprecian en color azul las coordenadas de E1 originales y en color verde las que se miden desde E2, las diferencias encontradas son aceptables para el levantamiento planteado como ejemplo. Este primer control no es suficiente, es necesario medir un tercer punto, en este caso se utiliza el punto de control. En la misma figura se ven las coordenadas del PC medidas desde E1 (color azul) y medidas desde E2 (color verde), nuevamente las diferencias son aceptables.

Superados los controles de rigor, se continúa con la taquimetría digital desde E2 (figura 10.25). Desde esta estación son medidos los puntos de interés del 6 al 11 y se registran sus coordenadas. Con estos últimos pasos se finaliza el trabajo. Antes de realizar el apagado del instrumento, es necesario medir nuevamente el punto E1 o el PC para comprobar que no hubo inconvenientes durante el trabajo.

Figura 10.25. *Relevamiento de puntos de interés desde E2.*



Terminadas las tareas de campo, en gabinete se realiza la descarga y procesamiento de datos. Los puntos almacenados en la estación total podrán ser descargados en diferentes formatos, según la marca y modelo del equipo. Como se mencionó en el capítulo 8, las opciones más comunes son en formato ASCII o formato CAD.

Figura 10.26. *Visualización de los datos en formato de texto ASCII.*

Puntos Ejemplo.csv: Bloc de notas

Archivo Edición Formato Ver Ayuda

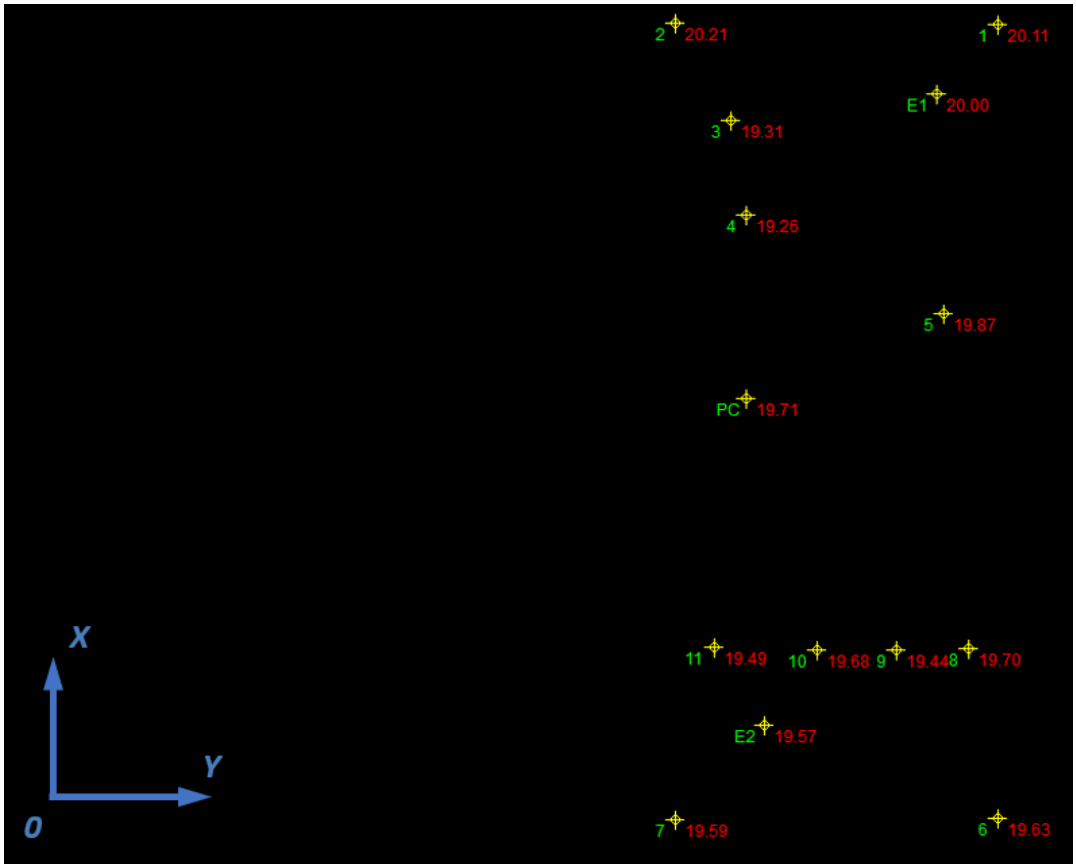
```
1,1000.0000,5000.0000,20.0000,E1
2,937.8674,4983.0255,19.5700,E2
3,970.0424,4981.1605,19.7100,PC
4,1006.8831,5005.9751,20.1100,1
5,1007.0895,4974.1876,20.2100,2
6,997.4058,4979.7388,19.3100,3
7,988.1445,4981.1874,19.2600,4
8,978.4296,5000.7174,19.8700,5
10,928.5587,5005.9935,19.6300,6
11,928.4534,4974.2071,19.5900,7
12,945.3260,5003.2156,19.7000,8
13,945.2313,4996.0057,19.4400,9
14,945.2704,4988.1699,19.6800,10
15,945.4189,4978.0175,19.4900,11
```

	A	B	C	D	E
1	Nº de orden	Norte	Este	Cota	Código
2	1	1000.00	5000.00	20.00	E1
3	2	937.87	4983.03	19.57	E2
4	3	970.04	4981.16	19.71	PC
5	4	1006.88	5005.98	20.11	1
6	5	1007.09	4974.19	20.21	2
7	6	997.41	4979.74	19.31	3
8	7	988.14	4981.19	19.26	4
9	8	978.43	5000.72	19.87	5
10	10	928.56	5005.99	19.63	6
11	11	928.45	4974.21	19.59	7
12	12	945.33	5003.22	19.70	8
13	13	945.23	4996.01	19.44	9
14	14	945.27	4988.17	19.68	10
15	15	945.42	4978.02	19.49	11
16					

En la figura 10.26 se encuentran los puntos levantados en el ejemplo que se desarrolló. En la parte izquierda de la figura se muestra el archivo de puntos en su forma original de valores separados por coma, cada línea se corresponde con un punto levantado. En la parte derecha de la figura 10.26 se muestra el mismo archivo, pero desplegado como planilla de cálculo, esta última opción facilita las tareas de control y edición de los datos.

En la figura 10.27 se muestra la visualización de los datos en formato CAD. En color rojo se indica la coordenada Z (o cota) de los puntos y en color verde el número de orden. Esta imagen corresponde a un plano de puntos acotados.

Figura 10.27. *Visualización de los puntos levantados en formato CAD.*



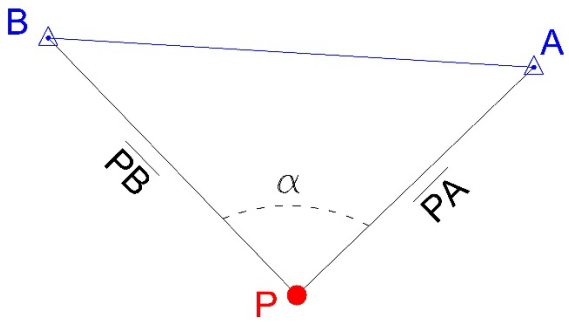
Estación libre

Cuando se realiza un levantamiento topográfico por taquimetría digital, existe una alternativa a las dos formas de posicionamiento y orientación del equipo antes mencionadas, Acimut manual y Punto acimut. Esta tercera alternativa es el método o técnica de Estación Libre.

Esta técnica permite asignar un sistema de referencia a una estación total a partir de medir ángulos y distancias a dos o más puntos fijos pertenecientes a un marco de referencia. Lo más interesante de este método es que no se requiere estacionar sobre un punto fijo, la única condición es poder medir al menos dos puntos fijos conocidos. Pueden utilizarse una mayor cantidad de puntos, esto mejora la exactitud de la solución.

En la figura 10.28 se esquematiza el procedimiento denominado Estación libre. En esta figura se plantea la solución con la mínima cantidad de puntos fijos, es decir, solamente dos. Sean los puntos A y B (figura 10.28) pertenecientes a un marco de referencia dado. El punto P es un punto desconocido sobre el que se estableció una estación total. Midiendo las distancias PB y PA, además del ángulo α, es posible resolver la posición y la orientación del equipo. Finalizada la operación, se conocerán las coordenadas del punto P y los acimutes de las direcciones PA y PB.

Figura 10.28. *Esquema de Estación libre.*



Este método guarda similitudes con el de Pothenot, pero se diferencia en que se emplean además de mediciones angulares también mediciones lineales. Esto reduce la cantidad mínima de puntos necesarios a solamente dos. Si se requiere hacer estación libre solamente con mediciones angulares (sin medir distancias) se estaría resolviendo el problema de Pothenot; esta es una opción también disponible en las estaciones totales. En cualquiera de los casos, el instrumento resuelve automáticamente la posición del punto de estación y la orientación.

Es posible trabajar con estación libre tanto en relevamientos planimétricos como en planialtimétricos, en el segundo caso deben considerarse las alturas del instrumento y del prisma.

Esta técnica facilita notablemente el trabajo ya que el operador puede elegir la ubicación del instrumento que resulte más conveniente, no estando obligado a colocarse sobre puntos fijos previamente medidos. A su vez, los puntos fijos se pueden marcar en sectores más resguardados ya que no será necesario estacionar sobre ellos.

Este tipo de posicionamiento requiere cálculos y ajuste por parte del programa del instrumento mediante algún tipo de ajuste como por ejemplo Mínimos Cuadrados. Como resultado

se obtienen las coordenadas XYZ del punto de estación, la desviación estándar de estas y la orientación del equipo. Quedando finalmente establecido el marco de referencia de los puntos fijos medidos.

Esta función se encuentra en prácticamente todas las estaciones totales. Se la halla con diferentes denominaciones: resección, trisección, intersección inversa, etc., de acuerdo con el origen y fabricante del equipo.

La calidad de la solución dada por esta técnica depende, entre otras cuestiones, de la distribución de los puntos fijos utilizados. En algunos casos, es imposible calcular las coordenadas de la estación si el ángulo comprendido entre los puntos conocidos es demasiado pequeño. Cuanto mayor sea la distancia entre el punto de estación y los puntos fijos, menor será el ángulo comprendido entre las visuales. También se tendrá inconvenientes en aplicar este método si los puntos fijos están alineados con el punto de estación.

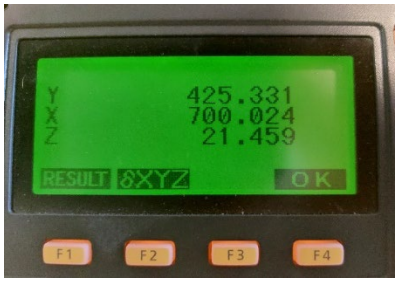
Para control y seguridad es conveniente medir un punto fijo que no se haya utilizado para la operación de estación libre y verificar con este la calidad de la posición y orientación obtenida.

Ejemplo de aplicación de la técnica de estación libre

Se mostrará el caso de una taquimetría, en este tipo de levantamiento interesan las tres coordenadas XYZ de los puntos de interés. También es posible de aplicar en radiaciones donde solo se trabaja con la planimetría (XY).

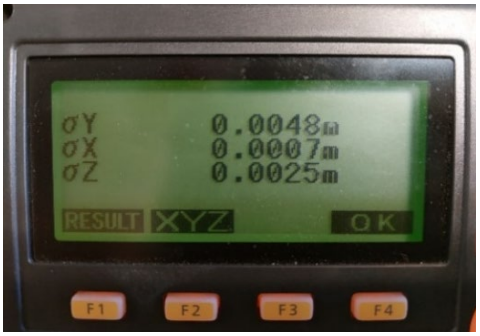
En la figura 10.29 se muestra el resultado de la operación de posicionamiento y orientación mediante estación libre. Una vez realizadas las mediciones necesarias, el equipo procesa los datos y muestra en pantalla las coordenadas del punto de estación.

Figura 10.29. *Coordenadas del punto de estación obtenidas por el método de Estación libre.*



Al realizarse un ajuste a partir de las observaciones, con este método, puede obtenerse la desviación estándar de cada coordenada. Seleccionando la opción “δXYZ” (figura 10.29) es posible conocer la precisión con que se resolvió la posición del punto de estación. Esta precisión es expresada mediante la desviación estándar experimental de cada coordenada (σX, σY, σY), como se ve en la figura 10.30. Estos parámetros indican la calidad del ajuste: 4,8 mm en la componente X, 0,7 mm en Y, completándose con 2,5 mm en Z. No obstante, si se desea tener un control riguroso del posicionamiento y orientación es conveniente medir un punto del mismo marco de referencia que no se haya utilizado para esta operación.

Figura 10.30. *Desviación estándar (σ) de cada coordenada.*



En algunos instrumentos, como en el caso utilizado en este ejemplo, una vez aceptadas las coordenadas del punto de estación, el equipo solicita confirmar si se acepta la orientación obtenida (figura 10.31). Al confirmar de manera afirmativa, el equipo finaliza el proceso de posicionamiento y orientación mediante el método de estación libre.

Figura 10.31. *Definición de la orientación.*



Luego de esta operación, cada punto que se mida por taquimetría digital tendrá sus coordenadas en el mismo marco de referencia de los puntos fijos utilizados.

Algoritmo de cálculo

No es posible determinar qué tipo de algoritmos aplican los diferentes modelos de estación total para realizar el ajuste que resuelve el cálculo de una posición mediante estación libre. En general, al consultar los manuales de los instrumentos se menciona el uso de ajustes por mínimos cuadrados, pero no mucho más, ya que esta información forma parte de las patentes de los fabricantes.

Pero, a los fines didácticos y con el objeto de demostrar cómo funciona este procedimiento, se propone un ejemplo que se resolverá mediante una metodología que se adapta muy bien a este tipo de cálculos.

Se analiza únicamente en planimetría, pero puede extenderse el mismo planteo a la planialtimetría.

Contando con:

- Los puntos conocidos A (x_A, y_A) y B (x_B, y_B).

- Las medidas de distancia desde P a A ($\overline{PA}$) y P a B ($\overline{PB}$).
- La medida del ángulo θ ($A\hat{P}B$) entre las alineaciones PA y PB.

Se plantean las ecuaciones de distancia:

$$\overline{PA} = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}$$

La ecuación del ángulo θ ($A\hat{P}B$):

$$A\hat{P}B = arctan\left(\frac{y_P - y_B}{x_P - x_B}\right) - arctan\left(\frac{y_P - y_A}{x_P - x_A}\right)$$

Luego se define un vector de residuos (**V**) que describe las diferencias entre las medidas calculadas y las medidas observadas:

$$V = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} - PA \\ \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2} - PB \\ arctan\left(\frac{y_P - y_B}{x_P - x_B}\right) - arctan\left(\frac{y_P - y_A}{x_P - x_A}\right) - \theta \end{bmatrix}$$

Para obtener las coordenadas (x_P, y_P) que minimizan el vector de residuos (**V**), se utiliza el método de ajuste por mínimos cuadrados no lineales. Este método iterativamente ajusta los valores de (x_P, y_P) para minimizar la suma de los residuos cuadráticos.

A los fines de analizar y practicar este tipo de cálculo, es posible utilizar el lenguaje de programación en R, aplicando la función ´nls.lm´ para realizar el ajuste. La función nls.lm en R es una herramienta que permite realizar ajustes de modelos no lineales utilizando el algoritmo de mínimos cuadrados de Levenberg-Marquardt. Esta función se utiliza para encontrar los valores óptimos de los parámetros del modelo que minimizan la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores observados y los valores predichos por el modelo.

La función ´nls.lm´ se utiliza para ajustar modelos no lineales a datos. A diferencia de los modelos lineales, en los que la relación entre las variables dependientes e independientes es una combinación lineal de los parámetros, los modelos no lineales tienen relaciones más complejas.

El algoritmo de Levenberg-Marquardt es un método iterativo que combina las ventajas del método del gradiente descendente y el método de Gauss-Newton. Es particularmente efectivo para resolver problemas de mínimos cuadrados no lineales.

Después de ajustar el modelo de mínimos cuadrados no lineales utilizando ´nls.lm´, es posible obtener la matriz de covarianza de los parámetros estimados. Esta matriz proporciona las varianzas y covarianzas de las estimaciones de x_P, y_P.

A partir de las varianzas de las coordenadas de P es posible establecer si la calidad del resultado es apta para el trabajo que se está realizando.

Se plantea un ejemplo de cálculo con este algoritmo:

Ejemplo 10.2

Son conocidas las coordenadas XY de dos puntos:

- Punto A con coordenada X= 1696,33 y coordenadas Y= 478,30.
- Punto B coordenada X= 1483,53 y coordenadas Y= 768,65.

Desde un tercer punto llamado P se realizaron mediciones hacia A y hacia B.

Se midieron la distancia PA= 280,22 m y la distancia PB= 532,04 m. Estas distancias se midieron con una incertidumbre de medida de ±0,002 metros.

Además, fue medido el ángulo plano $A\hat{P}B$= 38º 55’ 07”. La incertidumbre de medida de este ángulo es ± 5”.

Se brinda a continuación el script para R que realiza el ajuste:

```
# Instalar y cargar las librerías necesarias (ejecutar solo una vez)
install.packages("minpack.lm")
install.packages("ggplot2")
install.packages("ellipse")
library(minpack.lm)
library(ggplot2)
library(ellipse)

# Definir las entradas
A <- c(1696.33, 478.30)
B <- c(1483.53, 768.65)
PA <- 280.22
PB <- 532.04
angle_deg <- 38 + 55/60 + 07/3600
sigma_dist <- 0.002
sigma_angle_sec <- 5

# Conversión de ángulo a radianes
angle_rad <- angle_deg * (pi / 180)
sigma_angle <- sigma_angle_sec / 3600 * (pi / 180)

# Función de error a minimizar
error_function <- function(params) {
  xP <- params[1]
  yP <- params[2]

  PA_calc <- sqrt((xP - A[1])^2 + (yP - A[2])^2)
  PB_calc <- sqrt((xP - B[1])^2 + (yP - B[2])^2)

  angle_calc <- atan2(B[2] - yP, B[1] - xP) - atan2(A[2] - yP, A[1] - xP)
```

```
  angle_calc <- (angle_calc + 2 * pi) %% (2 * pi)

  errors <- c(PA_calc - PA, PB_calc - PB, angle_calc - angle_rad)
  return(errors)
}

# Punto inicial para la solución
P_initial <- c(mean(c(A[1], B[1])), mean(c(A[2], B[2])))

# Ajuste por mínimos cuadrados no lineales
fit <- nls.lm(par = P_initial, fn = error_function)

# Coordenadas de P ajustadas
P <- coef(fit)

# Obtener la matriz de covarianza de los parámetros estimados
cov_matrix <- summary(fit)$cov.unscaled * sigma_dist^2

# Desviaciones estándar de las coordenadas de P
std_dev_P <- sqrt(diag(cov_matrix))
```

Los siguientes son los resultados obtenidos:

```
Nonlinear regression via the Levenberg-Marquardt algorithm
parameter estimates: 1548.03626814968, 240.53495308171
residual sum-of-squares: 2.774e-09
reason terminated: Conditions for `info = 1' and `info = 2' both hold.
> cov_matrix
              [,1]         [,2]
[1,]  1.728544e-05 -3.331661e-06
[2,] -3.331661e-06  2.987858e-06
> std_dev_P
[1] 0.004157576 0.001728542
```

La última parte corresponde a los resultados del ajuste, que se interpreta como:

x_P= 1548,036

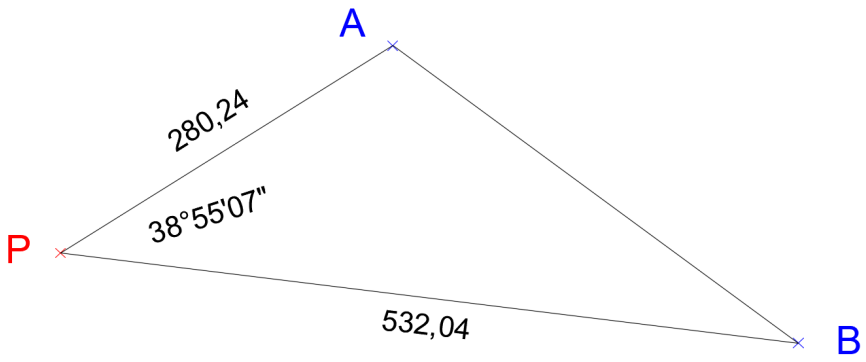
y_P= 240,534

s_x= 0,0041 m

s_y= 0,0017 m

La precisión obtenida para x fue de 4 mm y para y de casi 2 mm.

Figura 10.32. *Gráfico de los puntos A, B y P.*



Método de Pothenot Planialtimétrico

El método de Pothenot es ampliamente reconocido en el ámbito de la Topografía y cuenta con una extensa bibliografía que aborda su tratamiento. Sin embargo, existe una aplicación específica de este método que no ha sido suficientemente divulgada y que merece una atención más detallada.

A falta de otra denominación, se designará como “Pothenot Planialtimétrico” a esta alternativa. El desarrollo de este problema de la Topografía consiste en lo siguiente:

Datos: Dos puntos A y B de coordenadas XYZ conocidas, a los que es posible dirigir visuales.

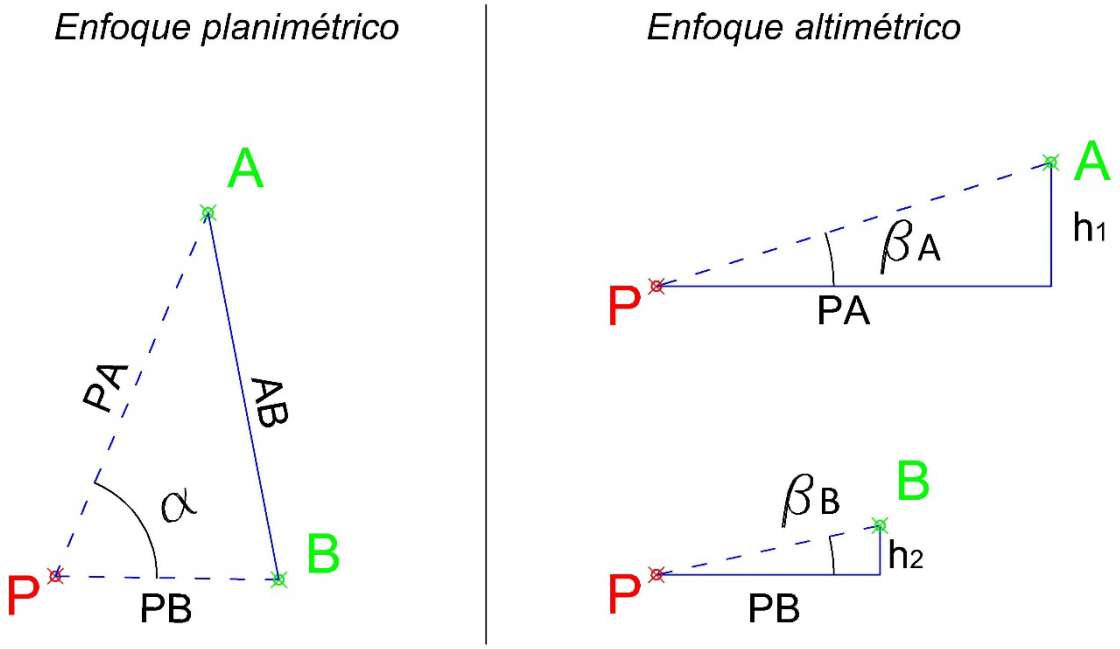
Mediciones: Desde un punto desconocido “P” se mide el ángulo horizontal (α) dado por la visuales PA y PB. También se miden los ángulos verticales (β_A y β_B) correspondientes a dichas visuales. No se mide ninguna distancia.

Incógnita: Las coordenadas XYZ del punto desconocido P.

Antes fue mencionado que para resolver la posición planimétrica de un punto mediante un método de intersección inversa, era necesario contar con al menos tres puntos conocidos si solamente se efectúan mediciones angulares (sin medir distancias). En el caso particular que aquí se analizará, se demostrará que es posible resolver la intersección inversa solamente con dos puntos conocidos si son conocidas las tres coordenadas XYZ de estos y se realizan mediciones angulares planimétricas y altimétricas.

En la figura 10.33 pueden ser apreciados los dos enfoques que deben realizarse del problema, el planimétrico y el altimétrico.

Figura 10.33. *Pothenot Planialtimétrico.*

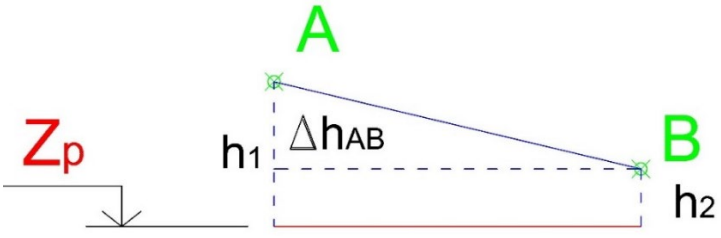


En la figura 10.33, parte izquierda, se aprecia el enfoque planimétrico de planteo, donde se muestran las proyecciones ortogonales de los tres puntos en un plano horizontal. También se indican las distancias reducidas al horizonte PA, PB y AB, junto con el ángulo horizontal α; todos estos elementos contenidos dentro del mismo plano horizontal.

En el sector derecho de la figura 10.33 se grafica el abordaje altimétrico del problema, donde se describen los dos ángulos verticales formados por las visuales a PA y PB respectivamente. En este análisis se involucran otros dos planos, ambos verticales, el primero que contiene a los puntos P y A, mientras que el segundo contiene a los puntos P y B.

Para alcanzar la solución planteada es necesario considerar un cuarto plano: el plano vertical que contiene a los puntos A y B simultáneamente. Este puede analizarse a partir de la figura 10.34.

Figura 10.34. *Plano vertical que contiene a los puntos dato A y B.*



Bajo las hipótesis de la Topografía, la línea de la plomada en un punto es paralela a la misma línea en cualquier otro punto, entonces, a partir de la figura 10.34 es posible plantear:

$$\Delta_h = Z_A - Z_B = h_1 - h_2$$

Donde:

Z_A: es la cota del punto A.

Z_B: es la cota del punto B.

h_1: es la altura del punto A respecto a P.

h2: es la altura del punto B respecto a P.

Δh: desnivel entre los puntos A y B (Δh_{AB}).

Lo que permite establecer las siguientes relaciones:

$$h_1 = h_2 + \Delta_h$$

$$h_2 = h_1 - \Delta_h$$

Trabajando con el triángulo plano de la figura 10.33 y aplicando el teorema del coseno se consigue la ecuación:

$$AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2\ AP\ BP\ \cos\alpha$$

A su vez, analizando los triángulos verticales que también se muestran en la figura 10.33 se pueden expresar las distancias horizontales AP y BP como:

$$PA = \frac{h_1}{\tan\beta_A}$$

$$PB = \frac{h_2}{\tan\beta_B} = \frac{h_1 - \Delta_h}{\tan\beta_B}$$

Por lo que la ecuación obtenida mediante el teorema del coseno puede ser rescrita como:

$$AB^2 = \left(\frac{h_1}{\tan\beta_A}\right)^2 + \left(\frac{h_1 - \Delta_h}{\tan\beta_B}\right)^2 - 2\left(\frac{h_1}{\tan\beta_A}\right)\left(\frac{h_1 - \Delta_h}{\tan\beta_B}\right)\cos\alpha$$

En la ecuación anterior la única incógnita es la variable h_1. Se puede trabajar con la ecuación y reescribirla de la siguiente manera:

$$AB^2 = \frac{{h_1}^2}{\tan^2\beta_A} + \frac{{h_1}^2}{\tan^2\beta_B} - \frac{2\ h_1\ \Delta_h}{\tan^2\beta_B} + \frac{{\Delta_h}^2}{\tan^2\beta_B} - \frac{2\ \cos\alpha}{\tan\beta_A\ \tan\beta_B}\ {h_1}^2 + \frac{2\ \cos\alpha}{\tan\beta_A\ \tan\beta_B}\ h_1\ \Delta_h$$

La solución de h1 se obtienen resolviendo la ecuación cuadrática:

$$A\ {h_1}^2 + B\ h_1 + C = 0$$

Donde:

$$A = \frac{1}{\tan^2\beta_A} + \frac{1}{\tan^2\beta_B} - \frac{2\ \cos\alpha}{\tan\beta_A\ \tan\beta_B}$$

$$B = -\frac{2\ \Delta_h}{\tan^2\beta_B} + \frac{2\ \Delta_h\cos\alpha}{\tan\beta_A\ \tan\beta_B}$$

$$C = \frac{{\Delta_h}^2}{\tan^2\beta_B} - AB^2$$

Al resolver la ecuación cuadrática se encontrarán dos soluciones para h_1, realizando el análisis correspondiente, uno de los valores será rechazado y el otro aceptado.

Una vez obtenido el valor de la altura h_1, podrá ser calculada la altura h_2. Con esos valores luego se calcularán las distancias PA y PB. En esa instancia, se tendrán del triángulo plano analizado las longitudes de sus tres lados y el ángulo $A\hat{P}B$, previamente medido, contando entonces con todos los elementos necesarios para calcular las coordenadas del punto P.

Se desarrolla a continuación el ejemplo 10.3 para ilustrar el caso estudiado.

Ejemplo 10.3

Son conocidas las coordenadas de los puntos A y B

X_A=1138,304	X_B=998,683
Y_A=558,069	Y_B=584,990
Z_A=91,341	Z_B=74,778

Se necesitan determinar las coordenadas del punto P. Para ello, desde una única estación se miden los ángulos:

Horizontal α= 68º 06’ 44”

Vertical β_A=10º 40’ 20”

Vertical β_B=7º 50’ 25”

Cálculos:

A partir de las coordenadas de los puntos A y B se calculan:

Distancia horizontal AB= 142,193 m

Azimut (AB)= 169º 05’ 11”

Δh= 16,563 m

Luego se calculan los términos A, B y C de la ecuación cuadrática:

Coeficiente A=52,1660

Coeficiente B=-1271,1642

Término constante C=-5750,5418

En los anteriores valores se utiliza un decimal más que en los datos para no cometer errores en el redondeo.

Al resolver la ecuación cuadrática se obtienen dos valores para h_1:

Solución 1 para h_1= 28,2674 m.

Solución 2 para h_1= -3,8997 m

Con la solución 2 se obtienen distancias PA y PB negativas, por lo tanto, esta solución se descarta. Por lo tanto, h_1= 28,267 m.

Se calculan los demás elementos:

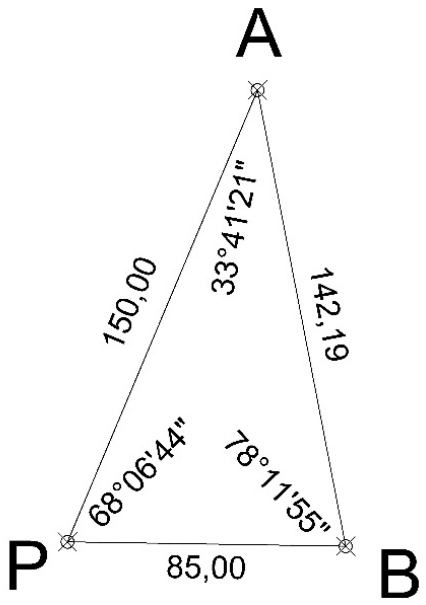
$$h_2 = h_1 - \Delta h = 28{,}267\ m - 16{,}563\ m = 11{,}704\ m$$

$$PA = \frac{28{,}267\ m}{\tan 10º\ 40'\ 20"} = 150{,}000\ m$$

$$PB = \frac{11{,}704\ m}{\tan 7º\ 50'\ 25"} = 85{,}000\ m$$

Continuando con el cálculo, mediante el teorema del coseno se calculan los ángulos $P\hat{B}A$ y $B\hat{A}P$ (figura 10.35).

Figura 10.35. *Triangulo plano del ejemplo 10.2.*



Ya determinados los ángulos en los vértices A y B, se calculan los acimutes:

$$(AP) = (AB) + B\hat{A}P = 202º\ 46'\ 32"$$

$$(BP) = (AB) + 180 - P\hat{B}A = 270º\ 53'\ 16"$$

Con las distancias y los acimutes pueden calcularse las proyecciones:

Δx_{AP}= -138,304 Δx_{BP}= 1,317

Δy_{AP}= -58,068 Δy_{BP}= -84,990

Se calculan las coordenadas XY desde A y desde B para tener un control, los valores obtenidos son:

X_P= 1000,00

Y_P= 500,00

Para obtener la coordenada Z o cota de P se calcula:

$$Z_P = Z_A - h_1 = 63{,}074 \text{ m}$$

Y se controla:

$$Z_P = Z_B - h_2 = 63{,}074 \text{ m}$$

Resultado:

X_P= 1000,00 m

Y_P= 500,00 m

Z_P= 63,074 m

Como complemento, a continuación, se proporciona el script de R utilizado para resolver la ecuación cuadrática, a partir de los datos de coordenadas y de las mediciones angulares:

```
# Coordenadas de A y B
Xa <- 1138.304
Ya <- 558.069
Za <- 91.341
```

```
Xb <- 998.683
Yb <- 584.990
Zb <- 74.778

# Calcular la distancia horizontal AB usando Pitágoras
AB <- sqrt((Xb - Xa)^2 + (Yb - Ya)^2)

# Convertir ángulos a radianes
deg_to_rad <- function(deg, min, sec) {
  return((deg + min / 60 + sec / 3600) * pi / 180)
}

# Ángulos conocidos
alpha <- deg_to_rad(68, 6, 44)  # Ángulo horizontal en radianes
beta_A <- deg_to_rad(10, 40, 20) # Ángulo vertical para PA
beta_B <- deg_to_rad(7, 50, 25)  # Ángulo vertical para PB

# Diferencia de altura entre A y B
delta_h <- Za - Zb

# Coeficientes de la ecuación cuadrática
A <- (1 / tan(beta_A))^2 + (1 / tan(beta_B))^2 - 2 * cos(alpha) / (tan(beta_A) * tan(beta_B))
B <- -2 * delta_h / (tan(beta_B))^2 + 2 * cos(alpha) * delta_h / (tan(beta_A) * tan(beta_B))
C <- (delta_h^2 / (tan(beta_B))^2) - AB^2

# Verificar el discriminante
discriminant <- B^2 - 4 * A * C

if (discriminant < 0) {
  cat("No hay solución real para h1 porque el discriminante es negativo.\n")
} else {
  # Resolviendo la ecuación cuadrática A*h1^2 + B*h1 + C = 0
  h1_solution <- (-B + sqrt(discriminant)) / (2 * A)
  h1_solution_2 <- (-B - sqrt(discriminant)) / (2 * A)

  # Imprimir las soluciones
  cat("Solución h1 (primera raíz):", h1_solution, "\n")
  cat("Solución h1 (segunda raíz):", h1_solution_2, "\n")
}
```

Referencias

GHILANI, Charles D. y WOLF, Paul R. (2006). *Adjustment Computations Spatial Data*. John Wiley & Sons, Inc.

SPECTRA PRECISION. 2014. *Guía de usuario - Estación total Spectra Precision serie Focus 2*.

VALDÉS DOMÉNECH, Francisco (1982). *Aparatos Topográficos*. Ediciones CEAC.

WOLF, Paul y GHILANI Charles (2016). *Topografía*. Alfaomega.

Autores

Romano, Roberto José

Ingeniero Agrimensor de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (FI UNLP). Magister en Geomática (UNLP), 2024. Prof. Titular Ordinario de las cátedras Topografía I y II (2025), Prof. Adjunto Ordinario de la cátedra Fundamentos de Instrumental (2017), de la carrera de Ing. Agrimensor de la FI UNLP. Desde 2016 dedicado a la investigación en la temática de Metrología aplicada a las mediciones topogeodésicas. Publicaciones recientes: “Tesis: Diseño e implementación de una base de calibración para distanciómetros electroópticos de uso en Topografía” (2024), “Evaluación de una línea base de 5 pilares para calibración de equipos MED” (2023), “Implementación de un procedimiento de ensayo y verificación de receptores GNSS RTK” (2022). A su vez, desde 2012: Profesional independiente dedicado al ejercicio de la Agrimensura.

Quispe Gutierrez, Liliana Teresa

Ingeniera Agrimensora recibida en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (2017). Ayudante Diplomado Interino en la cátedra Topografía (2020) de la carrera de Ingeniería Civil e Ingeniería Hidráulica. En la carrera de Ingeniería de Agrimensura: Ayudante Diplomado Interino en las cátedras Dibujo topográfico y Agrología e Información Rural (2019), y Ayudante Diplomado Suplente en las cátedras Fotointerpretación y Percepción Remota (2018). Desde el año 2017 desarrolla actividades en el ámbito profesional. De forma independiente en diferentes tareas relacionadas al Catastro y a la Topografía. También en relación de dependencia en un organismo estatal provincial, centradas en el ámbito de la Agrimensura. Presentación de Ponencia: Análisis Multi-Temporal de información cartográfica en una sub-cuenca del arroyo Maldonado (Hotel TRYP Habana Libre, La Habana, Cuba-Año 2017).

Paús, Pablo Sebastián

Ingeniero en Electrónica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (1995). Prof. Adjunto Interino de “Instrumental y Técnicas Especiales” de la carrera Ing. Agrimensor, JTP de “Proyecto Integrador Electrónica” y “Tesina de Grado Electrónica” de la carrera de Ing. Electrónica. Desde 2006 dedicado a la investigación en la temática de Metrología aplicada a las mediciones topogeodésicas y a la realización de ensayos de control metrológico de instrumental en el Grupo de Trabajo en Metrología, Dpto. Agrimensura FI-UNLP. Publicaciones recientes: “Evaluación de una línea base de 5 pilares para calibración de equipos MED” Revista GEOACTA (2023); “Avances en la aplicación de la norma ISO 17.123 para la verificación de instrumental topogeodésico” Ed. FI-UNLP; “Implementación de un procedimiento de ensayo y verificación de receptores GNSS RTK” Ed. Científica UNCA (2022).

Libros de Cátedra

Romano, Roberto José
Levantamientos topográficos con estación total / Roberto José Romano ; Liliana Teresa Quispe Gutiérrez ; Pablo Sebastián Paús. - 1a ed. - La Plata : Universidad Nacional de La Plata ; La Plata : EDULP, 2026.
Libro digital, PDF - (Libros de cátedra)

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-950-34-2687-6

1. Enseñanza. 2. Agrimensura. I. Quispe Gutiérrez, Liliana Teresa II. Paús, Pablo Sebastián III. Título
CDD 333.08

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata
48 N.° 551-599 / La Plata B1900AMX / Buenos Aires, Argentina
+54 221 644 7150
edulp.editorial@gmail.com
www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2026
ISBN 978-950-34-2687-6
© 2026 - Edulp

exactas

Edulp
EDITORIAL DE LA UNLP

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA