

Libros de **Cátedra**

# Elementos de diseño óptimo

Omar A. Iglesias  
Carmen N. Paniagua

FACULTAD DE  
INGENIERÍA

**e**  
exactas



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

# ELEMENTOS DE DISEÑO ÓPTIMO

*Omar A. Iglesias*  
*Carmen N. Paniagua*



2014

En el prólogo a un libro anterior de estos mismos autores, el Ing. Miguel De Santiago indicaba que “El proceso evolutivo de las ingenierías se ha nutrido de tres vertientes: 1) el progreso del conocimiento en las ciencias que aplica cada especialidad de la ingeniería; 2) la innovación y desarrollo de los métodos y procedimientos de construcción de maquinarias, estructuras y procesos; y 3) el progreso de los métodos y procedimientos de cálculo y de diseño.” Al igual que la anterior, esta obra se inserta en este último ítem.

A lo largo de la misma, los autores, que tienen una extensa trayectoria docente en la temática, siempre trabajando en cursos superiores de la carrera de Ingeniería Química, abordan, desde un punto de vista sistémico, el diseño de plantas de proceso.

Como se muestra en la obra, la alternativa de diseño no es única, sino que son muchos los caminos que pueden conducir a una solución factible. Entonces, la premisa es intentar establecer el camino óptimo a seguir para encontrar la mejor alternativa de diseño, aquella que lleve a la mejor solución en función de un objetivo propuesto.

En los distintos capítulos se desarrollan, a través de ejemplos concretos, las herramientas metodológicas utilizadas para esquematizar un proceso y luego proceder a su optimización. En este sentido, se presentan casos típicos de diseño: redes de intercambio térmico, integración energética, redes de intercambio de masa, trenes de columnas de destilación, entre otros. Los ejemplos permiten al lector analizar, de manera clara y fluida, las distintas alternativas de optimización a considerar para alcanzar el objetivo propuesto en cada caso. Asimismo, en los distintos capítulos, los autores presentan numerosos complementos específicos para planilla de cálculo, desarrollados a lo largo de su trayectoria docente.

En los últimos capítulos, sin ser éste un libro de modelado matemático estricto, se discuten cuestiones ya propias de las técnicas de optimización (entre otras, selección de variables independientes, iteración, convergencia, métodos Simplex y Complex, Programación Lineal).

En consecuencia, entiendo que esta obra no sólo será la bibliografía básica de los cursos de Diseño Óptimo del último año de la carrera de Ingeniería Química, sino que permitirá a profesionales o estudiantes de otras especialidades de la Ingeniería o carreras afines un acercamiento ameno a la problemática planteada.

Dra. Viviana O. Salvadori  
La Plata, 30 de mayo 2014

# ÍNDICE

<b>Prólogo</b>	1
<b>Capítulo 1. La cuestión del diseño en Ingeniería Química</b>	4
Bibliografía	9
<b>Capítulo 2. Síntesis de esquemas de proceso</b>	10
Idea básica del problema	10
Estrategia por descomposición	12
Búsqueda heurística	14
Técnicas evolutivas	18
Optimización global	22
Bibliografía	23
<b>Capítulo 3. Síntesis de redes de intercambio térmico. Método Pinch</b>	24
Introducción	24
Problema demostrativo	25
Consideraciones y herramientas básicas	26
Curvas Compuestas	29
Aproximación mínima óptima	34
Tabla del Problema y Cascada de Calor	39
Método Pinch	44
Mejoramiento de la estructura	53
Análisis de ciclos	56
Complemento SinRed	61
Bibliografía	63
Propuestas de trabajo	64
<b>Capítulo 4. Integración energética. Extensiones del Método Pinch</b>	66
Introducción	66
Gran Curva Compuesta	66
Integración de columnas de destilación	69
Integración de evaporadores	75
Integración de máquinas térmicas y bombas de calor	79
Complemento IntegCol	83

Complemento IntegEvap	85
Bibliografía	86
Propuestas de trabajo	87
<b>Capítulo 5. Síntesis de redes de intercambio de masa. Método Pinch</b>	89
Consideraciones generales	89
Análisis de un caso	94
Determinación del punto Pinch y consumos mínimos	97
Aplicación del método Pinch	102
Bibliografía	107
Propuesta de trabajo	108
<b>Capítulo 6. Estructuración de trenes de columnas de destilación</b>	109
Introducción	109
Estrategias heurísticas de estructuración	112
Costo total anual para una columna de destilación simple	116
Funciones de evaluación para estructurar trenes de columnas	118
Método ROTE	119
Método de Vapores Marginales	122
Estructuración por Programación Dinámica	125
Complemento HendHugh	130
Bibliografía	131
Propuestas de trabajo	133
<b>Capítulo 7. Formulación del problema y ordenamiento del cálculo</b>	134
Consideraciones generales	134
Ordenamiento de cálculo para sistemas de ecuaciones	137
Una consideración conceptual	149
Sistemas con reciclo persistente (Esquemas iterativos)	152
Métodos promotores de convergencia	157
Eliminación del ciclo iterativo por reformulación del problema	167
Bibliografía	170
Propuestas de trabajo	171
<b>Capítulo 8. Métodos de optimización</b>	174
La búsqueda de un óptimo	174

Métodos para problemas de una variable	176
El método del Número de Oro	178
Métodos para problemas de dos o más variables	187
El método Simplex de Spendley, Hext y Himsworth (SHH)	188
Técnicas de Penalización	190
El método Complex	192
Optimización por aproximaciones sucesivas	198
El complemento Solver	209
Bibliografía	212
Propuestas de trabajo	213
<b>Capítulo 9. Programación Lineal</b>	<b>215</b>
Introducción	215
Formulación del problema de programación lineal	219
Presentación del problema	220
Caracterización de las soluciones	223
Método Simplex de Dantzig	226
El origen de coordenadas no es solución posible	231
Tratamiento de las ecuaciones de diseño	235
Sensibilidad Paramétrica	237
Caso I. Análisis gráfico de la modificación del término independiente de una restricción	238
Caso II. Análisis gráfico de la modificación de un coeficiente de la función objetivo	240
Resolución del problema original en una planilla de cálculo	242
Información de post optimalidad. Informe de Respuesta	243
Información de post optimalidad. Informe de sensibilidad	244
Problema de Transporte	247
Modelo de Transbordo	250
Bibliografía	251
Propuestas de trabajo	253
<b>Capítulo 10. Síntesis de redes de intercambio térmico. Método de Transbordo</b>	<b>255</b>

Introducción	255
Presentación del caso	255
Determinación de los intervalos de temperatura	256
Planteo del Modelo de Transbordo	258
Mínimo costo en el consumo de servicios	261
Cascada Expandida	262
Intercambios no permitidos	266
Mínimo número de equipos de transferencia	267
Complemento Transbordo	271
Bibliografía	272
Propuesta de trabajo	274
<b>Capítulo 11. Síntesis de redes de intercambio de masa. Método de Transbordo</b>	275
Consideraciones generales	275
Análisis de un caso	278
Uso de la Cascada Expandida	283
Complemento InteProc	290
Bibliografía	291
Propuesta de trabajo	292
<b>Capítulo 12. Programación Dinámica</b>	293
Conceptos básicos de Programación Dinámica	293
Estrategia básica	295
Ejemplos demostrativos	299
Programación Dinámica con variables discretas	305
Tratamiento aproximado: diagrama de rutas equivalente	309
Programación Dinámica en sistemas ramificados	314
Problemas de cálculo en Programación Dinámica	320
Bibliografía	325
Propuestas de trabajo	327
<b>Capítulo 13. Planificación de tareas. Determinación del Camino Crítico</b>	331
Conceptos básicos	331
Grafo y Camino Crítico	332

Determinación del tiempo de la tarea	337
Diagrama de Gantt	338
Bibliografía	339
Propuestas de trabajo	340
<b>Capítulo 14. Ordenamiento de cálculo y optimización en simuladores modulares</b>	<b>342</b>
Tipos de simuladores de procesos	342
Características básicas de los simuladores modulares	345
El conjunto de corte	349
Generación de la matriz de ciclos y arcos	352
Selección del conjunto de corte	354
Convergencia y optimización en simuladores modulares	357
Bibliografía	358
Propuestas de trabajo	359
<b>Capítulo 15. Diseño óptimo bajo incertidumbre</b>	<b>360</b>
Fundamentos del problema	360
Influencia de la incertidumbre en el análisis del problema	362
Consideraciones básicas de la Teoría de Decisión	368
Metodologías de solución	371
Bibliografía	379
Propuestas de trabajo	380
<b>Capítulo 16. Diseño de plantas multiproducto</b>	<b>383</b>
Consideraciones generales	383
Incrementando la eficiencia de la planta	388
Dimensionado de equipos en plantas discontinuas	390
Dimensiones del almacenamiento	395
Diseño de plantas con campañas de producto único	397
Diseño de plantas con etapas de equipos únicos. Tamaños continuos	399
Diseño de plantas con etapas de equipos en paralelo. Tamaños continuos	400
Diseño de plantas con etapas de equipos únicos. Tamaños discretos	402
Complemento Dis_Batch	405



Bibliografía	406
Propuesta de trabajo	407
<b>Capítulo 17. Programación de la producción en plantas multiproducto</b>	409
Consideraciones generales	409
Programación de la producción	411
La formulación bajo la técnica PLEM	415
Tratamiento por Desarrollo y Acotamiento.	417
Tratamiento por procedimientos heurísticos	422
Complemento KuKarimi	426
Bibliografía	427
Propuestas de trabajo	428
<b>Capítulo 18. Seguridad y confiabilidad: los sistemas en falla</b>	430
Las fallas y su tratamiento estadístico	430
Análisis de fallas en sistemas de protección	434
Confiabilidad de sistemas	441
Bibliografía	451
Propuestas de trabajo	453
<b>ANEXO A. Tutoría del complemento SinRed.xla</b>	455
Objetivo	455
Enunciado del problema	455
Primera operación: Nuevo Problema	456
Ingreso de los datos	457
Generar Curvas Compuestas	458
Calcular Aproximación Mínima Óptima	459
Síntesis de la red	459
Resolución del bloque caliente	460
Resolución del bloque frío	461
Hoja Resultados	463
<b>ANEXO B. Tutoría del complemento Transbordo.xla</b>	465
Objetivo	465
Enunciado del problema	465
Incorporación del problema en la planilla	466

Ingreso de los datos	467
Ingreso de Intercambios no Permitidos	467
Dibujar Cascada	469
Generar Modelo: Mínimo Número de Equipos	469
Resolver el modelo	471
<b>ANEXO C. Tutoría del complemento InteProc.xla</b>	<b>473</b>
Objetivo	473
A) Red de intercambio térmico	473
Enunciado del problema	473
Incorporación del problema en la planilla	474
Ingreso de los datos	475
Intercambios no permitidos	478
Dibujar Cascada	480
Definir Modelo: Mínimo costo de servicios auxiliares	480
Resolver el modelo	482
B) Red de intercambio másico	483
Enunciado del problema	483
B1) Red de intercambio másico: Mínimo costo en el uso de agentes externos	484
Incorporación del problema en la planilla. Ingreso de datos	484
Definición del modelo	485
Resolver el modelo	487
B2) Red de intercambio másico: Mínimo número de equipos	488
Construcción del modelo	488
Resolver el modelo	490
<b>Índice temático</b>	<b>491</b>
<b>Los autores</b>	<b>493</b>

# PRÓLOGO

El objetivo perseguido con la escritura de este libro ha sido recopilar ordenadamente la experiencia docente de muchos años de dictado de los temas de Diseño Óptimo, asignatura que, con diferentes nombres, ha formado parte de las materias del último año de la carrera de Ingeniería Química en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata.

A lo largo de ese período ha ido variando la temática abordada, preservando siempre el objetivo básico que tuvo desde su origen: constituir una herramienta de análisis y resolución de problemas de la Ingeniería Química.

Una concepción liminar fue avanzar por sobre los enfoques clásicos de las ingenierías de las operaciones físicas y las reacciones químicas, aportando una visión sistémica de los procesos, con elementos interactuantes en el funcionamiento y grados de libertad en el diseño.

Este sentido instrumental hizo que fuese menguando la amplitud del tratamiento matemático para ganar consideración en los aspectos conceptuales.

No se trata, en resumen, de un curso de cálculo numérico aplicado a problemas de ingeniería sino de una vía de resolución del diseño de plantas de proceso.

Como se verá en el capítulo 1, esto aminora la significación de algunas consideraciones de índole matemática, típicas en el tratamiento de muchas de las técnicas que se utilizan.

Allí también se podrá advertir la formulación de una suerte de “hoja de ruta” para los problemas de diseño que se pretenden abordar, la que comienza por estructurar un esquema de proceso, un *flowsheet*, como se suele llamar, tema al que se han de referir los capítulos 2 a 6 y, con la aplicación de una técnica especial, el 10 y el 11.

Ese esquema tendrá una determinada formulación matemática, coherente con los principios expuestos en las asignaturas de los años previos, la que, por primera vez en los problemas que abordan los alumnos, tiene infinitas soluciones, en virtud de la existencia de grados de libertad.

En el capítulo 7 se presentan técnicas para efectuar la selección, en ese modelo matemático, de las variables independientes, de modo de estructurar el cálculo de la mejor manera posible.

En los capítulos 8, 9, 12 y 13 se consideran distintas metodologías de optimización, algunas de aplicación general y otras específicas para determinados tipos de problemas, que permiten encontrar los valores adecuados para esas variables independientes.

Como un enfoque especial de lo considerado anteriormente, en el capítulo 14 se tiene una ligera aproximación al ordenamiento de cálculo y optimización del diseño utilizando simuladores modulares de proceso, un tema cuyo tratamiento en detalle excede los alcances de este libro.

Por fin, en el capítulo 15 se introduce la consideración de la influencia, sobre el diseño de una unidad de proceso, de la incertidumbre en la información que se dispone en el momento de realizar los cálculos.

Todo lo anterior, como se expone en el capítulo 1, constituye lo que los autores consideran el tronco temático principal de Diseño Óptimo.

Se han querido abordar, también, algunas cuestiones complementarias pero cuyo análisis aporta una visión más amplia de la problemática asociada al diseño de unidades de proceso.

En los capítulos 16 y 17 se analizan, en una forma muy somera, algunos aspectos vinculados con el diseño y la programación de plantas de proceso discontinuo o batch, cuyas características resultan algo diferentes de las unidades de funcionamiento continuo, que son a las que se refieren los restantes tópicos del libro.

Por último, el tema que se trata en el capítulo 18, seguridad y confiabilidad de sistemas, se relaciona con el diseño adecuado de sistemas cuyos componentes pueden fallar en su funcionamiento, circunstancia habitual en una planta de proceso.

Dado que, como ámbito de trabajo para las actividades de aplicación en los temas de Diseño Óptimo, se ha elegido la planilla de cálculo, en varios capítulos del libro se incluyen descripciones de complementos para esa utilidad, la mayoría de ellos desarrollados por los autores, que permiten abordar la resolución de problemas de cierta complejidad.

No se puede concluir este prólogo sin agradecer a todos los alumnos que, a lo largo de los años, han soportado estoicamente el desarrollo temático de la asignatura, su estructuración pedagógica y la resolución de los problemas de aplicación, mucho de los cuales, en su actual estadio evolutivo, figuran como final de capítulo.

La Plata, marzo de 2014

# CAPITULO 1

## LA CUESTIÓN DEL DISEÑO EN INGENIERÍA QUÍMICA

En el proceso de formación de un Ingeniero Químico es preciso abordar, en algún momento, el diseño de plantas de proceso desde un punto de vista sistémico. Por supuesto, que la consideración de una planta como un sistema de elementos interactuantes debe estar precedida del análisis pormenorizado de cada uno de esos elementos, por lo cual, es lógico que se ubique en la fase final del proceso.

Antes, se ha considerado el funcionamiento y cálculo de intercambiadores de calor, reactores y columnas de separación, en forma aislada y contando con la información necesaria para resolver el diseño.

Al considerar la planta, el equipo de intercambio, por ejemplo, precalienta la corriente de alimentación al reactor, cuya salida se procesa en una columna para separar los productos de los reactivos no reaccionados, los que, a su vez, se reciclan para mezclarse con la alimentación fresca.

Pero este enfoque sistémico no se trata tan sólo de una modificación del punto de vista. A diferencia de lo que sucedía cuando se analizaban por separado los distintos elementos, no toda la información que se requiere para su diseño está disponible.

Puede ser que haya variables cuyo valor no está definido o bien, lo que resulta equivalente en términos matemáticos, que se conozca sólo el rango admisible para alguna de ellas.

En todo caso, se tendrá, como modelo, un sistema con un número mayor de incógnitas que de ecuaciones, esto es, en el diseño existirán *grados de libertad*.

En esta situación, el número de soluciones es, algebraicamente, infinito o, en términos técnicos, extremadamente grande, lo que plantea un dilema al requerirse una respuesta concreta para el diseño.

Abordar esta cuestión y resolverla es el objetivo de este libro. La vía de ataque elegida es *tratar de proponer, en tiempos razonables, la mejor alternativa de diseño en un determinado sentido.*

Queda claro, entonces, que la solución elegida es dependiente del objetivo que se persigue; que el sistema resultante no será el mismo si lo que se pretende es minimizar la inversión para construirlo o el consumo de vapor que requiere su operación.

Si bien para realizar un eficiente proceso de búsqueda de la mejor alternativa se hará uso de técnicas matemáticas de optimización, nunca se debe dejar de considerar la cuestión que la motiva: *se trata de resolver un problema de diseño*, por lo que ciertas consideraciones teóricas han de pasar a un segundo plano.

Entre ellas, la propia consideración del óptimo. En otros términos: ¿se puede demostrar que la solución encontrada es la mejor posible?

En un plano estrictamente matemático, la respuesta es negativa. Pero, desde un punto de vista técnico, se ha podido resolver un problema de diseño que, en principio, tenía infinitas soluciones, eligiendo una de ellas, ciertamente mejor que muchas otras.

En la búsqueda de esa solución se debe graduar el esfuerzo que implica realizarla, seleccionando una técnica adecuada, para aplicarla a un modelo matemático del sistema a diseñar coherente con los objetivos propuestos.

¿Qué debe entenderse por coherencia con los objetivos? El sistema a diseñar estará representado por un conjunto de relaciones entre las variables del proceso: balances de calor, de energía, expresiones termodinámicas y fisicoquímicas, recomendaciones de fabricantes, etc. Muchas de ellas han de admitir formulaciones con distinto grado de aproximación a la realidad, tanto más complejas cuanto mayor sea el nivel de detalle con el que la representan.

Supóngase que ese diseño involucra a un intercambiador de calor de tubos y camisa, para el que se admitirá un valor típico del coeficiente global de

transferencia de calor  $U$ , y donde el objetivo perseguido es minimizar la inversión que demandará el sistema.

Si para ese equipo se tiene una estimación de su costo del tipo  $I_0 A_i^b$ , siendo  $A_i$  el área global de intercambio, carece de sentido modelarlo teniendo en cuenta el número de tubos y el diámetro externo y la longitud de los mismos.

Obviamente, esto excluye situaciones en donde el cálculo requiera de alguno de estos valores, como sería el caso de pretender realizar el cómputo de los coeficientes peliculares, con la finalidad de estimar, con mayor precisión, el valor de  $U$ .

*En definitiva, el diseño de un sistema se ha de concretar escogiendo aquella alternativa que mejor cumpla con un determinado objetivo, búsqueda que será llevada a cabo por aplicación de una eficiente técnica de optimización, sobre un modelo matemático adecuado.*

La génesis de cualquier diseño comienza por lo que Douglas denomina un *problema primitivo*, un planteo algo impreciso, casi una explicitación de intenciones, con escasas especificaciones técnicas.

Podría ser, por ejemplo, el interés de poder cubrir la demanda insatisfecha de un determinado producto.

La primera cuestión que debe resolverse es la materia prima a utilizar y, en el caso de que exista más de una posibilidad, cual de ellas ofrece una mejor perspectiva.

A continuación deberá definirse un esquema de proceso básico, el que se irá enriqueciendo con alternativas para las diferentes partes que lo integran.

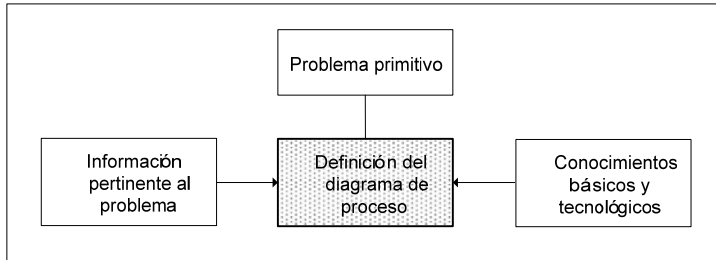
En cada caso, se han de poder definir las condiciones de diseño, los valores de composición, caudales, temperatura, presión,...

Así siguiendo, la cuestión se irá haciendo cada vez más compleja, con revisiones y replanteos permanentes, hasta llegar a completar la ingeniería básica primero y la de detalle después, para, por fin, en algún momento, en una determinada localización, proceder a la puesta en marcha de la planta.

La secuencia descrita está fuera de los alcances de este libro, por lo que se ha preferido abordar problemas primitivos de menor envergadura, pero que conservan algunas de las características mencionadas.



Se han de considerar problemas tales como la estructuración de redes de intercambio térmico, integraciones energéticas entre distintas unidades de proceso, estructuración de esquemas de intercambio de masa en la remoción de contaminantes en efluentes de proceso o selección de trenes de columnas de destilación.



**Figura 1.** Primera fase del diseño

En todos los casos se podrá advertir un flujo de información del tipo que se muestra en la figura 1: la definición del diagrama de proceso que permite

resolver el problema primitivo planteado resulta de la concurrencia de información sobre el mismo (especificaciones a conseguir con la integración energética, por ejemplo) y los conocimientos sobre los medios disponibles (tipos de intercambiadores, servicios auxiliares, etc.)

Una vez que se disponga de un esquema tecnológico, el mismo deberá ser “modelizado” matemáticamente, haciendo uso de balances de energía y materia y otras relaciones funcionales de estricto cumplimiento, lo que determina un conjunto de ecuaciones, o *relaciones de diseño*, con un número de incógnitas mayor al de las funcionalidades del conjunto, lo que determina la existencia de grados de libertad en el modelo.

Asimismo, deberán quedar explicitados los límites que deben respetar las variables, *restricciones* que pueden surgir de la teoría o estar aconsejadas por la práctica.

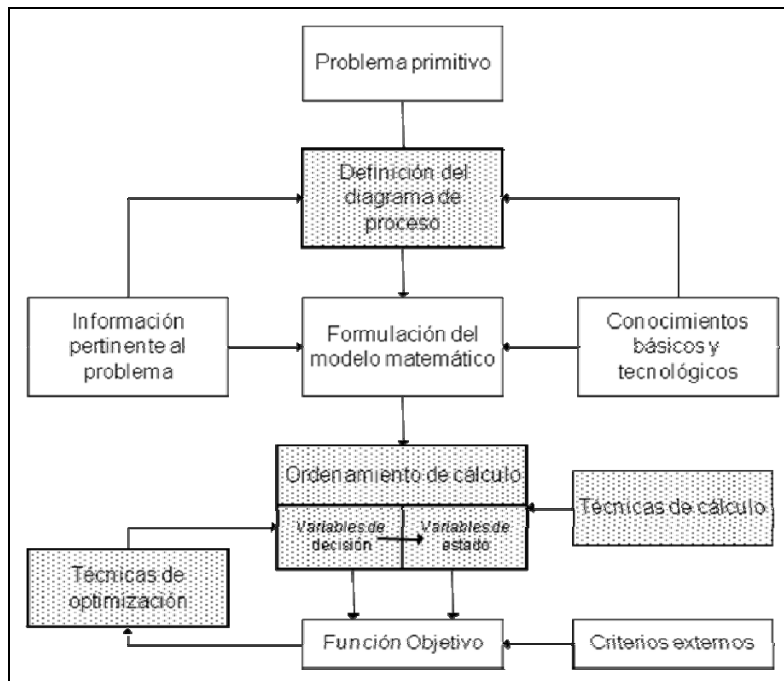
En el proceso de diseño, sobre este modelo construido para el sistema, se habrán de distinguir las variables consideradas *independientes o de diseño* de aquellas que, como consecuencia, resultan *dependientes o de estado*. Los valores que puedan tomar las primeras quedan libres, aunque siempre sujetos al cumplimiento de las restricciones, en tanto que los de las segundas serán conseguidos por cálculo.

En su momento se verá que existen ciertos criterios para realizar la mejor asignación del rol a una determinada variable, decisión o estado, en el trabajo con el modelo durante la búsqueda de la mejor alternativa de diseño.

Toda vez que se les asignen valores a las variables independientes, podrán conocerse los de las de estado, esto es, la totalidad de las incógnitas, con lo cual se estará en condiciones de calcular la función objetivo que haya propuesto para resolver el problema de diseño.

Obviamente que el cálculo de las variables de estado, no obstante haber elegido el conjunto de decisión más adecuado, puede implicar cierta complejidad algebraica, por las dificultades inherentes a las ecuaciones involucradas. Esto obligará a utilizar técnicas de cálculo numérico más o menos complejas.

El proceso de búsqueda de la mejor alternativa consiste en reiterar lo esbozado en el párrafo anterior para distintos conjuntos de valores admisibles para las variables de decisión.



**Figura 2.** Fase de optimización

La concreción de este proceso se lleva a cabo utilizando una determinada técnica de optimización, la más adecuada para el problema que se está considerando. La figura 2 resume todo lo expresado hasta este punto.

Será necesario considerar, por fin, el uso, en el proceso de

cálculo, de cierta información parcialmente conocida, esto es, tener en cuenta la *incertidumbre* en los datos que se manejan en el modelo.

Volviendo al ya mencionado ejemplo del intercambiador, cuando se pretende calcular el coeficiente de transferencia  $U$  a partir de los coeficientes peliculares  $h_c$  y  $h_t$ , se debe admitir que las correlaciones que permiten el cálculo de estos últimos son expresiones de naturaleza estadística, que arrojan los valores más probables y que tienen, necesariamente, un rango de variación.

El valor real de  $U$  será conocido cuando el equipo está construido y en funcionamiento, lo que obliga a tomar ciertos recaudos en el momento de su diseño.

Al tomar en cuenta todas las incertidumbres asociadas al problema de diseño planteado, se verán afectadas la mayoría de las instancias representadas en la figura 2, con las exclusiones obvias de la definición del problema primitivo y del diagrama de proceso adoptado.

Un caso especial de todo lo hasta aquí expuesto lo constituye el uso de simuladores de proceso para el análisis de la estructura, el dimensionado de los equipos y la definición de las condiciones de proceso. En la mayor parte de los programas disponibles, el modelo matemático con el que se deberá trabajar se construye mediante la conexión de diferentes módulos predefinidos, lo que determina consideraciones especiales tanto en el ordenamiento del cálculo como en el mismo proceso de optimización.

## **Bibliografía**

- Douglas J.M.; "Conceptual Design of Chemical Processes"; McGraw Hill, 1988.

## CAPÍTULO 2

### SÍNTESIS DE ESQUEMAS DE PROCESOS

#### Idea básica del problema

Con la expresión *síntesis de proceso* se pretende abarcar las cuestiones atinentes a la definición estructural de un esquema tecnológico, a través del cual se alcanzan metas prefijadas dentro de determinadas condiciones de contorno (marco referencial).

En este contexto, el término *síntesis* es considerado desde el punto de vista filosófico, una operación donde, a partir de nociones o elementos simples, se alcanzan otros de mayor complejidad. Constituye la actitud opuesta al *análisis*, en la medida de que éste implica la separación de un todo en sus partes constitutivas, hasta llegar a los principios fundamentales.

En el campo específico del diseño, el concepto involucra tanto el proceso de definición estructural como el esquema que resulta a consecuencia del mismo.

En el desarrollo histórico de la Ingeniería Química, ámbito al cual se habrá de restringir, temáticamente, este capítulo, la actitud analítica dominó la escena desde sus comienzos hasta la década de los sesenta. Hay un movimiento que fluye desde la visión globalizadora de la Química Industrial hacia la dimensión microscópica de los Fenómenos de Transporte.

Pero en la segunda mitad del siglo XX se produce una conjunción que permite el surgimiento del enfoque sintético. Por una parte, el desarrollo analítico otorga una base sólida de conocimientos sobre los diferentes equipos que pueden formar parte integrante de un proceso, así como una metodología de análisis que permite estudiar sus comportamientos bajo diferentes circunstancias.

A esto debe sumarse la revolución informática que se consolida y alcanza amplia difusión en forma más o menos contemporánea. No se trata aquí sólo de la irrupción en el mercado de dispositivos de bajo costo con cada vez mayor capacidad y velocidad de cálculo, sino también del desarrollo, estrechamente vinculado con lo anterior, de disciplinas que, como en el caso de la Inteligencia Artificial, permiten comenzar a abordar cuestiones de alta complejidad conceptual.

En lo que se refiere a la síntesis de procesos, esto último resulta crucial, en razón del problema dimensional que surge en la definición de una estructura tecnológicamente apta para resolver un determinado problema, una cuestión de evidente naturaleza combinatoria.

De hecho, en la síntesis de un esquema de proceso existen dos cuestiones, jerárquicamente relacionadas, cada una de las cuales pueden ser visualizadas como una búsqueda dentro de un espacio multidimensional.

En una primera instancia, debe verificarse una exploración del *universo de configuraciones posibles*, en base al análisis de la naturaleza de los eventuales componentes de ese proceso así como de las interrelaciones que, necesariamente, tendrán lugar entre ellos.

Relacionada con cada una de esas configuraciones aparecerá, en una segunda instancia, la búsqueda dentro del *espacio de especificaciones de la configuración*, esto es, habrá que determinar las dimensiones físicas y condiciones operativas para cada uno de los componentes del esquema de proceso.

El problema de síntesis define claramente la búsqueda de un esquema de proceso (una de las tantas *configuraciones posibles* para el problema) y, además, las condiciones operativas más adecuadas para el esquema adoptado (*especificaciones de la configuración*).

En razón de que no preexiste un equipo o dispositivo capaz de resolver, por sí solo, la cuestión, se deberá hacer uso de una combinación, viable desde el punto de vista termodinámico, de componentes elementales (intercambiadores de calor, calentadores y enfriadores) que involucran tanto a las corrientes de

proceso como a los servicios auxiliares, los que han de sufrir un cierto "recorrido" por los distintos elementos.

Para cada una de las configuraciones que puedan imaginarse habrá que definir los caudales que ingresan a los equipos, las dimensiones de los mismos, las temperaturas de entrada y salida, etcétera.

Resulta obvio que esta doble búsqueda requiere de la aplicación de herramientas metodológicas idóneas, que permitan abordar la cuestión eficaz y eficientemente.

Es posible agrupar el conjunto de estas herramientas, de acuerdo al principio estratégico elemental en que se basan, dentro de cuatro grandes categorías:

- Estrategia por descomposición
- Búsqueda heurística
- Técnicas evolutivas
- Optimización global

si bien es muy poco frecuente encontrar algún método que utilice, con exclusividad, una cualquiera de ellas en estado "químicamente puro".

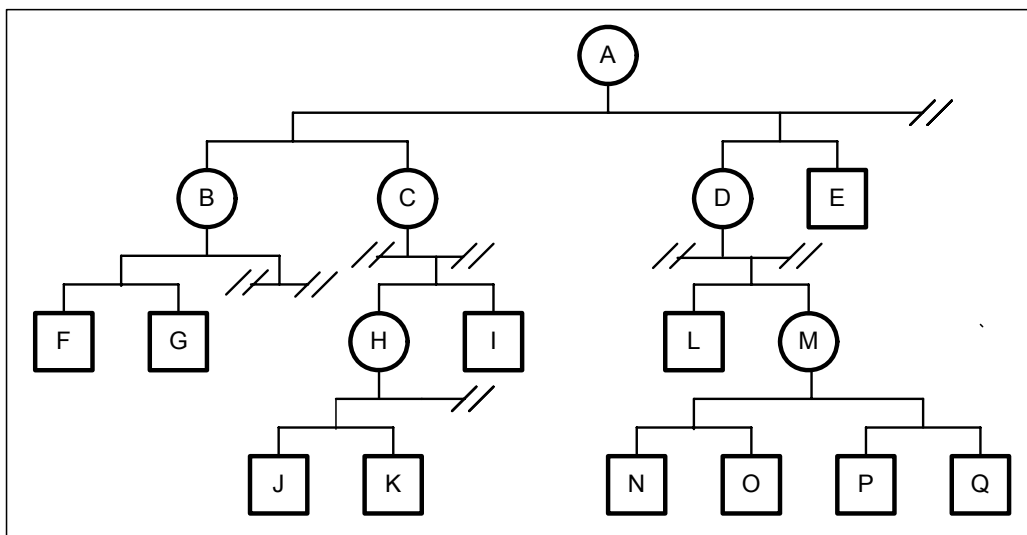
## **Estrategia por descomposición**

El principio de este enfoque metodológico podría resumirse en la máxima latina "divide et impera". Tal vez sea para esta categoría donde, con mayor certeza, vale lo dicho acerca de la inexistencia de técnicas que, en la práctica, lo utilicen con exclusividad. Pero puede afirmarse también que, debido a lo "natural a la mente humana" del principio estratégico elemental, el mismo está presente, de un modo u otro, en la mayor parte de los métodos conocidos.

Desde un punto de vista conceptual, el principio básico de la estrategia consiste en generar, para un problema de síntesis donde no preexiste una solución tecnológica, subproblemas más pequeños en cuanto a su complejidad, con independencia de que exista, en lo inmediato, tecnologías disponibles para resolverlos. Este proceso de reducción ha de conducir, inexorablemente, a subproblemas que poseen, efectivamente, una solución tecnológica inmediata.

En la figura 1 se esquematiza el proceso genérico que involucra la estrategia por descomposición. Allí se ha supuesto que cada instancia de descomposición se resuelve en una subdivisión binaria: el problema de diseño A se puede expresar como la conjunción de los problemas de diseños B y C, por ejemplo. También es posible expresarlo a través de los subproblemas D y E, tomando un criterio de subdivisión diferente, mutuamente excluyente con el anterior. La adopción de uno u otro dará lugar a intentos de descomposición alternativos, cada uno de los cuales ha de conducir a la síntesis de esquemas de proceso con diferente valoración técnico-económica.

En la figura 1 se han representado con círculos los subproblemas que carecen de una solución tecnológica inmediata y con un cuadrado donde sí la hay.



**Figura 1.** Principio de descomposición

Puede observarse cómo, en cada nivel de descomposición y en virtud de la existencia de diversas alternativas de subdivisión, se va generando una estructura arborescente, donde al tope - la raíz del árbol - se halla el problema tal como está planteado originalmente.

En la misma figura se admite, además, que cada subdivisión genera problemas parciales con un grado de complejidad menor que el del nivel anterior que les da origen, con lo cual, como ya quedó dicho, se concluirá por

disponer, en el extremo de todas las ramas del subgrafo que corresponde, de un problema para el que existe solución tecnológica, con lo que se habrá sintetizado un posible esquema para el proceso.

En el caso de la figura los conjuntos de problemas elementales (F,G,I,J,K) y (E,L,N,O) constituyen dos soluciones al problema de diseño planteado en A. En este punto se encuentra definida, en cualquiera de los casos, la estructura del esquema de proceso, restando, eventualmente, la selección de las condiciones operativas adecuadas.

Para lograr una mayor eficiencia en el proceso, una estrategia de descomposición *pura* plantea la conveniencia de que se vaya estimando, *durante* el proceso de reducción, el valor de la función objetivo planteada. Ello implica disponer de alguna expresión que permita evaluar la incidencia de una decisión cualquiera sobre el criterio propuesto, decisión que no necesariamente debe especificar, en ese punto, una estructura tecnológicamente viable ni, obviamente, los niveles deseables para las variables involucradas. En otras palabras, se deberá ser capaz de estimar el valor de la función objetivo - o una cota adecuada de la misma - para un problema, en general, con una estructura tecnológica definida solo en forma parcial.

Queda claro que existen serios inconvenientes para instrumentar una estrategia de descomposición pura, razón por la cual, en la práctica, aparece siempre combinada con otros criterios como, por ejemplo, la búsqueda heurística.

## **Búsqueda heurística**

Masso y Rudd propusieron (1969), en uno de los trabajos fundacionales sobre el tema en el ámbito de la Ingeniería Química, un método que exigía que, en cada paso de descomposición, al menos uno de los subproblemas generados tuviese solución tecnológica inmediata. Así, por ejemplo, la secuencia

$$A = D+E = (L+M)+E = (L+(N+O))+E$$



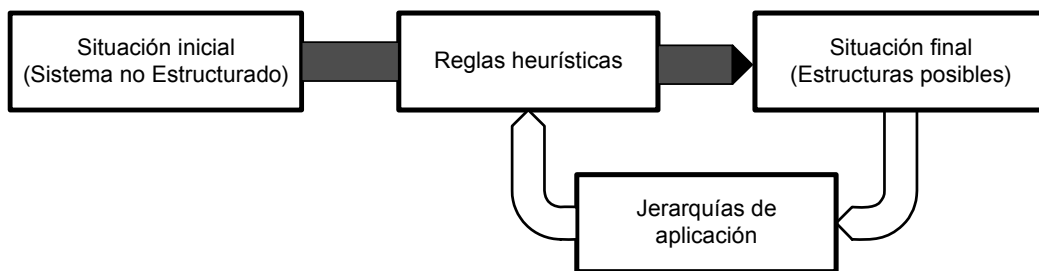
de la figura 1 se desarrollaría de acuerdo a la estrategia propuesta por estos autores.

Esto se consigue, en el caso de síntesis de redes de intercambio térmico, escogiendo una corriente de proceso y formulando un intercambio con otra de distinto tipo o con una fuente auxiliar.

Para lograr definir la decisión (que corrientes elegir, cuanto calor intercambiar) los autores proponían hacer uso de un conjunto de reglas estructuradas en una *búsqueda heurística*.

Este enfoque metodológico recibe su nombre del término griego *εὕρισκω* que significa encontrar - recuérdese el eureka de Arquímedes -, inventar.

Las técnicas heurísticas, una de las herramientas básicas de la Inteligencia Artificial, trabajan sobre núcleos de conocimiento capaces de diseñar la solución de un problema a través de acciones plausibles, aunque no exentas de error. Estas técnicas hacen hincapié, más que en los algoritmos numéricos, en las líneas de razonamiento a seguir en la búsqueda de la solución, de acuerdo a un conjunto de experiencias previas en cuestiones del mismo tipo o similares. En la figura 2 se esquematiza el procedimiento básico de las búsquedas heurísticas.



**Figura 2.** *Búsqueda heurística*

Allí se han individualizado las dos situaciones extremas de la síntesis; esto es, cuando no existe una estructura definida para el sistema, por una parte y una posible situación final, por otra. El tránsito entre ambas instancias se realiza mediante la aplicación, de acuerdo a un cierto esquema jerárquico, de un conjunto de reglas que dirigen el proceso de toma de decisión.

Dichas reglas - el corazón de la heurística - poseen, típicamente, una validez empírica o semiteórica, cuya generalidad, como es obvio, no puede ser probada.

El esquema jerárquico de aplicación puede o no ser explícito pero siempre estará presente: en ausencia de una determinada jerarquización todas las reglas tendrán igual valor a lo largo de todo el proceso de búsqueda.

De existir una explicitación a este respecto, es posible que se admitan cambios en el orden primitivo, de acuerdo a los resultados que, para un caso particular, se vayan produciendo a lo largo de las etapas de síntesis. La existencia de un mecanismo jerárquico adaptativo implica la adopción de un determinado procedimiento de "aprendizaje", que actúa realimentando el esquema original de jerarquías.

Como ya quedó dicho, las técnicas de búsqueda heurística van asociadas, en general, a algún tipo de estrategias de descomposición, casi siempre basadas en el criterio expuesto por Masso y Rudd, por el cual cada subdivisión genera, al menos, un subproblema tecnológicamente soluble.

En el trabajo mencionado, una de las reglas propuestas ha sido utilizada en casi todas las metodologías de búsqueda heurística que le han sucedido. Esta regla puede expresarse como sigue:

*R1: En todo intercambio debe tratarse de transferir la mayor cantidad de calor posible, respetando a) los límites impuestos para las temperaturas de salida de cada una de las corrientes y b) un valor mínimo (aproximación mínima) para la diferencia entre las temperaturas de las corrientes en un mismo punto del intercambiador.*

De este modo se pretende, por una parte, que en cada intercambio, el equipo resulte del mayor tamaño posible, aprovechando la economía de escala y reduciendo el número total de equipos de la red. Por otra parte, la aproximación mínima establece un límite práctico sobre el máximo tamaño tolerable para los equipos, evitando que los mismos resulten de dimensiones irrazonables.

El problema del número mínimo de equipos en una red de intercambio térmico,  $U_{min}$ , fue abordado por Hohmann (1971) en su trabajo de tesis, encontrando una relación simple con el número total de corrientes presentes  $N$ , considerando tanto de proceso como las auxiliares:

$$U_{min} = N - 1$$

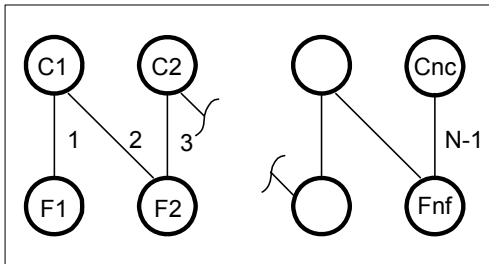


Figura 3. Grafo bipartito en intercambio

Lo anterior puede visualizarse bajo ciertos supuestos sencillos a partir de un esquema como el mostrado en la figura 3. En un grafo bipartito se indican  $nc$  corrientes calientes y  $nf$  frías (se incluyen los servicios auxiliares, de modo que el Balance Energético Total, BET, sea igual a

cero). Las líneas que unen los nodos representan los intercambiadores que definen la red. Si se admite, como se indica en la figura, que en cada operación de transferencia se logra completar las especificaciones impuestas a una corriente, entonces el número de equipos necesarios será  $nc + nf - 1 = N - 1$ .

Sin embargo, la amortización de los equipos es solo una parte en el criterio de mínimo costo total anual, normalmente utilizado para definir el esquema de proceso. De ningún modo puede obviarse la consideración sobre el consumo de servicios auxiliares que exige la red sintetizada.

Es más, el gasto asociado a ellos es, en la mayor parte de los casos, más importante que la amortización del equipamiento requerido por la red. Esto puede conducir a plantear una estrategia de síntesis donde se privilegie el consumo de servicios auxiliares por sobre el número de equipos de intercambio, lo que implica una búsqueda jerárquicamente ordenada.

Linnhoff y Hindmarsh (1983) fueron los primeros en proponer una metodología, el *método Pinch*, donde se aborda la estructuración de redes de intercambio en base a estas consideraciones. La amplitud de la difusión alcanzada la convierte en una de las técnicas de síntesis clásicas en el tema.

El punto fundamental que se agrega a la regla R1 ya vista es que

*R2: en la síntesis de la red no se admitirán intercambios entre corrientes que impliquen un incremento, por sobre los valores mínimos, en el consumo de servicios auxiliares.*

lo cual plantea dos nuevas cuestiones: a) cuales son, para un determinado problema, los consumos mínimos de servicios externos y b) como deben definirse los intercambios de modo que no se requieran más que esas cantidades, que abordaremos en otro capítulo.

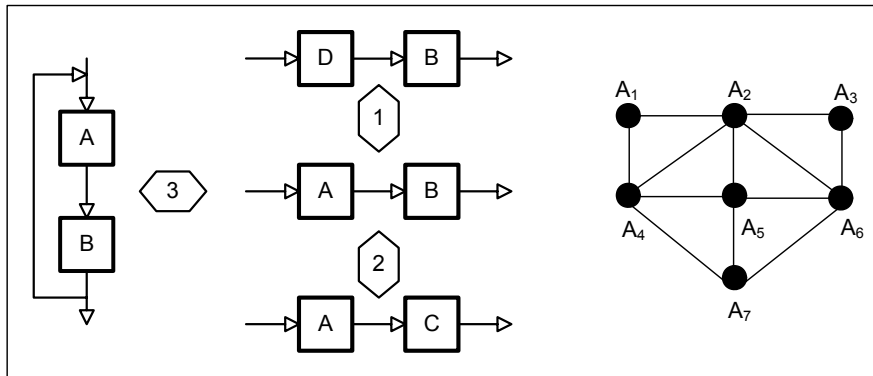
## **Técnicas evolutivas**

En este enfoque metodológico se encara el proceso de síntesis mediante la generación de sucesivos esquemas de proceso, cada uno de los cuales presenta pequeñas modificaciones respecto del que le precede en el proceso de búsqueda, donde lo expresado sobre la magnitud de la modificación está puesto en un contexto técnico, esto es, que dichas diferencias no pueden ser concebidas como la conjunción práctica de varias alteraciones de menor cuantía.

Cuando la diferencia que existe entre dos esquemas de proceso cumplimenta este requisito se dice que los mismos son vecinos. Esta "vecindad" se explicita a través de reglas evolutivas, que definen las alteraciones permitidas en la generación de los esquemas.

En la parte izquierda de la figura 4 se muestran algunos de los pasos de una hipotética generación evolutiva del esquema de un proceso compuesto de dos etapas en serie.

Se admite que, para el caso, se han planteado un conjunto de tres reglas, una primera que establece, para la primera etapa, la posibilidad de utilizar las tecnologías A o D, una segunda regla, para la segunda etapa, que postula el uso de las tecnologías B o C y, por fin, una tercera regla donde se admite la posibilidad de hacer ingresar la salida de la segunda etapa a la entrada de la primera o suprimir dicho reciclo, si existiese.



**Figura 4.** Reglas evolutivas

El concepto de esquema "vecino" se visualiza aquí como el resultado de la aplicación de una regla por vez, con lo que se obtienen "vecinos de vecinos" que son, necesariamente, "vecinos" entre sí. En rigor, la aplicación sucesiva de dos reglas diferentes sobre un mismo sector de un esquema no puede conducir a un esquema "vecino" del original puesto que, en tal caso, la modificación que distingue a estos últimos se podría expresar como la conjunción de dos alteraciones simples (las que proponen las antedichas reglas).

Las técnicas evolutivas dan lugar a búsquedas dentro de un universo de esquemas posibles que puede ser concebido como una red o malla, siendo los esquemas los nodos de la red y las reglas los arcos que los conectan, tal como se esquematiza a la derecha de la figura 4.

Esto no es otra cosa que la sistematización del proceso histórico que sigue, normalmente, cualquier tecnología: su mejoramiento como consecuencia de la introducción sucesiva de pequeñas modificaciones.

Obviamente, como en toda evolución, no todos los pasos que se ejecutan resultan exitosos pero, en la medida en que sean retenidos aquellos que significan una real mejora, el proceso global habrá de conducir al óptimo.

La estructura de las técnicas evolutivas requiere la existencia de

- un esquema inicial
- un conjunto de reglas
- una estrategia de evolución
- un método de evaluación

La generación de un esquema de proceso inicial, si es que no se dispone de uno, puede efectuarse por cualquier metodología; por la aplicación de una regla heurística, por ejemplo.

Asimismo, el método de evaluación no requiere de mayor especificidad que la de resultar adecuado para el tipo de problema; es decir que las exigencias no están impuestas, necesariamente, por el proceso evolutivo, aunque éste pueda tener algún tipo de influencia en la aplicación concreta del método.

Habrá, pues, que concentrar la atención solamente sobre el segundo y tercer punto, que son intrínsecos al proceso de evolución. Constituyen, en rigor, la esencia de este tipo de técnicas y de su correcta formulación depende el éxito de su aplicación a un caso particular.

A las reglas evolutivas se les exige que sean:

- a) *eficientes* lo que implica que deben generar solo aquellos diagramas posibles o deseables. Esto último se refiere a la posibilidad que en la búsqueda se inhabiliten, por alguna razón, determinado tipo de estructuras técnicamente factibles;
- b) *completas*, lo que implica que cualquier esquema de la red puede ser generado, por la aplicación de una determinada secuencia de reglas, tomando a otro cualquiera como esquema inicial;
- c) *reversibles*, significando con esto que una regla no solo debe considerar la modificación que introduce sino la anulación de la misma, con lo que se volvería al esquema de origen. En otros términos, si por una regla el esquema A es "vecino" de B, por la misma regla B es "vecino" de A;
- d) *razonables*, con lo que se pretende expresar que los cambios que se proponen en cada regla deben ser significativos pero de tal magnitud que produzcan solo una variación mínima entre un esquema y otro ("vecindad" técnica).

Las tres primeras condiciones que se han planteado garantizan la generación de todos los esquemas deseados, con independencia de cual sea el punto de partida y la secuencia de aplicación de las reglas evolutivas. La última, en tanto, permite mantener la búsqueda dentro de los límites que fijan las concepciones técnicas comunes.

Con respecto a la estrategia a seguir en el proceso de evolución, son posibles varios enfoques, de distinto grado de dificultad y exactitud, como ser:

- 1) Generar todos los vecinos del esquema en curso y evaluarlos uno a uno. Para el próximo paso elegir, como esquema en curso, el mejor de los recién generados. Si éste supera al original, se reitera el procedimiento. Si no, la búsqueda termina.
- 2) Generar todos los vecinos pero evaluar solo aquel que alguna heurística indique como posible mejor de todos los generados. Si, efectivamente, mejora al original, este esquema se toma como nuevo punto de partida. Si no, se analiza el segundo mejor (de acuerdo a la heurística), el tercero, etcétera, hasta que o bien se supera la situación original o bien ésta es el esquema buscado.
- 3) Aplicar selectivamente una regla evolutiva, generando solo el "vecino" correspondiente y reteniéndolo, siempre que resulte mejor que el de origen.  
En caso contrario, se comienza con la aplicación de otra regla, si es que resta aplicar alguna; si no se da por terminado el proceso.  
Esta estrategia puede ser equiparada a la búsqueda de una variable por vez en los métodos de optimización.
- 4) Evaluar la totalidad del árbol de esquemas posibles (la red entera). Esto queda restringido, exclusivamente, a los problemas de pequeña magnitud.

En todos los casos, cuando se hace referencia a la evaluación de los esquemas generados se está indicando la necesidad de proceder a la determinación de las condiciones óptimas de diseño y operación. La metodología que se emplee con tal objeto está fuertemente influenciada por el tipo de problema, como se verá en oportunidad de tratar diversas técnicas de optimización.

## Optimización global

Por último, se hará una breve referencia a otro de los enfoques posibles en las técnicas de síntesis de proceso.

Bajo el término *optimización global* se pretende abarcar aquellas metodologías donde se plantean, simultáneamente, la definición estructural del sistema, sus dimensiones físicas y las condiciones de operación.

Para que esto sea posible se requiere proponer el problema de determinar el esquema tecnológico en términos variables, esto es, como si el mismo tuviese características similares al área de un equipo o la temperatura de una corriente.

La forma de hacerlo es trabajar sobre lo que se ha dado en llamar *superesquemas*, estructuras que contienen en sí todas las alternativas posibles.

Las búsquedas estructurales son realizadas, luego, introduciendo o eliminando una determinada parte o subestructura. Esto se lleva a cabo mediante la utilización de variables discretas, con valores 0 (ausente) o 1 (presente).

Estas variables afectan, a su vez, a otras que representan la geometría del sistema o su condición operativa.

En la figura 5 se muestra el superesquema que corresponde al problema de intercambiar 1 corriente fría con 2 calientes y los respectivos servicios auxiliares. En el bypass recuadrado se puede tener en cuenta la eventual existencia de la subdivisión planteando un balance de materia donde se la incluya

$$r + x(1 - r) = 1$$

siendo  $r$  la fracción de la corriente que pasa por el equipo y  $x$  la variable que indica la existencia ( $x=1$ ) o no del bypass.

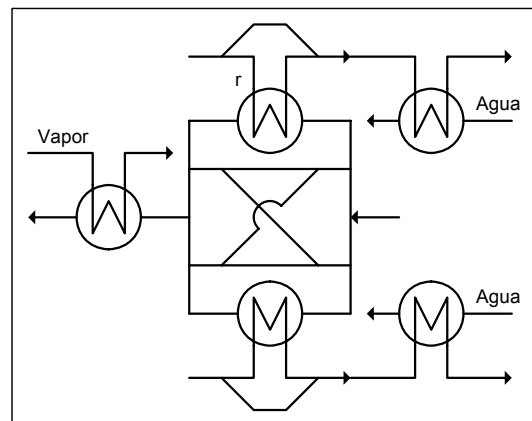


Figura 5. Superestructura



Este tipo de enfoque en la síntesis de proceso obliga a tratamientos de alta complejidad, no solo en la formulación del problema sino en el tratamiento matemático del mismo, a través de técnicas de búsqueda de óptimos en problemas no lineales y con variables mixtas, es decir, la existencia simultánea de algunas de naturaleza continua y discretas otras.

La complejidad inherente a este enfoque excede con largueza el alcance propuesto para esta obra, al par de que el mismo ha mostrado serias limitaciones prácticas, en cuanto a la magnitud de los problemas que ha sido capaz de abordar.

Con todo, y en la medida de que se dispongan de las adecuadas herramientas de cálculo, se podrán encarar, seguramente, la resolución de esquemas de mayor envergadura.

## **Bibliografía**

- Hendry, Rudd & Seader, "Synthesis in the Design of Chemical Processes", AIChEJ 19, p.1, 1973
- Masso & Rudd, "The Synthesis of Systems Design.II: Heuristic Structuring", AIChEJ 15, p.10, 1969.
- Spillers H.R., "Basic Questions of Design Theory", Part 2, North Holland Pub.Co., 1974.
- Stephanopoulos & Westerberg, "Studies in Process Synthesis.II: Evolutionary Synthesis of Optimal Process Flowsheet", Chem. Eng. Sci. 31, p.195, 1976.

# CAPÍTULO 3

## SÍNTESIS DE REDES DE INTERCAMBIO TÉRMICO. MÉTODO PINCH

### Introducción

El desarrollo de uno de los problemas clásicos en el tema, como es la síntesis de redes de intercambio térmico, permitirá ir precisando, por vía del ejemplo, las distintas cuestiones que se exponen.

El planteo general del problema puede hacerse en los términos que siguen:

- Se tienen  $n_c$  corrientes "calientes" (fuentes), cada una con un caudal másico  $F_{ci}$  y capacidad calorífica  $Cp_{ci}$  (lo que equivale a una velocidad de flujo de capacidad calorífica  $W_{ci} = F_{ci} * Cp_{ci}$ ) que deben ser enfriadas desde una temperatura  $T_{Eci}$  hasta otra temperatura  $T_{Sci}$ ;  $i=1,2,\dots,n_c$ .
- Existen, además,  $n_f$  corrientes "frías" (sumideros), con una velocidad de flujo de capacidad calorífica  $W_{fj}$ , que deben ser calentadas desde  $T_{E fj}$  hasta  $T_{S fj}$ ;  $j=1,2,\dots,n_f$ .
- Se dispone, también, de medios auxiliares de calefacción y enfriamiento (típicamente, vapor y agua, el primero cediendo solo su calor latente y el segundo, con un salto máximo permitido).
- Los equipos serán, en general, de tipo tubo y camisa, de simple paso, con flujos en contracorriente.
- En el equipo donde la corriente K intercambia con la M, el coeficiente global de transferencia U estará dado por  $\frac{1}{U} = \frac{1}{h_K} + \frac{1}{h_M}$ , siendo  $h_K$  y  $h_M$

los coeficientes peliculares de las corrientes.

El objetivo es estructurar un sistema capaz de dar cumplimiento a las exigencias planteadas, con un mínimo costo total (amortización de los equipos más costo de servicios auxiliares).

## Problema demostrativo

Se busca sintetizar una red de intercambio térmico que permita cumplimentar las especificaciones de temperaturas de entrada y salida para las corrientes que se indican en la tabla 1.

Corriente	$T_E$ [°C]	$T_S$ [°C]	W [Mcal/h°C]	h [Mcal/m <sup>2</sup> h°C]
C1	200	50	9	0,573
C2	150	40	8	0,573
F1	70	210	12	0,630
F2	30	140	11	0,630
F3	60	100	7	0,630

**Tabla 1.** Información de las corrientes del problema

Se dispone como medio auxiliar de calefacción vapor saturado seco a 255 °C, al que se le admite ceder sólo su calor latente (403,2 kcal/kg) y del que se estima un coeficiente pelicular de 12,6 Mcal/m<sup>2</sup>h°C. La fuente fría auxiliar será agua a 30°C, a la que se le permite un incremento de temperatura de 20 °C, admitiendo el valor de 1,725 Mcal/m<sup>2</sup>h°C para el coeficiente pelicular.

Con los valores de los coeficientes peliculares para corrientes de procesos y fuentes auxiliares, los coeficientes globales de transferencia de calor se estiman en 600 kcal/hm<sup>2</sup>°C para los calefactores, 300 para los intercambiadores y 430 para los enfriadores.

El costo de los equipos viene dado por la expresión  $1930 \cdot A^{0,65}$ , A en m<sup>2</sup>, previéndose una amortización lineal del 20% anual.

El costo de los servicios auxiliares es de 60 \$/(Mcal/h) año para el vapor y de 6 \$/(Mcal/h) año para el agua.

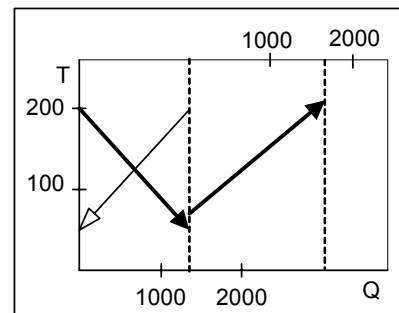
El esquema de proceso que se sintetice deberá tener un mínimo costo total anual (amortización más costo de servicios auxiliares).

Pero para intentar llevar a cabo la estructuración de la red de intercambio térmico resulta necesario hacer, previamente, una serie de consideraciones e incorporar un conjunto de herramientas gráficas y analíticas.

## Consideraciones y herramientas básicas

El diagrama básico en el tratamiento de los problemas de Integración de Procesos vincula la variable representativa del estado del sistema con la magnitud transferida. En el caso de la estructuración de redes de intercambio térmico, la variable, habitualmente sobre el eje de las ordenadas, es la temperatura de las corrientes y sobre la abscisa se encuentra la cantidad de calor transferido.

En la figura 1 se muestra la evolución de las corrientes C1 y F1 del problema planteado, donde se ha indicado con una punta de flecha el sentido de dicha evolución. Así, para la primera corriente, representada en trazo grueso, a medida que se transfiere calor la temperatura de salida disminuye, en tanto que para la fría, medida la



**Figura 1.** Evolución de C1 y F1

transferencia en la escala superior, ocurre lo contrario.

En la figura se ha incluido, con trazo fino, una imagen especular de la corriente caliente. Conceptualmente, ahora, la relación expresa la temperatura a la que debe ingresar la corriente C1 para transferir una determinada cantidad de calor. Esta forma de dibujar una de las dos corrientes permite representar el funcionamiento de los equipos de intercambio, que han de ser operados en contracorriente.

Puede notarse que la representación, en todos los casos, es una recta. Ello ocurre pues se ha supuesto constante la velocidad de flujo de capacidad calorífica  $W$  en todo el intervalo de temperaturas considerado. Si no fuese así, y en rigor no lo es, ya que el valor de  $C_p$  depende de la temperatura, la evolución sería una curva.

Cuando  $W$  no es constante lo que se puede hacer es dividir el intervalo de temperaturas en una serie de subintervalos, dentro de los cuales se admitirá la constancia de un valor particular de  $W$ . La curva será reemplazada por una sucesión de segmentos rectos, cada uno de los cuales representará una

seudocorriente, con determinadas temperaturas de entrada y salida (los extremos del intervalo).

Usando el Diagrama T – Q se puede apreciar el efecto de intercambiar calor entre las dos corrientes. De acuerdo a la cantidad que se intercambie se modifican las posiciones relativas de las rectas, produciéndose un solapamiento entre ambas, en la zona en que se ubica el equipo de intercambio, como se indica en la figura 2.

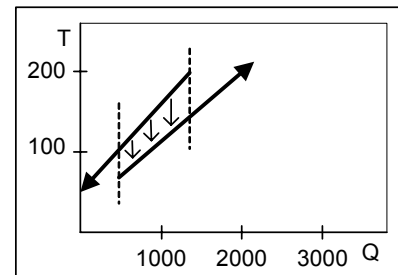


Figura 2. Diagrama T- Q

Las partes de las corrientes no involucradas en ese intercambio, representadas por los segmentos no solapados, deberán ser asignadas al intercambio con otras corrientes. Lo más sencillo, aunque no necesariamente lo más conveniente, sería que esas otras corrientes fuesen los servicios auxiliares.

Al ir incrementando el valor del calor intercambiado, es obvio que los eventuales requerimientos de servicios auxiliares disminuyen, y, consecuentemente, los costos asociados a estas demandas.

Pero, también, cuanto más cerca están las rectas, disminuye la fuerza impulsora, aumentando el área de transferencia, si se admite la constancia en el valor de U, con el consiguiente incremento en el costo del equipo.

Es decir que, a medida que se aumenta la integración térmica entre las corrientes, parte de los costos asociados al proceso - los servicios - disminuyen y otros - la inversión - aumentan.

Hay dos situaciones que son sencillas de considerar:

- 1) si el calor intercambiado es nulo, el costo del equipo es cero y el de los servicios es máximo.
- 2) si el calor intercambiado es el máximo termodinámicamente posible, con la corriente C1 ingresando a 200°C y saliendo a 70°C y la F1 a 70°C y 167,5°C, entonces el intercambiador tendría un costo (área) infinitamente grande, pero, con un gasto en servicios auxiliares mínimo.

Cualquier situación intermedia demanda un equipo de área finita y consumos de servicios que resultan proporcionales a  $Q_{máx_k} - Q_{int}$  siendo  $Q_{int}$  el calor

puesto en juego en el intercambio y  $Q_{m\acute{a}x_k}$  el máximo calor a intercambiar con el correspondiente servicio auxiliar k.

Nótese que los requerimientos energéticos de servicios auxiliares se reducen o incrementan por igual -la misma cantidad- cuando, respectivamente, se aumenta o disminuye el intercambio de calor entre las corrientes. Esto quiere decir que un aumento incremental de costo del equipo producirá un ahorro doble en los consumos de servicios.

La relación entre el área de intercambio y el calor intercambiado es de naturaleza no lineal y también lo es la del costo del equipo con sus dimensiones principales, básicamente, el rea. En la funcionalidad existente entre la inversión y el área existe un efecto de economía de escala, donde el costo unitario del equipo, en  $[\$/m^2]$ , por ejemplo, disminuye a medida que aumenta el área del mismo.

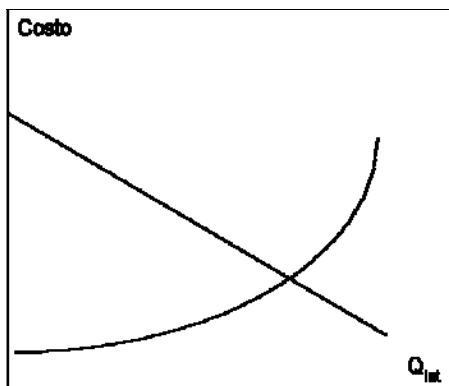
Una relación simple, pero clásica, entre el área de intercambio (A) y el costo del equipo (I) se expresa como:

$$I = I_0 A^b \quad b < 1$$

$$\left(\frac{I}{A}\right) = \left(\frac{I_0}{A^{1-b}}\right) \tag{1}$$

donde se puede ver el comportamiento mencionado.

En esas relaciones, la variable I, expresada en unidades monetarias (\$, US\$, etc.), es la inversión necesaria para la compra e instalación de un equipo de rea A, definida en unidades de superficie ( $m^2$ ,  $ft^2$ , etc.);  $I_0$  y b son constantes que dependen del tipo de equipo, material de construcción, etc.



**Figura 3.** Costo vs calor intercambiado

En la figura 3 se puede apreciar el comportamiento predicho de las componentes del costo total anual y el calor intercambiado, correspondiendo la línea recta a los servicios auxiliares.

La situación planteada es clásica en los problemas de optimización y, por lo tanto, ha de existir un punto de mínimo costo total.

Si bien, termodinámicamente es posible

trabajar con una pequeña fuerza impulsora, ello redundaría en un área de intercambio excesivamente grande. Para evitar esta situación se fija una *aproximación mínima*  $\Delta T_{\min}$  entre las temperaturas de entrada y salida de las corrientes en cada extremo del equipo.

Queda claro que en los problemas de integración energética existe una vinculación directa entre  $\Delta T_{\min}$  y el calor intercambiado, por lo cual deberá admitirse que hay un valor óptimo para  $\Delta T_{\min}$ . Más adelante se propondrá una metodología para determinar ese valor, pero antes es preciso desarrollar otras herramientas de análisis.

## Curvas Compuestas

En la figura 1 se pudo ver la representación esquemática básica para las corrientes que intervienen en los problemas de Integración Energética.

La cuestión ahora es *cómo representar, de una forma válida, un conjunto de corrientes de un mismo tipo*, y poder extender el análisis efectuado para corrientes aisladas a conjuntos de ellas, estableciendo, de este modo, estructuras metodológicas que permitan resolver la integración.

La primera cuestión a tener en cuenta es que la esencia del problema consiste en transferencias de calor dentro de determinados rangos de temperatura.

Si en cada intervalo de temperatura se procede a acumular la disponibilidad (o requerimiento) de calor individual de las corrientes presentes en ese intervalo, se dispondrá de una representación válida como para plantear la transferencia de calor con corrientes de otro tipo.

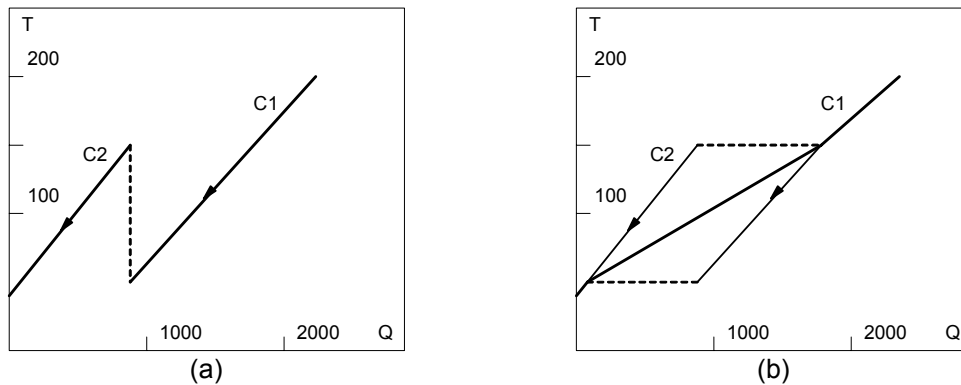
El resultado de esta operación es lo que se conoce con el nombre de *Curvas Compuestas*.

La construcción de la Curva Compuesta para un determinado conjunto de corrientes *de un mismo tipo* comienza por definir los intervalos de temperatura existentes en el conjunto.

Así, para las corrientes calientes C1 y C2 del problema propuesto, cualquier intercambio que se plantee entre 200 °C y 150 °C sólo podrá ser satisfecho por C1, con una disponibilidad de  $9(200-150) = 450$  Mcal/h. Los restantes intervalos son {150; 50} donde aportan ambas corrientes y {50; 40} donde sólo se encuentra la C2. Las disponibilidades de calor son  $(9+8)(150-50) = 1700$  Mcal/h y  $8(50-40) = 80$  Mcal/h respectivamente.

Lo anterior puede representarse en un diagrama T – Q como una sucesión de segmentos desde los intervalos de temperatura más bajos hacia los más altos en ordenadas y en abscisas, la acumulación de disponibilidades de calor.

En la figura 4(a) se muestran las corrientes C1 y C2 por separado y en 4(b) la Curva Compuesta. En esta última se ve como se puede graficar el intervalo común a las dos corrientes, trazando un segmento que va desde la temperatura de entrada de C2, en C1, hasta la temperatura de salida de C1, en C2.



**Figura 4.** Curva Compuesta caliente

Esta forma de graficar se complica cuando intervienen más de dos corrientes en un intervalo, por lo que resulta conveniente contar con otra metodología para la construcción de la Curva Compuesta.

Se la puede realizar como una concatenación de segmentos teniendo en cuenta los extremos de los intervalos de temperatura y los acumulados de los calores transferidos correspondientes. En este caso, esos segmentos son los que se muestran en la tabla 2.



X inicial [Mcal/h]	X final [Mcal/h]	Y inicial [°C]	Y final [°C]
0	80	40	50
80	1780	50	150
1780	2230	150	200

**Tabla 2.** Información para generar la Curva Compuesta caliente

Para las tres corrientes frías F1, F2 y F3, la curva presentará cinco quiebres, como se pueden visualizar en la tabla 3.

T inf [°C]	T sup [°C]	Corrientes presentes	W [Mcal/h°C]	Q [Mcal/h]	Qacum inf [Mcal/h]	Qacum sup [Mcal/h]
30	60	F2	11	330	0	330
60	70	F2, F3	11 + 7 = 18	180	330	510
70	100	F1, F2, F3	11+7+12= 30	900	510	1410
100	140	F1, F2	11+12=23	920	1410	2330
140	210	F1	12	840	2330	3170

**Tabla 3.** Información para generar la Curva Compuesta fría

Por una cuestión de claridad expositiva, los servicios auxiliares no se han integrado a las representaciones gráficas correspondientes.

Las curvas compuestas, al igual que otras herramientas que se verán más adelante, permiten determinar los requerimientos mínimos de servicios auxiliares, así como otras cuestiones importantes en la síntesis de redes de intercambio térmico.

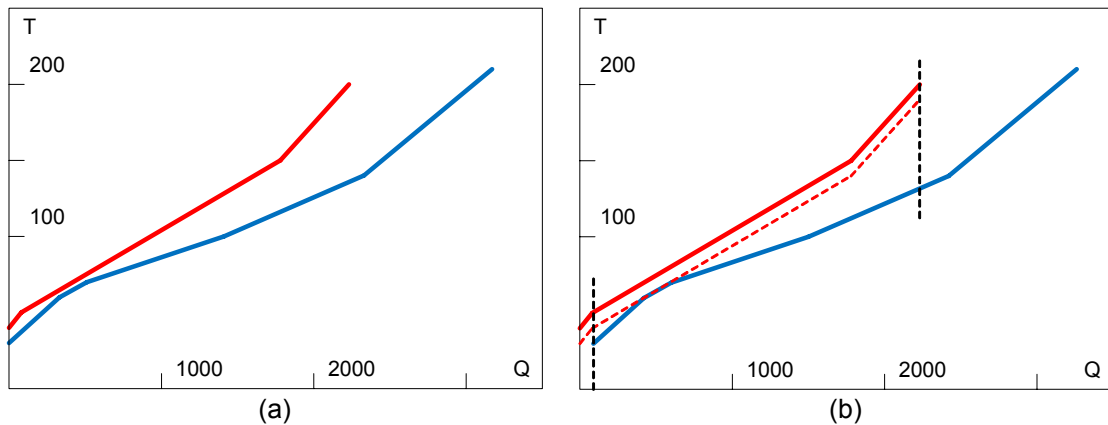
Para ello, se debe comenzar por dibujar ambas curvas en un mismo gráfico, como se ve en la figura 5(a). Al hacerlo, las curvas pueden o no cruzarse, cruce que no ocurre en este caso. Aunque en la figura los segundos tramos de las corrientes compuestas parecen paralelos, la pendiente,  $1/W$ , de la caliente es levemente superior a la de la fría ( $1/17$  frente a  $1/18$ ).

Ahora, lo que se debe hacer es desplazar hacia la derecha la Curva Compuesta fría hasta que se encuentre por debajo de la caliente y, en todos sus puntos, con una diferencia de temperatura no menor a la aproximación mínima adoptada.

Por conveniencia, se debe trazar un límite en relación a la Curva Compuesta caliente, que es equivalente a desplazarla hacia abajo en una magnitud igual a  $\Delta T_{\min}$ . El desplazamiento de la Curva Compuesta fría debe hacerse hasta que resulte tangente a ese límite.

Obviamente, todo lo anterior presupone que la Curva Compuesta fría cruza el límite establecido en uno o más puntos. Si esto no fuese así, no habría necesidad de enfriamiento adicional.

En la figura 5 (b) se puede ver el límite antedicho, dibujado por debajo de la Curva Compuesta caliente, con una línea de trazos y la curva fría desplazada hacia la derecha hasta tocarlo.



**Figura 5.** Curvas compuestas

El punto de contacto determina las condiciones de lo que se denomina *Punto Pinch*, básicamente, la temperatura donde la diferencia entre las temperaturas reales de las curvas compuestas es igual a la aproximación mínima adoptada. En la figura 5(b), habiendo fijado  $\Delta T_{\min} = 10^{\circ}\text{C}$ , resulta  $60^{\circ}\text{C}$  para las corrientes frías y  $70^{\circ}\text{C}$  para las calientes.

En realidad, el tramo de la Curva Compuesta fría entre  $60^{\circ}\text{C}$  y  $70^{\circ}\text{C}$  es, prácticamente, tangente al límite trazado. Para poder determinar exactamente donde se ubica el Punto Pinch hay que ampliar esa zona o aumentar la escala del dibujo.

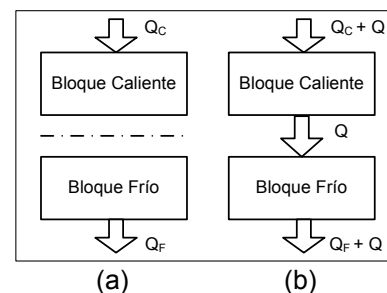
Los sectores no solapados en la figura 5(b), delimitados con línea de trazo negra, representan los requerimientos de servicios auxiliares externos; el de la

izquierda, de enfriamiento y el de la derecha, de calefacción. Se pueden medir y, teniendo en cuenta la escala del dibujo, determinar, en forma aproximada, sus valores, que para el problema en análisis, deben ser cercanos a los valores exactos de 1030 Mcal/h para el consumo de vapor y 90 Mcal/h para el agua.

Es obvio que, de la manera en que se construyó la figura, los requerimientos de servicios auxiliares son mínimos. Los mismos dependen de cual sea el valor de  $\Delta T_{\min}$ , o, lo que es lo mismo, del grado de aprovechamiento térmico. Los servicios aumentarán cuando aumente la aproximación mínima; en la figura, el límite se desplazará hacia abajo y la curva fría, para acompañarlo, deberá hacerlo hacia la derecha.

A través del Punto Pinch se podría trazar una línea vertical y el sistema quedaría dividido en dos sectores, uno, donde los intercambios se realizarían a temperaturas menores, o a lo sumo igual, a las del Pinch y otro, donde las transferencias se harían a temperaturas iguales o superiores. Se puede ver que en el primer sector, llamado *bloque frío*, no se encuentran presentes los servicios auxiliares de calentamiento y lo contrario, la ausencia de enfriamiento auxiliar, ocurre en el otro sector, denominado *bloque caliente*. Visto de otra manera, el bloque frío se comporta como una fuente neta de calor en tanto que el caliente lo hace como un sumidero neto.

En la figura 6 (a) se puede apreciar esa caracterización, siendo los consumos de servicios auxiliares  $Q_C$  y  $Q_F$  en la fuente y en el sumidero externo respectivamente. Los bloques aparecen separados por la línea imaginaria que establece el Punto Pinch.



**Figura 6.** Bloques caliente y frío

En la situación mostrada en (b), en el mismo sistema, existe una transferencia de calor  $Q$  entre el bloque caliente y el frío. Puede verse que los consumos de los servicios auxiliares se incrementan en esa cantidad de calor transferida *a través del Pinch*.

Obviamente, si se pretende minimizar el consumo de servicios auxiliares debe evitarse todo intercambio que implique una transferencia de calor a través del Pinch.

## Aproximación mínima óptima

Como quedó dicho, la aproximación mínima es una forma de expresar la cantidad de calor recuperado de las corrientes fuentes disponibles en el proceso. También se vio que existen dos efectos económicos contrapuestos, asociados a esa recuperación. Existirá, entonces, un valor de la aproximación mínima que optimiza el costo total que demanda la operación.

El problema es que, tanto el consumo de servicios auxiliares como el costo del equipamiento serán valores conocidos recién cuando se haya definido la estructura de los intercambios, lo que obliga a plantear una metodología especial para la determinación de la aproximación mínima óptima. A priori se puede conocer el consumo *mínimo* de servicios auxiliares para una dada aproximación mínima, pero no el consumo requerido por la estructura sintetizada.

Una forma de hacerlo, tal vez la más simple, es considerar que la estructura requerirá el consumo mínimo de servicios auxiliares y que es posible estimar la incidencia de la inversión sin necesidad de definir tal estructura.

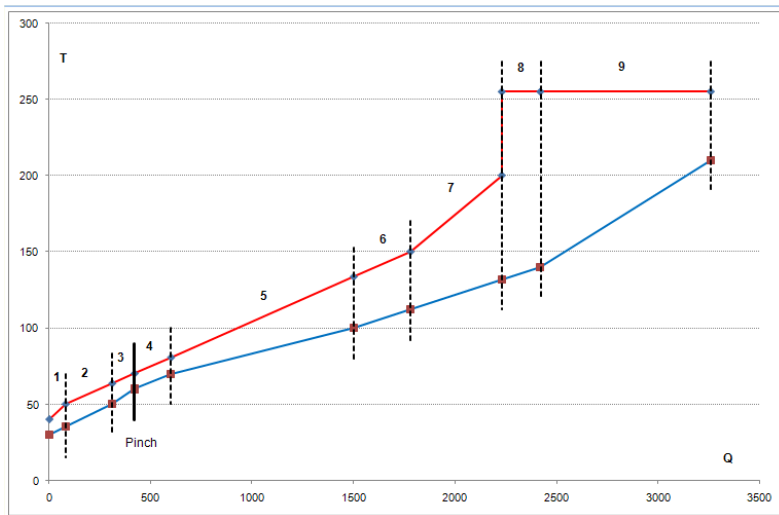
Para ello, se hace uso de las *Curvas Compuestas Balanceadas (CCB)*, las cuales surgen simplemente al incluir, en las curvas compuestas, los consumos de los servicios auxiliares en los niveles térmicos correspondientes.

En la tabla 4 se encuentra la información para generar dichas curvas, considerando una aproximación mínima de 10°C.

Curva Compuesta Balanceada caliente				Curva Compuesta Balanceada fría			
Tinf [°C]	Tsup [°C]	Qint [Mcal/h]	Qacum [Mcal/h]	Tinf [°C]	Tsup [°C]	Qint [Mcal/h]	Qacum [Mcal/h]
40	50	80	80	30	50	310	310
50	150	1700	1780	50	60	110	420
150	200	450	2230	60	70	180	600
255	255	1030	3260	70	100	900	1500
				100	140	920	2420
				140	210	840	3260

**Tabla 4.** Curvas Compuestas Balanceadas para  $\Delta T_{min} = 10^{\circ}\text{C}$

En lo que sigue, se hará uso de la metodología propuesta por Linnhoff y Ahmad donde, para estimar el costo de la red de intercambio, una vez determinadas las CCB, se supone que existen  $K$  pseudointercambiadores coincidentes con los  $K$  sectores verticales que surgen al considerar los cambios de pendientes en cualquiera de las dos curvas, como se puede ver en la figura 7, donde aparecen 9 sectores.



**Figura 7.** Curvas compuestas balanceadas

Esos sectores se corresponden con los valores de calor acumulado de las curvas compuestas balanceadas de la tabla 4, como se muestra en la tabla 5.

Sector	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Lím Inf.	0	80	310	420	600	1500	1780	2230	2420
Lím. Sup	80	310	420	600	1500	1780	2230	2420	3260

Tabla 5. Límites de los sectores  $K$

En cada sector se conocen el calor intercambiado y, como mínimo, tres temperaturas. En la tabla 6 se encuentran los valores de las temperaturas de entrada ( $T_{ec}$ ) y de salida ( $T_{sc}$ ) de la Curva Compuesta Balanceada caliente, los de la fría ( $T_{ef}$  y  $T_{sf}$ ) y la cantidad de calor de cada intercambio. En color se indican las temperaturas que han sido necesario calcular.

Sector	Tsc (°C)	Tec (°C)	Tef (°C)	Tsf (°C)	Qint (Mcal/h)
1	40,00	50,00	30,00	35,16	80
2	50,00	63,53	35,16	50,00	230
3	63,53	70,00	50,00	60,00	110
4	70,00	80,59	60,00	70,00	180
5	80,59	133,53	70,00	100,00	900
6	133,53	150,00	100,00	112,17	280
7	150,00	200,00	112,17	131,74	450
8	255,00	255,00	131,74	140,00	190
9	255,00	255,00	140,00	210,00	840

**Tabla 6.** Información de los sectores K

En general, el costo de los equipos de intercambio es función del área de los mismos.

Usando la ecuación de diseño de un intercambiador, podemos determinar dicha área, según la ecuación 2, en la que, por simplicidad, se ha despreciado el factor de ensuciamiento.

$$A = \frac{Q}{\Delta T_{ml}} \left[ \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_f} \right] \quad (2)$$

Para poder estimar el área de cada pseudointercambiador debería contarse con una expresión similar. Se debe considerar que, en general, en los pseudoequipos intervienen más de una corriente de cada tipo.

Teniendo en cuenta que el calor intercambiado en el sector k,  $Q_k$ , es  $Q_k = \sum_i q_{Cik} = \sum_j q_{Fjk}$ , siendo  $q_{Cik}$  el calor cedido por las fuentes presentes en el mismo y  $q_{Fjk}$  el recibido por los sumideros, por analogía, se puede escribir:

$$A_k = \frac{1}{\Delta T_{mlk}} \left[ \sum_i^{nc} \frac{q_{ik}}{h_i} + \sum_j^{nf} \frac{q_{jk}}{h_j} \right] \quad (3)$$

En la tabla 7 se detallan, para cada sector, los valores de las áreas de los pseudointercambiadores, calculadas a partir de los aportes de calor de cada corriente, su coeficiente pelicular y la fuerza impulsora correspondiente.

h	12,6	0,573	0,573	0,630	0,630	0,630	1,725		
	Aporte de calor								
Sector	V	C1	C2	F1	F2	F3	A	$\Delta T_{ml}$	Area
1	-	-	80,0	-	56,8	-	23,2	12,3	19,8
2	-	121,8	108,2	-	163,2	-	66,8	14,2	49,3
3	-	58,2	51,8	-	110,0	-	-	11,7	31,4
4	-	95,3	84,7	-	110,0	70,0	-	10,3	58,3
5	-	476,5	423,5	360,0	330,0	210,0	-	19,9	150,7
6	-	148,2	131,8	146,1	133,9	-	-	35,6	26,2
7	-	450,0	-	234,8	215,2	-	-	51,6	29,1
8	190,0	-	-	99,1	90,9	-	-	119,1	2,7
9	840,0	-	-	840,0	-	-	-	74,6	18,8

**Tabla 7.** Información para determinar el área de los seudointercambiadores

El equipo ficticio que se ha definido en cada sector, en realidad abarca, total o parcialmente, varios equipos de transferencia, que, en conjunto, intercambian la cantidad de calor que se ha asignado al seudointercambiador. La consideración de total o parcial resulta clara si se analiza lo que ocurre en los sectores 8 y 9. Considerándolos en forma aislada, en el primero se requerirían dos equipos, donde las corrientes F1 y F2 se calientan con vapor. En el último, sólo uno. Pero, el calentamiento de F1 comenzado en el sector ocho podría continuarse en el mismo equipo hasta llegar a la temperatura requerida. De esta forma se aprovecharía la economía de escala, al tener unidades de mayor tamaño.

Otro tanto podría estar ocurriendo en el resto de los sectores, por lo cual habría que considerar los sectores en conjunto, pero deberá respetarse el consumo mínimo de servicios auxiliares admitido, lo que implica que no deben realizarse transferencias de calor a través del Pinch.

Dicho de otro modo, se deberán agrupar los sectores involucrados en cada bloque que define el punto Pinch.

Eso lleva a definir una macro área, como resultado de la suma de las áreas determinadas para cada sector. Esos valores serían, para el caso del problema, 100,6 m<sup>2</sup> para el bloque frío y 285,7 m<sup>2</sup> para el caliente.

Siguiendo con las estimaciones, podría considerarse que todos los equipos de cada bloque tienen la misma área, con lo cual restaría, aún, determinar cuantos son esos equipos.

Como se vio en el capítulo anterior, de acuerdo a Hohmann, el número de equipos presentes en el bloque,  $N_B$ , debe ser  $N_B = n_C + n_F - 1$ , siendo  $n_C$  el número total de fuentes y  $n_F$  el de sumideros presentes en el bloque.

Con esto, se tendrían 3 equipos en el bloque frío, con un área de intercambio de  $100,6 / 3 = 33,5 \text{ m}^2$  cada uno y 5 en el caliente, con un área de  $57 \text{ m}^2$ .

Teniendo en cuenta los datos del problema planteado, la inversión requerida en el bloque frío será de  $3 \cdot 1930 \cdot (33,5)^{0,65} = 56771 \text{ \$}$  y para el otro será de  $5 \cdot 1930 \cdot (57)^{0,65} = 133820 \text{ \$}$ , lo que implica una amortización anual de  $0,2 \cdot 190591 = 38118 \text{ \$/año}$ .

Para tener una estimación del costo total anual  $CTA_e$  vinculado a la estructura, a este valor de amortización se deberán sumar los costos de los servicios, en este caso,  $60 \cdot 1030 + 6 \cdot 90 = 62340 \text{ \$/año}$ , lo que arroja un  $CTA_e$  de  $100458 \text{ \$/año}$ .

Pero todo esto ha presupuesto una aproximación mínima de  $10^\circ\text{C}$ . Se debería repetir el procedimiento para otros valores, los suficientes como para establecer una funcionalidad entre  $CTA_e$  y la aproximación mínima, y poder determinar el valor de  $\Delta T_{\min}$  que minimiza  $CTA_e$ . Normalmente, basta con repetir el procedimiento indicado para tres valores de  $\Delta T_{\min}$ , y luego realizar una aproximación de segundo grado. Sobre ella, es sencillo obtener el mínimo de la función, en forma analítica o gráfica.

Resumiendo, la metodología a seguir es la siguiente:

- Construir las curvas compuestas para un determinado valor de  $\Delta T_{\min}$ .
- Determinar los requerimientos de servicios auxiliares que demanda el sistema.
- Construir las curvas compuestas balanceadas y dividir las en sectores delimitados por las temperaturas de entrada o salida de las corrientes.
- En cada sector determinar la temperatura desconocida y luego la fuerza impulsora.



- Determinar la cantidad de calor que aporta cada corriente en cada sector.
- Calcular el área para cada sector, considerando las corrientes que intercambian en el mismo.
- Calcular, para cada uno de los bloques por encima y debajo del Pinch, el número de equipos de la red y el área de transferencia de cada uno
- Estimar un costo total anual vinculado al  $\Delta T_{\min}$  elegido, de acuerdo a los costos de servicios auxiliares, equipamiento y tasa de amortización.
- Repetir el procedimiento un número suficiente de veces como para poder estimar el valor de  $\Delta T_{\min}$  que hace mínimo el costo total anual.

## Tabla del Problema y Cascada de Calor

El procedimiento para la determinación del Punto Pinch y de los requerimientos de los servicios auxiliares seguido hasta aquí es de una naturaleza netamente gráfica.

De lo dicho oportunamente resulta evidente la dificultad de obtener valores exactos, tanto para la ubicación del punto Pinch como para los requerimientos mínimos de los servicios auxiliares. No obstante ello, estos procedimientos gráficos conservan un valor inestimable en la consideración global del problema.

Para obviar esos inconvenientes, resulta interesante analizar la posibilidad de determinar esos parámetros, en forma analítica. Esto se logra a través de la denominada Tabla del Problema, propuesta por Linnhoff y Flower (1978).

En esta tabla se tendrán en cuenta las disponibilidades y requerimientos de las distintas corrientes de proceso así como la posibilidad de realizar intercambios entre ellas.

La construcción de la tabla es sencilla: dado un intervalo de temperaturas  $[T_{\text{inf}} , T_{\text{sup}}]$ ,  $T_{\text{inf}} < T_{\text{sup}}$ , para todas aquellas corrientes cuyas temperaturas especificadas de entrada y salida *en la red de integración*, lo incluyan, el aporte será  $W_{Fj}(T_{\text{sup}} - T_{\text{inf}})$  para las frías o  $W_{Ci}(T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}})$  para las calientes o

$W_i(T_{\text{sup}} - T_{\text{inf}})$ , considerando  $W_i$  positivo para las frías y negativo para las calientes.

La idea básica de Linnhoff y Flower es que, dentro de ese intervalo, sea *técnicamente* posible producir un intercambio entre una fuente cualquiera y cualquier sumidero presente.

Para ello es preciso que  $T_{\text{sup}}$  y  $T_{\text{inf}}$  estén expresadas en una escala única de temperaturas, donde tal posibilidad esté implícita.

En la figura 8 puede verse el fundamento de esa escala. La corriente caliente, a la temperatura del punto a, en la entrada (o salida) de un intercambiador puede estar transfiriendo a una corriente fría que sale (o entra) al equipo a la temperatura del punto a'. Idéntico razonamiento puede hacerse con la corriente fría y los puntos b y b'.

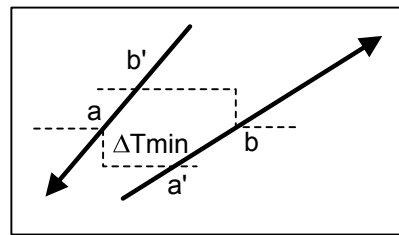


Figura 8. Aproximación mínima

En otros términos, en la escala única, para asegurar una transferencia que evite áreas de intercambiadores excesivamente grandes las corrientes deberán ubicarse en ella de modo que siempre exista, entre sus temperaturas reales, una diferencia igual a la aproximación mínima. Esto puede lograrse de varias formas, todas enteramente equivalentes, como ser:

- Las corrientes calientes se ubican en sus temperaturas originales, las frías, elevándolas en un valor igual a  $\Delta T_{\text{min}}$ .
- Las corrientes frías se ubican en sus temperaturas originales, las calientes, disminuyéndolas en un valor igual a  $\Delta T_{\text{min}}$ .
- Las corrientes calientes se ubican disminuyendo sus temperaturas originales en  $\Delta T_{\text{min}}/2$ , las frías, aumentándolas en igual valor. En rigor, se puede usar cualquier escala donde se reduzcan las temperaturas de las calientes en  $\alpha \Delta T_{\text{min}}$  y se aumente las de las frías en  $(1-\alpha) \Delta T_{\text{min}}$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

En lo que sigue se utilizará la primera de las convenciones.

Una vez adoptada una forma para la escala, se estará en disposición de una serie de temperaturas las que, ordenadas de mayor a menor, constituyen los extremos de los intervalos de la Tabla del Problema.

Para el caso del problema propuesto se obtienen, con  $\Delta T_{\min} = 10^{\circ}\text{C}$ , los valores 220, 200, 150, 110, 80, 70, 50 y 40, con lo cual se pueden determinar 7 intervalos de temperatura (en general, salvo valores coincidentes como en este caso, para N corrientes habrá  $2N-1$  intervalos).

Establecidos los intervalos se debe proceder a determinar los aportes y requerimientos de calor de las distintas corrientes, como se muestra en la tabla 8.

Obviamente, solo aparecen valores no nulos en aquellos intervalos en los que está definida cada corriente y debe tenerse en cuenta que las temperaturas decrecen de izquierda a derecha y las disponibilidades de energía se indican con signo negativo. Las temperaturas límites de la corriente contienen estrictamente a las del intervalo, es decir,  $\{T_{\text{sup}}, T_{\text{inf}}\}$  está totalmente incluido en  $\{T_{\text{si}}, T_{\text{e}}\}$ .

corr.	220	200	150	110	80	70	50	40
C1		- 450	- 360	- 270	- 90	- 180		
C2			- 320	- 240	- 80	- 160	- 80	
F1	240	600	480	360				
F2			440	330	110	220	110	
F3				210	70			

**Tabla 8.** *Tabla del Problema*

Luego, se deben calcular los balances netos de cada intervalo, resultando para cada uno de ellos, los siguientes valores:

	220	200	150	110	80	70	50	40
bal.	240	150	240	390	10	- 120	30	

**Tabla 9.** *Balances entálpicos netos*

Resulta claro que en los primeros cinco intervalos existe déficit de disponibilidad de calor, lo que, necesariamente, deberá cubrirse con el servicio caliente auxiliar. La disponibilidad del sexto podría utilizarse en el último intervalo, o enfriar, parcial o totalmente, las corrientes allí involucradas con el servicio de enfriamiento externo; a costa de tener que cubrir con vapor la demanda remanente del último.

En la figura 6 se hizo uso de una representación esquemática de lo que se denomina Cascada de Calor. En la figura 9, con un grado de detalle mayor, se presenta la correspondiente al problema planteado. Puede observarse que, simplemente, se grafican los distintos niveles térmicos en forma descendente

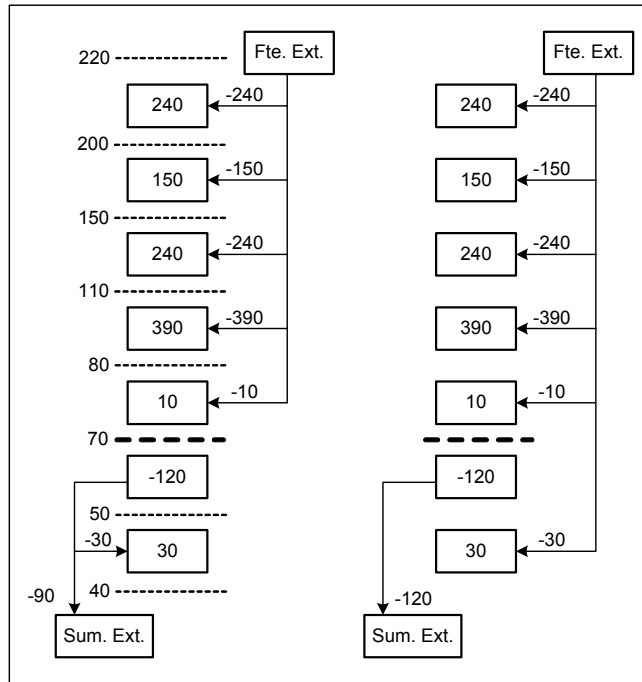


Figura 9. Cascada de Calor del problema

y en cada intervalo se dispone el balance entálpico. Además, se cuenta con los servicios auxiliares externos aportando o retirando el calor necesario donde corresponda.

En la parte izquierda de dicha figura puede verse que el consumo de los servicios auxiliares es el mínimo, 1030 Mcal/h de vapor y 90 Mcal/h de agua, en cambio, a la derecha, el hecho de cubrir el déficit del último intervalo con la fuente externa produce un incremento de 30 Mcal/h sobre los consumos de ambos servicios auxiliares.

A partir de la Tabla del Problema también es posible determinar estos consumos mínimos. Al analizar los balances entálpicos, se vio que en los primeros cinco intervalos siempre hubo déficit de disponibilidad de calor. La acumulación de esos déficits permite determinar el consumo de la fuente externa. Por lo tanto, metodológicamente, lo que se debe hacer es, primero, calcular el acumulado de los balances de cada intervalo, correspondiendo el

mayor valor positivo del mismo al mínimo requerimiento de la fuente externa (MRFE). Obviamente, si todos los valores son negativos, el requerimiento a la fuente externa es nulo. En la tabla 10 se puede ver que el valor de MRFE es 1030 Mcal/h, coincidiendo con el determinado en la cascada.

	220	200	150	110	80	70	50	40
bal.	240	150	240	390	10	- 120	30	
acum.	240	390	630	1020	1030	910	940	

**Tabla 10.** Balances entálpicos netos y acumulados

Entonces, puede definirse  $MRFE = \max_{\substack{k \in \{1, N_t\} \\ acum_k > 0}} (acum_k = \sum_{j=1}^k bal_j)$ , siendo  $N_t$  el

número total de intervalos. La fuente auxiliar deberá aportar  $-MRFE$ , de acuerdo a la convención utilizada.

El valor final en la fila de los acumulados es igual al balance energético total,

BET, de acuerdo al primer principio de la termodinámica,  $BET = \sum_{j=1}^{N_t} bal_j$

El mínimo requerimiento al servicio externo o sumidero frío, MRSE, surge de considerar el BET conjuntamente con el valor de MRFE. Estos tres valores deben lograr que el conjunto corriente más servicios esté térmicamente balanceado. Con la convención adoptada quedaría:

$$BET + MRSE - MRFE = 0 \rightarrow MRSE = MRFE - BET$$

De acuerdo a lo visto, el servicio de enfriamiento deberá extraer, como mínimo,  $1030 - 940 = 90$  Mcal/h. En la tabla 11 se muestra el estado en que queda la Tabla del Problema, al agregar a la tabla 10, los aportes de los servicios auxiliares.

	255	220	200	150	110	80	70	60	50	40
bal.	-1030	240	150	240	390	10	- 60	-15	75	
acum.	-1030	-790	-640	-400	-10	0	-60	-75	0	

**Tabla 11.** Balances entálpicos netos y acumulados con serv. aux. incluidos

Aparecen dos nuevos intervalos, el primero como consecuencia de la temperatura de ingreso de la fuente externa y otro por la temperatura de salida del agua. La temperatura de salida del vapor coincide con la de ingreso y la de entrada del agua con la de la corriente F2.

El balance térmico del sistema se expresa en el valor nulo del extremo derecho de la fila de los acumulados. Pero existe un cero que aparece en un intervalo interior, en donde se registraba, antes, el acumulado de 1030 Mcal/h, determinante del requerimiento mínimo a la fuente externa. Este valor nulo indica el punto de equilibrio interno, que, como ya se dijo, recibe el nombre de Punto Pinch, ubicado a 70°C para las fuentes y 60°C para los sumideros.

Si bien por razones didácticas se determinaron los balances entálpicos y acumulados en tablas separadas, estos se integran a la Tabla del Problema, como las dos últimas filas.

Se ha resuelto así, con distintas herramientas, la primera de las cuestiones oportunamente planteadas: la determinación del consumo mínimo de servicios auxiliares. Resta ahora encontrar el modo de definir la red sin que los requerimientos de la misma superen ese mínimo.

## **Método Pinch**

Para estructurar una red de intercambio térmico que requiera un consumo mínimo de servicios auxiliares es preciso que no se realicen intercambios de calor a través del Pinch. Para ello, la forma más simple es resolver, en forma separada, dos subproblemas, uno por encima de esa temperatura (bloque caliente) y otro por debajo (bloque frío). En el caso del problema propuesto estos “bloques” serían los que se resumen en la tabla 12.

1. Bloque caliente			
Corr.	W	T <sub>E</sub>	T <sub>S</sub>
C1	9	200	70
C2	8	150	70
F1	12	70	210
F2	11	60	140
F3	7	60	100

2. Bloque frío			
Corr.	W	T <sub>E</sub>	T <sub>S</sub>
C1	9	70	50
C2	8	70	40
F2	11	30	60

**Tabla 12.** Bloques del problema

En la estructuración de una red el punto Pinch representa la zona más restringida desde el punto de vista de los intercambios que se pueden llegar a plantear. En efecto, en el primer subproblema las corrientes calientes solo pueden ser enfriadas hasta los 70°C con las corrientes frías disponibles a 60°C o con agua, violando, en este último caso, la restricción de no transferir a través del Pinch. Un razonamiento análogo puede hacerse con el calentamiento de las frías hasta los 60°C.

Por esta razón, el método comienza la estructuración del esquema de la red, en cualquiera de los bloques, desde la temperatura del Pinch.

La exigencia de no utilizar el servicio auxiliar frío en el bloque caliente, ni el caliente "por debajo" del Pinch, plantea una serie de restricciones que deben respetar las decisiones básicas del llamado método Pinch para la estructuración de redes de intercambio o, en forma abreviada, método Pinch.

En todo lo que sigue, salvo que se diga lo contrario, sólo se considerarán las corrientes presentes en el Pinch.

Por lo pronto, en el "bloque caliente", cada corriente a enfriar hasta la temperatura del Pinch debe tener, por lo menos, una corriente fría con la que intercambiar, de donde resulta que

*Sobre el Pinch, en el bloque caliente, el número de corrientes frías  $n_f$  debe ser, al menos, igual al de las corrientes calientes  $n_c$ :*

$$[n_f \geq n_c]_{p+} \quad (4)$$

Con un razonamiento análogo se concluye que, en el bloque frío

$$[n_c \geq n_f]_{p-} \quad (5)$$

donde se ha indicado con  $p^+$  y  $p^-$  la presencia sobre el Pinch en el bloque caliente y frío, respectivamente.

Cuando estas condiciones no se cumplen se debe proceder a subdividir una o más corrientes de modo que se verifique la igualdad.

La elección de la paridad obedece a que toda subdivisión implica el agregado de nuevas corrientes y, de acuerdo a Hohmann, un incremento de igual valor en el número de equipos. Resulta obvio, entonces, que tales subdivisiones sólo deben efectuarse cuando sea estrictamente necesario y de modo tal que se generen el menor número posible de nuevas corrientes.

Para el caso del ejemplo, esta restricción se cumple en ambos bloques, por lo que no habría, en principio, necesidad de subdivisión alguna. Nótese que en el caso del bloque caliente hay solo dos corrientes de cada tipo presentes en el Pinch, ya que F1 no cuenta.

Pero no basta con la existencia, sobre el Pinch, de un número suficiente de corrientes del tipo requerido. Debe ser posible que estas corrientes sean utilizadas en un intercambio que respete la aproximación mínima fijada.

Téngase en cuenta que en el "bloque caliente", por ejemplo, para un intercambio entre corrientes presentes en el Pinch, el salto en el "lado frío" del equipo es igual a la aproximación mínima. En idéntica situación, para el bloque frío, la aproximación mínima se verifica sobre el lado caliente.

En la figura 10 se muestra tal circunstancia para dos intercambios posibles entre corrientes presentes en el Pinch, en el bloque caliente (a) y en el frío (b).

Adviértase que las pendientes de las rectas en el diagrama T-Q deben hacer que el salto en el lado contrario a donde se verifica la aproximación mínima sea mayor que ésta, con lo cual

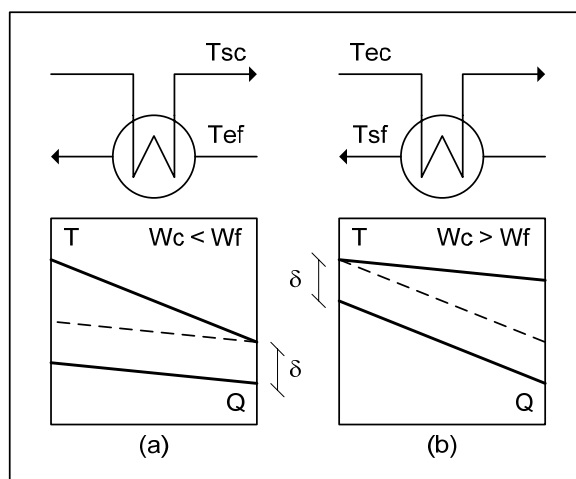


Figura 10. Intercambios sobre el Pinch



un intercambio entre corrientes presentes en el Pinch en el bloque caliente es factible si:

$$W_c \leq W_f \quad (6)$$

y en el frío

$$W_f \leq W_c \quad (7)$$

Cuando no existe ningún par donde se cumplan estas relaciones debe acudirse, una vez más, a la subdivisión de corrientes para lograrlo. Así, en el caso del ejemplo, la condición anterior no se verifica en el bloque frío, por lo que resultará necesario subdividir la corriente F2.

En la tabla 13 se indica una de las posibles subdivisiones a que se puede someter la corriente F2. El criterio utilizado aquí - existen otros igualmente correctos - ha sido dejar planteado un intercambio entre C2 y F2<sub>1</sub> que satisface

Corr.	C1	C2	F2 <sub>1</sub>	F2 <sub>2</sub>
W	9	8	8	3
T <sub>E</sub>	70	70	30	30
T <sub>S</sub>	50	40	60	60

**Tabla 13.** Primer paso en el bloque frío

*simultáneamente* los requerimientos de ambas corrientes, lo que resulta muy conveniente en relación al número de intercambiadores que contendrá la red, como se verá más adelante.

En el bloque caliente pareciera no ser necesario, en principio, adoptar una decisión similar. Sin embargo, si se definiera un intercambio entre la corriente F2 y, por ejemplo, la C1 - propuesta que cumple la relación exigida sobre los W - en el siguiente intercambio entre corrientes presentes en el Pinch, C2 y F3, no se verificaría esta relación. Resulta obvio que no puede admitirse una propuesta de intercambio que coloque al sistema remanente en una condición tal que no sea posible definir una decisión que cumpla con todas las restricciones.

Sobre el Pinch, se podría definir una capacidad global de enfriamiento, o lo que es lo mismo, un requerimiento global de calentamiento, para las corrientes

frías, que será proporcional a  $\sum_{i=1}^{n_f^p} Wf_i$ . Con p se indica, según el caso, la pertenencia de la corriente al bloque caliente o al frío. Análogamente, para las

corrientes calientes, se puede definir una capacidad global de calentamiento, o requerimiento global de enfriamiento, que podrá representarse por  $\sum_{i=1}^{n_c^p} Wc_i$ .

Para un salto infinitesimal de temperatura, sobre el Pinch, en el bloque caliente, la disponibilidad global de enfriamiento no debe ser menor que el requerimiento global del mismo tipo. En el bloque frío, la disponibilidad global de calentamiento debe ser, al menos, igual al requerimiento global. De otro modo, sería necesario la utilización de un servicio auxiliar no permitido en el bloque.

Se puede definir, para el bloque caliente, una diferencia,  $d^+$ , entre los términos globales, la que debe ser siempre no negativa:

$$d^+ = \sum_{i=1}^{n_f^p} Wf_i - \sum_{j=1}^{n_c^p} Wc_j \geq 0 \quad (8)$$

Supóngase que, en dicho bloque, se propone el intercambio entre la corriente fría  $k$  y la caliente  $l$ , ambas presentes en el Pinch. En forma análoga a la ecuación 8 se puede definir una diferencia,  $e^+$ , entre los flujos de capacidad calorífica, la que también debe ser no negativa.

$$Wf_k - Wc_l = e^+ \geq 0 \quad (9)$$

Luego del intercambio, en el sistema remanente, sobre el Pinch, no habrán de figurar ni la corriente fría  $k$  ni la caliente  $l$ , pero la nueva diferencia  $d^+$  deberá seguir siendo no negativa. Esto implica

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n_f^p} Wf_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{n_c^p} Wc_j = \sum_{i=1}^{n_f^p} Wf_i - \sum_{j=1}^{n_c^p} Wc_j - Wf_k - Wc_l = d^+ - e^+ \geq 0 \quad (10)$$

En consecuencia, el intercambio entre una corriente caliente  $l$  y otra fría  $k$ , ambas presentes en el Pinch, en el bloque caliente, deberá respetar que:

$$e^+ = Wf_k - Wc_l \leq \sum_{i=1}^{n_f^p} Wf_i - \sum_{j=1}^{n_c^p} Wc_j = d^+ \quad (11)$$

*Esto es, en los intercambios entre corrientes presentes en el Pinch, en el bloque caliente, la diferencia en los  $W$  de la corriente fría y caliente no debe superar la diferencia entre la suma de dichos*

parámetros para todas las corrientes presentes en ese momento en el punto.

En forma análoga, para el bloque frío, en los intercambios entre corrientes presentes en el Pinch se debe cumplir:

$$Wc_1 - Wf_k \leq d^-$$

$$\text{siendo } d^- = \sum_{j=1}^{n_c^-} Wc_j - \sum_{i=1}^{n_f^-} Wf_i \quad (12)$$

Volviendo al bloque caliente del ejemplo, el valor de  $d^+$  para el mismo es  $(11+7) - (8+9) = 1$ , con lo cual la corriente F2 no puede ser usada tal como está pues, como mínimo,  $e^+$  será igual a  $11 - 9 = 2$ . Es preciso dividir la corriente F2, por ejemplo, en una subcorriente  $F2_1$  con  $W = 9$  y otra  $F2_2$  con  $W = 2$ . La alternativa elegida presupone un próximo intercambio entre C1 y  $F2_1$ , sin variar el margen disponible en  $d^+$ .

En todos los intercambios, el método Pinch utiliza la regla de maximizar la cantidad de calor transferida, que se planteó al considerar el trabajo de Masso y Rudd. En el caso del intercambio considerado es posible transferir  $Qt = 9 \cdot 80 = 720$  Mcal/h, valor para el cual se satisfacen completamente los requerimientos de la corriente  $F2_1$  (las exigencias de C1 son mayores: 1170 Mcal/h). El sistema remanente queda como se muestra en la tabla 14.

Corr.	C1	C2	F1	F2 <sub>2</sub>	F3
W	9	8	12	2	7
T <sub>E</sub>	200	150	70	60	60
T <sub>S</sub>	150	70	210	140	100

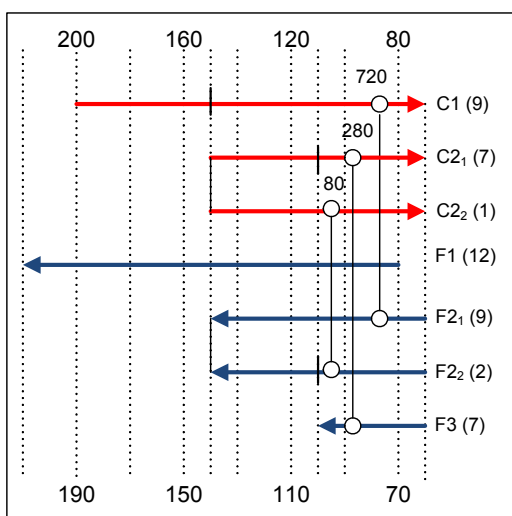
**Tabla 14.** Bloque caliente – Primer remanente

Allí, sobre el Pinch, solo están presentes C2,  $F2_2$  y F3. Puede advertirse que, si bien el número de corrientes frías es suficiente, no se cumple, en ningún caso, la relación exigida a los W. Esto ha de obligar a dividir la corriente caliente C2 en dos subcorrientes con  $W = 7$  y  $W = 1$ , admitiendo, con el mismo criterio anterior, un intercambio entre una de las subcorrientes y F3. El sistema queda como lo indica la tabla 15.

Corr.	C1	C2 <sub>1</sub>	C2 <sub>2</sub>	F1	F2 <sub>2</sub>	F3
W	9	7	1	12	2	7
T <sub>E</sub>	200	150	150	70	60	60
T <sub>S</sub>	150	70	70	210	140	100

**Tabla 15.** Bloque caliente – Segundo remanente

Una vez que se realice el intercambio entre C2<sub>1</sub> y F3, sobre el Pinch, sólo restarán C2<sub>2</sub> y F2<sub>2</sub>. Para el primero de ellos es posible intercambiar



**Figura 11.** Intercambios sobre el Pinch

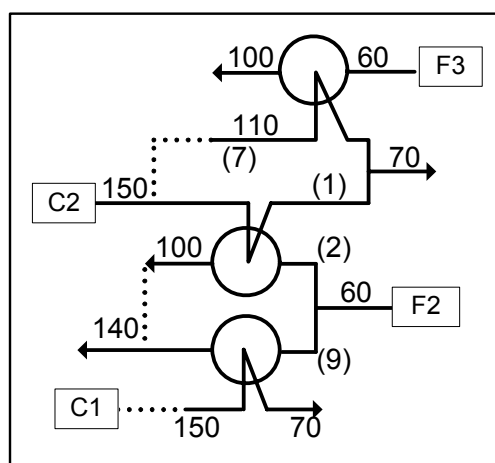
donde se ha representado cada corriente como una flecha de un largo proporcional al salto térmico requerido. (En líneas punteadas figura la escala de temperaturas, la graduación superior corresponde a las corrientes calientes, la inferior a las frías, respetando la aproximación mínima adoptada).

Los intercambios se indican mediante una línea con círculos que unen las corrientes participantes del mismo.

En la figura 12 se muestra el esquema tecnológico sintetizado hasta el punto mostrado en la figura anterior.

min  $[7 \cdot (150 - 70); 7 \cdot (100 - 60)] = 280 \text{ Mcal/h}$ , con lo que se satisfacen los requerimientos de F3. Para el segundo caso se pueden intercambiar 80 Mcal/h, con lo que la corriente C2<sub>2</sub> cumple con sus exigencias y resta ver, para F2<sub>2</sub>, que intercambio se hará cargo del calentamiento desde  $60 + 80/2 = 100^\circ\text{C}$  hasta los  $140^\circ\text{C}$  establecidos.

Los tres intercambios propuestos hasta aquí se esquematizan en la figura 11,



**Figura 12.** Esquema tecnológico parcial

Adviértase que, en ambas figuras, sólo se ha representado el problema en el bloque caliente, ya que, como quedó dicho, el existente por debajo del Pinch constituye, para el método, otro problema, que se aborda en forma totalmente independiente. Puede observarse, también, que, en el estadio actual de la estructuración, las corrientes C1, C2<sub>1</sub> y F2<sub>2</sub> se encuentran cumplimentadas en forma parcial, esto es, hay decisiones sobre ellas que aún restan definirse. Ello se ha indicado en la figura 11 con una línea vertical sobre la respectiva corriente y en la 12 con una línea de puntos.

En este momento de la estructuración, no quedan intercambios sobre el Pinch que realizar. El sistema remanente se puede ver en la tabla 16.

Para esta etapa, el método Pinch no impone ninguna restricción, dejando en libertad al diseñador para escoger los intercambios que considere más convenientes. La única indicación que establece está referida a los intercambios con fuentes auxiliares, los que deben postergarse lo más posible.

Corr.	C1	C2 <sub>1</sub>	F1	F2 <sub>2</sub>
W	9	7	12	2
T <sub>E</sub>	200	150	70	100
T <sub>S</sub>	150	110	210	140

**Tabla 16.** *Bloque caliente – Tercer remanente*

Para definir las decisiones en aquellos puntos donde el método no plantea ninguna consideración especial, normalmente se suele hacer uso de una de las reglas heurísticas clásicas en la formulación de redes de intercambio: *conviene proponer el intercambio, en el bloque caliente, entre aquellas corrientes que presentan las menores temperaturas, de salida en el caso de las calientes, de entrada en el de las frías*. Una regla similar puede plantearse, en el bloque frío, en las altas temperaturas, considerando las entradas para las calientes y las salidas para las frías.

Dicho de otra manera, puede decirse que conviene intercambiar las porciones más calientes de las corrientes calientes con las más calientes de las frías o, en forma inversa, las porciones más frías de ambos tipos de corrientes. Como el método Pinch plantea que deben realizarse al final los intercambios con los servicios auxiliares, se debe continuar estructurando la red, en el bloque caliente, desde las temperaturas más bajas hacia las más altas y, en el bloque frío, desde el nivel térmico superior al inferior.

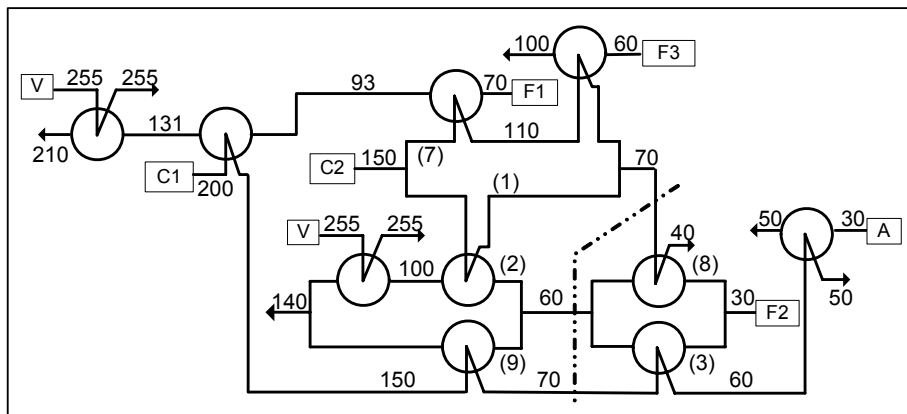
Por lo tanto, si se aplica en el bloque caliente, la regla heurística enunciada, se puede proponer el intercambio de 280 Mcal/h entre  $C2_1$  y  $F1$ , resultando una temperatura de salida de  $93.33^{\circ}\text{C}$  para esta última.

En el próximo intercambio, se agota la única corriente caliente que resta, al intercambiar 450 Mcal/h con  $F1$ .

Las porciones remanentes de la corriente  $F1$  y de la subcorriente  $F2_2$ , como es obvio, serán calentadas con el vapor.

La síntesis del bloque frío resulta inmediata, teniendo en cuenta la tabla 13.

La sucesiva aplicación de los pasos del método Pinch y de las reglas auxiliares consideradas conducen al esquema de la figura 13, donde se ha indicado, con una línea de trazos, la separación de los subproblemas por encima y debajo del Pinch.



**Figura 13.** Estructura sintetizada

Si bien se ha conseguido una estructura donde el consumo de servicios auxiliares es mínimo, puede plantearse la posibilidad de mejorar el costo total anual asociado, reduciendo la incidencia de la amortización.

No siempre la aplicación de las reglas del método Pinch conduce a una estructura con mínimo consumo de servicios auxiliares. Si por ejemplo, en el bloque caliente, existe una corriente caliente cuya temperatura de salida está levemente por encima de la del Pinch, es posible que, aunque se hayan respetado las reglas del método, cuando se deba proceder a plantear su intercambio, no exista una corriente fría capaz de satisfacer la porción de

menor temperatura de esa corriente. Esto obligará a utilizar agua para enfriarla, violando el principio de no intercambio a través del Pinch.

Este caso ha sido tratado por los autores, pero su consideración excede los límites de esta obra.

## **Mejoramiento de la estructura**

Para ello, debería analizarse si resulta factible reducir el número de unidades. Un primer parámetro a considerar es el  $U_{min}$ , pero teniendo en cuenta que el cálculo del mismo deberá aplicarse a cada uno de los subproblemas, mutuamente independientes, que se generan a partir del punto Pinch.

Lo anterior implica considerar que el gasto en servicios es más importante que la amortización de la red.

Al analizar el número de equipos presentes en la estructura mostrada en la figura 13, se pueden tener en cuenta o no el número de subdivisiones efectuadas. En este último caso, se trataría de determinar el número mínimo de equipos predicho por Hohmann, igual al número de corrientes menos uno, sin que ello garantice el cumplimiento de las reglas del método Pinch.

Esto último no ocurre cuando se consideran las subdivisiones pero en tal caso esa estimación será más alta por respetar el mínimo consumo de servicios auxiliares.

En el bloque frío si no se consideran las subdivisiones, hay cuatro corrientes y el valor predicho por Hohmann es tres, que es, justamente el número que tiene la red. Si se las considera, el número de corrientes y la estimación de Hohmann se incrementan en uno, apareciendo entonces, una discrepancia.

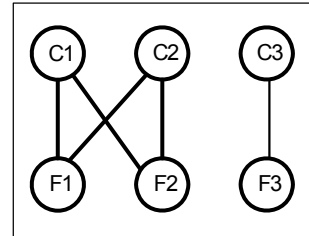
En el bloque caliente sin contar las subdivisiones, hay seis corrientes con lo que debería haber cinco equipos. En la red habría un exceso de dos. Si se tienen en cuenta las subdivisiones efectuadas en C2, F2 y el vapor, habría un equipo menos que el predicho por Hohmann. Esto es, en este bloque, la expresión  $U_{min} = N - 1$  no se cumple nunca.

La razón de esta discrepancia radica en que el número de equipos de una red,  $U$ , viene dado en rigor por la ecuación

$$U = N + C - S \quad (13)$$

siendo  $C$  el número de ciclos y  $S$  el de subsistemas presentes en la red.

¿Qué debe entenderse por un ciclo en la estructuración de una red de transferencia de calor? El grafo bipartito de la figura 14 puede resultar útil en tal sentido.



Allí aparece remarcada una estructura singular:

el conjunto de arcos y nodos forma un circuito, C1- **Figura 14.** Ciclo y subsistemas F2-C2-F1-C1. En términos conceptuales, dos sumideros están tomando calor de las mismas dos fuentes, utilizando para ello cuatro

equipos. Podría preguntarse si es posible, por ejemplo, que la cantidad de calor cedida por la corriente C1 a la corriente F2 fuese aportada por C2, desapareciendo, en consecuencia, uno de los intercambiadores. Obviamente, sería necesario modificar las cantidades de calor en los otros intercambios, de modo de mantener el equilibrio térmico existente.

Puede verse además, que el intercambio entre las corrientes C3 y F3 está aislado de la estructura que forman C1-C2-F1-F2. Cada uno de estos grupos constituye lo que se conoce como subsistema.

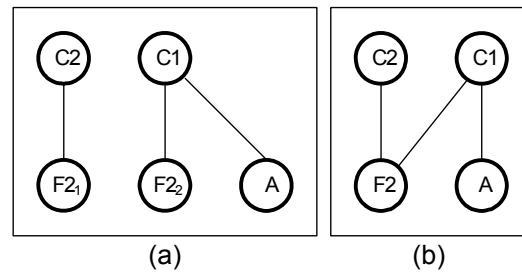
Resulta claro, entonces, que la regla de Hohmann es un caso particular de la ecuación 13, donde no existen ciclos y sólo está presente el sistema global.

Esta ecuación, por otra parte, permite ver que, si bien la subdivisión de una corriente incrementa el número de unidades de la red, si, como consecuencia de la misma, es posible plantear un intercambio donde se satisfacen, a la vez, los requerimientos de la fuente y el sumidero, se generará un subsistema, que compensa el mencionado incremento.

En la figura 15 se muestran los grafos bipartitos del bloque frío de la red estructurada para el problema propuesto, considerando o no, las subdivisiones.



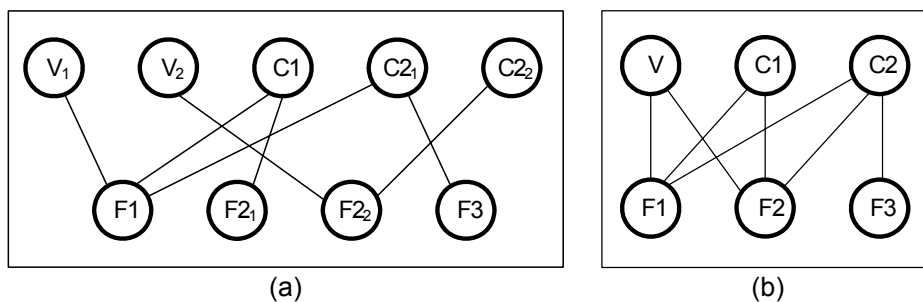
Son dos visiones de la misma estructura: una, donde se tienen en cuenta las decisiones puntuales que se han tomado y otra, que podría considerarse una visión macro del sistema.



**Figura 15.** Grafos bipartitos en el bloque frío

En (a) puede verse que se subdividió la corriente F2 de tal manera que el requerimiento de calor de la subcorriente es exactamente igual a la disponibilidad de la fuente con la que intercambia. Se compensa, así, el incremento en el número de corrientes con la aparición de un subsistema. De aquí se desprende la importancia de efectuar una adecuada subdivisión de corrientes, ya que pueden escogerse valores que determinen la reducción del número de equipos necesarios. Al no tener en cuenta las subdivisiones, la parte (b) de la figura, el número de equipos del bloque coincide con la estimación de Hohmann, no hay ciclos y existe un único subsistema.

Si se analiza del mismo modo el bloque caliente, se pueden explicar las discrepancias anotadas más arriba. En la parte (a) de la figura 16, se puede apreciar la existencia de dos subsistemas y ningún ciclo. En la (b) en cambio, se visualizan dos ciclos independientes, como se verá más adelante, y un solo subsistema. En cualquiera de los dos enfoques se cumple lo que establece la ecuación 13.



**Figura 16.** Grafos bipartitos del bloque caliente

Ahora cabría preguntarse si es posible disminuir el número de equipos de la estructura disponible, manteniendo siempre el mínimo consumo de servicios y

la aproximación mínima adoptada. Esto último presupone que se seguirá trabajando, en forma separada, sobre los distintos bloques que genera el punto Pinch.

Una variación del número de equipos puede lograrse si se modifican las decisiones efectuadas al generar la estructura, ya sea cambiando el par de corrientes elegido en las distintas transferencias o los factores de subdivisión de las corrientes. La primera de las opciones implica un cambio de estructura, por lo que resultaría engorroso hacerlo a partir de la existente y no será considerado.

La segunda alternativa conduce a eliminar, total o parcialmente, los ciclos existentes, como se verá a continuación.

## **Análisis de ciclos**

Para poder eliminar los ciclos, lo primero que debe hacerse es detectarlos. Si bien es posible realizar el análisis a partir de una representación más o menos detallada de la estructura disponible, es suficiente la información contenida en un grafo bipartito para poderlo realizar.

Teniendo en cuenta que lo que se busca es modificar los factores de subdivisión utilizados oportunamente, el tipo de grafo a considerar será aquel donde no figuran las subdivisiones, como los que se muestran en la parte (b) de las figuras 15 y 16.

En esos grafos, una corriente que sólo registra un intercambio, nunca podrá formar parte de un ciclo. De modo que, pueden eliminarse el nodo y el arco que representan respectivamente a la corriente y el equipo, produciendo así una representación más simple. Así, en la figura 16 (b) se debería eliminar el nodo F3 y el arco que la vincula con la corriente C2.

Una vez debidamente adecuada la representación de la red, puede iniciarse el análisis de ciclos. Para ello se requiere disponer de algún procedimiento algorítmico, donde tal detección sea posible.

El que se adoptará se basa en recorrer el grafo en un sentido arbitrario, tomando, desde un nodo de partida, un arco determinado y transformando al nodo que se encuentra en el otro extremo del mismo en el nuevo punto de arranque.

Cuando en una secuencia [...nodo - arco - nodo...] se verifica la repetición de un nodo, los arcos comprendidos entre las dos repeticiones constituyen un ciclo.

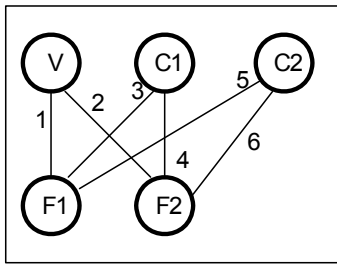
A partir de esta información es posible construir la *matriz de ciclos y arcos* (o *intercambios*), donde se individualizan la totalidad de ciclos presentes en el sistema y, para cada uno de ellos, los arcos que se encuentran involucrados.

En el cuadro 1 se resumen los pasos a seguir para determinar dicha matriz a partir de la información contenida en el grafo.

1. Si dos nodos están vinculados por  $N$  ( $N > 1$ ) arcos, incorporar  $N-1$  ciclos a la *matriz de ciclos y arcos* y eliminar del grafo  $N-1$  arcos de ese conjunto.
2. Generar una lista inicial vacía. Tomar un nodo cualquiera.
3. Si el nodo figura en la lista de nodos ir a 6; si no
4. Incorporar el nodo a la lista de nodos.
5. Tomar un arco cualquiera que contenga al nodo y no haya sido considerado. Tomar el otro nodo vinculado por el arco. Ir a 3.
6. La secuencia que comienza en la inclusión previa del nodo en la lista y que concluye con el arco elegido, que termina en ese nodo, constituye un *ciclo*.
7. Si el ciclo ya ha sido detectado, desecharlo. Si no, incorporarlo a la *matriz de ciclos y arcos*.
8. Eliminar de la lista el último nodo. Considerar el nuevo último nodo (anterior penúltimo).
9. Si el nodo tiene arcos aún no considerados ir a 5; si no
10. Si en la lista de nodos hay un solo elemento *Terminar*, si no, ir a 8.

**Cuadro 1.** *Generación de la matriz de Ciclos y Arcos*

El análisis se realizará para el bloque caliente de la estructura disponible. La figura 17 muestra el grafo bipartito simplificado, donde, para que la tarea de análisis resulte más sencilla, se han numerado los arcos presentes.



**Figura 17.** Grafo del bloque caliente

Así, tomando el Vapor como nodo inicial, por ejemplo, puede considerarse la secuencia de nodos [V-F1-C1-F2-V]. Como el nodo V ya está en la lista, el conjunto de arcos (1, 3, 4, 2) constituye un ciclo, identificado como L1 en la figura 18, que muestra la matriz de ciclos y arcos para el ejemplo.

El proceso sigue, de acuerdo al algoritmo, eliminando el nodo V de la lista y eligiendo otro arco aún no analizado que intercambie con F2; el único que falta es el intercambio con la corriente C2 (arco 6). Luego debe elegirse el intercambio con la corriente F1 (arco 5). Ahora la lista queda [V-F1-C1-F2-C2-F1], detectándose otro ciclo, no considerado aún, el (3, 4, 6, 5), indicado como L2 en la figura 18.

		Arcos					
		1	2	3	4	5	6
Ciclos	L1	●	●	●	●		
	L2			●	●	●	●
	L3	●	●			●	●

**Figura 18.** Matriz de arcos y ciclos

De un modo análogo se detecta el ciclo L3.

De la manera como se ha procedido, es posible detectar ciclos que se forman con partes de otros ciclos, de los cuales, obviamente, no son independientes. El análisis sólo debe considerar los ciclos independientes, por lo que es preciso depurar, si es necesario, la información obtenida.

El algoritmo destinado a determinar el conjunto de ciclos independientes utiliza una propiedad de los grafos por la cual, siendo L1 un conjunto de arcos definido por  $L1 = Sa \cup S$  y L2 otro conjunto,  $L2 = Sb \cup S$ , el conjunto Lx formado por los subconjuntos no comunes de L1 y L2,  $Lx = Sa \cup Sb$ , no es independiente de L1 y L2.

Resulta claro, de la figura 18, que los tres ciclos detectados no son independientes, ya que cualquiera de ellos puede ser generado a partir de los otros dos, en consecuencia, en el análisis deben considerarse sólo dos.

Al continuar aplicando el algoritmo se detectan más ciclos, pero, estos ya han sido encontrados por otra vía.

Por supuesto que la determinación de los ciclos independientes en un grafo debe realizarse toda vez que se modifique la estructura de la red, por ejemplo, por la eliminación de un intercambio.

Una vez detectados los ciclos independientes se está en condiciones de analizar la posibilidad de eliminarlos. En la figura 19 se muestra un primer paso de la modificación de la red al intentar eliminar el ciclo L1.

Allí se indican resaltados los cuatro intercambios que se encuentran involucrados en el ciclo (adicionalmente figura, con un círculo sin relleno y por razones exclusivamente didácticas, un quinto

entre  $C_{2_2}$  y  $F_{2_2}$ ). Se ha propuesto modificar las cantidades de calor intercambiado en cada equipo en un valor genérico  $X$ , de modo que por sumas y restas, se mantenga balanceado el sistema.

Dicho valor podrá ser positivo o no, pero siempre deberá ser positiva la cantidad de calor a remover. Si  $X$  es negativo no podrá ser inferior a  $-720$  Mcal/h, con lo cual desaparece el intercambio entre  $C_1$  y  $F_{2_1}$ . Con ello, la totalidad de la corriente  $C_1$  deberá intercambiar con  $F_1$ , lo cual resulta termodinámicamente imposible puesto que la fuente estaría saliendo a una temperatura inferior a la de la entrada del sumidero.

Los valores positivos no pueden ser superiores a  $80$  Mcal/h, con lo cual el equipo donde se produce el calentamiento de la subcorriente  $F_{2_2}$  con vapor se eliminaría.

De lo que muestra la figura 19, la desaparición de ese equipo obliga a que la totalidad de  $F_{2_2}$  intercambie  $80$  Mcal/h con  $C_{2_2}$ , en tanto  $F_{2_1}$  incrementa en la misma cantidad lo que recibe de  $C_1$ . La primera variación es posible sin violar la aproximación mínima adoptada.

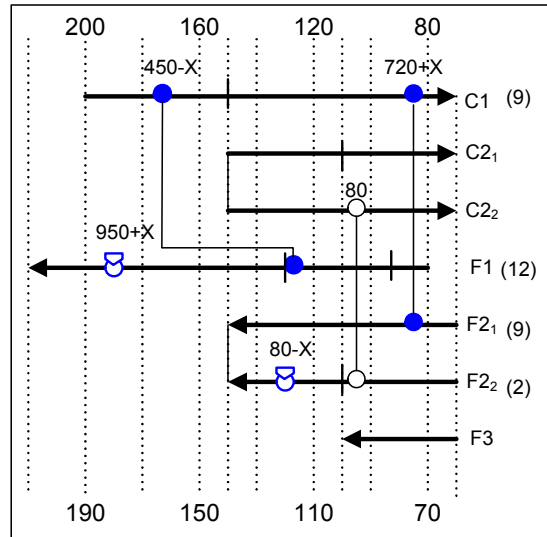


Figura 19. Eliminación del ciclo 1 (a)

El nuevo intercambio entre  $C_1$  y  $F_{2_1}$  requiere que el  $W$  de esta última subcorriente sea igual a  $800/80 = 10$ , con lo cual la subdivisión de la corriente  $F_2$  queda establecida en los valores 10 y 1, en lugar de los originales 9 y 2. A la misma conclusión se llega si se analizan las modificaciones en el intercambio entre  $C_{2_2}$  y  $F_{2_2}$ . En la figura 20 se resumen, en forma esquemática, las modificaciones citadas.

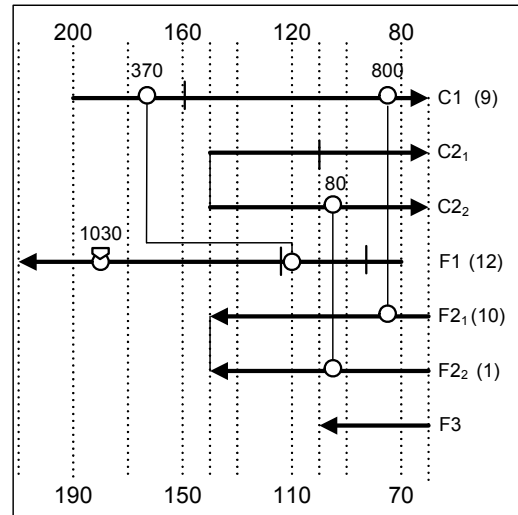


Figura 20. Luego de eliminar el ciclo 1

Una vez eliminado el ciclo, debe hacerse, sobre la estructura resultante, un nuevo análisis de detección.

En este caso, puede verse que si se elimina el arco 2 del grafo bipartito de la

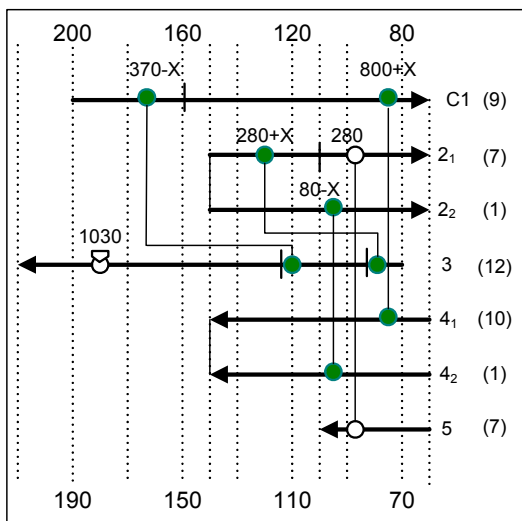


Figura 21. Eliminación del ciclo L2

figura 17, queda el ciclo que se denominó L2.

Resta ahora ver la factibilidad de eliminar este ciclo.

En este caso los posibles intercambios a eliminar son, como puede verse en la figura 21, los que se verifican entre las corrientes  $C_{2_2}$  y  $F_{2_2}$  ( $X = 80$ ) y  $C_{2_1}$  y  $F_{2_1}$  ( $X = -280$ ). En el primer caso, desaparecería la rama  $C_{2_2}$ , anulándose la división reclamada por el método

Pinch, con lo cual se produce una violación de las reglas del mismo.

En el otro caso, desaparecerá el equipo donde intercambian  $C_{2_1}$  con  $F_1$ , lo que obligará a modificar el factor de división de la corriente  $C_2$ , haciendo  $W = 3,5$  para  $C_{2_1}$  y  $4,5$  para  $C_{2_2}$ . Esta última intercambia, ahora,  $360$  Mcal/h con  $F_{2_2}$ , con lo cual la corriente  $F_2$  debe dividirse de otra manera,  $W = 4,5$  para  $F_{2_2}$  y  $6,5$  para la otra rama. Esto último hace que el intercambio entre  $C_1$  y el nuevo  $F_{2_1}$  viole las reglas del Pinch ( $6,5 < 9$ ).

La conclusión de este análisis es que el ciclo L2 no puede ser eliminado.

La figura 22 muestra el esquema de proceso resultante de la eliminación del único ciclo de transferencia posible, pudiéndose advertir la reducción en uno del número de equipos en la zona por encima del punto Pinch.

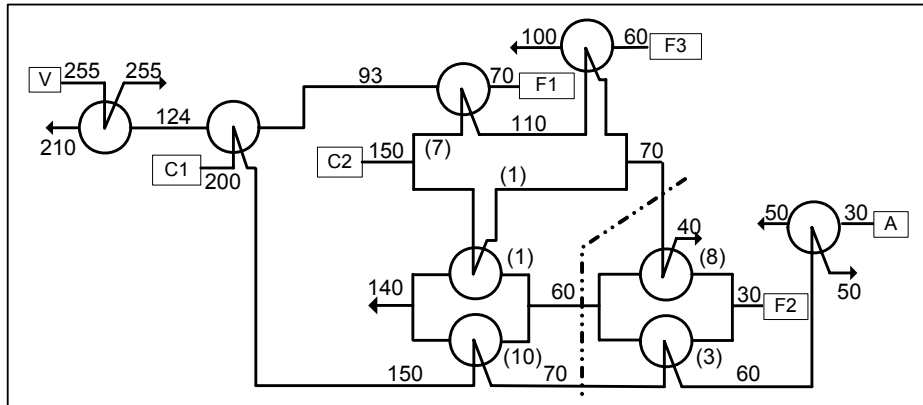


Figura 22. Estructura mejorada

## Complemento SinRed

Este complemento permite determinar la aproximación mínima óptima, generar las curvas compuestas balanceadas y realizar la síntesis de una red de intercambio térmico de uno o más esquemas para un determinado problema.

Los casos que pueden ser tratados admiten hasta 5 corrientes de proceso y un servicio auxiliar de cada tipo.

Al cargarse el complemento genera el elemento de menú *SinRed*, desde el cual es posible seleccionar las distintas operaciones. Lo primero que se debe hacer es ingresar la información del problema, eligiendo la orden *Nuevo Problema*. Inmediatamente se crea un nuevo libro con la hoja *Datos del Problema*. En ella existen áreas resaltadas, específicas para el ingreso de los datos.

Una vez hecho esto, es posible realizar cualquiera de las tres operaciones siguientes:

- Calcular la aproximación mínima óptima de acuerdo al esquema

propuesto por Linnhoff y Ahmad.

- b) Generar las curvas compuestas balanceadas. Luego de solicitar el ingreso de una aproximación mínima, se grafican en la hoja *CurvaComp*.
- c) Realizar la síntesis de una red de intercambio térmico. Corresponde a la orden *Sintetizar RIT*. Tras el ingreso de un valor para la aproximación mínima, se habilitan las órdenes correspondientes a las operaciones del Método Pinch (*Intercambio, Dividir corriente e Interc. Serv. Auxiliar*). La síntesis comienza por el bloque caliente y los datos de las corrientes disponibles aparecen en una hoja especial llamada *Bloque Caliente*.

El intercambio requiere que se introduzcan los códigos de identificación de las corrientes caliente y fría que se proponen para el intercambio. Si no hay error, se calcula el calor intercambiado, las temperaturas resultantes para las corrientes y el costo del equipo de intercambio.

La división requiere que se introduzca el código de identificación de la corriente a dividir y luego, el valor del  $W$  que se desea para una de las dos subcorrientes.

El intercambio con el servicio auxiliar que corresponde al bloque en el que se está trabajando requiere la introducción del código de identificación de la corriente que se propone para el intercambio. Si no hay error, se calcula el calor intercambiado, el consumo y el gasto en el servicio auxiliar y el costo del equipo de intercambio.

Cuando se termina con el bloque caliente, se pasa a estructurar el bloque frío. Al finalizar una estructura en cualquiera de los bloques, es posible generar otros esquemas alternativos para ese mismo bloque.

En una hoja especial, llamada Resultados, se vuelca toda la información generada durante el proceso de síntesis, lo que permite el cálculo del costo total anual para cada uno de los esquemas estructurados para cada bloque. Dada la independencia de los bloques, de acuerdo al método Pinch, es posible generar la estructura completa, eligiendo la económicamente más conveniente en cada sector.



Lo expuesto aquí es una síntesis de los aspectos básicos del complemento SinRed. Una información más completa se puede obtener accediendo a la ayuda del mismo.

Además, en el Anexo A se agrega una tutoría con las distintas posibilidades de uso del complemento.

## **Bibliografía**

- Iglesias O.A., Paniagua C.N., “Una mejora en el Método Pinch”, Actas de VIII International Conference on Engineering and Computer Education (ICECE'2013), Luanda, Angola, p. 475-478, 2013.  
Iglesias O.A., Paniagua C.N., “Uso de planillas de cálculo en la enseñanza de síntesis de procesos”, Anales del 3er. Congreso Argentino de Enseñanza de Ingeniería, (3er. CAEDI), Bahía Blanca, Argentina, II tomo, pág. 459-465, 2000.
- Kemp I.C., “Pinch Analysis and Process Integration”, Elsevier, 2º Ed., 2007.  
Linnhoff B., Ahmad S., “Cost optimum heat exchanger networks-1. Minimum energy and capital using simple models for capital cost”, Computers Chem. Eng., 14, p.729, 1990.
- Linnhoff B., Flower J.R., "Synthesis of Heat Exchanger Network", AIChEJ, 24, p.633, 1978.
- Linnhoff B., Hindmarsh E., "The Pinch Design Method for Heat Exchanger Networks", Chem.Engng.Sci., 38, p.745, 1983.
- Smith R., “Chemical Process Design and Integration”, John Wiley & Sons Ltd, 2005.

## Propuestas de trabajo

1) Se desea sintetizar una red de intercambiadores para cumplimentar las exigencias impuestas a las siguientes corrientes:

Corriente	WCp [kW/ °C]	T. entrada [°C]	T. salida [°C]	Coef. pelicular [kW/m <sup>2</sup> °C]
C1	7	110	40	0,75
C2	4	160	50	0,50
F1	8	50	140	0,50
F2	5	70	170	0,75

Se dispone de un vapor a 250°C ( $h_V = 5,5 \text{ kW/}^\circ\text{C m}^2$ ) y agua a 30 °C, con un incremento máximo permitido de 20°C ( $h_A = 1,5 \text{ kW/}^\circ\text{C m}^2$ ).

- Costo de los equipos (\$):  $2000 A^{0,65}$  (A = área en m<sup>2</sup>)
  - Costo del vapor: 120 \$/ kW año
  - Costo del agua: 10 \$/ kW año
  - Amortización: lineal, 20% anual
- 
- a) Obtener las curvas compuestas utilizando el complemento *SinRed* y calcular la *aproximación mínima óptima* estimando los costos totales anuales para tres aproximaciones mínimas (6°C, 9°C y 12°C).
  - b) Verificar el valor obtenido con el calculado por el *SinRed*
  - c) Usando la aproximación mínima óptima obtenida y la Tabla del Problema determinar:
    - 1) El mínimo consumo de servicios auxiliares
    - 2) El punto Pinch
  - d) En forma manual, utilizando el Método Pinch, obtener una estructura posible para la red de intercambio.
  - e) Usar el complemento *SinRed* para obtener varios esquemas, incluyendo el obtenido manualmente.
  - f) Verificar la existencia de ciclos en la mejor alternativa. Si existen, y es posible, eliminarlos.

2) Dadas las siguientes corrientes:

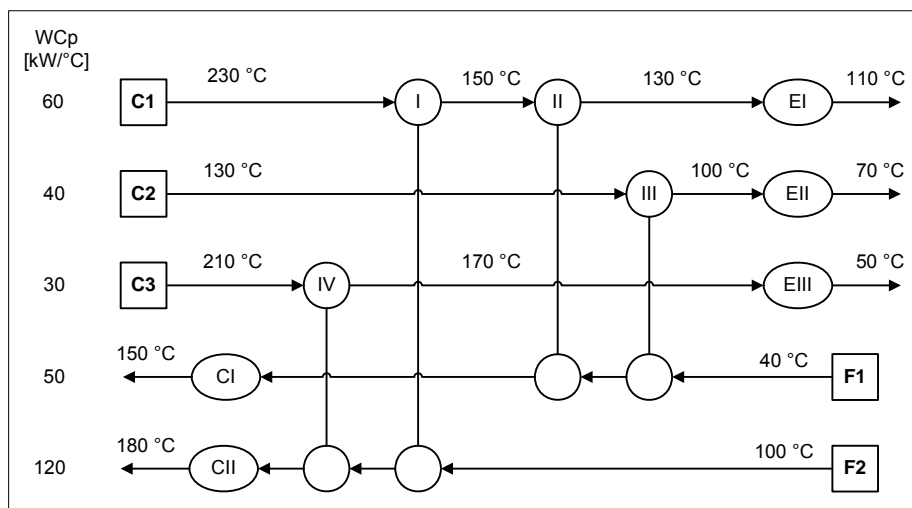
Corriente	WCp [kW/ °C]	T. entrada [°C]	T. salida [°C]	Coef. pelicular [kW/m <sup>2</sup> °C]
C1	3,5	230	140	0,75
C2	3,0	240	100	0,75
C3	6,0	170	50	0,50
F1	4,5	40	200	0,50
F2	2,0	70	190	0,75
F3	5,0	100	230	0,50

Utilizar el complemento *SinRed* para:

- Determinar la aproximación mínima óptima.
- Obtener varios esquemas para la red de intercambio térmico.
- Verificar la existencia de ciclos en la mejor alternativa. Si existen, y es posible, eliminarlos.

Considerar los datos de servicios auxiliares y costos del problema anterior.

3) Se propone la red de intercambio de la figura:



- Identificar todos los ciclos existentes y los independientes.
- Encontrar, si es posible, un esquema que mejore el dado.

# CAPÍTULO 4

## INTEGRACIÓN ENERGÉTICA. EXTENSIONES DEL MÉTODO PINCH

### Introducción

En este capítulo se han de plantear, en términos fundamentalmente cualitativos, la integración de distintas unidades a un esquema de proceso en la etapa de diseño, utilizando la filosofía del método Pinch visto para la estructuración de Redes de Intercambio Térmico (RIT).

Las ideas básicas del método Pinch, por su naturaleza termodinámica, pueden aplicarse a la integración energética de un conjunto muy amplio de equipos de proceso, en los que, más allá de las particularidades propias de cada uno, existe siempre una operación que implica un tránsito de energía.

Se introduce además, otra herramienta, la Gran Curva Compuesta, que resulta de mucha utilidad para comprender la integración de las distintas unidades de proceso.

### Gran Curva Compuesta

La denominada Gran Curva Compuesta (GCC) es otra forma diferente de presentar la misma información que dan la Tabla del Problema y la Cascada de Calor.

Lo que se representa en ella es, sobre el eje de abscisas, la disponibilidad de calor a una determinada temperatura, ubicada sobre el eje de ordenadas.

Para ver como se construye, se usará un problema con dos corrientes calientes y dos frías, cuyos datos se presentan en la tabla 1.

Corriente	$T_E$ [°C]	$T_S$ [°C]	W [kW/°C]
C1	270	160	18
C2	220	60	22
F1	50	210	20
F2	160	210	50

**Tabla 1.** Datos del problema

Realizando la Tabla del Problema, para una aproximación mínima de 10°C y usando la escala de temperaturas “intermedias”, con un desplazamiento de 5°C, los balances de cada intervalo resultan los de la tabla 2.

265	215	165	155	55
-900	1500	-200	-200	

**Tabla 2.** Balances netos

Se puede ver que el mínimo requerimiento a la fuente externa resulta ser de 600 kW, con lo cual es necesario un enfriamiento adicional de 400 kW.

Como en la construcción de la GCC se debe tener en cuenta la *disponibilidad de calor*, a los balances de cada intervalo, hay que agregar el aporte de la fuente externa, con lo que se tendrá:

265	215	165	155	55
-600	-900	1500	-200	-200

**Tabla 3.** Balances netos con fuente externa

Como puede verse, el calentamiento auxiliar se necesita entre las temperaturas desplazadas 215°C y 165°C, razón por la cual la temperatura superior del primer intervalo no se ha colocado.

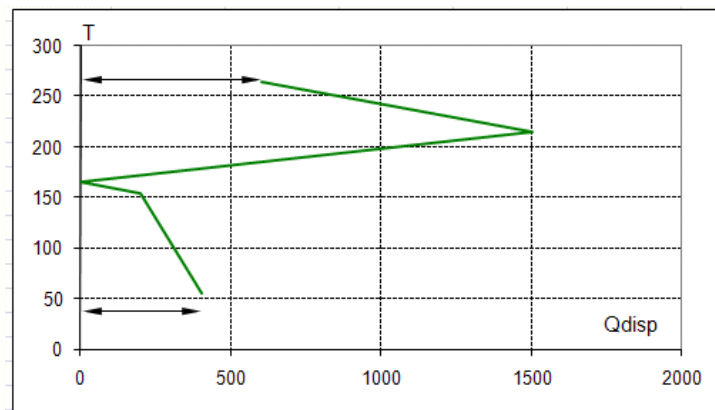
Teniendo en cuenta el aporte externo, y tomando como valores de ordenadas las temperaturas de los extremos inferiores de los intervalos, la

disponibilidad de calor que figurará en abscisas será la que se muestra en la tabla 4.

Ordenada	265	215	165	155	55
Abscisa	600	1500	0	200	400

**Tabla 4.** Valores de la Gran Curva Compuesta

Estos valores no son otra cosa que la Gran Curva Compuesta, que se muestra en la figura 1.



**Figura 1.** Gran Curva Compuesta

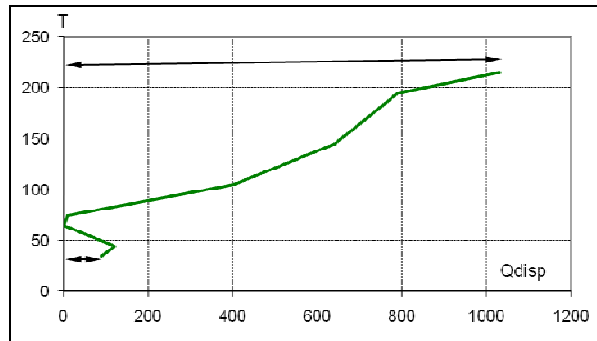
Allí se puede ver que, efectivamente, la fuente externa se requiere a una temperatura intermedia entre 215 y 165, más precisamente, a 185°C, es decir, por ejemplo, un vapor a 190°C.

Eso es así, ya que en una GCC, los tramos donde  $dT/dQ$  es negativa, representan fuentes netas de calor, en tanto que aquellos donde dicha derivada es positiva son sumideros netos. Dos tramos consecutivos, donde el primero es fuente y el segundo sumidero, como en la figura 1, en el sector en el que se superponen, conforman un “bolsillo”, en el que no se requiere la intervención de servicios externos.

Por esta razón, en el problema planteado, la fuente auxiliar requerida a una temperatura intermedia entre 215°C y 165°C, lo es, precisamente, a 185°C (un vapor a 190°C, por ejemplo), punto en el cual concluye el bolsillo.

Lo anterior explicita otra utilidad de la GCC: la posibilidad de analizar la utilización de distintos servicios auxiliares para balancear el sistema.

Por ejemplo, en la figura 2 se muestra la Gran Curva Compuesta del problema del capítulo anterior, donde es factible un calentamiento auxiliar con uno o más vapores de una temperatura menor a 255°C, que era el disponible según los datos.



Este vapor de 255°C podría reservarse para calefaccionar sólo la parte derecha de la GCC; en rigor, el vapor necesario para esa parte no debe tener una temperatura inferior a 220°C.

### Integración de columnas de destilación

La destilación es el método más utilizado para separar mezclas en fase líquida de compuestos con distinto punto de ebullición.

Una columna de destilación es un equipo donde el proceso de separación se consigue, básicamente, mediante un “pasaje” de energía desde el reboiler, donde se entrega calor, hasta el condensador de tope, donde se lo retira. En la figura 3 se esquematiza esta situación.

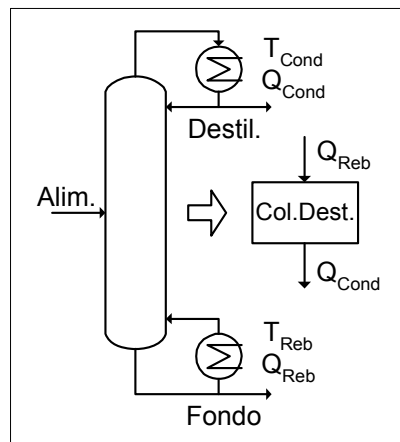


Figura 3. Columna de destilación

Es una operación altamente intensiva en energía, lo que la convierte en uno de los principales objetivos al momento de realizar un análisis de integración energética. La línea conceptual básica adoptada para la presentación del tema sigue lo expuesto en el trabajo original de Linnhoff y colaboradores (1983).

Los términos columna o torre de destilación serán usados para referirse al mismo tipo de equipo.

Se debe dejar en claro que la integración de columnas de destilación, como la de cualquier equipo de proceso, es un tema cuyo tratamiento en detalle no puede reducirse a unas pocas páginas como las que aquí se presentan.

Normalmente, la columna se abastece de calor desde una fuente auxiliar, vapor, por ejemplo, y lo cede a un medio refrigerante, externo a las corrientes de proceso, como el agua o el aire.

La integración térmica de una torre de destilación busca aprovechar cantidades de calor disponibles en algún punto del proceso, corrientes calientes, para abastecerse de energía o de necesidades de calentamiento, corrientes frías, para ceder el calor del condensador.

Importa definir cuales son las condiciones requeridas para que dicha integración tenga sentido.

Debe tenerse en cuenta que toda integración implica un incremento de la interacción entre los elementos que participan de la misma. En una red de intercambio térmico, si todas las corrientes se calentasen o enfriasen con fuentes auxiliares, una perturbación sobre una corriente cualquiera estaría restringida, en su influencia, al equipo correspondiente y su corrección, a los sistemas de control del mismo. Si, en cambio, se ha diseñado una red integrada, esa perturbación, en general, ha de afectar a otras corrientes de proceso, obligando a los sistemas de control a una corrección más extendida.

En consecuencia, si no existen ahorros de energía la integración carece de sentido, porque no existirían los aspectos positivos vinculados a la misma.

En la figura 4 se pueden ver alternativas para la posible integración de una columna de destilación en un proceso cuya Cascada de Calor se muestra. La línea de trazos indica la ubicación del Pinch para el proceso, esto es, previo a considerar la integración de la columna.

En la parte (a) de dicha figura el reboiler toma calor del bloque caliente y el condensador de tope lo cede al bloque frío. Se puede ver que la fuente auxiliar debe agregar, al suministro de  $Q_{SCmin}$  que requiere el proceso, la cantidad  $Q_{Reb}$  para la columna, en tanto que el sumidero externo debe absorber, además del  $Q_{SFmin}$  original, el calor cedido por el condensador,  $Q_{Cond}$ . Es decir, la



integración de la columna no produce ningún ahorro en las demandas de servicios auxiliares.

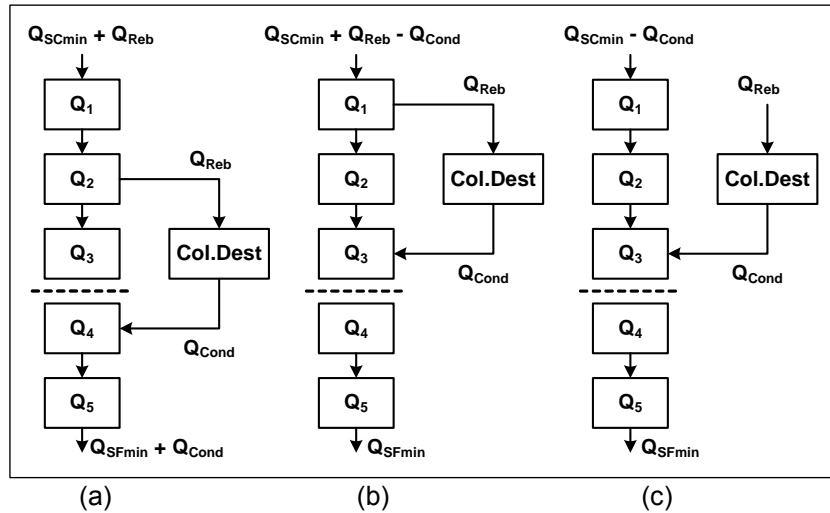


Figura 4. Esquemas de integración de una columna de destilación

En la parte (b) se muestra la integración de la columna en el bloque caliente. Puede verse que la demanda sobre el servicio caliente auxiliar se modifica del valor  $Q_{SCmin}$  a  $Q_{SCmin} + Q_{Reb} - Q_{Cond}$ , esto es, la modificación es igual a la diferencia entre las transferencias de calor entre el fondo y el tope de la columna. Dado que la integración se produce totalmente en el bloque caliente, los requerimientos al servicio frío auxiliar no se modifican.

De lo que se muestra en la parte (c) de la figura 4 podría pensarse que no es preciso que el reboiler esté efectivamente integrado en la cascada, siendo necesario, solamente, que el condensador ceda calor en el nivel que corresponda del bloque caliente.

Sin embargo, esto no es siempre necesariamente cierto. En la figura 5 se ha indicado la integración de la columna al proceso representado por la Gran Curva Compuesta (GCC). La torre aparece como un rectángulo, lo que presupone  $Q_{Reb} = Q_{Cond}$ .

En la parte (a), donde los sucesivos intervalos del bloque caliente son demandantes netos de calor, puede verse que, de acuerdo a como está ubicada la columna, la fuente externa sólo se requiere para satisfacer el

extremo derecho de de la Gran Curva Compuesta y el reboiler puede o no estar integrado, ya que siempre estará tomando calor de dicha fuente.

En la parte (b), en cambio, donde existe un “bolsillo” en la GCC, el reboiler debe estar necesariamente integrado, ya que la ubicación de la columna la transforma en un puente para la transferencia de calor dentro del bolsillo.

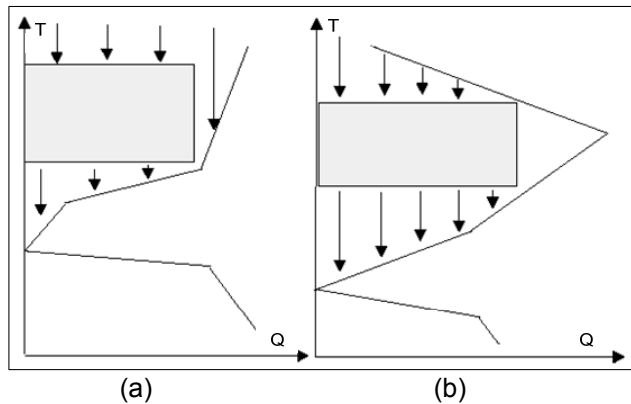


Figura 5. Columna de destilación en la GCC

Se aprecia aquí una de las características “virtuosas” de la GCC en la que, con mucha facilidad, es posible realizar un análisis de integración de un elemento nuevo a un proceso que ha sido previamente integrado energéticamente.

Del mismo modo, se puede analizar la integración de la columna en el bloque frío del proceso. Como conclusión se puede decir que la integración energética de una columna de destilación debe hacerse enteramente *dentro del bloque frío* o *del caliente* del resto del proceso; *jamás a través del Pinch*.

Si las temperaturas de tope y fondo se encuentran a ambos lados del Pinch o si las cantidades de calor disponibles en el proceso no resultan suficientes para satisfacer los requerimientos de la columna, la integración energética de la misma ha de obligar al análisis de eventuales modificaciones en las condiciones operativas.

El desplazamiento de las temperaturas de tope y fondo se puede lograr cambiando la presión de trabajo de la torre, aunque esto tiene sus límites.

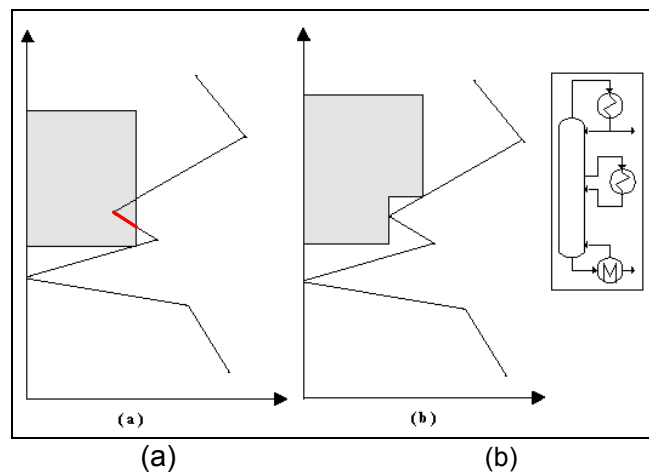
Un incremento de la presión desplaza la columna hacia las temperaturas más altas, hacia el interior del bloque caliente. Como regla general, el costo de la columna no se modifica demasiado, ya que existen efectos contrapuestos que tienden a compensarse entre sí. Por ejemplo, este desplazamiento hacia presiones y temperaturas de operación más altas producen una disminución de las volatilidades relativas, exigiendo mayor número de platos - mayor altura - o una relación de reflujo más alta - mayor diámetro - con lo que aumentará el

costo de la torre. Pero también disminuirán los servicios requeridos, por la reducción del calor latente de vaporización, y el diámetro de la torre, como consecuencia del incremento de la densidad del vapor por aumento de la presión.

El límite lo impone la temperatura en el reboiler, que crece a medida que se aumenta la presión de operación. A altas temperaturas pueden producirse degradaciones del producto de fondo o bien no disponerse del medio calefaccionante adecuado.

La reducción de la presión de trabajo de la columna impulsa a ésta a integrarse en el bloque frío. El límite, en este caso, está dado por la temperatura del condensador, donde, en lo posible, se trata de evitar el uso de refrigeración u operación bajo vacío.

Otro caso es el que se muestra en la figura 6. Allí, las cantidades de calor disponibles no permiten la integración de la columna dentro del ámbito de temperaturas deseado. En la parte (a) queda claro que el tramo resaltado de la GCC no puede transferir el calor disponible, ya que dicha transferencia la está realizando el condensador de tope. La solución es utilizar un condensador intermedio, que permite distribuir los requerimientos de refrigeración. Téngase en cuenta que, por la ubicación asignada a la columna en la integración, *ambos* condensadores deberán ceder el calor dentro del bloque caliente, como se ve en la parte (b) de la figura.

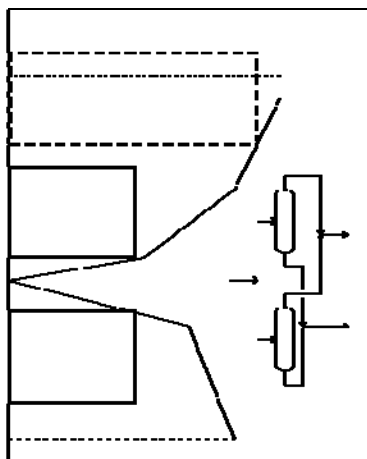


**Figura 6.** Condensador intermedio

Por último, y sin que esto signifique que se han analizado todas las posibles adecuaciones de una columna de destilación con vistas a su integración energética, se puede ver el caso esquematizado en la figura 7. Allí la GCC muestra la imposibilidad de integrar la columna representada por el rectángulo de trazos, ya que, la temperatura a la que debe operar el reboiler es superior a la fuente auxiliar disponible, indicada con la línea de trazo y punto.

La columna no puede desplazarse hacia temperaturas más bajas; ya que empiezan a generarse problemas en la integración del condensador. De hecho, la ubicación en la que se encuentra es el límite inferior, siempre considerando ese proceso.

Una alternativa es reducir la demanda de calor dividiendo la alimentación en dos columnas e integrarlas, por ejemplo, una en el bloque caliente y la otra en el frío. En la figura se muestran como dos rectángulos en línea llena y, al costado, el diagrama del sistema.



**Figura 7.** Alimentación dividida

Esta estrategia incrementa la inversión fija, debiendo ser analizada la factibilidad económica de la inversión adicional (por sobre la columna aislada) frente al ahorro en consumos de servicios auxiliares.

Se puede hacer un comentario final sobre las columnas que se integran térmicamente al resto del proceso. Esa integración puede requerir modificaciones en el tipo de equipos de transferencia de calor que se utilizan en el tope y en el fondo.

Normalmente, se trata de utilizar, como medios de enfriamiento, por su menor costo, aire o agua. En un caso es un gas, en el otro un líquido limpio y el tipo de condensadores que se utilizan para ellos puede no ser adecuado para intercambiar con las corrientes que resultan de la integración. Otro tanto ocurre con el reboiler, donde lo común es utilizar la condensación de vapor de agua como medio calefaccionante.

Los nuevos tipos de equipos pueden representar una modificación importante en la ecuación económica y la cuestión debe ser analizada, como en toda alternativa de diseño, teniendo en cuenta la inversión adicional frente al ahorro por conseguir.

## Integración de evaporadores

Otro de los procesos intensivos en consumo de energía es la evaporación. En principio, el aumento en la eficiencia del uso de la energía en la evaporación se logra mediante el uso de “múltiples efectos”, donde la concentración de la solución se consigue en varios equipos (efectos) que operan a diferente presión. Esto genera vapores de distintas temperaturas, que se utilizan como medio calefaccionante en otro equipo del conjunto.

En la figura 8 se muestra el esquema de proceso de un evaporador de triple efecto, en uno de los tantos arreglos de distribución posible (forward feed, en este caso).

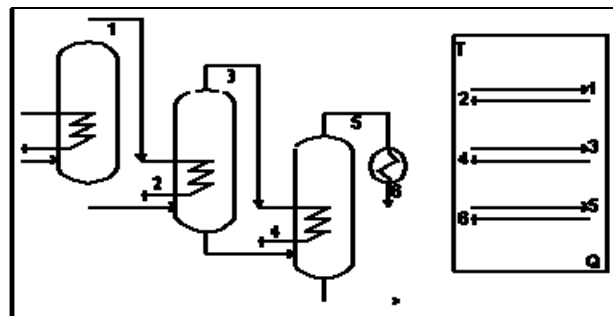


Figura 8. Múltiples efectos

Al costado del esquema se muestra, en un diagrama T - Q, la evolución del solvente evaporado y condensado a lo largo de los tres efectos. En este diagrama los números indicados representan el punto final de la evolución, así, 1 es el estado del vapor del primer efecto a la salida del mismo, en tanto que 2 corresponde a la salida del condensado en el segundo evaporador. Otro tanto ocurre con los pares 3 - 4 y 5 - 6. Así mismo, se ha supuesto que las soluciones que ingresan y abandonan los equipos se encuentran en su punto de saturación y que las evaporaciones y condensaciones se llevan a cabo a temperatura constante y, aunque, para su mejor visualización, se las haya dibujado separadas, ambos procesos se realizan a la misma temperatura.

El diagrama T - Q es útil para visualizar las modificaciones que pueden introducirse en la operación de un evaporador de múltiple efecto.

Desde el punto de vista del análisis que se ha de plantear más adelante, interesa ver como se refleja, en ese diagrama, una modificación de la presión de trabajo de los equipos así como del número de efectos.

Eso se muestra en la figura 9 (a), (b) y (c), pudiéndose considerar la situación (a) como la original. En (b) se habría producido un descenso de la presión de operación del primer efecto, lo que acarrea una reducción de los niveles de temperatura en todos los equipos.

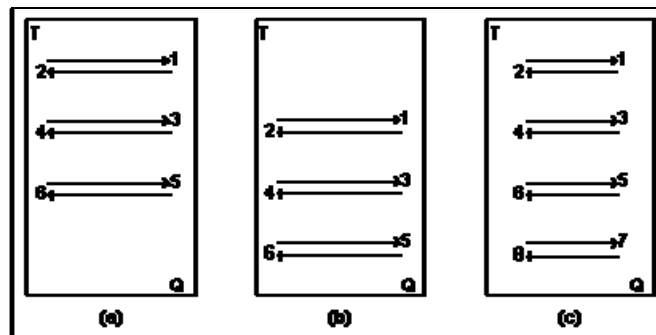


Figura 9. Representación T - Q de los efectos

En la figura 9 (c) se ha incrementado el número de efectos, lo que trae aparejado una expansión del intervalo de temperaturas de trabajo así como una reducción de la cantidad de calor puesta en juego en cada equipo. Esto último es, en definitiva, la esencia de la utilización del múltiple efecto: aumentar la eficiencia en el uso de la energía a través del agregado de más unidades.

En rigor, tanto en la figura 8 como en la 9 se ha omitido la condensación del vapor externo, que, en todos los casos, se encuentra por encima de la temperatura de la evolución que termina en el estado 1.

En la figura 10 se puede ver otra forma de representar el evaporador de triple efecto de la figura 8.

Allí, en la parte (a) se ha incluido el vapor externo en el nivel más alto de temperatura. En la parte (b), se ha omitido

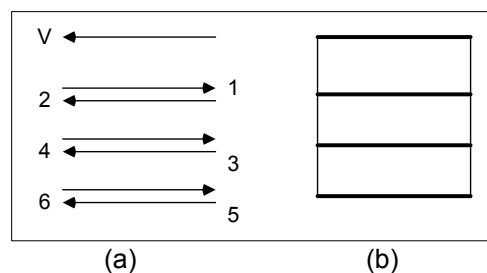


Figura 10. Otra representación

la diferencia entre las temperaturas de evaporación y condensación, aceptada antes para una mejor visualización, siendo los tramos horizontales los que representan esas evoluciones. Esta última representación será la que se utilizará de aquí en más.

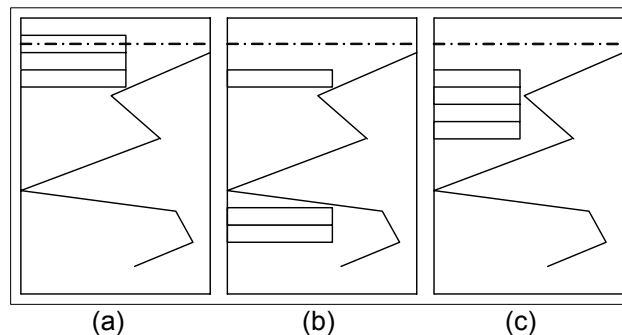
No es común ver evaporadores integrados térmicamente al proceso que pertenecen. Una posible razón de esto es que la multiplicidad de efectos se considera bastante eficiente en el manejo de la energía como para requerir alguna acción adicional.

Una vez más, la GCC puede servir como herramienta adecuada para el análisis conceptual del problema de integración.

El proceso de evaporación en múltiple efecto de la figura 8 guarda una similitud térmica con la destilación, vista en el apartado anterior. Aquí también se produce una separación por el agregado de calor en un cierto sector y la remoción en otro punto.

Por la misma razón que antes, esta transferencia no puede realizarse a través del Pinch, pero, a diferencia de la columna de destilación, que es, esencialmente, un equipo único, aquí se está frente a un conjunto de equipos, lo que otorga una mayor flexibilidad al momento de analizar alternativas.

Supóngase que la integración del triple efecto en el bloque caliente del proceso, mostrada en la figura 11 (a), provoca una temperatura excesivamente alta para la evaporación. La ubicación en otra zona de la GCC, por reducción de la presión de trabajo y, por ende, de temperatura, resulta imposible y, en consecuencia, la integración depende de que se modifique el diseño del múltiple efecto.



**Figura 11.** Integrando múltiples efectos

Una posibilidad se muestra en la parte (b) de la figura. Los distintos efectos no tienen, necesariamente, que estar conectados térmicamente entre sí. El vapor generado en un equipo puede ceder el calor disponible a otra unidad distinta de las que forman parte del proceso de evaporación así como un efecto cualquiera puede recibir la energía requerida de otra fuente que no sea otro de los evaporadores del conjunto.

En la figura se ha esquematizado el desacople del primer efecto, que se ubica en el bloque caliente, de los dos siguientes, que lo hacen en el bloque frío. Se ha evitado ubicar el primer efecto dentro de la zona del bolsillo que conduciría a un esquema tecnológico de extrema complejidad. En la figura 12 se muestra el esquema tecnológico correspondiente.

El desacople térmico permite operar, en forma independiente, la presión del primer efecto y la del efecto donde se produce tal desacople. Como consecuencia, las distintas partes pueden acoplarse a la GCC de acuerdo a las disponibilidades de esta última.

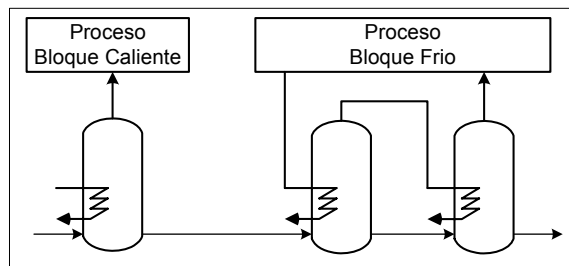


Figura 12. Desacople térmico de los efectos

Si esta estrategia de reducción en la temperatura de trabajo no fuese suficiente, puede intentarse con la alternativa indicada en la figura 11 (c).

Allí se ha agregado otro efecto, permitiendo ubicar todo el sistema dentro del bloque caliente. Si aún así, la temperatura de trabajo continuase siendo alta, se podría desacoplar este nuevo sistema, ubicando cada parte en un bloque diferente.

Una vez más, debe prestarse especial atención a las nuevas exigencias que la integración impone a los evaporadores.

Lo habitual en estos equipos es tener, de un lado, una solución hirviendo y, del otro, un vapor condensando o, en términos más generales, una fuente proveedora de calor. La integración será económicamente viable si se dispone de una corriente capaz de suministrar la totalidad del calor externo requerido. De otro modo, debería implementarse, por ejemplo, un circuito con un fluido



intermedio que transporte la energía y esto, sin duda, restará ventajas al esquema, siendo, como siempre, el análisis económico el determinante de la posibilidad o no de concretar en el diseño la integración energética.

## **Integración de máquinas térmicas y bombas de calor**

El problema de la integración de calor y potencia en una planta de procesos es una cuestión compleja. El análisis que se ha de realizar aquí tiene un alcance introductorio y sigue los lineamientos generales establecidos por Townsend y Linnhoff (1983).

Una máquina térmica es un equipo que absorbe una cantidad de calor  $Q_1$  de una fuente que se encuentra a una temperatura  $T_1$  y cede  $Q_2$  a un sumidero a  $T_2$ ,  $T_1 \geq T_2$ , generando una cantidad de trabajo  $W$ .

Por la primera ley de la Termodinámica  $W = Q_1 - Q_2$ , en tanto que la segunda Ley establece  $W \leq Q_1 (T_1 - T_2) / T_1$ .

La igualdad en la expresión de la segunda Ley se cumple para máquinas ideales con ciclos reversibles; en los equipos reales se cumple la desigualdad.

Se ve aquí que una máquina térmica se asemeja a la torre de destilación o a un evaporador, donde se utiliza un flujo de calor para producir, en este caso, un trabajo mecánico en lugar de una separación.

La diferencia es que ahora se puede invertir el proceso, esto es, suministrar a una máquina un determinado trabajo mecánico para tomar una cantidad de calor  $Q_2$  de una fuente a temperatura  $T_2$  y ceder  $Q_1$  a un sumidero que se encuentra a temperatura  $T_1$ , siendo siempre  $T_1 \geq T_2$ . En este caso, se trata de una bomba de calor, equipo que, si  $T_2$  se encuentra por debajo de la temperatura ambiente, recibe el nombre de ciclo frigorífico.

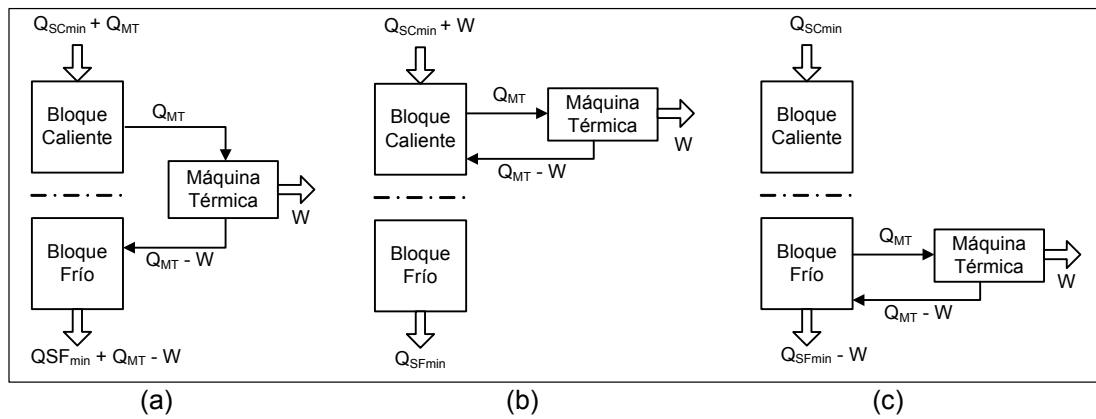
Primero se ha de tratar la integración de las máquinas térmicas para luego considerar las bombas de calor.

La integración de una máquina térmica, al igual que la de los equipos vistos anteriormente, sólo es posible si no se produce transferencia de calor a través del Pinch.

Lo antedicho se puede comprobar tras el análisis de lo mostrado en la figura 13 (a), donde la ubicación asignada a la máquina térmica no establece ninguna diferencia con respecto a la situación sin integración alguna.

En cambio, una correcta integración en el bloque caliente, como la que se muestra en la figura 13 (b), el incremento en la demanda de servicios externos se restringe al trabajo generado  $W$ .

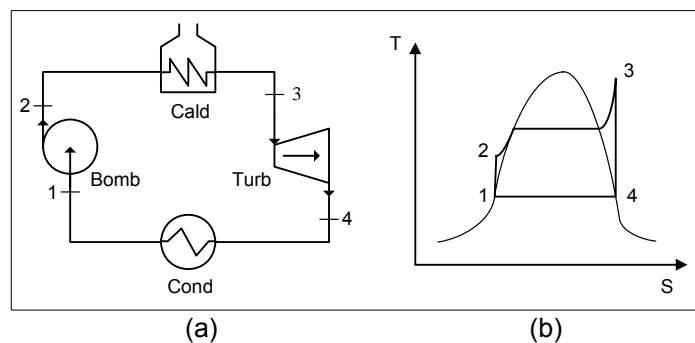
Si la integración se puede realizar en el bloque frío, como se puede apreciar en la parte (c) de la figura 13, existe un ahorro de la energía transferida al sumidero externo, ya que parte de esa energía ha salido del sistema en forma de trabajo sobre el medio.



**Figura 13.** Integración de una máquina térmica

La máquina térmica más comúnmente utilizada en la industria de procesos es una turbina, vinculada, en general, al sector de producción de vapor. Su comportamiento teórico es el ciclo Rankine, compuesto por dos transformaciones isobáricas, donde se intercambia calor con el medio circundante, y otras dos isentrópicas, donde se modifican las presiones de trabajo.

En la figura 14 se muestra, en la parte (a), un diagrama de proceso esquemático de la sección de producción de vapor,



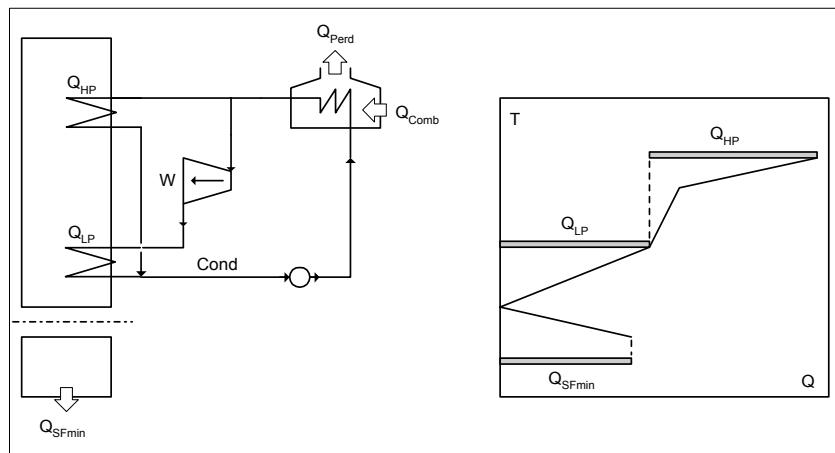
**Figura 14.** Ciclo Rankine

donde la generación se representa por la caldera y el consumo, por el condensador. En la parte (b) se indica, en un diagrama T-S, la evolución del ciclo Rankine con sobrecalentamiento, que representaría el comportamiento teórico de ese sector.

En ese diagrama, el tránsito desde los puntos 2 a 3, representa la caldera trabajando a presión constante. El vapor sobrecalentado se expande, luego, en forma isentrópica, en una turbina de vapor según la evolución 3 - 4. Posteriormente, el vapor se condensa (4 - 1), también a presión constante y después, el líquido condensado se bombea isentrópicamente (1 - 2), para ser reciclado como la alimentación a la caldera.

El sobrecalentamiento es para evitar la formación de humedad durante el proceso de expansión, lo que dañaría los álabes de la turbina.

En la figura 15 puede verse el calentamiento con vapor en el bloque caliente de un proceso, donde se ha aprovechado la forma de la GCC para suministrar la calefacción en dos niveles de temperatura:  $Q_{HP}$  y  $Q_{LP}$ , con la generación intermedia de trabajo mecánico.

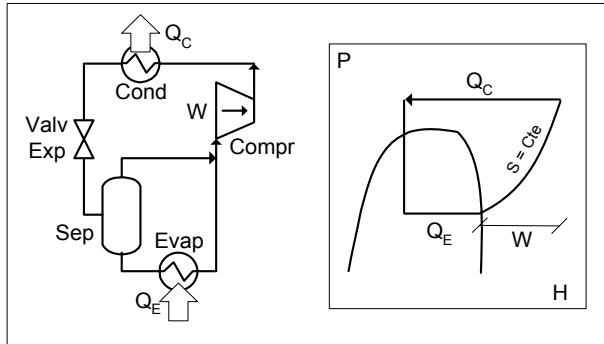


**Figura 15.** Calefaccionando con vapor de dos niveles térmicos

En rigor, el ciclo Rankine abarca la línea donde se entrega  $Q_{LP}$ .

El diagrama de proceso ubicado a la izquierda en la figura 15 resume la integración estructurada. Allí se ha indicado el calor incorporado en la caldera  $Q_{Comb}$ , el que debe ser suficiente para suministrar  $Q_{HP}$  y  $Q_{LP}$  al proceso, generar  $W$  en la turbina y compensar las pérdidas  $Q_{Perd}$ .

El otro dispositivo térmico que se ha de considerar es la bomba de calor, la que puede ser una alternativa económicamente interesante para aprovechar, mediante integración, un calor disponible en algún punto del proceso.



**Figura 16.** Bomba de calor

En la figura 16 se muestra el esquema de proceso de una bomba de calor así como la evolución, en un diagrama P - H, de un ciclo que, idealmente, está compuesto por dos isobaras (condensación y evaporación), una isoentálica (válvula de expansión)

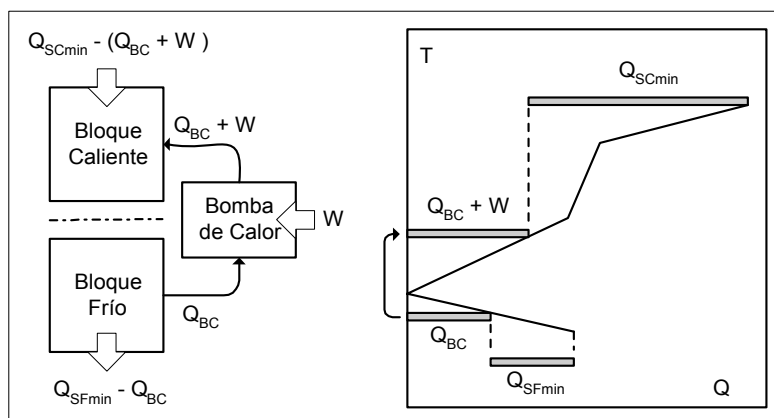
y una isentrópica (compresor).

La posición correcta de la bomba de calor a ser integrada en la cascada del proceso, a diferencia de todo lo visto anteriormente, es *transfiriendo calor a través del Pinch*.

Se puede ver que si el dispositivo estuviese integrado totalmente en el bloque caliente, el ahorro en el requerimiento a la fuente externa es exactamente igual a la energía que requiere la bomba de calor. El balance es aún más desfavorable si la integración se realiza en el bloque frío, donde el enfriamiento auxiliar se incrementa en el valor de la energía entregada.

Lo anterior puede analizarse sobre la figura 17. Se aprecia que se retira una cantidad  $Q_{BC}$  del bloque frío y, merced al agregado de un trabajo mecánico  $W$ , se transfiere  $Q_{BC} + W$  al bloque caliente.

La bomba de calor se comporta como un servicio externo frío en el bloque frío y como una fuente de calor en el bloque caliente. Es obvio que se tiene que producir una reducción en las demandas de servicios auxiliares, como se aprecia en la parte derecha de la figura 17.



**Figura 17.** Integración de una bomba de calor

No obstante, debe advertirse que dichas reducciones se producen como consecuencia del trabajo mecánico  $W$ , el que opera sobre un compresor, uno de los equipos de proceso que demanda mayor inversión. Por tanto, habrá que analizar cuidadosamente la ecuación económica para ver si el costo fijo en que se incurre es debidamente compensado con el ahorro de energía producido.

## Complemento IntegCol

Este complemento está diseñado para ayudar a comprender la integración energética de columnas de destilación, utilizando la filosofía del método pinch.

A partir de los datos de la Gran Curva Compuesta, el usuario podrá modificar los valores de la presión de trabajo y la relación de reflujo de la columna, para determinar si es posible su integración con el resto del sistema.

Al cargar el complemento se genera el elemento de menú *IntegCol*, desde el cual es posible seleccionar las opciones: *Nuevo Problema*, *Elegir Compuesto*, *Valores Iniciales*, *Analizar Integración* y *Costear Col Integrada*.

Para comenzar a trabajar se debe elegir la orden *Nuevo Problema*, tras lo cual el complemento genera las hojas *Gran Curva Compuesta* y *Columna*.

En la hoja Gran Curva Compuesta (GCC) el usuario debe ingresar los valores de la cascada neta de calor del sistema al que se pretende integrar la columna.

Los datos se ingresan en dos columnas asignadas para tal efecto, la temperatura en la primera y la cantidad de calor en la otra.

Además de los pares de valores que corresponden a la GCC, se debe ingresar, en el lugar reservado para ello, el valor de la aproximación mínima.

El complemento está preparado para que en la GCC, haya al menos un bloque caliente y uno frío.

Luego, se debe utilizar *Elegir Compuesto*, tras lo cual se accede a una base de datos, de donde se deben seleccionar los componentes de la mezcla a tratar, los que se irán volcando a la hoja Columna.

En esta hoja, deben ingresarse las fracciones molares de los componentes, el caudal global a procesar, el clave liviano (el pesado es adyacente), los factores de recuperación de ambos claves, la relación  $R_{op}/R_{min}$  y la presión de tope (PT).

Una vez ingresados los datos, se puede comenzar con el análisis de integración dando la orden *Analizar Integración*, que comprende el cálculo de la columna y su representación en la hoja *GrafIntegr*, en la cual ya está inserta la GCC que se ha definido.

Si los valores elegidos para este primer intento no permitiesen la integración de la columna con el resto del sistema, se deberá modificar el valor asignado a  $R_{op}/R_{min}$  o a PT o a ambos.

Toda vez que se modifiquen dichos valores, debe repetirse la orden *Analizar Integración*, para ver los resultados de la nueva condición.

La orden *Valores Iniciales* permite, si se desea, comenzar el trabajo con valores razonables de  $R_{op}/R_{min}$  y PT.

Si, en algún momento se logra integrar la columna al proceso, puede usarse la orden *Costear Col integrada*, donde se realiza un análisis comparativo con una columna sin integrar.

Lo expuesto aquí es una síntesis de los aspectos básicos del complemento *IntegCol*. Una información más completa se puede obtener accediendo a la ayuda correspondiente.

## Complemento IntegEvap

Este complemento está diseñado para ayudar a comprender la integración energética de evaporadores, utilizando la filosofía del método Pinch.

Haciendo uso de la Gran Curva Compuesta, el usuario podrá modificar el valor de la temperatura de la o las fuentes externas disponibles y el número de efectos, para determinar si es posible su integración con el resto del sistema.

El complemento está preparado para trabajar con un máximo de dos fuentes de calefacción externa, una ubicada siempre en el último efecto y la otra, si existe, en un efecto intermedio.

Las órdenes básicas son: *Nuevo Problema*, *Analizar Integración* y *Costear Evap Integrado*.

Como se visto en el complemento IntegCol, lo primero que se debe hacer es elegir la opción *Nuevo Problema*, tras lo cual, el complemento genera las hojas *Gran Curva Compuesta* y *Hoja del Problema*.

La información que debe ingresarse en la primera de ellas es la misma que en la del complemento IntegCol.

En la Hoja del Problema se deben entrar, en sectores asignados, la información necesaria para el cálculo del evaporador: el caudal de la solución, las fracciones másicas inicial y final de la misma, el número de efectos totales, el punto donde se ingresa la segunda fuente externa, si existe, y las temperaturas de los servicios calefaccionantes.

Una vez ingresados los datos, se debe dar la orden *Analizar Integración* para calcular los distintos efectos. Una vez completado el cálculo se realiza la representación del sistema en la hoja *GrafIntegr*, en la cual ya está inserta la GCC que se ha definido.

Si la integración no es posible con el resto del sistema, se puede modificar el número de efectos o el nivel térmico de las fuentes externas utilizadas o ambas acciones combinadas.

Si se logra la integración, se puede usar la orden *Costear Evap Integrado*, donde se realiza un análisis comparativo con un único evaporador sin integrar.

Al igual que en el complemento IntegCol, la ayuda brinda una mayor información sobre las características y uso del complemento.

## **Bibliografía**

- Iglesias O.A., Paniagua C.N., "Uso de planilla de cálculo en la enseñanza de integración energética de unidades de proceso", Actas de International Conference on Engineering and Technology Education, Ilhéus, Bahia, Brasil, pp.1086-1089, 2010.
  - Linnhoff B., Dunford H., Smith R., "Heat Integration of Distillation Columns into Overall Process", Chemical Engineering Science, Vol.38, N°8, pp. 1175-1188, Pergamon Press, UK., 1983.
  - Townsend, D.W., Linnhoff, B., "Heat and Power Networks in Process Design", AIChEJ 29, N°5, pp.742-748, 1983.
- Smith R., "Chemical Process Design and Integration", John Wiley & Sons Ltd, 2005.



## Propuestas de trabajo

1) Realizar la Gran Curva Compuesta del problema de seis corrientes de la propuesta de trabajo del capítulo anterior.

2) Una columna de destilación debe ser integrada con el proceso usando el complemento *IntegCol.xla*. Los valores que definen la Gran Curva Compuesta, para una aproximación mínima de 10 °C, se detallan en la tabla adjunta.

A la columna ingresan 180 kgmoles/h de una mezcla con las fracciones molares que se indican.

Gran Curva Compuesta	
T [°C]	Q [kW]
200	4000
170	2700
155	2600
130	2300
120	0
100	2500
70	2600

Compuestos	Frac. Molar
Benceno	0,20
Tolueno	0,30
Etilbenceno	0,25
p-Xileno	0,15
m-Xileno	0,05
o-Xileno	0,05

Considerar al tolueno como clave liviano y 0,99 a los factores de recuperación, en tope para el clave liviano y en fondo para el pesado.

Seleccionar las variables operativas que permitan la integración calórica de la columna con el resto del proceso.

3) Un sistema de evaporación debe ser integrado con el proceso usando el complemento *IntegEvap.xla*. Los valores que definen la Gran Curva Compuesta se detallan en la tabla adjunta.

El sistema de evaporación se requiere para concentrar 10000 kg/h de una solución acuosa desde una fracción másica inicial de 0,1 a una final de 0,5.

Gran Curva Compuesta	
T [°C]	Q [kW]
180	1400
90	1800
70	0
60	1000
50	2100
22	1500

Para una aproximación mínima de 10°C, indicar una configuración que permita la integración calórica del sistema de evaporación con el resto del proceso.

# CAPÍTULO 5

## SÍNTESIS DE REDES DE INTERCAMBIO DE MASA. MÉTODO PINCH

### Consideraciones generales

El método Pinch, originalmente desarrollado para problemas de integración energética, se ha convertido en una estrategia para abordar problemáticas de integración diferentes a la original.

Tal el caso de la integración de redes de equipos de intercambio de masa, RIM. En estas redes, se estructura un conjunto de equipos (columnas de absorción, despojadoras, equipos de membranas, etc.) para producir el pasaje de uno o más componentes desde las corrientes donde se encuentran presentes a otras, para cumplimentar exigencias económicas, legales, técnicas, etc. En este capítulo se ha de tratar la remoción de una única especie, debiéndose repetir el procedimiento si se intentase hacerlo con más de una.

En este tema, las ideas básicas fueron planteadas por El-Halwagi y Manousiouthakis en 1989, continuadas y ampliadas, luego, por un importante grupo de investigadores y tecnólogos. Un excelente resumen de esos trabajos se encuentra en el libro de Mahmoud El-Halwagi, 1997.

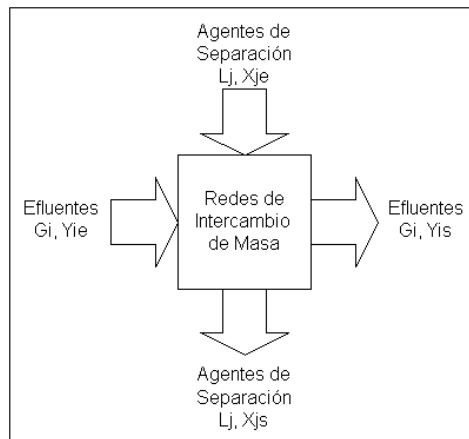
En términos generales, el problema de estructurar una red de intercambio de masa se ha planteado clásicamente como sigue:

- Se tiene un conjunto  $R$  de  $N_R$  corrientes efluentes, “ricas” o “fuentes”, en un cierto compuesto que se desea remover de las mismas.
- Cada una de las corrientes del conjunto  $R$  tiene un caudal másico  $G_i$ , con una fracción másica inicial de la especie a remover  $Y_{ie}$ , la que debe reducirse, como mínimo, al valor  $Y_{is}$ ,  $i \in R$ . Los valores  $G_i$ ,  $Y_{ie}$ ,  $Y_{is}$  son conocidos para todas las  $N_R$  corrientes. Los valores de  $Y_{is}$  están

normalmente determinados por consideraciones técnicas (corrosión, ensuciamiento), normativa medioambiental, conveniencia económica, etc.

- Adicionalmente, se dispone de un conjunto  $P$  de  $N_P$  corrientes “pobres” o “sumideros”, llamadas “agentes de separación”, las que pueden pertenecer al proceso o ser externas al mismo.
- Para cada una de las corrientes del conjunto  $P$  se utiliza un caudal másico  $L_j$ , el que no puede superar el valor  $L_{jt}$ . Cada corriente se dispone con una fracción másica  $X_{je}$  del componente a extraer, fracción que puede aumentar por intercambio con las corrientes “ricas”, pero que no debe superar el valor  $X_{js}$ .
- Se debe estructurar un esquema de proceso, de mínimo costo total anual, donde se traten las  $N_R$  corrientes “ricas” con algunos o todos los  $N_P$  “agentes de separación” de modo que, en las primeras, se alcancen las fracciones molares de salida especificadas.

En la figura 1 se resume lo fundamental del planteo anterior.



**Figura 1.** Intercambio de masa

Además de lo anterior, en la estructuración de las redes de intercambio de masa, se admite:

- Los caudales másicos de cada corriente permanecen constantes a lo largo de la red.
- Las separaciones requeridas están basadas en un solo componente

(componente clave).

- La transferencia del componente clave desde una corriente “rica” cualquiera al agente de separación  $j$  está regulada por una relación de equilibrio lineal  $Y = m_j X_j + b_j$ , siendo  $m_j$  y  $b_j$  constantes y que dependen solamente de la especie transferida y del agente de separación.
- La red de intercambio de masa opera en forma isotérmica y a presión constante.

Este tipo de problema se plantea, por ejemplo, en el tratamiento de efluentes líquidos industriales. Típicamente, corrientes acuosas circulan a través de las unidades de proceso, incrementando su contenido de contaminantes, lo que obliga, en algún punto, a su tratamiento, antes de la disposición final.

Si bien ese tratamiento busca minimizar no sólo el contenido de los contaminantes en las corrientes a tratar sino, también, el caudal de las mismas, en este capítulo sólo se abordará la primera de estas cuestiones.

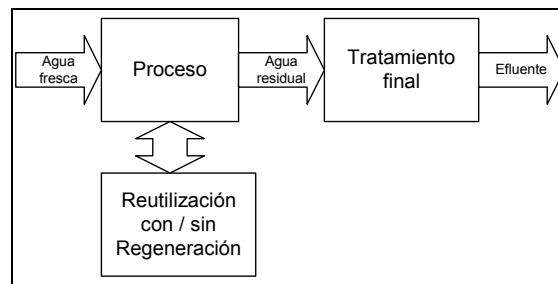
La influencia del caudal sobre la estructura de costos es obvia: además de la disminución en las dimensiones de los equipos y servicios vinculados al tratamiento, se reduce, también, la reposición del agua perdida en los efluentes.

En este sentido, una corriente con contaminantes puede ser utilizada en otro punto del proceso, siempre que ello no implique interferir con la normalidad de la operación que allí se lleva a cabo.

También es posible reducir el contenido de los contaminantes de una corriente, antes de proceder a su reutilización. Para ello, será preciso introducir una operación que la “intercepte” donde producir la transferencia deseada.

En este caso la corriente tratada puede volverse a usar, incluso, en el mismo punto donde se generó.

En la figura 2 se esquematizan estas alternativas.



**Figura 2.** Esquema de proceso

La primera aproximación formal al problema fue propuesta por El-Halwagi y Manousiouthakis y no es otra cosa que una extensión, para las RIM, del método Pinch de Linnhoff y Hindmarsh para la estructuración de redes de intercambio térmico, RIT.

La analogía entre los problemas es evidente: en ambos casos se tienen sendos conjuntos de corrientes, de proceso o auxiliares, fuentes o sumideros de una “especie”, energía o masa, a intercambiar. Estas corrientes, en la medida que pertenecen al proceso, están disponibles en cantidades conocidas y, en todos los casos, obligadas a cumplir con determinadas especificaciones. Existe una variable intensiva característica, temperatura o concentración, directamente vinculada con el intercambio. La naturaleza de éste establece una relación límite entre las variables de fuentes y sumideros. Sin embargo, no resulta conveniente, desde un punto de vista técnico, que las variables cumplan esta relación en el límite, ya que ello resultaría absolutamente antieconómico.

Pero existen, también, ciertas diferencias. Por ejemplo, en el caso de la estructuración de las RIM, no siempre es necesario que las corrientes sumidero sean utilizadas en su totalidad, al igual que el cumplimiento de las especificaciones planteadas.

Otra particularidad lo constituye la remoción intermedia de contaminantes y la posterior reutilización de las corrientes tratadas. Si bien en el caso de la estructuración de RIT resulta posible el intercambio con servicios auxiliares en cualquier nivel de temperatura donde resulte termodinámicamente factible, lo

normal es que se los reserve para los ajustes finales, asegurando un adecuado control del cumplimiento de las especificaciones establecidas.

Yendo a la cuestión medular de la estructuración de una RIM, la determinación de los requerimientos mínimos de corrientes de extracción de contaminantes comienza por la construcción, con las adaptaciones que requiere el caso, de la Tabla del Problema -o cualquiera de las estructuras equivalentes- para, luego, determinar los cuellos de botella termodinámicos -puntos Pinch- que existen. Finalmente, y con las mismas reglas -conceptualmente iguales- se procede a la estructuración inicial de la red y a su mejora, de la misma forma que se hace para el caso de intercambio de calor.

La Tabla del Problema requiere vincular la magnitud transferida, el caudal másico del componente en cuestión, y la variable asociada a la fuerza impulsora que regula la transferencia, esto es, la concentración de la especie.

En el caso de la transferencia de calor, dicha variable es la temperatura de las corrientes. La factibilidad termodinámica de la transferencia exige que la temperatura  $T_C$  de la corriente caliente -“rica” en energía- no sea inferior a la de la fría -“pobre”-  $T_F$  con la que intercambia,  $T_C \geq T_F$ , y esto vale cualquiera sean las corrientes.

En el caso de la transferencia de masa, la relación termodinámica equivalente exige que, para que la transferencia sea factible,  $Y \geq m_j X_j + b_j$  y la expresión depende de cual sea la corriente “pobre” que se considere.

En el caso de las redes de intercambio térmico, a fin de evitar equipos de transferencia excesivamente grandes se adoptaba una aproximación mínima  $\Delta T_{\min}$  y la relación que debía cumplirse era:

$$T_C \geq T_F + \Delta T_{\min}$$

Esto debía verificarse cualquiera fuese el par de corrientes considerado, lo que simplificaba la adopción de una escala única para representar la variación de las temperaturas de las corrientes.

Análogamente, El-Halwagi propone adoptar una “aproximación mínima” para la composición  $X_j$ ,  $\Delta X_{j\min}$ , de modo que, ahora, debe ser:

$$Y \geq m_j (X_j + \Delta X_{j\min}) + b_j \quad (1)$$

La dependencia de esta relación con los agentes de separación plantea, a diferencia de lo que ocurría con la estructuración de redes de intercambio térmico, cierta dificultad al momento de establecer una escala única para expresar los cambios de concentración que se verifican en todas las corrientes involucradas.

El modo más sencillo de hacerlo es adoptar la escala en la que se expresa  $Y$ , esto es, la concentración del compuesto en cuestión en las corrientes “ricas” de las que debe ser removido.

En consecuencia, la expresión (1), considerando la igualdad, expresa la concentración  $X_j$  evaluada en términos de la composición  $Y$ , con el debido cumplimiento de las restricciones fisicoquímicas y técnicas.

Lo anterior permite la construcción de la Tabla del Problema o las Curvas Compuestas de las corrientes ricas y de los agentes de separación o cualquiera de las herramientas vistas oportunamente para la determinación del punto Pinch.

Como siempre, el desarrollo de las técnicas asociadas a la estructuración de RIM se ha de realizar a través del tratamiento de un caso.

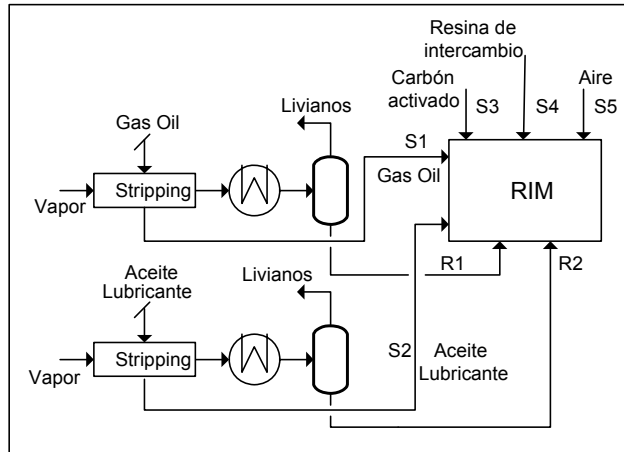
## **Análisis de un caso**

El mismo se vincula con la remoción de fenol de corrientes acuosas R1 y R2, que provienen del tratamiento de gas oil y aceites lubricantes, como se muestra en la figura 3.

Las corrientes tratadas de gas oil y aceite pueden recuperar parte del fenol del que transfirieron al agua en el stripping, convirtiéndose S1 y S2, así, en corrientes pobres.

Adicionalmente se dispone, en forma ilimitada, a los fines prácticos, de otros tres agentes de extracción: carbón activado (S3), resina de intercambio (S4) y aire (S5).





**Figura 3.** Sistema de remoción de fenol

La tabla 1 muestra los caudales a tratar y las concentraciones iniciales y finales para R1 y R2, así como los caudales máximos disponibles y el intervalo de concentración admisible para S1 y S2. Figuran, además, los correspondientes valores de la constante de equilibrio y la aproximación mínima  $\Delta X_{\min}$ .

Corr.	Caudal [kg/s]	Fracc. másica entrada	Fracc. másica salida	Cte. equilibrio	Aprox. mín. [fracc.másica]
R1	2	0,050	0,010	-	-
R2	1	0,030	0,006	-	-
S1	5 <sup>1</sup>	0,005	0,015 <sup>2</sup>	2	0,001
S2	3 <sup>1</sup>	0,010	0,030 <sup>2</sup>	1,53	0,001

Notas: 1. Caudal máximo disponible  
2. Concentración máxima permitida

**Tabla 1.** Datos del problema

En la tabla 2 figuran los valores de concentración de entrada y de salida máxima permitida, la constante de equilibrio, la aproximación mínima y el costo unitario de la utilización de los agentes de separación externos.

Tanto en el caso del carbón activado como en el de la resina, el costo de utilización incluye el proceso de regeneración necesario. Puede advertirse que para la resina, el mismo crece linealmente con la concentración alcanzada tras

el intercambio con las corrientes a tratar. Ello se debe a que existe una proporcionalidad con la cantidad de fenol que se haya removido.

Corr.	Fracc. másica entrada	Fracc. másica salida	Cte. equilibrio	Aprox. mín. [fracc.másica]	Costo [\$/kg]
S3	0	0,110	0,02	0,001	0,081
S4	0	$x_{4S}$	0,09	0,001	$0,19+0,128 x_{4S}$
S5	0	0,029	0,04	0,001	0,060

**Tabla 2.** Datos de agentes de separación externos

Antes de proceder a la estructuración, deberíamos analizar cual es la conveniencia de utilizar cada uno de los medios de extracción auxiliares. El criterio a seguir es muy simple debiendo tenerse en cuenta la factibilidad técnica de reemplazar un agente por otro y el costo de remoción de una misma cantidad de contaminante. Considerando que, si en una escala única el rango de variación admitido para  $S_i$  es  $[Y_{ie}, Y_{is}]$  y para  $S_j$   $[Y_{je}, Y_{js}]$  y resulta ser  $Y_{ie} \leq Y_{je}$ , son posibles dos situaciones:

- si  $Y_{is} \leq Y_{js}$ , técnicamente siempre  $S_i$  puede reemplazar a  $S_j$  y no habrá que tener en cuenta a este último cuando el costo por unidad de concentración de  $S_i$  sea el menor.
- si  $Y_{is} > Y_{js}$ , considerando que los valores de salida son los máximos admisibles, el análisis puede hacerse considerando que se utiliza un caudal mayor de  $S_i$  para que su concentración a la salida sea  $Y_{js}$ . Otra vez, si, con el nuevo salto de concentración, el costo unitario de  $S_i$  es el menor, se podrá obviar la utilización de  $S_j$ .

Para el caso del ejemplo en consideración, los rangos, en la escala única que resulta de aplicar la ecuación (1), para los tres agentes externos disponibles son los que se indican en la tabla 3.

S3		S4		S5	
entrada	salida	entrada	salida	entrada	salida
0,00002	0,00222	0,00009	$0,09(x_4+0,001)$	0,00004	0,0012

**Tabla 3.** *Composiciones en escala de fuentes*

Claramente, S3 está en capacidad de intercambiar a los niveles más bajos de concentración. Si, por ejemplo, se lo utilizase, para efectuar una comparación con S5, el costo por kg de fenol removido sería igual a  $0,081/0,11 = 0,736$ . Esto resulta inferior al correspondiente valor unitario para S5,  $0,06/0,029 = 2,069$ , con lo cual, el uso del agente S3 resulta más conveniente que el de S5.

En el caso de S4, el costo por kg de fenol removido es,  $0,128 + 0,19/x_4$ . Un simple cálculo permite ver que no existen valores positivos de  $x_4$  que hagan que esta expresión resulte inferior al costo de S3. En consecuencia, el uso de S4 nunca resultará más ventajoso que el de S3.

El análisis anterior reduce la consideración a S3 como único agente de extracción externo.

## **Determinación del punto Pinch y consumos mínimos**

La determinación de la mínima cantidad de S3 necesaria se puede realizar construyendo, al igual que en el caso de estructuración de una red de intercambio térmico, la correspondiente Tabla del Problema, comenzando por considerar, como en aquella oportunidad, solamente las corrientes de proceso.

Pero, a diferencia de la estructuración de RIT, los límites superiores de las corrientes pobres no requieren ser alcanzados obligatoriamente. Por otro lado, la utilización de estas corrientes deberá ser máxima, en virtud de su costo nulo.

Lo anterior significa que no se puede construir la Tabla del Problema ya que se desconocen las verdaderas concentraciones de salida de las corrientes pobres de proceso. Una posible estrategia es admitir que esas corrientes alcanzan los límites establecidos, suponiendo que existe una eventual fuente de contaminación externa, capaz de transferir fenol a las corrientes de proceso,

si fuera necesario y determinar en que cantidad sería requerida. Una vez hecho esto, se tendrá en claro si es que existe capacidad de remoción en exceso en las corrientes pobres de proceso, cual es su valor y cual sería el nivel de concentración, medido en la escala adoptada, a la salida de las mismas. Una vez introducidos los cambios, sí se estaría en condiciones de construir la Tabla del Problema ajustada.

Para completar la información necesaria en la construcción de la tabla, se requiere expresar, aplicando (1), las fracciones másicas de las corrientes pobres de proceso en términos de concentraciones de las aguas residuales. En el caso de S1 se podrá intercambiar desde una fracción másica igual a 0,012 hasta 0,032, en tanto que el rango para S2 será 0,01683 - 0,04743.

Con esto, los límites de los intervalos, expresados como concentraciones en aguas residuales son:

0,05000 0,04743 0,03200 0,03000 0,01683 0,01200 0,01000 0,00600

Para la construcción de la Tabla del Problema, utilizando esta escala, debe tenerse en cuenta que, para calcular el aporte que las corrientes de extracción realizan en cada intervalo donde se encuentran presentes, es preciso corregir el caudal de las mismas, para que resulten coherentes los valores de masa intercambiada.

En efecto, siendo  $W$  el caudal cuando se considera la concentración en términos de agente de extracción y  $W'$  cuando se lo hace considerando las aguas residuales, debe ser

$$W'(Y_1 - Y_2) = W(X_1 - X_2) = W'(m[X_1 + \Delta X_{\min}] - m[X_2 + \Delta X_{\min}]) \Rightarrow W' = W / m$$

A partir de este punto, en las tablas y gráficos, para una notación más compacta, salvo que se indique lo contrario, los valores de fracciones másicas se encuentran expresados como porcentajes y los de flujos de contaminante en g/s.

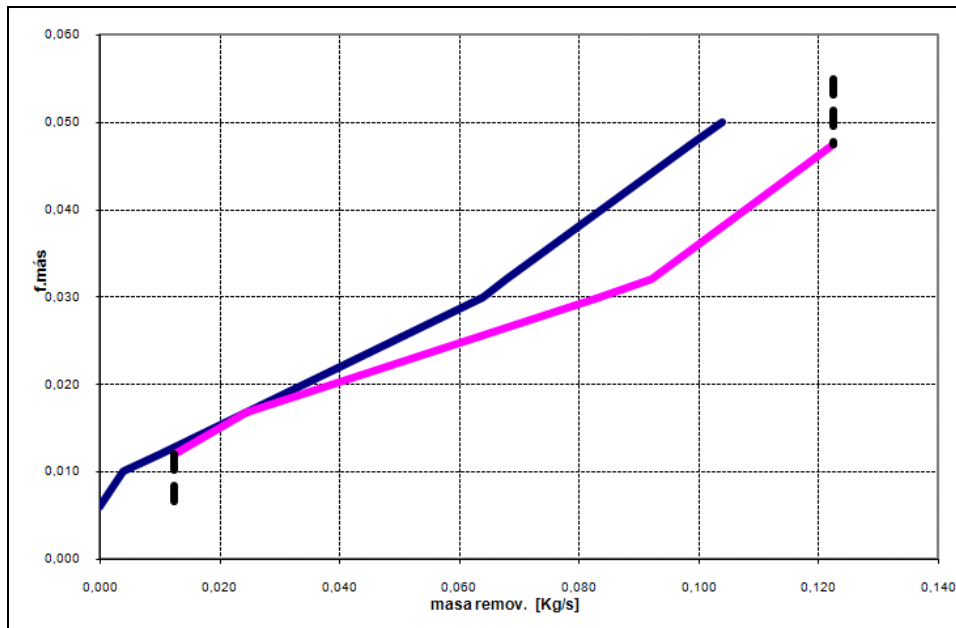
Con esto, la Tabla del Problema que resulta es la que se muestra en la tabla 4.

Corr ->		R1	R2	S1	S2	Bal	Acum
[kg/s]		2	1	2,5	1,961		
5,000	4,743	-5,14	0	0	0	-5,14	-5,14
4,743	3,200	-30,86	0	0	30,25	-0,61	-5,75
3,200	3,000	-4,00	0	5,00	3,92	4,92	-0,82
3,000	1,683	-26,34	-13,17	32,93	25,82	19,24	18,42
1,683	1,200	-9,66	-4,83	12,08	0	-2,42	16,00
1,200	1,000	-4,00	-2,00	0	0	-6,00	10,00
1,000	0,600	0	-4,00	0	0	-4,00	6,00

**Tabla 4.** *Tabla del Problema inicial*

Allí, para el cálculo de los balances, al igual que en el caso de intercambio térmico, se han considerado con signo negativo los aportes de las fuentes. En los acumulados puede verse que habría un requerimiento de 0,0184 kg/s de la eventual fuente externa, es decir, hay un exceso en esa magnitud en la capacidad de extracción de fenol en los sumideros de proceso. A su vez, se requiere adicionar un agente de extracción externo que sea capaz de remover  $0,0184 - 0,0060 = 0,0124$  kg/s en la zona “pobre”.

En la figura 4 pueden verse las Curvas Compuestas de fuentes y sumideros, donde pueden apreciarse los excedentes y faltantes antes anotados. La construcción de estas curvas sigue el mismo principio que el visto en ocasión de tratar el problema de integración energética y es, como se dijera entonces, otro modo de expresar lo volcado en la Tabla del Problema.



**Figura 4.** Curvas Compuestas

Antes de seguir adelante, convendría puntualizar que la eliminación del exceso en la capacidad de extracción puede realizarse tanto por limitación de la concentración de salida de los agentes o reducción del caudal utilizado. En este último caso, debería existir una justificación técnica, ya que esa reducción redundará en una disminución de la fuerza impulsora de la transferencia. En el caso en consideración, se hará uso de la primera de las alternativas.

La forma de determinar la concentración máxima en los agentes de extracción es realizar un balance acumulado de las corrientes pobres desde los niveles de mayor concentración hasta que dicho balance sea superior al excedente determinado en la Tabla del Problema.

En el intervalo donde ello ocurra, la parte ubicada a la mayor concentración no será considerada. Matemáticamente, si  $BA^*_j$  es el balance acumulado de las corrientes pobres hasta el intervalo  $j$ ,  $E$  el valor del excedente,  $\sum W'_j$  es la suma de los caudales de las corrientes pobres en el intervalo  $j$ , expresados en la escala común y  $k$  el intervalo donde  $BA^*_k > E$  y cuyos límites en concentración son  $[Y_k^{sup}, Y_k^{inf}]$ , la concentración máxima a considerar en las corrientes pobres,  $Y^*$ , será

$$Y^* = Y_k^{\text{sup}} - \frac{E - BA_{k-1}^*}{\sum W'_j} \quad (3)$$

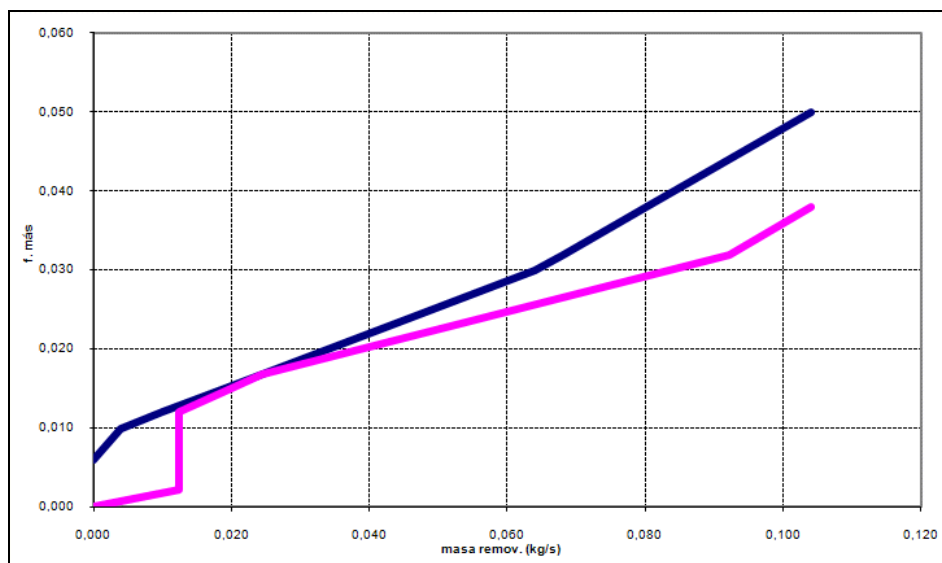
En el problema, el acumulado del primer intervalo en el que existen corrientes pobres ya supera el excedente de 0,0184 kg/s de fenol y solamente está presente S2. De acuerdo a la expresión (3), el límite se establece en  $0,0474 - 0,0184/1,961 = 0,03804$ .

A su vez, el faltante de capacidad de extracción a bajas concentraciones se cubrirá, como se dijo, con el agente externo S3. Para minimizar el gasto que demanda su utilización, se aprovechará la totalidad del salto de concentración disponible, con lo cual se requieren 0,1129 kg/s (5,6432 kg/s en la escala de fuentes) de carbón activado. Con estas modificaciones, la Tabla del Problema es, ahora, la que se muestra en la Tabla 5.

Corr ->		R1	R2	S1	S2	S3	Bal	Acum
[kg/s]		2	1	2,5	1,961	5,643		
5,000	3,804	-23,92	0	0	0	0	-23,92	-23,92
3,804	3,200	-12,08	0	0	11,84	0	-0,24	-24,16
3,200	3,000	-4,00	0	5,00	3,92	0	4,92	-19,24
3,000	1,683	-26,34	-13,17	32,93	25,82	0	19,24	0,00
1,683	1,200	-9,66	-4,83	12,08	0	0	-2,42	-2,42
1,200	1,000	-4,00	-2,00	0	0	0	-6,00	-8,42
1,000	0,600	0	-4,00	0	0	0	-4,00	-12,42
0,600	0,222	0	0	0	0	0	0	-12,42
0,222	0,002	0	0	0	0	12,42	12,42	0

**Tabla 5.** *Tabla del Problema con el agente externo*

Se puede ver que el punto Pinch aparece, como era evidente en la Tabla 4, en el valor 0,0168 de fracción másica. En la figura 5 se muestran las Curvas Compuestas correspondientes a la nueva situación.



**Figura 5.** Curvas Compuestas con el agente externo S3

## Aplicación del método Pinch

Resulta evidente, como ocurría en el caso de transferencia térmica, que el sistema ha quedado dividido en dos sectores claramente diferenciados, uno, en la zona de altas concentraciones o “bloque rico” y otro, en el de bajas o “bloque pobre”.

Al igual que en la estructuración de RIT, en la red de intercambio de masa que se genere, el consumo de agentes externos de extracción –y su costo– será mínimo cuando no se realice intercambio de materia a través del punto Pinch.

La solución, otra vez, será considerar como subsistemas independientes cada uno de los bloques que se han determinado.

La estructuración de la red de intercambio de masa se ha de realizar haciendo uso de la metodología del método Pinch, ya vista oportunamente en la construcción de RIT.

Como entonces, el objetivo es obtener una estructura que utilice la menor cantidad posible de agentes externos.

El análisis se ha de comenzar desde el nivel del Pinch hacia, en este caso, las concentraciones más bajas en el bloque “pobre” o más altas, en el otro.



Las reglas a tener en cuenta en la estructuración son absolutamente equivalentes a las vistas en el caso de RIT. Ellas se refieren, como siempre, exclusivamente a corrientes presentes en el Pinch. En la formulación que sigue de las reglas, se presupone que las concentraciones están expresadas en “escala de fuentes”.

*Número de corrientes* Inmediatamente por encima del Pinch (bloque “rico”), el número de sumideros debe ser, al menos, igual al de las fuentes. Inmediatamente por debajo (bloque “pobre”), el número de fuentes debe ser igual o mayor que el de los sumideros.

*Factibilidad puntual* Inmediatamente por encima del Pinch, una fuente, cuyo caudal es  $W_{Fi}$  puede transferir a un sumidero de caudal “corregido”  $W_{Sj} / m_j$  si  $W_{Fi} \leq W_{Sj} / m_j$   
La condición se invierte en el otro bloque.

*Factibilidad global* Inmediatamente por encima del Pinch, el intercambio entre la fuente  $i$  y el sumidero  $j$  es posible si la diferencia entre la “capacidad global de recepción”  $\sum W_S / m$  y la correspondiente de entrega,  $\sum W_F$ , es mayor o igual a la que existe entre  $W_{Sj} / m_j$  y  $W_{Fi}$   
En el otro bloque debe ser:

$$\sum W_F - \sum W_S / m \geq W_{Fi} - W_{Sj} / m_j$$

El bloque “rico” es el que muestra la tabla 6.

Corr ->		R1	R2	S1	S2
[kg/s]		2	1	2,5	1,961
5,000	3,804	-23,92	0	0	0
3,804	3,200	-12,08	0	0	11,84
3,200	3,000	-4,00	0	5,00	3,92
3,000	1,683	-26,34	-13,17	32,93	25,82

**Tabla 6.** *Bloque rico*

Todas las corrientes se encuentran sobre el Pinch: Son dos fuentes y dos sumideros, con lo cual se cumple la primera de las reglas del método.

De acuerdo a la segunda, la corriente S1 puede intercambiar con R1 o R2, en tanto S2 sólo lo puede hacer con R2.

Sin embargo, teniendo en consideración la factibilidad global, R2 no puede intercambiar con S1.

En efecto, la diferencia entre las capacidades globales de recepción y entrega es  $4,461 - 3 = 1,461$  y entre los caudales (el de S1 “corregido”) es 1,5.

Así pues, los dos primeros intercambios serán R1 con S1 y R2 con S2. En el primero, se transfieren 0,0379 kg/s de fenol y el sumidero agota su capacidad de extracción. R1 todavía debe transferir 0,0284 kg/s desde un valor de fracción molar 0,05 hasta 0,0358.

El intercambio entre R2 y S2 implica la transferencia de la totalidad de lo que dispone la fuente, 0,0132 kg/s de fenol. Al sumidero le queda, todavía una capacidad de extracción de 0,0284 kg/s del contaminante, entre los niveles de fracción molar 0,0235 y 0,0380. Obviamente,

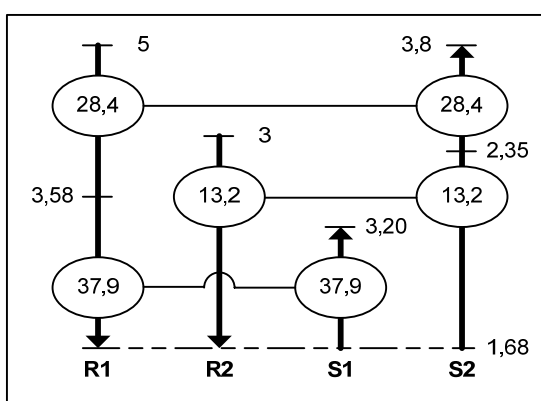
		Corr ->	
		R1	S2
		2	1,961
5,000	3,804	-23,92	0
3,804	3,579	-4,49	4,40
3,579	3,200	0	7,44
3,200	3,000	0	3,92
3,000	2,355	0	12,65

**Tabla 7.** Remanente del bloque rico

después de estos intercambios, no quedan corrientes sobre el Pinch. El sistema remanente se muestra en la tabla 7.

El último intercambio es obvio, después del cual se han satisfecho todos los requerimientos impuestos al sistema. En la figura 6 se esquematiza la red correspondiente al bloque bajo análisis.

Corresponde, ahora, analizar el bloque “pobre”. El mismo se muestra en la tabla 8.



**Figura 6.** Red sintetizada del bloque rico

Corr ->		R1	R2	S1	S3
		[kg/s]	2	1	2,5
1,683	1,200	-9,66	-4,83	12,08	0
1,200	1,000	-4,00	-2,00	0	0
1,000	0,600	0	-4,00	0	0
0,600	0,222	0	0	0	0
0,222	0,002	0	0	0	12,42

**Tabla 8.** *Bloque pobre inicial*

Sobre el Pinch se encuentran dos fuentes y un sumidero. Se cumple, entonces, la primera de las reglas del método. Sin embargo, S1 no puede intercambiar ni con R1 ni con R2, ya que se violaría la factibilidad puntual.

Es preciso realizar una división de la corriente para que el caudal “corregido” que resulte permita cumplir con la regla para el intercambio que se proponga.

Se puede elegir extraer el fenol de R1. Para ello, se hará una división de S1 en dos subcorrientes, S11 con 2 kg/s de caudal “corregido” y S12 con el resto. Se elegirá S11 para intercambiar con R1. Con esto, se cumple no solamente con la factibilidad puntual sino también con la global.

El bloque modificado queda como lo muestra la tabla 9.

Corr ->		R1	R2	S11	S12	S3
		[kg/s]	2	1	2	0,5
1,683	1,200	-9,66	-4,83	9,66	2,42	0
1,200	1,000	-4,00	-2,00	0	0	0
1,000	0,600	0	-4,00	0	0	0
0,600	0,222	0	0	0	0	0
0,222	0,002	0	0	0	0	12,42

**Tabla 9.** *Modificación inicial del bloque pobre*

La cantidad de masa intercambiada será 0,0097 kg/s de fenol, con lo cual S11 cumplimenta totalmente con las especificaciones establecidas, mientras que R1 todavía debe reducir su contenido de fenol desde 0,012 a 0,010.

Con este intercambio quedan sobre el Pinch solamente R2 y S12, cuyo intercambio no viola ninguna de las reglas. Han de transferirse 0,0024 kg/s, S12 quedará eliminado del sistema y R2 deberá, todavía, reducir su concentración de fenol desde una fracción molar 0,0144 hasta 0,006.

La tabla 10 muestra el problema remanente.

Los intercambios restantes son obvios y pueden hacerse subdividiendo o no S3. La figura 7 muestra la red para el bloque con la primera de las alternativas.

		Corr ->		
		R1	R2	S3
		[kg/s]		
1,442	1,200	0	-2,415	0
1,200	1,000	-4,000	-2,000	0
1,000	0,600	0	-4,000	0
0,600	0,222	0	0	0
0,222	0,002	0	0	12,415

Tabla 10. Sistema remanente

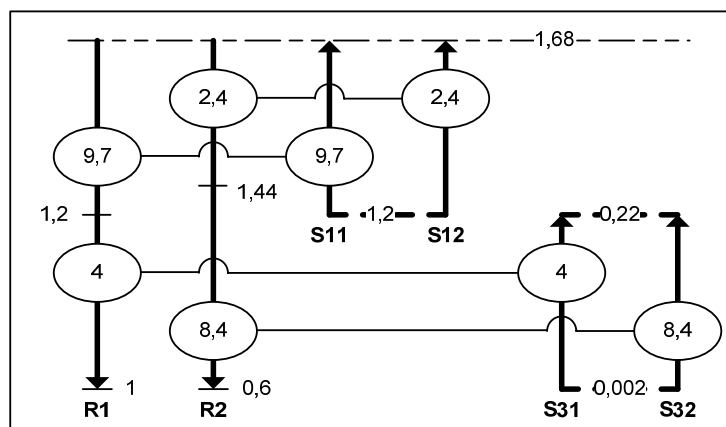


Figura 7. Red sintetizada del bloque pobre

Con esto se habría completado la estructuración de la RIM planteada en el ejemplo de remoción de fenol de corrientes acuosas que provienen del tratamiento de aceites lubricantes y gas oil, planteado oportunamente.

Algunas circunstancias particulares, tenidas en cuenta durante el desarrollo, facilitaron el análisis, simplificándolo, como cuando se reducía el número a considerar de sumideros externos al proceso.

Asimismo, no se han considerado otras restricciones, posibles de ser planteadas, como la inconveniencia de realizar intercambios entre una determinada fuente y un sumidero en particular.

Al igual que en el caso de la estructuración de RIT, el método Pinch presenta algunas limitaciones para abordar eficazmente la totalidad de los problemas que pueden plantearse y, como en esa oportunidad, el tratamiento por una técnica matemática como la PLEM, amplía notablemente la capacidad de abordaje de la cuestión.

## **Bibliografía**

- El-Halwagi M.M., "Pollution Prevention through Process Integration", Academic Press, 1997.

## Propuesta de trabajo

Dado el siguiente sistema:

Corr.	Flujo [kgmol/s]	Frac. molar de entrada	Frac. molar de salida	Cte. de equilibrio	Aprox.mín. [frac. Molar]	Costo [\$/kgmol]
R1	6,19	0,00500	0,0030			
R2	3,00	0,01100	0,0050			
R3	1,50	0,01000	0,0050			
S1	7,70	0,00364	0,0072 (*)	1,1	0,0001	
S2	2,40	0,00200	0,0070 (*)	1,2	0,0001	
SA	$\infty$	0,00200	0,0075 (*)	1,0	0,0001	1,5

(\*): Máximo

Determinar:

- El mínimo consumo de agentes externos
- El punto Pinch
- Los intercambios utilizando el Método Pinch. Mostrar los resultados usando un diagrama de rejilla.

# CAPÍTULO 6

## ESTRUCTURACIÓN DE TRENES DE COLUMNAS DE DESTILACIÓN

### Introducción

La destilación constituye una de las operaciones más utilizadas en la mayoría de las plantas de proceso, particularmente, en la industria del petróleo y la petroquímica.

La separación de los compuestos o grupos de compuestos de una mezcla multicomponente mediante destilación, en rigor, trenes de columnas de destilación, es una operación tecnológicamente consolidada y operativamente robusta.

En estas unidades los costos totales pueden ser altos: a la amortización del equipamiento -torre, internos, equipos de intercambio de calor y de bombeo- debe sumarse el gasto en los servicios de calefacción y enfriamiento. Estos costos están influenciados notoriamente por el orden en el que se van separando las distintas fracciones.

Así, por ejemplo, si la presencia de un componente obliga al uso de un material especial en el equipamiento, con el consiguiente incremento del valor, cuanto más pronto se lo retire menor será el costo asociado al tren de destilación.

O también, si en la mezcla existe un componente en una proporción alta, en todas las columnas donde se encuentre presente se ha de producir un importante consumo de energía en calefacción y enfriamiento.

La estrategia con la que los ingenieros de diseño han abordado la estructuración de estos trenes de columnas de destilación, como es lógico, se ha ido modificando con el tiempo. Los primeros pasos formales fueron dados mediante la aplicación de reglas heurísticas. Luego, se avanzó en la

formulación de funciones de evaluación de cuestiones preponderantes relacionadas al costo del sistema para terminar en enfoques algorítmicos o, para sistemas pequeños, el análisis mediante la búsqueda exhaustiva sobre la totalidad de configuraciones posibles, utilizando simulación.

En este capítulo se van a considerar algunas de estas estrategias, aceptando que las columnas que integran los trenes son como la que se esquematiza en la figura 1, donde existen una única alimentación y sólo dos salidas, utilizando medios auxiliares de calentamiento en el reboiler y de enfriamiento en el condensador, es decir, no existe integración térmica entre las columnas del tren. En todas las separaciones, los componentes claves son adyacentes respecto de la volatilidad.

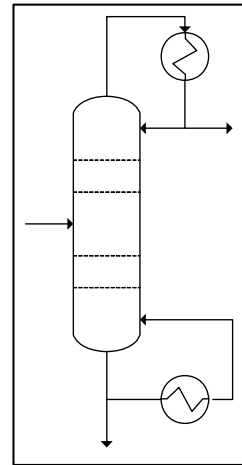


Figura 1. Columna simple

Las buenas prácticas de diseño indican el uso de estas columnas de destilación cuando:

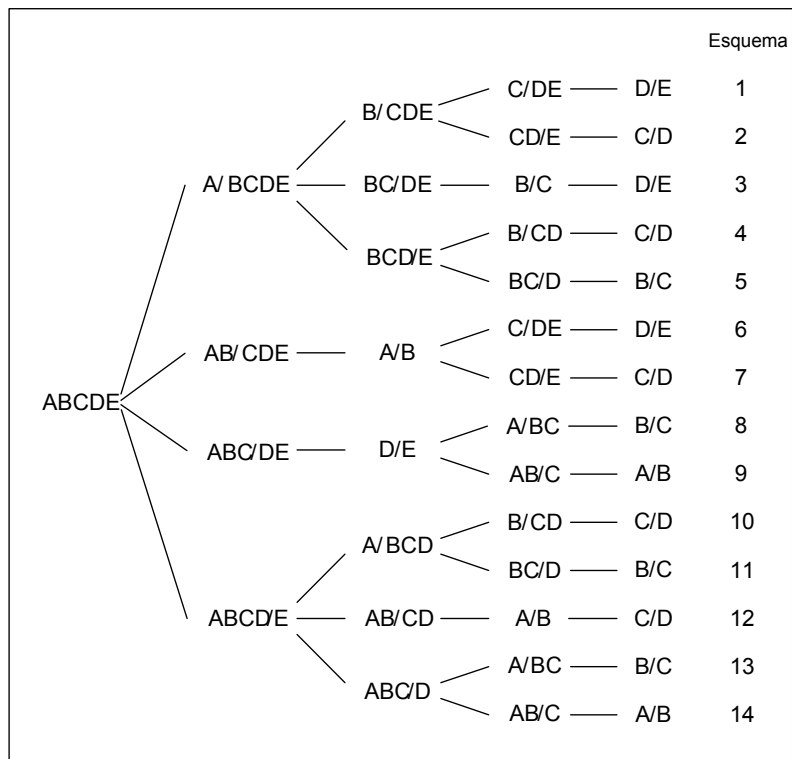
- La volatilidad relativa entre los componentes claves es superior a 1,05
- La demanda energética en el fondo no es excesiva
- La presión de trabajo de la columna no obliga a trabajar a temperaturas cercanas a la crítica de cualquier compuesto
- En el tope no se requiere una refrigeración excesiva para obtener el reflujo necesario
- La temperatura de fondo no causa degradación del producto
- Los azeótropos, si existen, no impiden la separación de los compuestos
- La pérdida de carga en la columna es admisible

En todo este capítulo se admitirá que estas condiciones, en su totalidad, se cumplen razonablemente bien

El problema fundamental en la estructuración de los trenes es el número de alternativas a considerar. Si se trata, por ejemplo, de una mezcla de 3 componentes se tendrán sólo dos esquemas para el tren, la llamada secuencia directa, donde en el destilado de cada columna sale sólo el componente más



volátil, y la secuencia inversa, donde por el fondo sale únicamente el componente más pesado.



**Figura 2.** Alternativas de separación para cinco compuestos

El número de alternativas que se deberán analizar, crece rápidamente con el número de compuestos a separar. En la figura 2 se puede ver el árbol de las 14 alternativas posibles para una mezcla de 5 componentes. Allí se ha indicado con una barra el punto de corte en cada columna (Si se admite que los compuestos se indican ordenados en orden decreciente de volatilidad, AB/CDE significa que, en esa columna, por tope sale una mezcla de A y B y por fondo C, D y E). Otra forma de indicar una secuencia que se utilizará es tomando en cuenta los puntos donde se producen los cortes, siendo el 1 entre A y B, 2 entre B y C, etc. Así el esquema 11 de la figura 2 se puede indicar como 4132.

A fin de evitar rotular la misma secuencia de distinta forma, debe tenerse en cuenta que, al producir el corte en el punto  $k$ , quedan, en general, dos grupos de puntos no usados:  $G1 \{i < k\}$  y  $G2 \{j > k\}$ . En los cortes que sucedan al realizado en el punto  $k$ , se adoptará la convención que, para seguir designando la secuencia, hay que considerar el grupo  $G1$  antes de hacerlo con  $G2$ .

Para encontrar una expresión general que permita determinar el número  $S_{NC}$  de alternativas posibles para un tren de columnas donde deben separarse  $NC$  compuestos puede suponerse que en la primera torre se separan por tope, los  $j$  compuestos más livianos y, obviamente, por fondo los  $NC - j$  restantes. Para el destilado habrá  $S_j$  alternativas posibles de separación, en tanto que para el fondo existirán  $S_{NC-j}$  trenes diferentes.

De este modo, a partir de esta primera torre se podrán estructurar  $S_j S_{NC-j}$  esquemas de separación y, haciendo  $j = 1, 2, \dots, NC-1$  se puede calcular  $S_{NC}$  como  $S_{NC} = \sum_{j=1}^{NC-1} S_j S_{NC-j}$  siendo  $S_1 = 1$

La tabla 1 muestra como crece rápidamente el número de alternativas posibles en función del número de componentes que se separan.

Nro. Comp.	2	3	4	5	6	7	8
Alternativas	1	2	5	14	42	132	429

**Tabla 1.** Alternativas de separación

A continuación, se habrán de exponer algunas de las metodologías que pueden usarse para el análisis en la estructuración de trenes de columnas de destilación, comenzando con el enfoque clásico, actualmente un tanto dejado de lado, del uso de la heurística.

## Estrategias heurísticas de estructuración

Es el método más antiguo para la selección de una secuencia de columnas simples. Se basa en consideraciones de sentido común o con fundamentos técnicos sobre aspectos relevantes de la operación. Resulta ser la vía más simple para abordar el problema de estructuración, si bien no se puede garantizar una solución óptima o evitar que, por la aplicación de las distintas reglas, se produzcan situaciones contradictorias.

Algunas reglas, de las muchas propuestas, son:

Reglas que dependen de la alimentación:

*Regla 1: Se deben separar los componentes corrosivos o peligrosos tan pronto como sea posible.*

Esta regla ha sido planteada y justificada en la introducción a este capítulo.

*Regla 2: Debe separarse lo más pronto posible el compuesto más abundante en la alimentación.*

La razón de esta regla radica en que todas las columnas donde este compuesto esté presente, como ya se ha dicho, han de requerir un diámetro y un gasto de energía más grande para la circulación, la condensación y la evaporación de un mayor caudal en la torre.

*Regla 3: Debe favorecerse, en cada columna, la separación entre tope y fondo lo más equimolar posible.*

Aquí se pretende, fundamentalmente, distribuir, balanceados, los requerimientos energéticos en tope y fondo, a lo largo de todo el tren. Esta heurística privilegia los equipos y servicios vinculados a los intercambios térmicos.

Reglas que dependen de las volatilidades relativas:

*Regla 4: En el tope de cada columna debe separarse el compuesto más liviano presente en la alimentación (secuencia directa).*

En esta regla se privilegian los costos asociados a la condensación en el tope, tanto en equipos como en servicios.

*Regla 5: Las separaciones entre compuestos con volatilidades relativas cercanas a la unidad deben realizarse sin la presencia del resto de los componentes.*

Al decir volatilidades relativas cercanas a la unidad se está poniendo de manifiesto la dificultad para separar esos compuestos, lo que demandará un significativo número de etapas en equilibrio. Al hacerlo en un equipo donde sólo ingresan esos compuestos se logra reducir, al menos, el diámetro de la columna.

Regla que depende de las especificaciones del problema:

*Regla 6: Las separaciones que exigen una alta recuperación deben realizarse en ausencia de componentes no claves.*

Esta regla tiene la misma justificación que la anterior, salvo que, en este caso, la dificultad no proviene de la naturaleza de los compuestos a separar sino de la especificación técnica que se ha planteado.

Regla que tiene en cuenta alteraciones en los cortes separados

*Regla 7: Deben preferirse aquellas secuencias donde los productos de interés se separan en la corriente de tope.*

La justificación de esto es doble. Por una parte, en las mezclas suelen encontrarse presentes impurezas, las que, generalmente, tienen una baja volatilidad, por lo que tienden a salir con la corriente de fondo. Por otra, en el reboiler está el punto más caliente de la columna, con la posibilidad de que allí se produzcan alteraciones en los productos deseados.

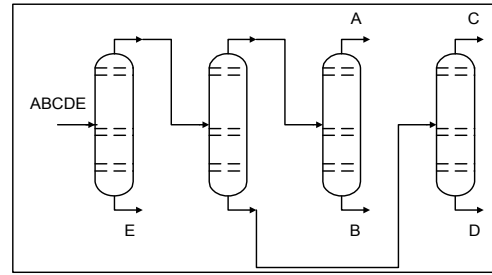
Debe advertirse que, al aplicar estas reglas en un problema particular, pueden obtenerse resultados contradictorios. Por ejemplo, el hecho de separar un producto corrosivo primero puede resultar que sea la separación más difícil, con lo cual el cumplimiento de la regla 1 impediría cumplir con la 5.

Se verá este problema de conflictos en la aplicación de las reglas 2 a 5 a las secuencias mostradas en las figuras 3, 4 y 5, donde se separan los compuestos de la mezcla ABCDE, cuyas fracciones molares y volatilidades relativas se muestran en la tabla 2.

Compuesto	A	B	C	D	E
Fracción Molar	0,05	0,15	0,25	0,20	0,35
Volatilidad relativa	7,98	3,99	3	1,25	1
Volatilidad relativa (adyacente)	2	1,33	2,4	1,25	-

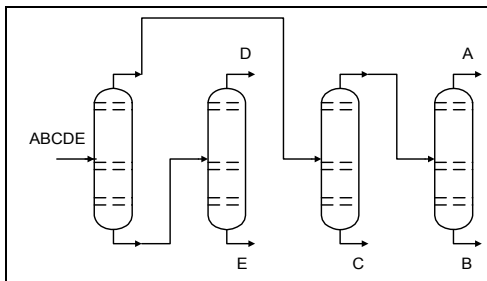
**Tabla 2.** Datos del caso a analizar

En la secuencia de la figura 3 se cumple la regla 2 pero claramente se violenta la 5. En la secuencia de la figura 4 se cumplen las reglas 3 y 5, considerando que en la columna donde se separa B de C la presencia de A no resulta determinante.

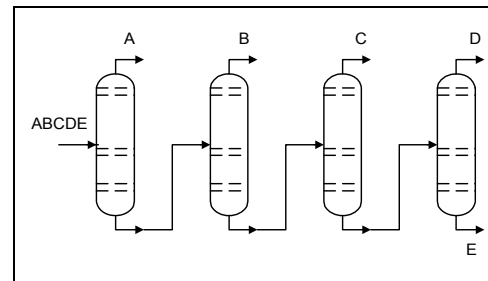


**Figura 3.** Secuencia 4213

Aquí no se cumple la 2 y, obviamente, ni en esta ni en la anterior se verifica la secuencia directa, que es el esquema que se muestra en la figura 5. Allí, además, para el problema planteado, se cumple, sólo en la última columna, la regla 5.



**Figura 4.** Secuencia 3214



**Figura 5.** Secuencia directa

Biegler *et al.* han propuesto cierto orden de prioridad en las reglas. Para ellos, la regla 1 sería la más importante de las que se han enunciado, le seguiría la 5 (la 6 ocuparía el mismo lugar), luego la 2, la 4 y la 7, en ese orden. Si se tuviera en cuenta este criterio, debería empezarse por considerar un estudio más detallado del tren de la figura 5 y seguir, luego, por el de la 4.

Este simple ejemplo permite comprender las dificultades inherentes a la estrategia heurística clásica para estructurar trenes de columnas de destilación. Es preciso encontrar una vía alternativa que, sin renunciar a la simplicidad de lo anterior, permita soslayar sus contradicciones.

Para esto, se efectuará un análisis conceptual sobre la función objetivo que puede plantearse, costo total anual, CTA de aquí en adelante, para determinar cuales son las variables responsables del valor que toma la misma.

Una vez realizado ese análisis, debe plantearse alguna función de esas variables que permita estimar, al menos en forma semicuantitativa, las tendencias en el comportamiento del CTA.

Se comenzará, pues, por analizar las dependencias del costo total anual.

## Costo total anual para una columna de destilación simple

En una columna como la de la figura 1 puede considerarse que el costo total anual está compuesto, básicamente, por la amortización de los equipos, la columna, el condensador y el reboiler, y los gastos asociados al consumo de servicios auxiliares.

Partiendo de una determinada alimentación (caudal, composición, estado térmico) cualquiera de estos ítems se ha de ver afectado, primariamente, por las condiciones de tope y fondo. Estas condiciones están vinculadas, además de las recuperaciones especificadas, con la presión de trabajo de la columna y otros dos parámetros propios de la operación de destilación: las condiciones para un infinito número de etapas en equilibrio,  $V_{\min} = (1 + R_{\min}) D$  y el número de las mismas a reflujo total,  $N_{\min}$ . La relación existente es muy compleja, pero en ciertos casos, como cuando la volatilidad relativa es constante a lo largo de la columna, puede ser explicitada, como en las ecuaciones de Fenske y Underwood:

Fenske: 
$$\frac{\log\left(\left[\frac{m_{iD}}{(m_{iF} - m_{iD})}\right]\left[\frac{(m_{PF} - m_{PD})}{m_{PD}}\right]\right)}{\log \alpha_{ik}} = N_{\min} \quad \forall i \neq P \quad (1)$$

Underwood: 
$$\sum_{i \in Nc} \frac{\alpha_{ik} m_{iF}}{\alpha_{ik} - \theta} = (1 - q) \sum_{i \in Nc} m_{iF} \quad (2)$$

$$\sum_{i \in Nc} \frac{\alpha_{ik} m_{iD}}{\alpha_{ik} - \theta} = V_{\min}$$

donde  $m_{ix}$  es el caudal molar del componente  $i$  (en particular L y P claves liviano y pesado), en el punto  $x$  (F: alimentación, D: destilado),  $q$  el estado térmico de la alimentación y  $\alpha_{ik}$  la volatilidad relativa del compuesto  $i$  respecto de otro  $k$ , de referencia.

Las relaciones anteriores implican  $N_c + 1$  variables ( $N_c - 2$  caudales molares -los de los compuestos claves están especificados-,  $N_{min}$ ,  $V_{min}$  y  $\theta$ ) vinculadas por igual número de ecuaciones. Para resolver deben conocerse los valores de las volatilidades relativas, que dependen, en la expresión más simple, de las temperaturas en los distintos puntos de la columna. Estas temperaturas, a su vez, son funciones de las composiciones y de la presión en esos puntos, con lo cual, si se conoce la alimentación y la presión de trabajo el cálculo se puede realizar, aunque ha de requerir de un proceso iterativo.

Además de esto, existe una relación empírica entre los valores de  $R_{min}$  y  $N_{min}$ , el número de etapas teóricas  $N_T$  y la relación de reflujo operativa  $R$ , como la del gráfico propuesto por Gilliland, traducido en ecuaciones como la de Molokanov

$$\frac{N_T - N_{min}}{N_T + 1} = 1 - \exp\left[\left(\frac{1 + 54,4 \psi}{11 + 117,2 \psi}\right)\left(\frac{\psi - 1}{\psi^{0,5}}\right)\right] \quad (3)$$

siendo  $\psi = (R - R_{min}) / (R + 1)$

En la ecuación de Fenske puede verse que la variación del número mínimo de platos es inversamente proporcional a la volatilidad relativa. Aunque es bastante laborioso demostrarlo, otro tanto ocurre con  $V_{min}$  y con el número de platos teóricos, esto último, cuando se fija un cierto valor de la relación de reflujo operativa, normalmente, de un 10 a un 20% en exceso del mínimo.

Resumiendo: para una alimentación dada, si se fija la presión de trabajo, la relación de reflujo operativa y las recuperaciones de los compuestos claves, usando las expresiones vistas – u otras de mayor complejidad y exactitud – pueden calcularse los caudales internos y el número de etapas de la columna así como las composiciones y temperaturas de tope y fondo. A partir de esos valores, se estimará el CTA asociado a la unidad de separación.

El costo de la torre dependerá del diámetro y la altura de la misma. El primero se calcula a partir de una velocidad aconsejada de los caudales internos de vapor, en tanto que la altura es proporcional al número de etapas que requiere la separación.

Para los equipos auxiliares, el costo estará vinculado al área de intercambio, con lo cual la cantidad de calor transferido y la fuerza impulsora son las

variables determinantes. La primera depende de la composición y caudal de los vapores, en tanto que la fuerza impulsora está definida por las temperaturas en tope y fondo.

Por último, los requerimientos de servicios auxiliares serán función de los calores transferidos en condensador y reboiler.

Las expresiones capaces de estimar estos costos son, en general, complejas como para utilizarlas en un análisis de alternativas de trenes de columnas de destilación. En su lugar, es posible vincular el CTA con el valor de alguna variable que se relacione fuertemente con dicho costo.

Sin dudas, el caudal interno de vapor es el candidato adecuado: afecta directamente a los equipos de intercambio y, en la torre, al diámetro. A partir de él, es posible construir alguna función de evaluación que permita un ordenamiento de las distintas alternativas para el tren, teniendo en cuenta el valor que toma la función en cada una de ellas.

Como es obvio, en este procedimiento no existirán contradicciones, como en el caso de las reglas heurísticas, aunque, al igual que en esa estrategia de análisis, no se podrá asegurar que la secuencia con el mejor valor de la función de evaluación resulte ser la de menor CTA.

Existen varios enfoques para construir esta función de evaluación, que se verán en los apartados siguientes.

## **Funciones de evaluación para estructurar trenes de columnas**

Aquí se considerarán dos de las funciones de evaluación utilizadas para la estructuración de trenes de columnas de destilación:

- El método o ecuación ROTE
- El método de los Vapores Marginales

En ambos casos se tendrán en cuenta, bajo distintos supuestos simplificadorios, los caudales de vapor en cada una de las columnas que componen el tren.



## Método ROTE

Porter y Momoh establecieron una ecuación sencilla para calcular la carga total de vapor de una secuencia de columnas simples. La expresión es identificada como Rule of Thumb Equation, ROTE, y parte de suponer un comportamiento de mezcla binaria, simplificando la naturaleza multicomponente del problema.

Se basaron en las siguientes suposiciones:

- 1) El análisis privilegia el costo de la energía total consumida aunque, como se vio, el volumen de los vapores tiene su incidencia sobre las dimensiones de los equipos y, por ende, sobre la amortización de la inversión. De cualquier modo, el costo de capital no se tiene en cuenta explícitamente
- 2) La energía consumida es proporcional al vapor de tope. Esta última consideración pierde validez para separaciones dificultosas a bajas presiones
- 3) Las separaciones son netas: el clave liviano y los compuestos más livianos que él, salen por tope, el clave pesado y los compuestos más pesados, por fondo, siendo los compuestos claves adyacentes en volatilidad.
- 4) La relación de reflujo mínima,  $R_{min}$ , se calcula como si fuera una mezcla binaria de los componentes claves, usando la ecuación de Underwood válida para tales mezclas

$$R_{min} = \frac{1}{(\alpha_{lp} - 1)} \left[ \frac{x_{D,cl}}{x_{F,cl}} - \alpha_{lp} \frac{x_{D,cp}}{x_{F,cp}} \right]$$

donde los subíndices D y F se refieren al destilado y a la alimentación, cl y cp, al clave liviano y pesado.

Adviértase que, bajo el supuesto binario, la volatilidad relativa del clave liviano es respecto del pesado (volatilidades adyacentes).

Utilizando la ecuación anterior se puede llegar a disponer de un estimado de la suma de caudales de vapor por mol de alimentación que se genera en cada secuencia y la secuencia óptima será aquella que requiere la menor carga total.

Para una columna cualquiera, es posible calcular el flujo de vapor mediante un balance de materia en el tope de la columna:

$$V = D(1+R) = D(1 + r_F R_{\min})$$

y como en el destilado no sale nada del clave pesado, de acuerdo a los supuestos realizados, se tendrá que el vapor en el tope de la columna  $j$  será:

$$V_j = D_j \left[ 1 + r_F \frac{x_{D,cl}}{x_{F,cl}(\alpha_{lp} - 1)} \right]$$

Teniendo en cuenta que todo el clave liviano que ingresa a la columna sale por tope

$$\frac{x_{D,cl}}{x_{F,cl}} = \frac{m_{cl}/D}{m_{cl}/F} = \frac{F}{D}$$

Y, al reemplazar la expresión anterior en la ecuación de  $V_j$  se llega a la fórmula ROTE.

$$V_j = D_j + r_F \frac{F_j}{(\alpha_{lp,j} - 1)} ; \quad V_T = \sum_{j=1}^{NC-1} V_j = \sum_{j=1}^{NC-1} D_j + r_F \sum_{j=1}^{NC-1} \frac{F_j}{(\alpha_{lp,j} - 1)}$$

$$V_T = \sum_{j=1}^{NC-1} D_j + r_F \sum_{j=1}^{NC-1} \frac{F_j}{\Delta_{lp,j}} \quad \text{ROTE} \quad (4)$$

Esta fórmula permite dar alguna explicación sobre ciertas reglas heurísticas. Puede verse que, al favorecer la secuencia directa se obtiene un valor mínimo en la suma de todos los destilados; en el caso que se dejen las separaciones difíciles para el final se tiende a disminuir la incidencia del segundo término (menor  $F_j$  cuando  $\Delta_{lp,j}$  es pequeño) y al privilegiar la separación equimolar se trata de distribuir los dos términos, de la forma más equilibrada posible, a lo largo de todo el tren.

La fórmula ROTE tiende a predecir un valor superior al determinado al usar las ecuaciones exactas de Underwood. De todos modos, distintos trabajos permiten asegurar que el orden de las secuencias de acuerdo a su costo, es similar al encontrado con otros métodos más rigurosos, al menos, en las de menores valores de  $V_T$ .

La expresión ROTE se ha de aplicar a la secuencia directa usada para la separación de 1 kgmol de la mezcla multicomponente ABCDE cuyos datos son los de la tabla 2.

Compuesto	A	B	C	D	E
Fracción Molar	0,05	0,15	0,25	0,20	0,35
Volatilidad relativa	7,98	3,99	3	1,25	1
Volatilidad relativa (adyacente)	2	1,33	2,4	1,25	-

**Tabla 2.** Datos del caso en análisis

Se considerará, además, que la relación de reflujo operativo, en todas las columnas, supera en un 10% a la relación de reflujo mínima ( $r_F = 1.1$ ). El resumen de caudales de alimentación y destilado y valores de  $\Delta_{i,p,j}$  para las distintas columnas de la secuencia se muestran en la tabla 3. Adviértase que para el cálculo de este último valor se han considerado las volatilidades relativas adyacentes (última fila de la tabla 2).

Columna	$\Delta_{i,p,j}$	Alim.	Caudal	Dest.	Caudal
1	1	ABCDE	1	A	0,05
2	0,33	BCDE	0,95	B	0,15
3	1,4	CDE	0,80	C	0,25
4	0,25	DE	0,55	D	0,20

**Tabla 3.** Datos para aplicar ROTE al esquema 1234

El cálculo del valor que surge de la aplicación de ROTE es inmediato

Columna 1:	$0,05 + 1,1 \times 1,00 / 1,00$	1,15
Columna 2:	$0,15 + 1,1 \times 0,95 / 0,33$	3,3167
Columna 3:	$0,25 + 1,1 \times 0,80 / 1,40$	0,8786
Columna 4:	$0,20 + 1,1 \times 0,55 / 0,25$	2,62
	ROTE	7,9653

En la tabla 4 se encuentran los resultados que arroja la ecuación ROTE para cada uno de los 14 esquemas posibles para el problema de la tabla 3.

Secuencia	VTot.	% Variación
3214	5,8257	0
3124	5,884	1
1324	6,3998	9,85
2134	7,3019	25,34
1234	7,9653	36,73
4321	7,9807	36,99
4312	8,0390	37,99
4132	8,1698	40,24
2143	8,2769	42,08
1432	8,2848	42,21
4213	8,2902	42,30
4123	8,5686	47,08
1423	8,6836	49,06
1243	9,0402	55,18

**Tabla 4.** Resultados del método ROTE

Ahora se podrían analizar en detalle, modificando las presiones de trabajo, las relaciones de reflujo, etc., los cuatro primeros esquemas de la tabla, donde se produce un incremento máximo del valor ROTE de, aproximadamente, el 25%.

## **Método de Vapores Marginales**

Este método también trabaja sobre los caudales internos de vapor en las distintas columnas del tren pero desde un punto de vista diferente al de Porter y Momoh. La idea fue presentada por Modi y Westerberg en una estructuración de los trenes en base al análisis de costos marginales, entendiendo por tales los que se generan, en cada columna, debido a la presencia de los compuestos no claves.

El concepto básico es muy simple: en cualquiera de las secuencias posibles para un tren que separa NC compuestos, siempre existirá una columna donde se separen los compuestos claves adyacentes I y J. Las variaciones en costos fijos y operativos de esta columna, en las distintas secuencias, debe imputarse, en principio, a los compuestos no claves que acompañan a I y J.

Los autores encontraron que, en un gran número de casos, una medida adecuada de esos costos marginales se relacionaba con el caudal de vapores de los compuestos no claves. Esto no resulta extraño, habida cuenta de las consideraciones que se han efectuado anteriormente. Propusieron, además, un modo de cálculo aproximado para esos caudales, partiendo de las ecuaciones de Underwood para mezclas multicomponentes.

Dichas ecuaciones pueden escribirse como:

$$\sum_i \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ik} - \theta} f_i = \sum_i \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ik} - \theta} d_i + \sum_i \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ik} - \theta} b_i = (1-q)F$$

$$V_{\min} = \sum_i \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ik} - \theta} d_i = (1-q)F - \sum_i \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ik} - \theta} b_i$$

Esta ecuación relaciona a  $V_{\min}$  con los compuestos que se encuentran en el destilado y los que están en el fondo.

Si se supone una separación perfecta  $d_i = f_i$  para el clave liviano y los más livianos que él y cero para el resto. A su vez, deberá ser  $b_i = f_i$  para el clave pesado y los más pesados que él, en tanto que para los restantes será  $b_i = 0$ . Las expresiones anteriores resultan

$$V_{\min} = \sum_{i=1}^{cl} \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ik} - \theta} f_i = (1-q) \sum_{i=1}^{NC} f_i - \sum_{i=cp}^{NC} \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ik} - \theta} f_i$$

o 
$$V_{\min} = 0,5 \left[ \sum_{i=1}^{cl} \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ik} - \theta} f_i + (1-q) \sum_{i=1}^{NC} f_i - \sum_{i=cp}^{NC} \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ik} - \theta} f_i \right]$$

En el trabajo de Modi y Westerberg se sugiere que el caudal de vapores de los componentes no claves que participan en  $V_{\min}$ ,  $VM_{\min}$ , puede ser utilizado como una medida del costo marginal de la columna.

La expresión sería, considerando una columna j cualquiera del tren

$$VM_{\min,j} = \sum_{i=1}^{cl-1,j} \frac{\alpha_{ik,j}}{\alpha_{ik,j} - \theta_j} f_{i,j} + (1-q_j) \left( \sum_{i=1}^{cl-1,j} f_{i,j} + \sum_{i=cp+1,j}^{NC} f_{i,j} \right) - \sum_{i=cp+1,j}^{NC} \frac{\alpha_{ik,j}}{\alpha_{ik,j} - \theta_j} f_{i,j} \quad (5)$$

Se ha eliminado el factor 0,5 ya que su inclusión, al utilizar  $VM_{\min}$  como una medida del costo marginal, no es relevante.

El valor de  $\theta_j$  que interesa en la expresión anterior debe estar entre  $\alpha_{cp,k} < \theta_j < \alpha_{cl,k}$  y, en una aproximación suficientemente buena, puede tomarse  $\bar{\theta}_j = 0,5(\alpha_{cl,k} + \alpha_{cp,k})$ .

Con este valor, la última sumatoria de la expresión anterior será negativa y si se supone que la alimentación ingresa a la columna como líquido en su punto de burbuja ( $q = 1$ ) resulta una expresión muy simple como función de evaluación, considerando los vapores marginales en la columna  $j$

$$VM_{\min,j} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq cl,cp}}^{NC} \frac{\alpha_{ik,j}}{|\alpha_{ik,j} - \bar{\theta}_j|} f_{i,j}$$

Y para el tren entero

$$VM_{\min} = \sum_{\forall j} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq cl,cp}}^{NC} \frac{\alpha_{ik,j}}{|\alpha_{ik,j} - \bar{\theta}_j|} f_{i,j} \quad (6)$$

En la tabla 5 están resumidos los cálculos en la aplicación de la función de evaluación Vapores Marginales a la secuencia directa del problema de la tabla 3. Los valores en la zona grisada corresponden a los  $\bar{\theta}$  para cada columna.

	$\bar{\theta}$	A	B	C	D	E	
Col.1 (A/B)	5,985	–	–	0,2513	0,0528	0,0702	0,3743
Col.2 (B/C)	3,495	0	–	–	0,1114	0,1403	0,2516
Col.3 (C/D)	2,125	0	0	–	–	0,3111	0,3111
Col.4 (D/E)	1,125	0	0	0	–	–	0
						$VM_{\min}$	0,9370

**Tabla 5.** Cálculos de  $VM_{\min}$  para la secuencia 1234

El signo – indica los compuestos claves de cada columna que no se consideran para el cálculo, en tanto que el valor 0 corresponde a aquellos compuestos ausentes en la alimentación. En la tabla 6 pueden verse, los resultados de la función de evaluación para todas las secuencias posibles.

Secuencia	Vapor Marg.	% Variación
2134	0,6517	0,00
2143	0,7406	13,64
3214	0,7891	21,09
4213	0,8674	33,10
1234	0,9370	43,78
3124	0,9514	45,99
1324	1,0063	54,41
1243	1,0259	57,42
4123	1,0825	66,10
1423	1,0945	67,95
4321	1,1451	75,71
4132	1,2921	98,26
1432	1,3041	100,10
4312	1,3074	100,61

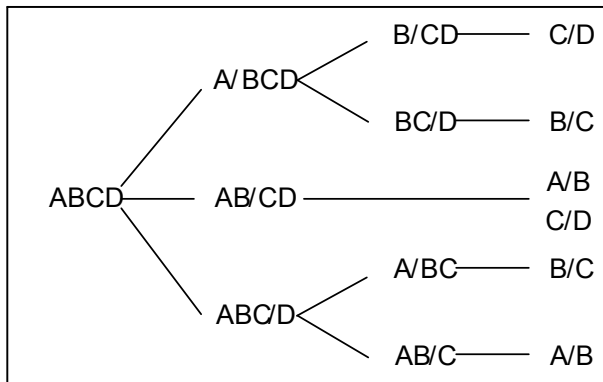
**Tabla 6.** Resultados de Vapores Marginales

Si se aplica el mismo criterio que con el método ROTE (25% de variación) se deberían estudiar en detalle las secuencias 2134, 2143 y 3214. Obviamente, estos resultados no son coincidentes con los obtenidos anteriormente, ya que es otra la función de evaluación.

## **Estructuración por Programación Dinámica**

Hendry y Hughes propusieron utilizar la técnica de programación dinámica para la estructuración óptima de trenes de columnas de destilación.

La idea propuesta por los autores, al igual que en todos los casos anteriores, es considerar que las separaciones son perfectas y los compuestos claves son adyacentes. Bajo este supuesto, las corrientes que tienen los mismos compuestos tienen, también, la misma composición y, como consecuencia, todas las columnas a la que ingresa la misma alimentación y donde se plantean los mismos claves de separación, han de tener el mismo costo anual, independientemente de donde se origina la corriente de alimentación.



**Figura 6.** *Árbol de alternativas*

En la figura 6 se pueden ver todos los esquemas posibles, bajo el supuesto planteado por Hendry y Hughes, para una mezcla de 4 componentes, ABCD, ordenados, como siempre, en orden decreciente de volatilidad relativa.

Ya se había visto que, para este problema, son posibles 5 secuencias de tres columnas cada una. Se puede demostrar que el tratamiento detallado de todo el sistema demandará el análisis de 13 columnas. Pero, bajo las suposiciones hechas, sólo es necesario calcular 10 columnas, ya que, por ejemplo, la torre donde se separa B de C en la secuencia 132 es la misma que la de la 312. Esto se podría haber reflejado en el gráfico, haciendo que aparezca sólo una vez cada columna, pero resultaría sumamente intrincada la figura.

En la tabla 7 puede verse la reducción sustancial en el análisis detallado de columnas diferentes, para distinto número de componentes en la mezcla original, cuando se va a utilizar el método de Hendry y Hughes (H&H) con respecto al valor exacto  $NU_{N_c} = 3NU_{N_c-1} + 1$  ;  $NU_1 = 0$ , siendo  $NU_k$  las columnas a calcular en forma exacta para las secuencias de k componentes.

Nº Componentes	4	5	6	7	8
Nº Col.dif. H&H	10	20	35	56	77
Nº exacto de Col.dif.	13	40	121	364	1093

**Tabla 7.** *Número de columnas diferentes*

Para cada una de las columnas propuestas se deberá calcular el valor de la función objetivo, CTA en este caso. Como ya se vio, dada una cierta alimentación, este costo dependerá de la condición térmica de la carga, la presión de trabajo y la relación de reflujo operativa, una vez que se han fijado los factores de recuperación de los componentes claves.



En este costeo no se podrán, obviamente, suponer factores de recuperación del 100% (separación perfecta), pero con valores cercanos a uno se podrá tomar ese resultado de CTA como si correspondiese a la separación supuesta por Hendry y Hughes.

Una vez completado este cálculo, se estará en condiciones de asociar un valor de la función objetivo a cada columna del árbol donde se encuentran todas las alternativas de estructuración para el número de compuestos que plantea el problema.

Hecho esto, puede iniciarse la búsqueda de la estructura a la que le corresponde el menor CTA, para lo cual se recorrerá el árbol del problema, del tipo del de la figura 6, utilizando las técnicas de Programación Dinámica.

Esta metodología, aún con las simplificaciones hechas, puede considerarse un enfoque algorítmico en la estructuración de trenes de columnas de destilación, a diferencia de todo lo visto hasta aquí, típicamente heurístico.

Por ejemplo, en la figura 7 se muestra la hoja de una planilla de cálculo con el árbol de esquemas posibles para un problema de cinco componentes. Esta planilla tiene incorporado un complemento, HendHugh.xla, que permite el análisis que se está realizando.

ABCDE	B/CDE	C/DE	D/E
		CD/E	C/D
	BC/DE		B/C
			D/E
			0
	BCD/E	B/CD	C/D
			0
		BC/D	B/C
			0
AB/CDE		C/DE	A/B
			D/E
			0
		CD/E	C/D
			0
ABC/DE		A/BC	B/C
			0
		AB/C	A/B
			0
			D/E
			0
ABCD/E	A/BCD	B/CD	C/D
			0
		BC/D	B/C
			0
	AB/CD		A/B
			C/D
			0
	ABC/D	A/BC	B/C
			0
		AB/C	A/B
			0

Figura 7. Esquemas posibles (5 comp.) en HendHugh.xla

Las distintas columnas posibles se ordenan de izquierda a derecha, encontrándose, en una misma vertical, aquellas que tienen igual número de componentes. Existen zonas delimitadas por líneas horizontales negras y azules. Las primeras enmarcan el conjunto de columnas que se derivan de una determinada. Así, a aquella que separa A de BCD puede seguir una que elimina B por tope y a continuación C de la mezcla con D o bien separar primero D por fondo y luego B de C.

En la figura 7, para el caso englobado con la elipse inferior, el equipo de base da lugar a otras dos torres que tienen un componente menos, las que se ubican en el sector vertical contiguo.

Esto no siempre es así, como se puede ver en lo remarcado por la elipse superior: la columna donde se separa A y B de C, D y E da origen a la separación de los dos componentes livianos, por una parte y, por otra, a una mezcla de tres compuestos, donde son posibles dos secuencias en la separación, con dos columnas cada una. Esto está indicado con la línea azul, que se halla en el interior de la zona delimitada por las negras.

Hay una serie de celdas que están sombreadas en amarillo, otras en azul y un tercer grupo que contiene el valor cero. Para este caso, con cinco componentes, el número de las primeras es 20, la cantidad de columnas diferentes, de acuerdo a la tabla 7, para las que hay que evaluar el CTA. A partir del valor que se coloque en estas celdas, el complemento reemplazará el cero inicial por el valor que haya sido ingresado, completando de este modo la información requerida para aplicar el método.

Las celdas sombreadas en azul habrán de contener los resultados de las optimizaciones parciales, según la metodología de programación dinámica.

Supóngase que se debe estructurar un tren de columnas de destilación para separar una mezcla de i-butano, n-butano, i-pentano y n-pentano cuyos caudales molares son 20, 25, 20 y 35 kmol/h respectivamente. Se admite que la mezcla se comporta en forma ideal y se conocen las expresiones de la variación de la presión de vapor con la temperatura y que en todas las columnas del tren las alimentaciones ingresan como líquido en su punto de burbuja.

Utilizando el complemento *HendHugh.xla* se obtiene, operando sobre la presión de trabajo y la relación de reflujo operativa de cada una de las 10 columnas requeridas por el método, el mínimo CTA de cada equipo. En la figura 8 se muestran los resultados para el problema planteado.

	A/BCD	259469,9	B/CD	171529,0	C/D	749298,9
			BC/D	688850,1	B/C	205056,9
	AB/CD	180984,8			A/B	322826,8
					C/D	749298,9
	ABC/D	652579,2	A/BC	297547,1	B/C	205056,9
			AB/C	212100,8	A/B	322826,8

**Figura 8.** CTA (4 comp.) en *HendHugh.xla*

De acuerdo a las técnicas de Programación Dinámica aplicadas al grafo de la figura anterior, el proceso de optimización debe realizarse de derecha a izquierda, recorriendo las secuencias desde las columnas finales hacia las que reciben la mezcla inicial como alimentación.

Obviamente, en los equipos que separan dos componentes el punto de corte está definido. En cambio, en los que son alimentados con una mezcla ternaria hay que decidir cual de los dos posibles claves liviano se elige. Esta elección se resolverá cuando se analice la columna que da origen a esa mezcla ternaria, porque allí deberá elegirse, para sumar al CTA de la columna en cuestión, el menor aporte del conjunto de dos torres que le sigue.

Así, por ejemplo, en la primera fila de la figura 8, en la separación de C y D no hay alternativa alguna y el valor de la función objetivo es del orden de \$750000. Si se incluye el equipo donde se origina esa mezcla binaria, B/CD, se tendrá un total de unos \$ 921000. La otra alternativa para la mezcla BCD es BC/D seguido por B/C, que suma un total de \$894000, aproximadamente. Es obvio que la segunda vía es preferible a la primera y deberá ser la que se considere al valorizar las secuencias a que da origen la columna donde se separa A de BCD, alcanzándose un CTA para el conjunto de las tres torres de algo más de \$1153000.

Como mecánica de cálculo, para evaluar el menor CTA de la secuencia que se inicia con una determinada columna, se requiere tener evaluadas todas las columnas a que da origen y al valor de la función objetivo para el equipo en cuestión se deberá adicionar el menor CTA que se presenta en cualquiera de las secuencias derivadas. Una típica estrategia de Programación Dinámica.

En la figura 9 se muestran los resultados alcanzados para la totalidad de las alternativas de la mezcla del problema planteado, donde surge que la secuencia óptima es la 132.

	A/BCD	259469,9	B/CD	171529,0	C/D	749298,9
	1153376,8		920827,9			
			BC/D	688850,1	B/C	205056,9
			893907,0			
1153376,8	AB/CD	180984,8			A/B	322826,8
	1253110,5				C/D	749298,9
	ABC/D	652579,2	A/BC	297547,1	B/C	205056,9
	1155183,2		502604,0			
			AB/C	212100,8	A/B	322826,8
			534927,7			

Figura 9. Resultados (4 comp.) en HendHugh.xla

## Complemento HendHugh

Este complemento está diseñado para ayudar a comprender la síntesis de columnas de destilación, utilizando el método de Hendry y Hughes. Está restringido al tratamiento de mezclas entre cuatro y seis componentes.

Para cada una de las posibles columnas de las distintas alternativas de separación de una determinada mezcla, se deberán encontrar las condiciones operativas que minimizan el costo total anual de dichas columnas. En virtud de las suposiciones realizadas para el cálculo, sólo quedan como variables de decisión en cada columna, la presión de tope y la relación del reflujo operativo con respecto al reflujo mínimo.

Al cargarse el complemento genera el elemento de menú *HendHugh*, desde el cual es posible seleccionar las distintas operaciones: *Nuevo Problema*, *Elegir Compuesto*, *Validar Columna*.

Para poder ingresar los datos se debe elegir la orden *Nuevo Problema*. Inmediatamente se crea un nuevo libro con la hoja *Datos de la Columna*. En ella existen áreas resaltadas, específicas para el ingreso de la información: en un primer momento, las horas anuales de trabajo y la amortización y, una vez especificado los compuestos de la mezcla, el clave liviano y los flujos molares de los mismos.

Para ingresar los componentes, se debe utilizar *Elegir Compuesto*, tras lo cual se accede a una base de datos, de donde se los debe seleccionar. A medida de que se lo vaya haciendo, se irán volcando a la hoja de Datos.

Finalizada la selección, se deben ingresar los caudales molares de la mezcla a tratar en la secuencia.

Luego, para cada columna de la misma se debe indicar que compuestos están presentes en la alimentación y cuál es el componente clave liviano, entendiendo que el pesado es adyacente.

Luego, se procede a calcular la columna y su costo, mediante la orden *Validar Columna*. Esta orden generará, la primera vez que se la use, una hoja especial llamada *Secuencia*, donde se irán volcando los valores óptimos del CTA para cada una de las columnas que prevé el método.

Para encontrarlos, el usuario debe determinar, haciendo uso del Solver, las condiciones operativas óptimas.

Completado el cálculo de todas las columnas, se debe aplicar la programación dinámica como se detalló en el acápite respectivo.

Lo expuesto aquí es una síntesis de los aspectos básicos del complemento *HendHugh*. Una información más completa se puede obtener accediendo a la ayuda correspondiente.

## **Bibliografía**

- Hendry J.E., Hughes R.R., "Generating Separation Process Flowsheets", *Chem. Eng. Prog.*, 68 (6), 69, 1972.
- Iglesias O.A., Paniagua C.N., "HENDHUGH.XLA: Un Auxiliar Pedagógico

para la Síntesis de trenes de Columnas de Destilación”, Actas de 40th IGIP International Symposium on Engineering Education, São Vicente, Brasil, pp.987-990, 2011.

- Modi A.K., Westerberg A.W., Ind.Eng.Chem.Res., 31, 839-848, 1992.
- Porter K.E., Momoh S.O., The Chemical Engineering Journal, 46, 97-108, 1991.
- Smith R., "Chemical Process Design and Integration", John Wiley & Sons, 2005.

## Propuestas de trabajo

1) Se desea separar, con un tren de columnas de destilación simple, una mezcla cuyos flujos molares en kgmoles/h y constantes de equilibrio se indican en la tabla adjunta.

Compuesto	Flujo	Cte. Eq.
Propano	35	15
i-Butano	30	8
n-Butano	50	6,5
i-Pentano	40	3,25
n-Pentano	70	2,5

Usando los criterios de ROTE y el de Vapores Marginales, determinar las mejores secuencias, tomando, en cada criterio utilizado, todas las que sean hasta un 25 % superior a la mejor.

Cuando corresponda, considerar la relación reflujo operativo/reflujo mínimo igual a 1,1.

2) Haciendo uso del complemento *HendHugh.xls*, determinar la secuencia óptima de separación de la mezcla del problema anterior.

Considerar para el cálculo una amortización lineal de 10 años y 8000 horas anuales de trabajo.

# CAPÍTULO 7

## FORMULACIÓN DEL PROBLEMA Y ORDENAMIENTO DEL CÁLCULO

### Consideraciones generales

Un primer paso en un problema de diseño óptimo es, como ya quedó visto, la adopción del esquema de proceso que, en potencia, puede resultar más conveniente para el caso planteado.

Definida la cuestión desde el punto de vista estructural, la siguiente etapa es formular un modelo matemático para el esquema adoptado, esto es, expresarlo en términos de relaciones entre los valores que son conocidos y las incógnitas, sean variables de proceso, dimensiones de los equipos, etcétera.

Sin desconocer cierta cuota de arbitrariedad en lo que sigue, resulta necesario precisar ciertos términos que serán de uso extendido en el capítulo.

En principio, se entenderá por *modelo matemático* a un conjunto de *relaciones* independientes entre *datos*, *variables* y *parámetros* que permiten definir *adecuadamente* el problema.

Ese conjunto puede estar constituido por: *relaciones o ecuaciones de diseño*, que se expresan, formalmente, mediante ecuaciones y *restricciones o límites de variación*, declaradas a través de inecuaciones.

Las primeras dejan establecida una vinculación estricta entre una cualquiera de las variables y las restantes: fijado el valor para estas últimas, la primera queda automáticamente fija. La relación de diseño debe interpretarse como una limitación a la libertad de establecer los valores de las variables utilizadas para representar el sistema físico en estudio.

Las restricciones, en cambio, postulan un valor extremo, *frontera*, que no puede ser superado por el vínculo particular que se formula, siendo permitido cualquiera que no lo traspase. Lo que se establece, en consecuencia, son dos subespacios o

Una restricción queda definida por la frontera y fijando si este límite es una cota superior o no



zonas, separados por la frontera, donde las variables se obligan a pertenecer al ámbito exclusivo de uno de ellos. Dependiendo de como esté formulada la restricción, la frontera pertenecerá a una u otra zona.

Todo lo anterior puede expresarse como que *las relaciones de diseño restringen grados de libertad y las restricciones definen zonas de soluciones admisibles*.

El *origen* de unas y otras es diverso: puede tener un fundamento exclusivamente *teórico*, como es el caso de los balances micro o macroscópicos de materia o energía, *semiempírico*, donde un buen ejemplo lo constituyen las correlaciones que permiten el cálculo de diversos coeficientes o, por fin, las relaciones pueden tener una raíz absolutamente *empírica*, como son las recomendaciones de diseño que suelen formular los fabricantes de equipos o las asociaciones profesionales.

Otro tanto puede decirse respecto de la *forma* -no de la *naturaleza*- bajo las cuales se expresan las restricciones y relaciones de diseño: fórmulas, gráficos, tablas, nomogramas, programas para computadoras; todas son formas válidas de expresar el vínculo existente entre las entidades que se encuentran involucradas en la definición de un sistema.

En todo caso, por encima del origen o de la forma, lo que realmente importa es que ecuaciones y límites constituyan un conjunto de relaciones independientes, donde ninguna de ellas puede derivarse o ser expresada por una combinación de las restantes.

En el caso de las ecuaciones de diseño la dependencia importa una reducción artificial, y, por tanto, incorrecta, de los grados de libertad del problema. Para las restricciones, la información redundante tornará, arbitrariamente, más complejo el proceso de cálculo.

No es sencillo, sin embargo, quedar a cubierto del riesgo de formular un modelo matemático con relaciones dependientes. Esto no cuenta, como es obvio, para problemas reducidos, donde la simple inspección puede determinar si el sistema es o no independiente. Las dificultades se plantean cuando el número de relaciones es elevado -en la simulación de una planta completa es de varios miles-, sumándose el hecho, no infrecuente, de existir múltiples fuentes de información,

con la consiguiente posibilidad de que se encuentren expresadas idénticas consideraciones bajo formas no reconocibles como iguales.

Ante esto lo más conveniente es tratar el sistema no como una entidad íntegra sino dividido en subsistemas, donde sea posible privilegiar el análisis de tipo conceptual por sobre el exclusivamente matemático, como se verá más adelante.

Ecuaciones y límites, se dijo, vinculan datos, variables y parámetros. En rigor, variables son todas, sólo que, por ejemplo, el valor de los datos queda fijo por circunstancias que son ajenas al problema de diseño en sí; desde una óptica exclusivamente matemática, constituyen magnitudes constantes.

Las que serán reconocidas como variables son aquellas a las que, en principio, durante el proceso de diseño, se les puede otorgar un determinado valor, con independencia de lo que suceda con el resto de las variables. Esta característica solo quedará acotada, luego, por los grados de libertad que posea el sistema y la zona de soluciones admisibles que se determine.

Los parámetros, por último, son variables que tienen una dependencia expresa con otras variables: la capacidad calorífica de una corriente o un coeficiente global de transferencia, por ejemplo. En estos casos, no resulta posible fijar su valor en forma arbitraria, por lo que, en la formulación del problema, deberá incluirse la expresión que lo vincula al resto de las variables o, si fuera una aproximación válida, otorgarle un valor constante, representativo de todos los que resultan posibles, en consonancia con los límites extremos de las variables de quienes depende.

Restaría aún considerar, en lo que al modelo matemático se refiere, el grado de adecuación que posee. Este concepto es algo relativo y se corresponde con los alcances con se desea efectuar el análisis.

Un modelo excesivamente simplificado no ha de representar al sistema real con el suficiente grado de detalle, por lo que las conclusiones a las que se arribe han de tener un valor relativo. Por el contrario, un modelo sofisticado obligará a afrontar un proceso de cálculo complejo, a veces casi inabordable, como resultado del cual se dispondrá, seguramente, de información superflua.

En estos casos el buen criterio es la regla. Si, por ejemplo, la ecuación de costo que se dispone para un equipo de intercambio térmico del tipo de tubo y camisa se

encuentra en función del área de transferencia global, no ha de resultar necesario, desde el punto de vista económico, postular un modelo que tenga en cuenta el número, diámetro y longitud de los tubos, así como la disposición interna: bastará la ecuación de diseño más simple para obtener el único valor que hace falta.

## **Ordenamiento de cálculo para sistemas de ecuaciones**

Cualquier metodología que se aplique para la búsqueda de la solución óptima de un problema exigirá el cálculo reiterado del modelo matemático que representa al sistema. El esquema básico de cualquiera de ellas consiste en dar valores a un conjunto de variables, a las que se las denominará de decisión, cuyo número es igual al de los grados de libertad y calcular las restantes, a las que se llamará de estado. Luego se verificará si la solución encontrada pertenece a la zona permitida y, de ser así, se procederá a calcular la función o criterio que se desea optimizar, lo que se referirá como función objetivo.

Resulta evidente la enorme conveniencia de que todo el proceso descrito se efectúe dentro de la mayor simplicidad, evitando, hasta donde sea posible, esquemas complejos de cómputo como sistemas de ecuaciones acopladas o cálculo de variables implícitas en funciones no lineales.

Las posibilidades de alcanzar este objetivo y los modos de hacerlo varían según se trate de un modelo explicitado directamente como un conjunto de relaciones o de uno donde las mismas se encuentran "encapsuladas" dentro de módulos de cálculo, como es el caso de algunos simuladores de proceso.

En este acápite se ha de considerar el primer caso, dejando para más adelante el tratamiento de sistemas representados matemáticamente con estructuras modulares.

Las características que posea el *ordenamiento del cálculo* de sistemas de ecuaciones dependerán de cual sea el rol, decisión o estado, que se asigne a cada variable: por ejemplo, si a una, que resulta difícil de explicitar en cualquiera de las expresiones en que figura, no se la elige como decisión es inevitable un incremento en la complejidad del proceso global.

Importa, pues, plantear una adecuada *estrategia de cálculo*, determinando cual es el conjunto de variables que resulta más conveniente como decisión y que relaciones deben utilizarse para calcular las de estado.

Con el objeto de evitar una exposición abstracta de los conceptos fundamentales de tal estrategia se ha de recurrir a un ejemplo sencillo como el que se muestra en la figura 1:

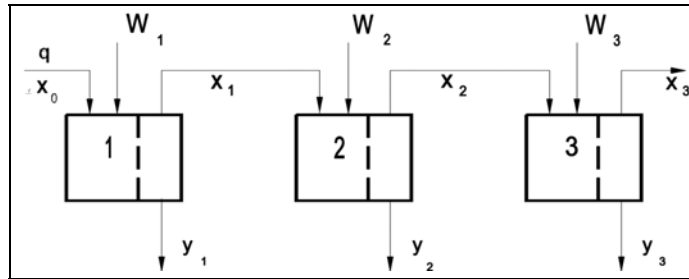


Figura 1. Sistema de extracción

la extracción en tres etapas de

un soluto mediante agregados parciales de un solvente de extracción, inmisible con la solución a tratar. Las etapas operan en equilibrio, siendo conocida la correspondiente relación entre  $x$  e  $y$ , fracciones del soluto en el solvente original  $q$  y el de extracción  $W$ , respectivamente. Los datos del problema son el caudal  $q$  y la fracción  $x_0$ .

El objetivo a conseguir podría ser maximizar el beneficio que se obtuviera del material extraído, descontando el costo del solvente de extracción, con lo que el modelo del sistema queda reducido a términos sumamente simples: un balance de soluto y una relación de equilibrio por etapa, considerando cada una de estas un subsistema, como se indica a continuación.

Subsistema 1	Subsistema 2	Subsistema 3
1) $qx_0 = qx_1 + W_1y_1$	3) $qx_1 = qx_2 + W_2y_2$	5) $qx_2 = qx_3 + W_3y_3$
2) $re(x_1, y_1) = 0$	4) $re(x_2, y_2) = 0$	6) $re(x_3, y_3) = 0$

En la figura 2 se muestran dos representaciones gráficas de la estructura de las relaciones entre las variables que definen el modelo (Nótese que no están presentes ni  $q$  ni  $x_0$ , por tratarse de datos del problema).

En la parte superior se muestra un esquema de arcos y nodos, un grafo en la terminología técnica; un grafo bipartito, para ser más preciso. Allí se pueden apreciar dos tipos de nodos: los que representan las ecuaciones (en la fila

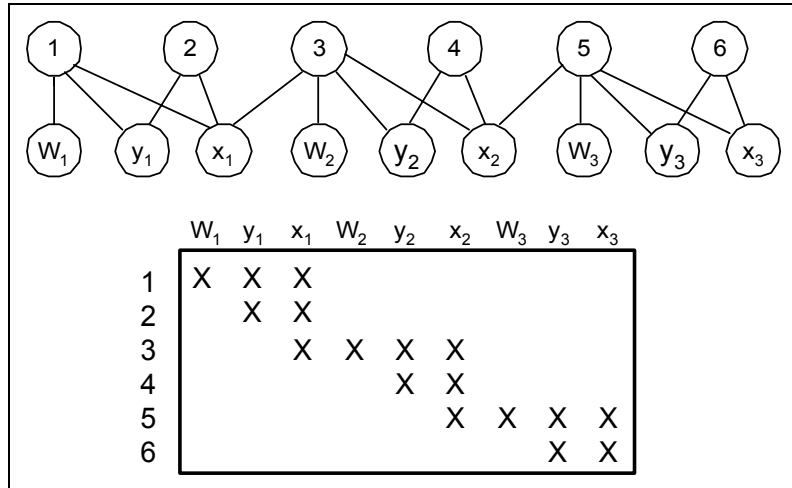


Figura 2. Grafo bipartito y matriz de existencia

de arriba) y los correspondientes a las variables. La presencia en una ecuación de una determinada variable queda indicada por un arco que une los respectivos nodos. Por no haberse indicado ningún sentido para los arcos se dice que el grafo es no orientado.

La causa de esto es la inexistencia de un orden de cálculo, ya que el único modo de establecer una orientación en un arco es definir si se utiliza la ecuación para calcular la variable (el flujo es de aquella a ésta) o el valor de la variable en la resolución de la ecuación.

En la parte inferior de la figura 2 se muestra otra forma de representar lo mismo, más útil, sin duda, en la formulación de la estrategia pero no tan gráfica como la anterior.

Es la llamada *matriz de existencia* en la que cada columna está asignada a una variable y cada fila a una ecuación y donde los elementos de la misma tienen naturaleza lógica, según una determinada variable forme parte o no de una relación de diseño. El elemento de la fila 3 y columna 4, por ejemplo, tiene el valor lógico "existe" -una cruz- pues  $W_2$  interviene en la ecuación 3.

Existen otras alternativas donde, por ejemplo, el elemento  $ij$  de la matriz es una medida relativa de la dificultad de explicitar la variable  $v_j$  de la ecuación  $e_i$ , pero no serán utilizadas en esta obra.

Puede verse que la mayor parte de esta matriz se encuentra vacía (matriz *dispersa*), característica que, para los sistemas de las industrias de proceso, se

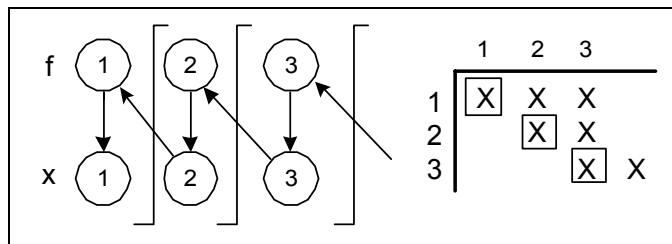
hace más notoria a medida que se incrementa el número de unidades involucradas en los mismos.

El paso siguiente es definir un ordenamiento para efectuar el cálculo. Es obvio que serán calculadas tantas variables como ecuaciones existen, lo que significa determinar, en cada relación de diseño, cual es la incógnita (variable de estado) a resolver. Esto requiere conocer el valor de las restantes variables involucradas en la ecuación, las que pueden ser de estado, calculadas previamente, o de decisión.

Si en la matriz sin reordenar, hubiese alguna ecuación que involucra a una única variable, ésta podría ser calculada, al principio, en forma inmediata y se podría remover, de la matriz, la ecuación y la variable. Este procedimiento se podría reiterar hasta que, en todas las ecuaciones, la formulación incluya, al menos, dos variables.

La noción de ordenamiento surge con absoluta claridad y se explicita totalmente en la orientación que se le otorgue al grafo bipartito, como se muestra en la figura 3.

En la matriz de existencia, desgraciadamente, no es posible más que indicar que variable se calcula en cual ecuación (figura 3 derecha), por



**Figura 3.** Grafo y matriz reordenados (parcial)

lo que, para poder señalar el orden de cálculo elegido deberá recurrirse a una matriz de existencia *reordenada*.

Sobre el grafo orientado se hace notar un hecho de suma importancia: la secuencia de cálculo es acíclica, vale decir que al momento de computar el valor de cualquier variable, se conocen los de todas las otras que intervienen en la correspondiente ecuación, sin que haya que suponer el de ninguna de ellas. No siempre esto es así, como se verá más adelante.

El principio básico sobre el que se estructura la estrategia de cálculo que se ha de exponer se basa en evitar la aparición de subsistemas de ecuaciones que deban ser resueltas en forma simultánea, lo que siempre obliga a instrumentar un esquema iterativo.

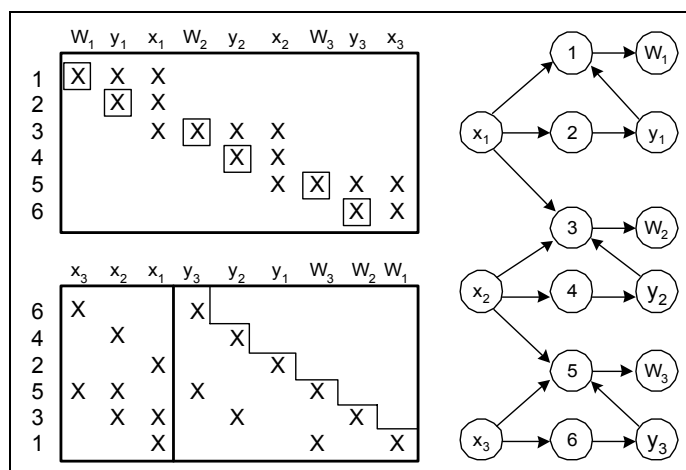
Más adelante se verá que cuando no sea posible evitar la iteración, se ha de buscar que el subsistema sea el más simple de resolver.

La inspección de la figura 3 permite visualizar que *si el grafo orientado es acíclico* ha de existir, al menos, un nodo de variables, como el 1, que tiene un solo arco y será, entonces, la última variable en ser evaluada y la función a utilizar para hacerlo será aquella cuya vinculación registra el arco. Este conocimiento permite remover del grafo los dos nodos y todos los arcos vinculados a ellos.

Al hacerlo, ha de aparecer otro nodo de variable, el 2 en la figura, en igual condición que el anterior y será la penúltima variable a calcular. Este proceso concluye con la eliminación de todos los nodos de función y un número igual de nodos de variables. Los que aún permanecen, exclusivamente vinculados a variables, representan el conjunto de decisiones para el sistema en estudio.

Si se tiene en cuenta que, en la matriz de existencia, el número de posiciones ocupadas en una columna se corresponde con el de arcos cuyo extremo es el nodo asignado a la variable en el grafo bipartito, lo anterior equivale a eliminar de la matriz la correspondiente fila y columna.

Como ya se dijo, para poder explicitar adecuadamente el ordenamiento de cálculo sobre una matriz de existencia, debe generarse otra matriz, por reordenamiento de sus filas y columnas según el siguiente criterio: en el proceso de eliminación antes mencionado, la fila tachada se ubicará en la última fila (posición extrema inferior) libre y la columna en la última columna (posición extrema derecha) libre de la matriz reordenada. De este modo, al finalizar el proceso se habrá generado, sobre la derecha, una submatriz cuadrada, cuyas columnas corresponden a las variables de estado, quedando sobre la izquierda otra submatriz de variables de decisión.



**Figura 4.** Grafo y matriz reordenados

En la figura 4 se muestra el procedimiento aplicado al caso en consideración.

En una primera etapa existen tres variables que figuran en una sola ecuación, los caudales  $W_i$ . En consecuencia, se asignan a ellos las últimas tres columnas de la derecha y las correspondientes ecuaciones a las tres filas inferiores.

Al eliminar estas ecuaciones de toda consideración posterior, quedan, figurando en una sola ecuación (único arco) las  $y_i$  donde, al repetir el procedimiento, se elimina la totalidad de las relaciones, quedando como variables de decisión las  $x_i$ . La matriz reordenada se indica en el extremo inferior izquierdo de la figura.

Adviértase que sobre la derecha se ha formado un arreglo de 6 por 6 que contiene a las variables de estado  $W_i$  e  $y_i$ , y en el cual, el sector por encima de la diagonal principal se encuentra vacío.

Como se dijo en su momento, si al comenzar a construir la matriz de existencia reordenada hubiese habido una función que involucra una sola variable (una fila con una única marca) deberíamos haber asignado esta última a la primera columna libre de la parte izquierda del sector de variables de estado y la ecuación a la primera fila superior de la matriz de existencia reordenada, eliminando variable y ecuación del arreglo original. Este proceso debería reiterarse sobre la estructura remanente hasta que en todas las filas hubiese por lo menos dos marcas.

Por la forma en que ha sido generada la matriz, la variable que figura en la posición extrema derecha de una fila deberá ser calculada de la ecuación a la que esa fila fue asignada, con lo que la nueva matriz tiene explicitado el ordenamiento de cálculo.

Puede verse que se ha logrado evitar, en tal ordenamiento, la existencia de sistemas de ecuaciones acopladas, que obliguen a una resolución simultánea, aspecto que se reitera en el grafo orientado en la derecha de la figura.

Dicho de otro modo, la existencia de un sector triangular superior vacío en la submatriz vinculada a las variables de estado es indicativo que, en el orden de cálculo, no hay ningún conjunto de ecuaciones acopladas que exijan una resolución simultánea.

Si se hubiesen escogido como variables de decisión a los  $W_i$ , es sencillo demostrar que el ordenamiento de cálculo hubiese presentado tres sistemas de ecuaciones acopladas, de acuerdo a la estructura que se muestra en la figura 5.



Esto sirve para reiterar la relación directa entre la complejidad del tratamiento del modelo matemático y la selección del conjunto de variables independientes.

Hay un aspecto que ha estado presente en todo el

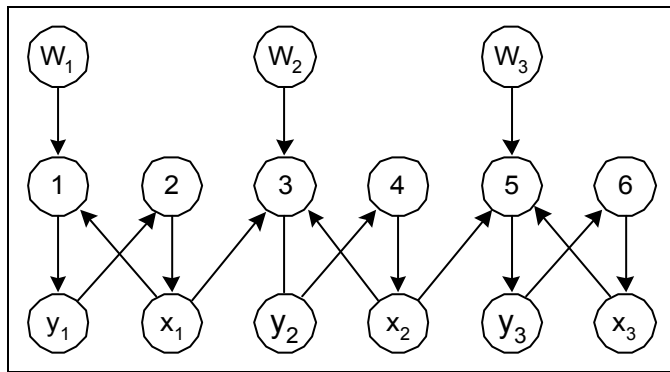


Figura 5. Sistema de ecuaciones acopladas

análisis que antecede y sobre el cual no se ha reparado lo suficiente: la característica esencial de las entidades que, en verdad, se manejan en el ámbito del diseño en la industria de procesos no son ni caudales ni temperaturas ni dimensiones de equipos sino una información que los representa.

De aquí que resulte posible elegir cualquier variable como decisión, en la búsqueda de una mayor simplicidad en el manejo matemático del problema.

Queda claro que en el ejemplo de la batería de extractores, cuando sea el momento de estructurar físicamente el sistema, sobre lo que deberá operarse será sobre los caudales  $W_i$ , ajustándolos para que tomen los valores que se determinarán en el diseño optimizado. Si el modelo matemático representaba *adecuadamente* al sistema real, las restantes variables, en particular las de decisión  $x_i$ , habrán de alcanzar los niveles óptimos.

Entre una instancia y otra se produce un cambio de roles: lo que antes era decisión, esto es, se manipulaba con libertad, pasa a ser determinado por el sistema, es decir, se transforma en estado y viceversa.

La transformación anterior se denomina *inversión del flujo de información* y requiere, como ya se dijo, para tener sentido, que el modelo matemático sea representativo de la realidad física.

Todo este flujo se puede explicitar gráficamente a través de los *diagramas de flujo de información*, donde cada uno de los subsistemas se representará como un bloque y con una media flecha a cada una de las variables que intervienen en las relaciones que lo definen. Si la flecha apunta al bloque significa que se trata de una información que ingresa al subsistema desde fuera de éste; si sale del bloque ha de ser una variable calculada utilizando alguna de las ecuaciones del

subsistema. Habrá tantas variables de estado -saldrán tantas flechas- como relaciones de diseño se tengan. Los datos se representan con una media flecha tachada, o con una marca, y *siempre* han de estar ingresando a todos los subsistemas donde se los utiliza.

En la parte superior de la figura 6 se muestran los esquemas que corresponden a cada uno de los subsistemas del ejemplo donde, arbitrariamente, se ha tomado como información suministrada la que resulta lógica desde el punto de vista del proceso:  $W_i$ .

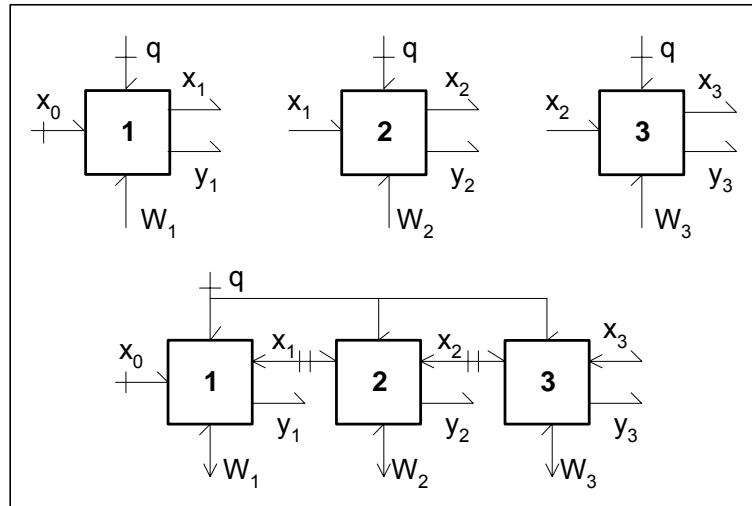


Figura 6. Diagramas de flujo de información

Aquí no aparece el acoplamiento de ecuaciones existente en cada subsistema que se aprecia en la figura 5. Esa complejidad ha quedado “enmascarada”, en el interior del bloque. Se verá más adelante que, en los diagramas de flujo de información, los esquemas iterativos se explicitan cuando el cálculo involucra más de un subsistema.

Abajo, estos tres bloques se han integrado para conformar el sistema global donde, asimismo, se han producido las modificaciones que se determinan a partir del ordenamiento de cálculo encontrado.

Nótese que la inversión de flujo se indica con una flecha plena sobre la respectiva variable. Con una doble marca se señalan aquellas, como  $x_1$ , donde la inversión del flujo las ha transformado en variables de decisión involucradas en más de un subsistema.

Resulta conveniente la consideración de un ejemplo de mayor complejidad, aunque más no sea en sus pasos fundamentales, a fin de poder visualizar adecuadamente algunos aspectos ausentes en el caso anterior, extremadamente simple.

Se ha elegido el análisis de una de las posibles estructuras para una red de intercambio térmico con cuatro corrientes, la que se muestra en la figura 7. Los valores de  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  y  $W_4$  son conocidos.

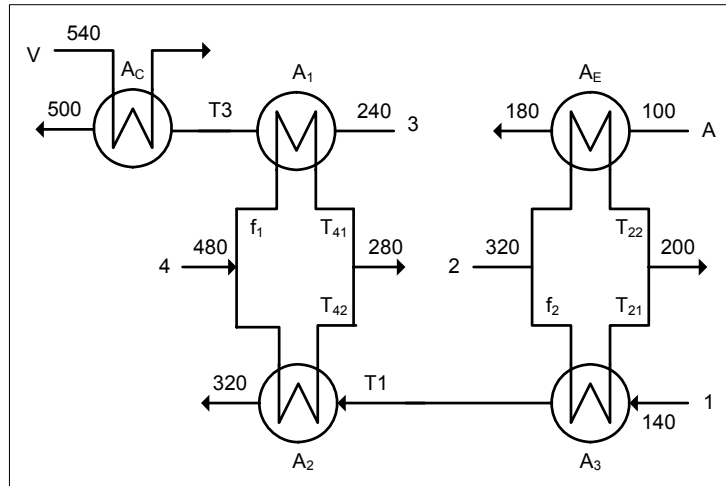


Figura 7. Red de intercambio térmico

Las corrientes calientes se han subdividido para efectuar los intercambios, otorgando al sistema mayor flexibilidad operativa.

Para este problema una posible formulación matemática sería:

Calentador (Subsistema 1)

- 1)  $\lambda_v q_v = W_3(500 - T_3)$
- 2)  $W_3 \ln\left(\frac{540 - T_3}{40}\right) = U_c A_c$

Intercambiador 1 (Subsistema 2)

- 3)  $f_1 W_4(480 - T_{41}) = W_3(T_3 - 240)$   $T_3 \geq 240 ; T_{41} \leq 480$
- 4)  $\ln\left(\frac{480 - T_3}{T_{41} - 240}\right) = U_1 A_1 \left(\frac{1}{f_1 W_4} - \frac{1}{W_3}\right)$   $T_{41} \geq 240 ; T_3 \leq 480$

Intercambiador 2 (Subsistema 3)

- 5)  $(1 - f_1) W_4(480 - T_{42}) = W_1(320 - T_1)$   $T_{42} \leq 480$
- 6)  $\ln\left(\frac{160}{T_{42} - T_1}\right) = U_2 A_2 \left(\frac{1}{(1 - f_1) W_4} - \frac{1}{W_1}\right)$   $T_{42} \geq T_1 ; T_1 \leq \min[T_{42}, 320]$

Mezclador 1 (Subsistema 4)

$$7) \quad f_1 T_{41} + (1 - f_1) T_{42} = 280 \quad 0 \leq f_1 \leq 1$$

Intercambiador 3 (Subsistema 5)

$$8) \quad f_2 W_2 (320 - T_{21}) = W_1 (T_1 - 140) \quad T_1 \geq 140 ; T_{21} \leq 320$$

$$9) \quad \ln \left( \frac{320 - T_1}{T_{21} - 140} \right) = U_3 A_3 \left( \frac{1}{f_2 W_2} - \frac{1}{W_1} \right) \quad T_{21} \geq 140$$

Enfriador (Subsistema 6)

$$10) \quad 80 q_A = (1 - f_2) W_2 (320 - T_{22}) \quad T_{22} \leq 320$$

$$11) \quad \ln \left( \frac{140}{T_{22} - 100} \right) = U_E A_E \left( \frac{1}{(1 - f_2) W_2} - \frac{1}{q_A} \right) \quad T_{22} \geq 100$$

Mezclador 2 (Subsistema 7)

$$12) \quad f_2 T_{21} + (1 - f_2) T_{22} = 200 \quad 0 \leq f_2 \leq 1$$

Debe advertirse que se consideran datos conocidos, además de los flujos entálpicos  $W_1..W_4$ , el valor de  $\lambda_v$  y el de los coeficientes globales de transferencia  $U_i$ . Estos últimos constituyen un caso típico de *parámetros* y, en consecuencia, si se hubiese admitido para ellos la posibilidad de variación, debería haberse explicitado la respectiva relación con las restantes variables del sistema; por ejemplo, podría haber sido  $U_c = f(q_v)$ , en el supuesto de que el coeficiente global de transferencia en el calentador estuviese vinculado exclusivamente con el caudal de vapor.

En el caso de los caudales  $W_i$ , que resultan del producto de un caudal másico (variable especificada) y una capacidad calorífica (parámetro), el conjunto se comporta como un parámetro. Si el caudal no estuviese especificado, debería tratarse en forma separada de la capacidad calorífica, en forma similar a lo hecho con el vapor.

Se han incluido, además, las restricciones que la Termodinámica impone a las distintas temperaturas. No se incluyen, en cambio, los límites que resultan naturales (no negatividad) para las  $A_i$ ,  $q_A$  y  $q_v$ , ya que los anteriores resultan suficientes. No obstante, si se hubiesen introducido dichos límites el problema estaría igualmente bien formulado. Más aún, en general no resulta necesariamente simple visualizar cuales son las restricciones implícitamente contenidas en otras y, por seguridad, conviene explicitar todas ellas.

A la formulación vista le corresponde la matriz de existencia de la figura 8. Se debe recordar que, para la construcción de la matriz de existencia reordenada, hay que localizar, en el sistema remanente sin ordenar, una variable que figure en una sola ecuación, asignar, variable y

	T						A					q		f		
	3	41	42	1	21	22	C	1	2	3	E	V	A	1	2	
1	X											X				a1
2	X						X									a2
3	X	X												X		b1
4	X	X						X						X		a3
5			X	X										X		d1
6			X	X					X					X		a4
7		X	X											X		c1
8				X	X										X	d2
9				X	X					X					X	a5
10						X						X		X		b2
11						X				X		X		X		a5
12					X	X								X		c2

Figura 8. Matriz de existencia de la red

ecuación a la matriz reordenada, como corresponde, y eliminarlas del conjunto sin reordenar.

En la figura se han indicado, además, los sucesivos pasos del proceso de selección de variables de estado utilizando la secuencia a, b,.... Cuando en un momento determinado existe la posibilidad de elegir más de una variable, como en el caso de las áreas de intercambio, se ha indicado con un número, el orden elegido para eliminarlas del conjunto sin reordenar.

Se ha tomado el criterio de asignar primero las variables detectadas inicialmente, para luego considerar las que, como producto de las remociones de filas y columnas, aparecen figurando en una sola ecuación. Así,  $T_3$  queda sólo en la ecuación 3, después de haber eliminado  $q_V$ ,  $A_C$  y  $A_1$  y las correspondientes ecuaciones donde estas variables figuraban. Con esto,  $T_3$  queda en las mismas condiciones en que, inicialmente, se encontraban  $A_2$ ,  $A_3$  y  $A_E$ , pero se han de remover éstas primero que aquella.

En algún momento, más de una variable figurarán en una misma y única ecuación, como es el caso, en el paso d1, donde  $T_{42}$  y  $f_1$  sólo figuran en la ecuación 5. Al elegir una cualquiera de ellas como variable de estado, necesariamente, habrá que darle valor al resto para poder efectuar el cálculo. Si no existen esquemas iterativos, estas serán variables de decisión. En el caso de la figura, tienen tal carácter  $T_1$ ,  $f_1$  y  $f_2$ .

Para definir cual será la naturaleza que se le asigne a las variables deberán tenerse en cuenta los siguientes criterios de selección, los que se presentan en orden de prioridad:

- 1) *Deberá elegirse como variable de decisión aquella que sólo pueda tomar valores discretos*
- 2) *Deberá elegirse como variable de estado aquella que resulte más fácil de ser calculada*
- 3) *Deberá elegirse como variable de decisión aquella para la que se cuente con mayor información*

En la figura 9 se muestra la matriz de existencia reordenada que surge del proceso de eliminación anterior.

	T		f	T				q	T	A			C	q
	1	2	1	21	42	22	41	A	3	E	3	2	1	V
8	x	x		x										
5	x		x		x									
12		x		x		x								
7			x		x		x							
10		x				x		x						
3			x				x		x					
11		x				x		x		x				
9	x	x		x							x			
6	x		x		x							x		
4			x				x		x				x	
2									x					x
1									x					x

**Figura 9.** Matriz de existencia reordenada de la red

Puede apreciarse que se ha logrado un ordenamiento de cálculo sin sistemas de ecuaciones acopladas (El sector por encima de la diagonal principal de submatriz de variables de estado se encuentra vacío), por lo que debe considerarse cumplimentado el objetivo del algoritmo de selección.

En la figura 10 se presenta el correspondiente diagrama de flujo de información, de acuerdo al ordenamiento de cálculo encontrado.

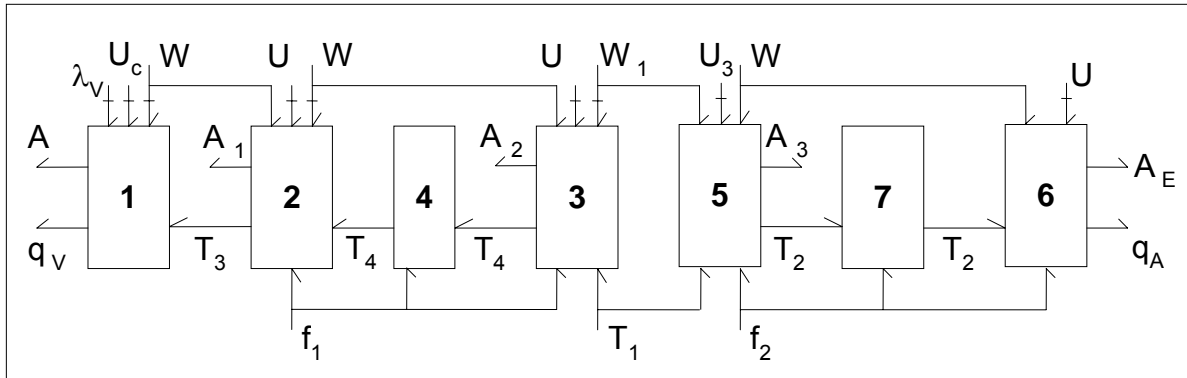


Figura 10. Diagrama de flujo de información de la red

Se debe recalcar que lo que se ha logrado es *un esquema de cálculo sin ecuaciones acopladas*, lo que no implica que no *existan esquemas iterativos de cálculo*. Encontrar el valor de cualquiera de las variables de estado puede requerir un proceso numérico para hacerlo, ya que, en general, las relaciones son no lineales y sin un modo directo de explicitación de las variables involucradas.

## Una consideración conceptual

Hasta aquí se ha privilegiado el enfoque exclusivamente matemático del problema, donde los grados de libertad quedan definidos por la diferencia entre el número de variables y el de ecuaciones.

En su momento se advirtió sobre el riesgo de que, en la formulación del modelo del sistema, el conjunto de ecuaciones no fuese independiente y se dijo, también, que el mejor modo de evitarlo era tener un cierto control conceptual sobre esta formulación.

Más aún; quedó expresado que la partición en subsistemas era una instancia favorable en el mantenimiento de ese control.

Reconsidérese el ejemplo de la red de intercambio vista. Supóngase que la misma estuviese compuesta por equipos existentes, con lo cual sus dimensiones serían conocidas.

En cualquier equipo, si se fijasen los valores del caudal y la temperatura ingresante para las dos corrientes que intercambian, las temperaturas de salida

quedarían, también, fijas; es decir, si todas las entradas al equipo existente están determinadas las salidas no están libres. Esto es conceptualmente claro, a poco que se considere como funciona un intercambiador de calor.

La aplicación del concepto de inversión de flujo de información permite deducir que, si lo que se encuentra fijo es una salida del sistema, será alguna entrada al mismo la que deberá quedar "atada" a ese valor.

Lo anterior vale, por supuesto, para la red, tomada en forma global. Como las salidas de un equipo son entradas de otro, salvo que salgan del sistema, se terminarán considerando, exclusivamente, las entradas y salidas netas de las corrientes.

Para el caso en que haya divisiones de corrientes, como sucede en el ejemplo, serán conocidos los caudales en todos los puntos de la red en la medida en que se determine el factor de fraccionamiento en cada subdivisión.

En el ejemplo, todas las salidas de la red quedarían fijas si 1) existiesen los equipos de intercambio, 2) en cada corriente (incluidos los servicios auxiliares) se conociese el caudal y la temperatura de entrada y 3) estuviesen determinados los factores de división  $f_1$  y  $f_2$ .

Por lo tanto, el sistema requiere  $2 \times 6$  (caudal y temperaturas de corrientes) + 2 (factores de división) + 5 (áreas) = 19 datos para quedar totalmente determinado, es decir, sin grados de libertad.

En el planteo se han especificado las temperaturas de entrada y salida de todas las corrientes presentes (incluidos los servicios auxiliares) y, además, en el caso de las de proceso, sus caudales. En consecuencia, existen  $2 \times 6$  (temperaturas) + 4 (caudales) = 16 datos.

Esto permite afirmar que en el sistema quedan, aún, tres grados de libertad.

El valor encontrado por esta vía coincide con el que resulta del cálculo matemático. De no ser así, se habría incurrido en un error en alguno de los planteos y se impondría una revisión, constituyendo, de este modo, el enfoque conceptual, un contralor efectivo del modelado matemático.

Este análisis también puede efectuarse a nivel de subsistemas, pero en este caso deberán tenerse en cuenta, en el momento de calcular los grados de libertad



globales, las interacciones que existen entre los mismos, esto es, la información que es compartida por dos o más subsistemas.

Las consideraciones que se hagan para una variable en un punto del diagrama valen, obviamente, para todos los subsistemas donde ella intervenga. Como estos serán tratados en forma secuencial y aislada, la misma información ha de ser tenida en cuenta en los distintos bloques, en principio, como entidades independientes.

Al momento de conformar el sistema, deberá hacerse coherente el tratamiento, advirtiéndose que se trata de la misma variable. Por ejemplo, la temperatura  $T_3$  ha de ser considerada en el análisis de los subsistemas 1 y 2. Como variable del sistema puede ser de decisión o de estado, pero en el momento del análisis es una información no conocida. Si luego resulta ser de estado se calculará mediante las ecuaciones que definen a uno de los subsistemas y, para el otro, será un valor conocido, descontándola como información a determinar. Si, por el contrario, resultase ser una decisión será la *misma* variable la que intervenga en ambos puntos y, por tanto, debe computársela solo una vez.

Lo anterior lleva a explicitar la siguiente metodología de análisis:

1. *Considérense, en forma aislada, cada uno de los subsistemas, determinando los grados de libertad individuales que poseen.*
2. *Considérense las variables que intervienen en más de un subsistema y calcúlense las interacciones de cada una como el número de veces en que se la ha tenido en cuenta menos uno.*
3. *Calcúlese el número de grados de libertad del sistema como la diferencia entre la suma de los grados de libertad individuales y la suma de las interacciones.*

Al aplicar esto a la red del problema de la figura 7 se tiene lo siguiente, considerando, como se vio más arriba, que se requieren cinco valores para poder calcular un intercambiador:

- Para el calentador son conocidos el caudal y las dos temperaturas del vapor y la temperatura de salida de la corriente 3. Queda, pues, una variable libre para ser definida, esto es, un grado de libertad.
- En el intercambiador 1 están fijas las temperaturas de entradas de las dos

corrientes, así como el caudal de la 3; hay, pues, dos grados de libertad. Debe advertirse que a  $T_3$  es la segunda vez que se la considera.

- En el intercambiador 2 el número de grados de libertad es dos.
- En el mezclador 1 el concepto físico indica que su funcionamiento queda determinado si se conocen el caudal y temperatura de cada una de las corrientes que ingresan, 4 valores en este caso. Se conocen dos, el caudal y la temperatura a la salida, restan, pues, dos grados de libertad. Debe advertirse que los caudales y temperaturas de las dos entradas son considerados por segunda vez, ya que constituyen las salidas de los intercambiadores 1 y 2.

De forma enteramente similar se concluye que en cada uno de los subsistemas restantes hay dos grados de libertad y aparece un total de cinco interacciones (los caudales y temperaturas de las corrientes subdivididas y  $T_1$ ), lo que hace un total de 13 grados de libertad individuales y 10 interacciones, tres grados de libertad para el sistema global.

## Sistemas con reciclo persistente (Esquemas iterativos)

En los ejemplos vistos se ha logrado encontrar un conjunto de variables de decisión que permitían desacoplar totalmente el sistema de ecuaciones que definían el modelo matemático.

Por supuesto que hay casos en que esto no resulta posible y debe atenderse a un ordenamiento de cálculo que presenta un cierto número de ecuaciones que exigen ser resueltas en forma simultánea.

$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ f_2(x_1, x_3) = 0 \\ f_3(x_2, x_3, x_4) = 0 \\ f_4(x_2, x_4) = 0 \end{array} \right.$	<p>Esto requiere replantear el objetivo perseguido en la estrategia de cálculo, el que, siendo coherente con lo anterior, buscará reducir la dimensionalidad del problema que representa el sistema de ecuaciones acopladas.</p>
	<p>Si el modelo matemático del sistema estuviese dado por el conjunto de relaciones de la izquierda (No es un problema de diseño óptimo ya que no hay grados de libertad) resulta</p>

evidente la imposibilidad de resolverlo desacoplando las ecuaciones. Una solución podría ser considerar el sistema tal como está planteado: cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Desde el punto de vista matemático esto significa la utilización de técnicas de cálculo numérico para espacios algebraicos de cuatro dimensiones.

Sería interesante investigar la posibilidad de usar esos métodos en espacios de menor dimensión, esto es, encontrar un ordenamiento de cálculo donde el problema se comporte *como si* estuviese planteado, por ejemplo, bajo la forma de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Esto se puede lograr cuando es posible explicitar (calcular con facilidad) algunas variables en función de otras, no necesariamente de decisión, sino valores supuestos que luego deberán ser verificados.

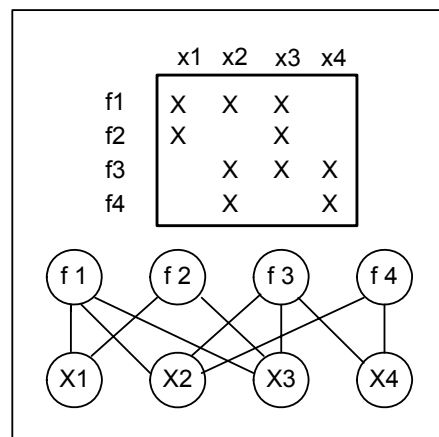
En la figura 11 se muestra la matriz de existencia y el grafo bipartito correspondiente al sistema presentado anteriormente.

Siguiendo con la línea de razonamiento expuesta sería interesante que existiese un subgrafo que pudiese ser orientado en forma acíclica.

El procedimiento, ahora, debe comenzar, necesariamente, por eliminar el nodo de una variable y los correspondientes de las funciones en donde interviene, para continuar, luego, si se puede, de la forma normal.

El primer paso implica la utilización de varias ecuaciones para calcular la misma variable. Esto impide usar una ecuación de ese conjunto para calcular otra variable, a la que o bien se le debe dar un valor o debe ser calculada en otro punto, proceso que concluye por requerir asignar valores a una o unas determinadas variables para poder efectuar el cálculo del sistema. En rigor, habrá que asignar valor a un número de variables igual al de ecuaciones eliminadas menos uno.

Esto no significa, por supuesto, que se hayan aumentado los grados de libertad sino que se ha generado un proceso iterativo de cálculo, con variables cuyo valor debe ser supuesto y verificado posteriormente.



**Figura 11.** Grafo y matriz

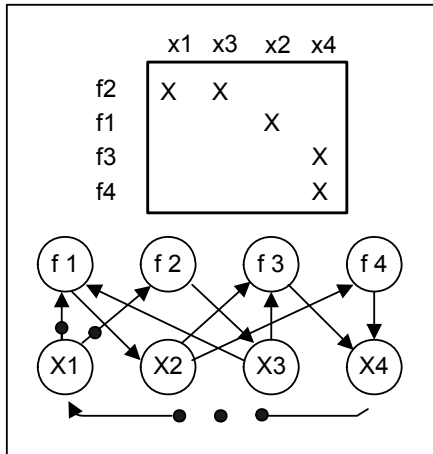


Figura 12. Grafo orientado

En la figura 12 se muestra el ordenamiento que resulta de eliminar, como primer paso, al nodo  $x_4$  y a los correspondientes a  $f_3$  y  $f_4$ , donde interviene la variable.

Como se ve, el grafo restante puede ser ordenado en forma acíclica, requiriendo la suposición inicial de  $x_1$ .

Si el valor supuesto de  $x_1$  es el exacto,  $x_4$  calculado de  $f_3$  ha de coincidir con el computado desde  $f_4$ , con lo que la diferencia entre estos dos

valores es una medida de la exactitud -o del *error*- de la suposición efectuada. Esto se indica con la línea discontinua que une a  $x_4$ , doblemente evaluada, con  $x_1$ .

El problema, que requería, en su formulación original, métodos numéricos en espacios cuatridimensionales, se puede resolver, ahora en términos de una relación,  $f_3 - f_4$ , con una incógnita,  $x_1$ . Esta transformación exige, como costo asociado, evaluar el conjunto de variables involucradas en el ciclo iterativo, lo que se presupone más simple que trabajar con la dimensionalidad original. Por analogía con los métodos de resolución de sistemas lineales, la primera alternativa implica el uso de un método basado en la matriz inversa; la segunda, de uno por relajación.

La figura 12 muestra, también, la matriz de existencia reordenada, que se genera de la misma forma que antes, solo que en el primer paso se eliminan las dos ecuaciones donde figura  $x_4$ . Adviértase que, a diferencia de lo que ocurría con los sistemas cuyas matrices reordenadas son las de las figuras 4 y 9, el sector por arriba de la diagonal principal de la submatriz de variables de estado se encuentra ocupado, a partir de la ecuación donde se supone  $x_1$  hasta la última fila donde figura  $x_4$ .

Hay, aún, cuestiones adicionales en la búsqueda de simplificar el ordenamiento de cálculo, las que serán vistas en el ejemplo que sigue.

En la figura 13 se muestra el sistema de tres extractores visto anteriormente, pero ahora operando en contracorriente en lugar de hacer agregados parciales por etapa. En este caso los balances de soluto tienen la forma general

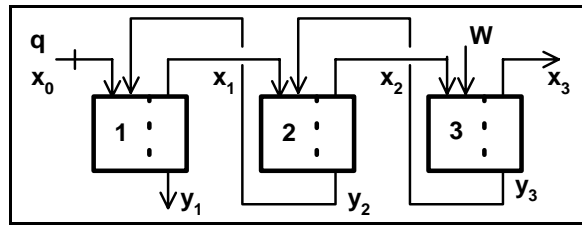


Figura 13. Sistema en contracorriente

$$qx_{i-1} + Wy_{i+1} = qx_i + Wy_i$$

donde el caudal W se repite en todos ellos.

En la figura 14 se muestra la matriz de existencia original y el proceso de las sucesivas eliminaciones de filas y columnas.

	$y_1$	$x_1$	$y_2$	$W$	$x_2$	$y_3$	$x_3$		$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$	$W$	$y_3$	$x_3$
1	X	X	X	X				c	X	X					
2	X	X						e			X	X			
3		X	X	X	X		X	b				X			
4			X		X			d						X	
5				X	X	X	X	a							X
6						X	X	a							X

Figura 14. Matrices de existencia inicial y reordenada

Puede advertirse que en el paso d de tachado, las variables  $y_2$  y  $x_2$  figuran en una sola ecuación. Al elegir una para ser calculada, a la otra, necesariamente, se le deberá dar valor en el momento de la resolución del sistema.

Podría tratarse de una variable de decisión, pero en tal caso el ciclo iterativo abarcaría más ecuaciones de las necesarias.

En efecto, la utilización de las relaciones 5 y 6 para evaluar  $x_3$  significa que, en algún paso del ordenamiento, anterior a este cálculo, se deberá suponer el valor de una variable y esto debe hacerse lo más cerca posible del punto de verificación.

El caso general sería comprometer  $n$  ecuaciones para computar la misma variable. Esto implica la generación de  $n-1$  suposiciones a iterar; de aquí la importancia de *elegir  $n$  lo más pequeño posible*. Ahora han de existir procesos de

iteración simultáneos, a los que conviene diseñarlos de modo de reducir al máximo su interacción. Esto se logra, otra vez, ubicando la variable a suponer tan próxima como se pueda de la función de error.

Todas estas consideraciones pueden resumirse en el siguiente algoritmo:

1. Aplíquese al sistema de ecuaciones el algoritmo visto en el apartado sobre ordenamiento de cálculo en términos generales (de aquí en más ALG 1).
2. Si la aplicación de ALG 1 no logra la eliminación de la totalidad de las ecuaciones ir a 3.  
Si lo consigue, FIN.
3. Elegir aquella variable que presenta  $\min k$ , siendo  $k$  el número de ecuaciones en las que *aún* se encuentra presente (orden de aparición  $k$ ). Si existe más de una variable en estas condiciones utilizar los siguientes criterios de selección, en el orden en que se indican:
  - 3.1 Elegir aquella variable donde, si se eliminan las  $k$  ecuaciones donde figura, genera, en el conjunto de variables *restantes*, el máximo número de ellas con orden de aparición 0 (variables que figuran en las mismas ecuaciones) en el sistema *remanente*. Si existe más de una ir a 3.2.
  - 3.2 Ídem, pero con orden de aparición 1. Si existe más de una ir a 3.3
  - 3.3 Elegir una cualquiera del conjunto determinado en 3.2.
4. Proceder, en la matriz de existencia original, a remover la columna y las filas asignadas, respectivamente, a la variable elegida y a las ecuaciones donde figura. Destinar para ellas, en la matriz reordenada, las últimas columna y filas libres, de igual forma que en ALG 1.
5. Verificar la existencia, en la matriz remanente, de variables con orden de aparición nulo. Si existen, asignar la última columna libre de la submatriz de variables de estado si la asignación anterior se ubicó por encima de la diagonal principal de la misma; si fue sobre la diagonal, ocupar la última columna libre del arreglo correspondiente a las variables de decisión. Reiterar hasta que no queden variables con  $k = 0$ .
6. Si en la matriz remanente  $\min k \geq 2$ , ir a 3.
7. Proceder a aplicar ALG 1, teniendo en cuenta que, si la última asignación se ubicó por encima de la diagonal principal de la misma; se debe elegir aquella variable que genera, al eliminar todas las ecuaciones donde figura,

el máximo número de variables restantes con  $k=0$  en el sistema remanente.  
Si son varias en estas condiciones se elige cualquiera.

8. Volver a 5 hasta concluir la remoción de las columnas de la matriz de existencia original.

Volviendo al problema de tres extractores operando en contracorriente, el orden de cálculo explicitado en la matriz reordenada de la figura 14, tiene su correlato en el diagrama de flujo de información, como se muestra en la figura 15(b). Comparándolo con el original, ubicado a la izquierda, se advierte la inversión del flujo de información que han sufrido algunas de las variables. Pero, lo más importante es la explicitación del ciclo iterativo del cálculo, donde los valores de  $x_3$  calculados en el subsistema 3, son utilizados para corregir el valor supuesto de  $x_2$ . Eso se ha indicado con una doble línea a la salida de la flecha que representa a  $x_3$  y otra sobre  $x_2$ , la que ha sufrido una inversión parcial, de modo de ingresar a todos los subsistemas en cuyas ecuaciones figura.

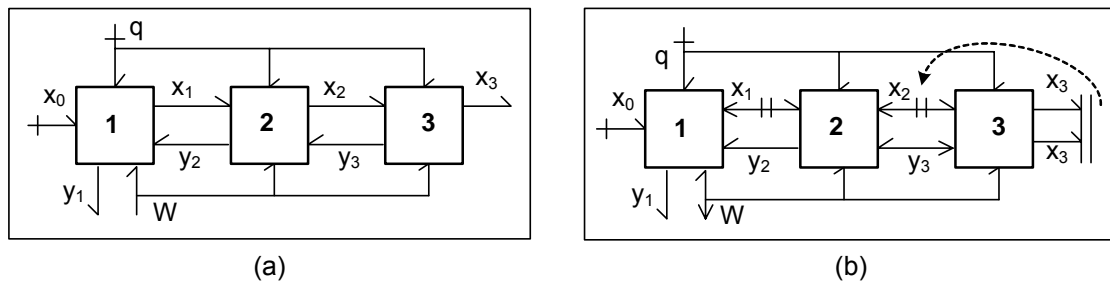


Figura 15. Diagrama de flujo de información

## Métodos promotores de convergencia

Los ciclos iterativos vistos no constituyen otra cosa que un sistema de  $n$  ecuaciones, en general, no lineales en  $n$  incógnitas que, *prima facie*, requiere ser resuelto en forma simultánea. Para hacerlo ha de recurrirse a un método de búsqueda de raíces, el que se constituirá en el *promotor de la convergencia* del proceso.

En dichos sistemas pueden considerarse dos situaciones límites:

- a. la totalidad de las variables que el algoritmo ha seleccionado para ser

calculadas resultan fácilmente despejables de las correspondientes ecuaciones o

- b. ninguna de ellas pueden ser explicitadas y requieren de un método numérico para su evaluación. En este caso existe una iteración "oculta".

Los problemas de diseño en la industria de procesos se aproximan más al primero de los casos, aunque debe advertirse que siempre es posible encontrar una formulación del problema donde todas las variables tengan posibilidad de ser despejadas de las relaciones donde forman parte (Con esto, en teoría aunque no en la práctica, debería omitirse la consideración de la alternativa b).

Si se tuviese, por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} 2^{xy} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) = 4 \\ 4^{\frac{x}{y}} \cos(xy) = 3 \end{cases}$$

donde no es posible la explicitación de ninguna de las variables, se lo puede reformular de modo que ello sea posible, explicitando, además, las iteraciones

internas existentes, como se muestra en el siguiente sistema

$$\begin{cases} x - ay = 0 \\ xy - b = 0 \\ 2^b \operatorname{sen}(a) = 4 \\ 4^a \cos(b) = 3 \end{cases}$$

Este tipo de artificio implica un incremento notable de la dimensionalidad del problema, sin reducción alguna en la dificultad numérica, por lo que, más allá de su interés teórico, no representa una estrategia práctica para abordar una solución.

Habrá que aprovechar, pues, las características que aportan las formulaciones *naturales* que puedan hacerse para el modelo, explicitando las variables, en los ciclos de iteración, cuando ello sea posible o integrándolas al conjunto a resolver, por el método numérico que se elija.

La situación, en resumen, ha de encontrarse entre uno de los dos extremos que se establecieron anteriormente, pudiéndose distinguir dos grupos de variables:

- a. aquellas que son determinadas por un método de búsqueda de raíces de sistemas de ecuaciones y que se integra por las variables a suponer y las que no pueden ser explicitadas en el orden de cálculo encontrado;



b. aquellas que sí pueden serlo y que serán calculadas, en cada iteración, a partir de los valores que tomen las del primer grupo.

En el análisis de los diferentes métodos de promoción de convergencia del proceso iterativo se ha de considerar un sistema genérico, el S.1, de n ecuaciones con n incógnitas, que en notación abreviada se indica  $f(x)$  con  $f \in R^n$ ,  $x \in R^n$ .

Se van a considerar dos grandes grupos de métodos, uno, donde no se requiere la expresión de las derivadas, su cálculo o estimación, y otro, donde sí se las necesita.

$$S.1 \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

En el primero de los dos grandes grupos a considerar, el proceso iterativo se lleva a cabo de acuerdo al siguiente algoritmo básico:

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \phi_i(x^k, x^{k-1}, \dots) f_i(x^k) = x_i^k - \phi_i^k f_i(x^k) \quad (1)$$

donde:

$f_i(x^k)$ : cualquiera de las ecuaciones del sistema que se desea resolver.

$\phi_i^k$ : función que será definida para cada método en particular.

En el caso de la simulación de procesos, la existencia de un reciclo obligará a un proceso iterativo donde hay un conjunto de valores supuestos que luego son calculados a partir de la suposición realizada,  $\underline{x}^c = \underline{g}(\underline{x}^s)$ , siendo necesario que el valor calculado y el supuesto coincidan. Con esto, el error en la iteración,  $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{x}^s - \underline{g}(\underline{x}^s)$ , debe hacerse nulo.

Los procesos iterativos aumentan en complejidad a medida que se incrementa la dimensionalidad del sistema involucrado. Por esta razón, se comenzará abordando la búsqueda de la raíz de una única ecuación no lineal para luego extender el análisis a multivariable.

El método más simple es el de *Piccard o de aproximaciones sucesivas*. En el esquema iterativo se considera  $\phi^k = 1$ , con lo que el algoritmo queda:

$$x^{k+1} = x^k - f(x^k)$$

y la búsqueda termina cuando  $|x^{k+1} - x^k| < \varepsilon$  o  $|f(x^{k+1})| < \delta$

Como se verá más adelante, este método converge únicamente si se cumple la condición  $0 < f'(x^k) < 2$ , en todo el intervalo de iteración, lo cual es sumamente restrictivo. Así, por ejemplo, si la derivada es negativa, no se logra la convergencia.

La extensión del método de Piccard a multivariable es inmediata

$$x_i^{k+1} = x_i^k - f_i(\underline{x}^k)$$

y se llega a la convergencia cuando:

$$\|\Delta \underline{x}^{k+1}\| < \varepsilon \quad \text{o} \quad \|f(\underline{x}^{k+1})\| < \delta \quad \text{es decir}$$

$$\sqrt{\sum_i (x_i^{k+1} - x_i^k)^2} < \varepsilon \quad \text{o} \quad \sqrt{\sum_i [f_i(\underline{x}^{k+1})]^2} < \delta$$

Mejoras sobre el método de Piccard incluyen la evaluación de la tendencia en el comportamiento del sistema, por ejemplo, por el cálculo de la secante. A este grupo pertenecen, entre otros, el método de la Secante propiamente dicha y el de Wegstein.

En el primero de ellos, el factor  $\phi_i^k$  es la inversa de la secante, calculada a partir de dos puntos anteriores

$$(\phi^k)^{-1} = \frac{f(x^k) - f(x^{k-1})}{x^k - x^{k-1}}$$

con lo cual

$$x^{k+1} = x^k - \frac{x^k - x^{k-1}}{f(x^k) - f(x^{k-1})} f(x^k) \quad (2)$$

Esto requiere de dos puntos iniciales,  $x^0$  y  $x^1$ , para comenzar el proceso de iteración. Luego se pueden utilizar los puntos generados para ir reemplazando alguno de los dos que definen la secante. En ese reemplazo se puede tomar el punto nuevo como reemplazo del más viejo (método de la Secante propiamente dicho) o realizar un análisis de la función en el nuevo punto y reemplazar aquel donde la función tiene el mismo signo (método de Regula Falsi). En general se trabaja con una combinación de ambos métodos donde, si la función en el nuevo punto y en los dos anteriores tienen igual signo, se aplica el criterio del método de

la Secante, pero una vez que se consiguen signos diferentes, el criterio de Regula Falsi asegura la convergencia a una solución.

Se considera haber arribado a la solución toda vez que  $|f(x^{k+1})| < \delta$ .

En la figura 16 puede verse el procedimiento indicado para el método donde, a partir de los puntos iniciales  $x^0$  y  $x^1$  se van obteniendo, sucesivamente,  $x^2$  y  $x^3$ .

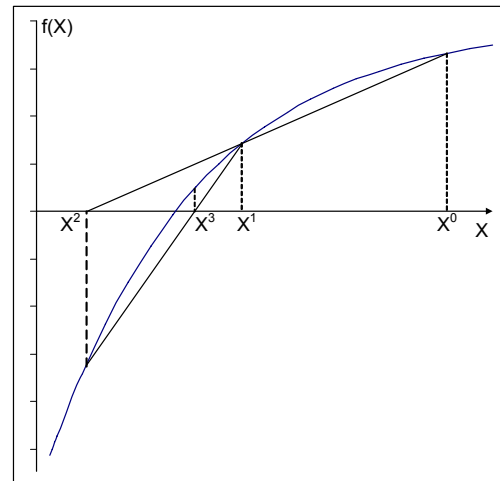


Figura 16. Método de la Secante

La extensión a multivariables es sencilla si se considera la fórmula 2 referida a cada componente de los vectores  $\underline{x}$  y  $\underline{f}(\underline{x})$ , reemplazando  $x$  por  $x_i$  y  $f$  por  $f_i(\underline{x})$ , con lo que queda

$$x_i^{k+1} = x_i^k - f_i(\underline{x}^k) \frac{x_i^k - x_i^{k-1}}{f_i(\underline{x}^k) - f_i(\underline{x}^{k-1})} \quad i = 1, \dots, n$$

y el cálculo concluye cuando

$$\| \underline{f}(\underline{x}^{k+1}) \| < \delta \quad \text{es decir} \quad \sqrt{\sum_i [f_i(\underline{x}^{k+1})]^2} < \delta$$

El método de Wegstein también usa la secante para estimar el comportamiento de la tendencia, sólo que: a) requiere un solo punto para iniciar el proceso y, b) el esquema de trabajo se reinicia cada vez que se calcula un nuevo punto.

Como el cálculo de la secante necesita dos puntos, Wegstein tiene que generar información adicional, para lo cual, utiliza el método de Piccard.

Así, a partir del punto  $x^0$ , se determina el punto  $x^1$  utilizando Piccard y luego  $x^2$  con la fórmula del método de la Secante.

$$x^1 = x^0 - f(x^0)$$

$$x^2 = x^1 - \frac{x^1 - x^0}{f(x^1) - f(x^0)} f(x^1)$$

Obviamente, en este método, el valor de  $\phi$  a utilizar en la fórmula general de iteración es el mismo que en el de la secante.

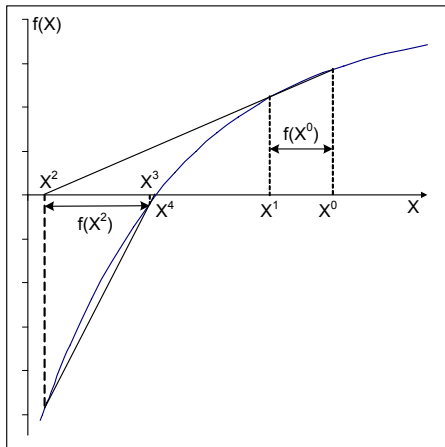


Figura 17. Método de Wegstein

El punto  $x^2$ , será el nuevo  $x^0$  al reiniciar el proceso, como puede observarse en la figura 17. En ella, se ha supuesto una escala para el eje de ordenadas mayor que la de las abscisas, razón por la cual, aparecen indicadas las diferencias utilizadas en el método de Piccard.

El proceso termina utilizando el mismo criterio que en el caso de la Secante. Del mismo modo, la extensión a multivariantes se

lleva a cabo con el procedimiento indicado para ese método.

Hasta aquí se han presentado una serie de métodos que, salvo en el de Piccard, para resolver  $f(x) = 0$ , al instrumentar la función de iteración  $x^{k+1} = x^k - \phi^k f(x^k)$  se ha optado por vincular  $\phi^k$  con distintas expresiones de una secante.

Existe otro método, el del *Autovalor Dominante*, que, al igual que todos los presentados hasta aquí, no requiere la consideración de las derivadas pero, como en el caso de Piccard, tampoco hace uso del cálculo de una secante sino que asigna un valor fijo, o poco variable, al parámetro  $\phi$ .

Si bien el método se aplica, principalmente, a problemas multivariantes se presentará, primero, el caso unidimensional para, luego, proceder a su extensión.

Un desarrollo en serie de  $f(x)$  (debe considerarse que, tanto  $x$  como  $f$  son escalares), considerando sólo el término de primer orden, dará

$$f(x^k) = f(x^{k-1}) + f'(x^{k-1})(x^k - x^{k-1}) = f(x^{k-1}) + f'(x^{k-1}) \Delta x^k \quad (3)$$

y si las sucesivas aproximaciones a la raíz se realizan con la función de iteración  $x^{k+1} = x^k - \phi f(x^k)$ , considerando un valor constante para  $\phi$ , resulta  $\Delta x^{k+1} = -\phi f(x^k)$  y  $\Delta x^k = -\phi f(x^{k-1})$  con lo cual, teniendo en cuenta la ecuación 3,  $\Delta x^{k+1} = [1 - \phi f'(x^{k-1})] \Delta x^k$ .

Si  $|\lambda^*|$  es el mayor valor que toma la derivada de  $f(x)$  en todo el intervalo de búsqueda se puede poner

$$|\Delta x^{k+1}| \leq |1 - \phi \lambda^*| |\Delta x^k| \quad \text{o} \quad |\Delta x^{k+1}| \leq (|1 - \phi \lambda^*|)^k |\Delta x^1|$$

y la convergencia depende no sólo del valor de  $\lambda^*$  sino también del que se adopte para  $\phi$ . Resulta obvio que lo más conveniente es hacer el factor entre paréntesis lo más próximo a cero, es decir,  $\phi = 1/\lambda^*$ .

Para estimar el valor de  $\lambda^*$  se suele tomar  $\lambda^* = \Delta x^2 / \Delta x^1$  para lo cual, a partir de  $x^0$ , se calculan, por Piccard,  $x^1$  y  $x^2$ . Esta estimación puede mejorarse o no a lo largo del proceso iterativo.

Puede verse que, si el proceso iterativo se resuelve por el método de Piccard, donde  $\phi$  es igual a 1, la convergencia quedará asegurada si  $\lambda^*$  está en el intervalo (0,2).

En el tratamiento del método para multivariantes, se tomará el caso más simple,  $n = 2$ , al sólo efecto de fijar ideas, siendo inmediata la extensión a mayores dimensiones. De acuerdo al planteo general habrá que resolver

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned}$$

Adoptando la notación  $f_i^k = f_i(x_1^k, x_2^k)$ ,  $f_{ij}^k = \partial f_i(x_1^k, x_2^k) / \partial x_j$ , el desarrollo en serie de  $f_1$  y  $f_2$  alrededor de  $(x_1^{k-1}, x_2^{k-1})$  es

$$\begin{aligned} f_1^k &= f_1^{k-1} + f_{11}^{k-1} \Delta x_1^k + f_{12}^{k-1} \Delta x_2^k \\ f_2^k &= f_2^{k-1} + f_{21}^{k-1} \Delta x_1^k + f_{22}^{k-1} \Delta x_2^k \end{aligned}$$

Y si  $x_i^{k+1} = x_i^k - f_i^k \rightarrow \Delta x_i^{k+1} = -f_i^k$ , operando queda

$$\begin{aligned} \Delta x_1^{k+1} &= \Delta x_1^k - f_{11}^{k-1} \Delta x_1^k - f_{12}^{k-1} \Delta x_2^k \\ \Delta x_2^{k+1} &= \Delta x_2^k - f_{21}^{k-1} \Delta x_1^k - f_{22}^{k-1} \Delta x_2^k \end{aligned}$$

Generalizando para  $n$  variables,  $\Delta \underline{x}^{k+1} = (I - J_f^{k-1}) \Delta \underline{x}^k$ , donde  $J_f^{k-1}$  es el Jacobiano de  $\underline{f}(\underline{x})$ , la matriz de las derivadas parciales primeras ( $\delta f_i / \delta x_j$ ), evaluadas en  $\underline{x}^{k-1}$ .

La norma de  $\Delta \underline{x}^{k+1}$  será  $\| \Delta \underline{x}^{k+1} \| \leq \| I - J_f^{k-1} \| \| \Delta \underline{x}^k \|$ .

Para el caso de dos variables ha de ser

$$\sqrt{(\Delta x_1^{k+1})^2 + (\Delta x_2^{k+1})^2} \leq \left\| \begin{array}{cc} 1 - f_{11}^{k-1} & -f_{12}^{k-1} \\ -f_{21}^{k-1} & 1 - f_{22}^{k-1} \end{array} \right\| \sqrt{(\Delta x_1^k)^2 + (\Delta x_2^k)^2}$$

La norma euclídea de una matriz cuadrada como  $\| I - J_f^{k-1} \|$  es igual al mayor valor propio (autovalor), raíz de la ecuación característica  $\det(I - J_f^{k-1} - \lambda I) = 0$ . (Para el caso de 2 variables debe resolverse  $(1 - f_{11} - \lambda)(1 - f_{22} - \lambda) - f_{12} f_{21} = 0$ , con las derivadas parciales evaluadas en  $\underline{x}^{k-1}$ ).

Si  $\lambda^{*k-1}$  es el mayor autovalor de  $J_f^{k-1}$ , es sencillo demostrar que  $\|I - J_f^{k-1}\|$  es  $1 - \lambda^{*k-1}$ . Si  $\lambda^{*k-1}$  es aproximadamente constante para los sucesivos Jacobianos  $J_f^i$ ,  $i = 0, \dots, k-1$ , se puede poner

$$\|\Delta \underline{x}^{k+1}\| \leq (1 - \lambda^*)^k \|\Delta \underline{x}^1\|$$

y todo lo dicho para el caso de una variable se puede repetir aquí.

Cuando el proceso iterativo se lleva a cabo mediante la función  $\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - \phi f(\underline{x}^k)$  la expresión que permite vincular  $\Delta \underline{x}^{k+1}$  con  $\Delta \underline{x}^k$  cambia ligeramente, llegándose a:

$$\Delta \underline{x}^{k+1} = [I - \phi J_f^{k-1}] \Delta \underline{x}^k$$

y, al igual que en el caso de una variable, la convergencia depende del autovalor  $\lambda^*$  del Jacobiano y del que se adopte para el parámetro  $\phi$ . Otra vez, se puede tomar  $|\lambda^*| = \|\Delta \underline{x}^2\| / \|\Delta \underline{x}^1\|$ , actualizándolo, o no, a lo largo del proceso.

Bajo determinadas suposiciones se puede demostrar que el valor más adecuado para  $\phi$  es, al igual que en el caso de una variable,  $\phi = 1/\lambda^*$ .

Resta, aún, considerar el segundo grupo de métodos iterativos utilizados para resolver ecuaciones no lineales aisladas o conjuntos acoplados de ellas. Estos métodos requieren, como se dijo, el conocimiento de las derivadas o, en su defecto, el cálculo o la estimación del valor de las mismas.

La base de este grupo es el método de Newton, que parte del desarrollo en serie de  $f(x) = 0$ , en la forma escalar o vectorial, según corresponda.

En el caso de una variable, el desarrollo en serie, hasta el término de primer orden, será

$$f(x^{k+1}) = f(x^k) + f'(x^k) (x^{k+1} - x^k)$$

Si se admite que  $x^{k+1}$  es la solución de  $f(x) = 0$ , entonces, la fórmula de iteración para el método de Newton, en el caso de una variable, resulta

$$x^{k+1} = x^k - f(x^k) / f'(x^k)$$

es decir, se toma el comportamiento de la función como si fuera el de la recta tangente a  $f(x)$  en  $x = x^k$ , como se muestra en la figura 18.

Si se trata de un caso multivariable, en su formulación más simple,  $n=2$ , deberá resolverse un sistema lineal de ecuaciones para encontrar  $x_1^{k+1}$  y  $x_2^{k+1}$ :

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^k (x_1^{k+1} - x_1^k) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^k (x_2^{k+1} - x_2^k) = -f_1(x_1^k, x_2^k)$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^k (x_1^{k+1} - x_1^k) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)^k (x_2^{k+1} - x_2^k) = -f_2(x_1^k, x_2^k)$$

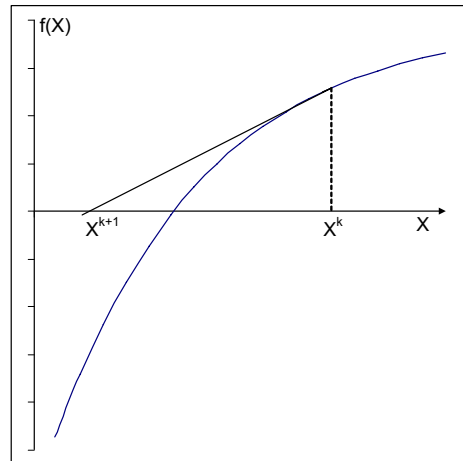
Planteado en general, se debe hallar la solución del sistema

$$J_f^k \Delta \underline{x}^{k+1} = -\underline{f}(\underline{x}^k)$$

Y, entonces, será

$$\Delta \underline{x}^{k+1} = - (J_f^k)^{-1} \underline{f}(\underline{x}^k)$$

Esto es, que el cálculo del nuevo punto requiere el conocimiento del valor de las derivadas de  $\underline{f}(\underline{x})$ , evaluadas en  $\underline{x}^k$ , para luego, de algún modo, explícita o implícitamente, proceder a la inversión de la matriz Jacobiano.



**Figura 18.** Método de Newton

El sistema lineal se puede resolver diagonalizando la matriz de coeficientes (método de Gauss – Seidel, por ejemplo), lo que implica el cálculo de la inversa, triangularizándola (método de eliminación de Gauss), donde el proceso de inversión queda formalmente trunco u otros.

Pero en Ingeniería Química, en los problemas de cierta complejidad, nunca se dispone de las expresiones de las derivadas, lo que implica que la aplicación del método de Newton requiere la diferenciación numérica de las ecuaciones. Esto, que no representa mayor dificultad para una variable, se vuelve complicado a medida que se incrementa la dimensionalidad del problema.

Por esta razón, en ciertas utilidades de cálculo, como en los simuladores de proceso, se hace uso de los llamados métodos *cuasi Newton*, el de Broyden, por ejemplo.

La idea básica es evitar el cálculo del Jacobiano mediante una aproximación adecuada de la matriz –en ciertas variantes, de su inversa–, haciendo uso de algunas condiciones particulares.

Cuando se trató el método de la secante, en el caso multivariable, se proponía, para cada una de las componentes de  $\underline{x}$ , la expresión

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \left( \frac{x_i^k - x_i^{k-1}}{f_i(\underline{x}^k) - f_i(\underline{x}^{k-1})} \right) f_i(\underline{x}^k)$$

que equivale a haber aproximado la inversa de  $J_f^k$  por una matriz diagonal, donde cada uno de los elementos de la misma es el factor entre paréntesis de la expresión anterior.

Si se admite que existe una matriz  $B^k$ , ahora no necesariamente diagonal, que puede considerarse una aproximación del Jacobiano  $J_f^k$ , debería cumplirse

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}^k \Delta x_j^{k+1} \approx -f_i(\underline{x}^k) \quad , i = 1, \dots, n$$

y el problema es, ahora, como determinar los  $n^2$  coeficientes  $b_{ij}^k$ .

Para ello, supóngase conocidos los elementos de la matriz  $B^{k-1}$ ,  $b_{ij}^{k-1}$ , así como las componentes de las soluciones encontradas en las etapas  $k-1$  y  $k$ ,  $x_j^k$ ,  $x_j^{k-1}$  y, obviamente,  $f_i(\underline{x}^k)$  y  $f_i(\underline{x}^{k-1})$ . Como primera aproximación,  $B^0$ , se suele usar la matriz identidad  $b_{ii}^0 = 1$ ,  $b_{ij}^0 = 0$ ,  $i \neq j$ . Menos común es estimar el Jacobiano perturbando el sistema.

Se puede plantear que la nueva aproximación  $B^k$  guarde una mínima diferencia con la anterior  $B^{k-1}$ , por ejemplo

$$\min_{b_{ij}^k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (b_{ij}^k - b_{ij}^{k-1})^2$$

y que se pueda escribir para cada componente de  $\underline{f}(\underline{x})$  una expresión similar a la secante ya vista en el caso de una variable

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}^k (x_j^k - x_j^{k-1}) = f_i(\underline{x}^k) - f_i(\underline{x}^{k-1})$$

Este es un problema de optimización de estructura conocida, para el que existe una solución analítica, lo que permite encontrar los valores de  $b_{ij}^k$  y, a partir de ellos, las componentes de  $\underline{x}^{k+1}$ .

El procedimiento termina cuando  $\|\Delta \underline{x}^{k+1}\|$  y  $\|\underline{f}(\underline{x}^{k+1})\|$  son menores que una determinada cota.



## Eliminación del ciclo iterativo por reformulación del problema

La existencia de esquemas irreducibles de cálculo iterativo se debe, básicamente, a la particular formulación adoptada para el modelo matemático del sistema.

Esto no debe interpretarse como que *siempre* es posible plantear el problema de modo que exista un ordenamiento que desacopla totalmente las ecuaciones sino que debe analizarse la formulación efectuada para ver si otra, equivalente, resulta más sencilla de calcular.

Este análisis ha de hacerse en base a una recombinación de las ecuaciones ya planteadas, lo que obliga a la aplicación de una cuidadosa metodología que preserve la independencia que poseía el conjunto inicial.

Como siempre, se hará uso de un ejemplo simple para explicar el procedimiento, pero debe advertirse que no es, justamente, en este tipo de problemas donde resulta metodológicamente útil. Por el contrario, son los casos complejos, con un gran número de variables, ecuaciones y etapas de reformulación, donde es imprescindible contar con una herramienta que permita mantener un adecuado control operacional.

El problema a examinar será el sistema de tres extractores operando en contracorriente, pero donde la relación de equilibrio es una función lineal.

1.  $qx_0 + Wy_2 = qx_1 + Wy_1$
2.  $y_1 = kx_1$
3.  $qx_1 + Wy_3 = qx_2 + Wy_2$
4.  $y_2 = kx_2$
5.  $qx_2 = qx_3 + Wy_3$
6.  $y_3 = kx_3$

Las ecuaciones que ahora definen el sistema son las que se muestran a la izquierda, formalmente equivalentes a las ya vistas en su momento y que daban lugar a la matriz de existencia de la figura 14. No existiría tal similitud si la matriz de existencia registrase, también, el tipo de funcionalidad existente entre las variables.

La técnica de reformulación se basa en aislar y resolver pequeños sistemas (2 ecuaciones con dos variables que figuren solo en ellas o tres por tres, a lo sumo, admitiendo que las restantes variables han sido calculadas previamente) y, si ello no es posible, se tratará de encontrar variables que, con reemplazos

adecuados, puedan ser eliminadas de la matriz de existencia por el algoritmo de selección ALG 1 ya visto.

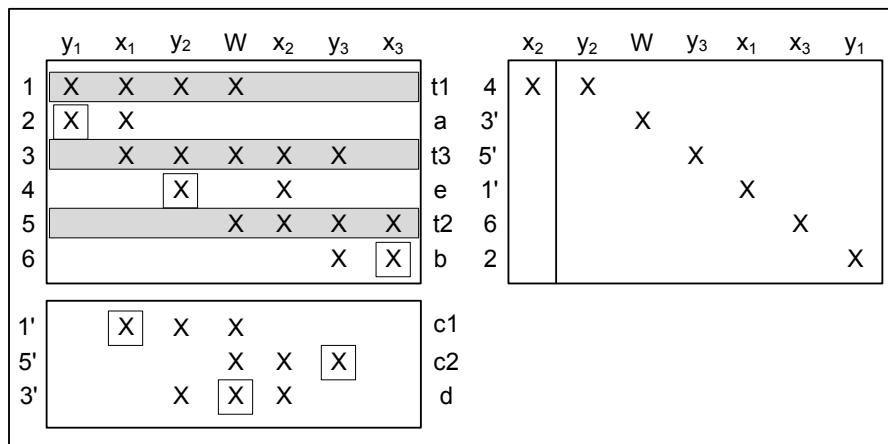
En el caso en cuestión, se sabe, no existe ninguna variable que figure en una sola ecuación, ni se detecta, con facilidad, un conjunto de ecuaciones y variables que conformen un sistema reducido; pero  $y_1$ , por ejemplo, interviene solo en dos y en una ya se encuentra explicitada.

A partir de ésta se la puede reemplazar en todos los sitios donde aparece, con lo que, finalmente, se logrará que figure en una sola ecuación. Esta operación significa reemplazar la ecuación 1 por otra que es equivalente

$$1' \quad qx_0 + Wy_2 = qx_1 + W(kx_1) = [q + Wk]x_1$$

Esto ha de requerir la actualización de la matriz de existencia, ya que se está modificando la formulación original del problema.

En la figura 19 se muestran distintos pasos de combinación de ecuaciones, y consecuente reemplazo, así como la aplicación del algoritmo ALG 1.



**Figura 19.** *Combinación de ecuaciones*

Con t1 se ha marcado la eliminación de la primitiva ecuación 1 y se ha agregado, abajo, la 1', resultante de la combinación.

Es posible, ahora, asignar a  $y_1$  y a la ecuación 2 la primera columna y fila libres de la matriz de existencia reordenada.

Después de esto la situación resultante es la misma que al principio, solo que ahora la variable en la que se ha de trabajar será  $x_3$ . La combinación de ecuaciones conduce a

$$5' \quad qx_2 = q \left[ \frac{y_3}{k} \right] + Wy_3 = \left[ \frac{q}{k} + W \right] y_3$$

La ecuación 5' reemplaza a la 5 en la matriz de existencia (t2), siendo posible, ahora, asignar a  $x_3$  y la relación 6 en la matriz reordenada (paso b).

En el remanente se puede aislar un sistema de tres por tres integrado por las ecuaciones 3, 1' y 5' en las variables  $x_1$ ,  $y_3$  y  $W$ , que figuran solo en ellas. Allí es posible producir los reemplazos

$$\text{de } 5' \quad \Rightarrow y_3 = \frac{kqx_2}{q + Wk}$$

$$\text{de } 1' \quad \Rightarrow x_1 = \frac{qx_0 + Wy_2}{q + Wk}$$

$$\Rightarrow 3' \quad \frac{q[qx_0 + Wy_2] + Wkqx_2}{q + Wk} = \frac{q^2x_0 + Wq[y_2 + kx_2]}{q + Wk} = qx_2 + Wy_2$$

Puede verse que, al resolver el sistema -que concluye por reemplazar la ecuación 3 por la 3'-, se ha encontrado un ordenamiento para el mismo por el cual se desacoplan las relaciones que lo integran, permitiendo al algoritmo ALG 1 asignar lugares en la matriz de existencia reordenada (pasos d, c1 y c2).

En definitiva, si el modelo del que se dispusiera inicialmente hubiese estado integrado por las relaciones 1', 2, 3', 4, 5' y 6 se habría encontrado, sin ningún problema, un ordenamiento que desacoplase totalmente las ecuaciones, con lo que queda claro que el proceso iterativo resulta consecuencia de la particular formulación adoptada.

Pero también debe quedar claro que si la funcionalidad en la relación de equilibrio no hubiese sido tan simple habría sido muy difícil encontrar un planteo equivalente para el problema donde se pudieran evitar las iteraciones.

## **Bibliografía**

- Biegler L.T., Grossmann I.E., Westerberg A.W., "Systematic Methods of Chemical Process Design", Prentice Hall PTR, 1997.
- Lee W., Christensen J.H., Rudd D.F., "Design Variable Selection to Simplify Process Calculations", AIChEJ n°6, vol.12, p.1104, 1966.
- Rudd D.F., Watson Ch. C., "Estrategia en Ingeniería de Procesos", Alhambra, 1976.

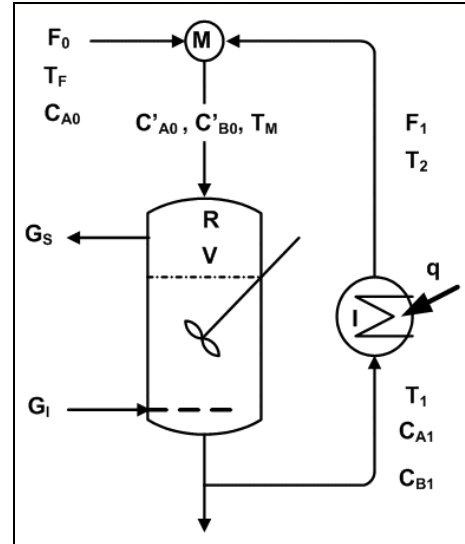
## Propuestas de trabajo

1) Se propone el sistema de la figura para llevar a cabo la reacción  $A + G \rightarrow B$ .

La reacción es endotérmica y el reactivo G es gaseoso y se hace burbujear en el reactor TAC, de forma tal que se asegura un exceso suficiente como para que la reacción sea de pseudoprimer orden en A.

$$r \text{ [gmol/h l]} = k_0 \exp(-E/R(T_1+273))C_A$$

El intercambiador I es un equipo existente, amortizado y el costo operativo está en función de la energía puesta en juego. Por razones técnicas, es aconsejable que procese un caudal de 100 l/h.



Para el reactor R, se dispone como máximo de un volumen de 3000 l.

Para no deteriorar el producto, la temperatura máxima admisible en el proceso es de 160°C.

Datos:

$F_0$ [l/h]	150	Costo reactor [\\$]= $2000 \cdot V^{0.7}$ (V en l)	
$T_F$ [°C]	70	Período de amortización [años]	5
$C_{A0}$ [gmol/l]	8	Costo energía [\$/cal]	0,0002
$\Delta H_r$ [cal/gmol]	500	Costo de A [\$/gmol]	0,02
$R$ [l atm/°K gmol]	0,082	Otros costos variables [\$/gmol B vendido]	0,01
$k_0$ [1/h]	0,2	Precio venta del producto [\$/gmol B]	0,20
$E$ [l atm/gmol]	10	Horas por año	8000

Considerar el producto  $\rho C_p$  para la alimentación igual a 850 cal/l °C y 900 para el resto de las corrientes.

- Plantear las ecuaciones que representan el problema.
- Hallar los grados de libertad del sistema.
- Hacer la estrategia y el orden de cálculo para el modelo planteado.

- d) Hacer el diagrama de flujo de información inicial y plantear su modificación según el orden de cálculo obtenido.
- e) Determinar los grados de libertad individuales y verificar la consistencia con lo obtenido en el punto b).

2) Para la columna de destilación simplificada, representada en la figura, en la que se busca separar los componentes A, B y C, con valores conocidos de  $F, P_F, T_F, x_{FA}, x_{FB}, x_{FC}, y_{1A}, \Delta p$ , se debe:

- a) Plantear las ecuaciones que representan el sistema
- b) Hallar los grados de libertad individuales y totales.
- c) Realizar la matriz reordenada y determinar el orden de cálculo.
- d) Hacer el diagrama de flujo de información y plantear su modificación según el orden de cálculo obtenido

Considerar:

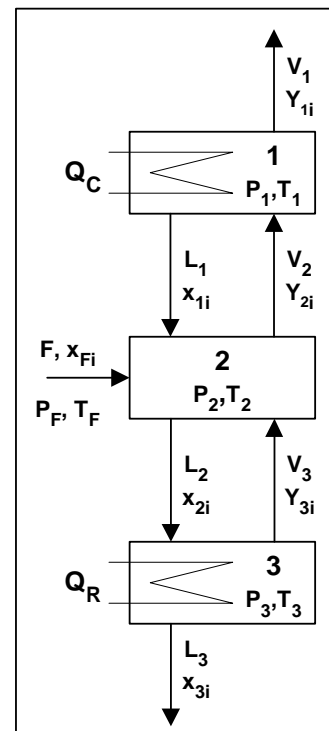
- La carga a la columna se supone líquido saturado y a una presión que será siempre superior a  $P_2$ .
- El condensador (plato 1) es un condensador parcial.
- Las constantes de equilibrio para los 3 componentes son:

$$k_A = C_A T/P ; \quad k_B = C_B T/P ; \quad k_C = C_C T/P$$

- Las entalpías molares para líquido y vapor saturado vienen dadas por expresiones del tipo  $h_j = C_{1j} + C_{2j} T$  siendo  $C_{1j}$  y  $C_{2j}$  constantes y j, L (líquido) o V (vapor).
- La pérdida de carga ( $\Delta P$ ) por plato se supone constante.

Nota:

- T y P son la temperatura y presión en cada plato.
- Los flujos F, V y L son molares.
- x e y son fracciones molares.



3) Teniendo en cuenta la columna del problema 2, encuentre los grados de libertad totales si se considera como alimentación una mezcla con  $n$  componentes. Son valores conocidos:  $\Delta p$ ,  $F$ ,  $P_F$ ,  $T_F$ ,  $x_{Fi} \forall i = 1 \dots n$ ,  $y_{1Cl}$ ,  $y_{1Cp}$ , siendo Cl y Cp los componentes clave liviano y pesado respectivamente.

4) Se trata de determinar la fracción vaporizada y las composiciones de las fases líquida y vapor en el equilibrio flash de una mezcla equimolecular de etano, propano, isobutano y n-butano a 15°C y 500kPa.

Supóngase un comportamiento ideal para el sistema, donde las presiones de vapor de los componentes se pueden calcular por la ecuación de Antoine,  $\ln P_v = A - B/(T+C)$ , donde  $P_v$  se expresa en kPa y  $T$  en °C.

Los coeficientes para los diferentes compuestos son:

	A	B	C
etano	13,648715	1511,42	255,99
propano	13,711015	1872,46	247,99
isobutano	13,523115	2032,73	240,00
n-butano	13,663215	2154,90	238,73

- a) Analizar la resolución por Piccard, Wegstein y Newton, partiendo de una fracción vaporizada de 0,5 y considerando un error final menor a 0,001.
- b) Confeccionar un cuadro comparativo con la siguiente información para cada método:
- Fracción vaporizada
  - Composiciones de líquido y vapor
  - Número de iteraciones

5) Haciendo uso de la planilla de cálculo, resolver simultáneamente por el método de Newton extendido a 2 variables, las 2 ecuaciones siguientes:

$$\frac{(x_1 + 5)}{3} \exp(x_1 + 4) - \exp(x_2 + 3) = 0$$

$$\ln(x_1 + 3) - 2x_2 + 5 = 0$$

Para la resolución usar las funciones matriciales de multiplicación de matrices y cálculo de la matriz inversa disponibles en la planilla de cálculo.

En un gráfico  $x_2$  versus  $x_1$ , grafique ambas funciones y ubique los sucesivos puntos obtenidos durante la resolución.

# CAPÍTULO 8

## MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN

### La búsqueda de un óptimo

Lo expuesto hasta aquí implica haber logrado definir, para un determinado problema de diseño, tanto el esquema de proceso cuanto el modelo matemático que lo representa, así como un conjunto de variables independientes o de decisión que resultan las más adecuadas, teniendo en cuenta la complejidad del cálculo de la función objetivo.

La cuestión que se plantea ahora es como manejar el problema de optimización resultante -supuestamente siempre se tendrá un número positivo de grados de libertad- o, en otros términos, que valores habrán de darse a las variables de decisión para obtener el óptimo buscado.

Las distintas estrategias que pueden concebirse constituyen el desarrollo central de las *Técnicas de Optimización*, a las que se las suele agrupar en dos grandes capítulos: los *Métodos de Optimización* y las *Programaciones*.

Dentro de los primeros quedan englobadas vías de solución de tipo genérico, donde, o bien se tiene una escasa consideración acerca de la naturaleza matemática del problema cuyo óptimo debe encontrarse, privilegiándose más los aspectos "operativos" con los que el método pretende arribar a la solución, o se fuerza una formulación matemática que resulta más sencilla de abordar. Las programaciones, en cambio, son de aplicación restringida a un determinado tipo de problemas, caracterizados ya sea por su formulación matemática o bien por la estructura del flujo de información.

En la literatura se habla de una *Programación no lineal* que, sintéticamente, se refiere a un problema que puede formularse como sigue



Hallar:

$$\begin{aligned} & \text{mín } FO(x_1, \dots, x_{n+m}) \\ & \text{con } f_i(x_1, \dots, x_{n+m}) = 0 \quad ; i = 1, \dots, m \\ & \text{y } h_j(x_1, \dots, x_{n+m}) \geq 0 \quad ; j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

que no es otra cosa que el planteo más general posible de un problema de optimización.

En este capítulo se abordará primeramente el tratamiento de los métodos que centran su atención en los aspectos operativos, para luego considerar aquellas técnicas que hacen uso de una aproximación matemática para resolver el problema.

En el primer caso, el objetivo común a todos los métodos es, en esencia, *obtener, con el menor número posible de evaluaciones de la función objetivo, una representación adecuada de la misma que permita determinar la ubicación del punto óptimo.*

De lo dicho resulta claro que, en este caso, toda la problemática está directamente relacionada con aspectos propios del cálculo numérico como eficiencia y comportamiento del algoritmo frente a problemas mal condicionados, ámbito de convergencia y velocidad de la misma, etcétera.

Existe la necesidad de dividir el tratamiento de los métodos de búsqueda en dos grandes grupos, algo que se deriva de una cuestión esencial en la determinación numérica de un extremo, a saber: un punto se dice óptimo - en rigor, en sentido local - cuando la función objetivo evaluada allí resulta ser mejor que en el entorno inmediatamente próximo.

Puesto en términos simbólicos

$$x^* \text{ óptimo si } F(x^*) \text{ mejor que } F(x) ; x^*, x \in E^n \text{ y } |x^* - x| = \delta$$

lo cual, para una función objetivo que dependa de una sola variable de decisión implica la comparación con solo dos puntos,  $x^* + \delta$  y  $x^* - \delta$ , pero para otra que dependa tan solo de dos debería efectuarse el cotejo con los infinitos puntos de la circunferencia de centro  $x^*$  y radio  $\delta$ . Lo primero es numéricamente posible pero lo segundo no y, por lo tanto, habrá una sustancial diferencia entre los métodos de búsqueda de óptimo de funciones de una y dos o más variables de decisión.

Otra gran división que a la que se suele hacer referencia es entre métodos orientados hacia problemas sin restricciones y aquellos que son capaces de abordar esquemas restringidos. Aquí no se hará mayor hincapié en este punto ya que, en realidad, en lo que a diseño óptimo se refiere, *todos los casos reales poseen restricciones*.

## Métodos para problemas de una variable

En este apartado se abarca una temática que excede el exclusivo planteo de un problema de diseño con una única variable de decisión.

Un concepto más acabado del tipo de cuestiones que abordan estos métodos es el de *búsqueda unidireccional* que abarca tanto los problemas ya mencionados como la resolución de otros, de dos o más variables, en base a una estrategia basada en definir direcciones, según un determinado criterio, y sobre ellas buscar el óptimo de la función objetivo.

Uno de los enfoques clásicos en métodos de búsqueda unidireccional es el concepto de *eliminación de regiones*, por el cual se procede a excluir del análisis subsiguiente espacios de búsqueda donde, se dice, no puede encontrarse el óptimo.

Esta idea está estrechamente asociada a la noción de *unimodalidad* cuyo significado es que *en el ámbito de búsqueda solo debe existir un óptimo de la naturaleza buscada*.

En la figura 1 la función es unimodal si se está buscando un máximo -existe uno solo, el punto c- pero no lo sería si se buscara mínimo, pues hay dos en la zona de soluciones admisibles, los puntos a y b, los extremos del intervalo. Nótese que la unimodalidad no se ve afectada por la discontinuidad -de la función y su derivada- que se presenta en el punto d.

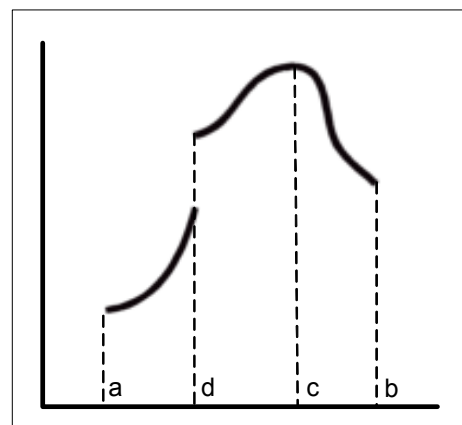


Figura 1. Unimodalidad

Simbólicamente, se puede decir que una función es unimodal si

siendo  $x_1 < x_2$  y  $x^*$  el punto óptimo

$f(x_1)$  es peor que  $f(x_2)$  si  $x_2 < x^*$  y

$f(x_1)$  es mejor que  $f(x_2)$  si  $x_1 > x^*$

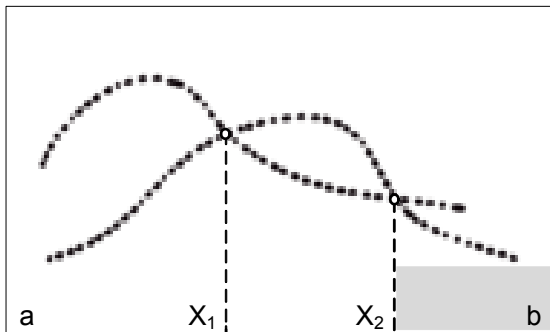


Figura 2. Eliminación de regiones

Si una función es unimodal se puede asegurar, calculándola solo en dos puntos, en que zona *no puede* encontrarse el óptimo y, por consiguiente, como ya se dijo, eliminarla del análisis. En la figura 2 los valores de la función calculados en  $x_1$  y  $x_2$  permiten presuponer comportamientos como los

indicados en líneas de puntos, con lo que, si se busca un máximo, la zona  $x_2$ -b deja de ser de interés. Nótese que los valores de la función podrían haberse encontrado en una situación inversa a la presentada ( $f_1 < f_2$ ) y, en tal caso, la zona excluida sería a- $x_1$ .

Puede observarse que:

1. *Se requieren, como mínimo, dos evaluaciones de la función objetivo para poder desechar una región*
2. *La ubicación de los puntos de cálculo debe ser simétrica respecto del punto medio del intervalo para que el porcentaje de región eliminada sea independiente de los valores relativos de las evaluaciones*
3. *Siempre queda uno de los puntos dentro de la zona no eliminada, mientras que el restante queda en uno de los límites de la misma.*

Si bien el concepto de unimodalidad es muy simple de plantear y, como se verá, puede convertirse en una estrategia eficiente para la búsqueda de un óptimo, tiene un inconveniente básico y es que para asegurar su cumplimiento debería conocerse exactamente el comportamiento de la función objetivo, cuestión que, en la práctica, es imposible.

Más aún, sin este conocimiento, que es, se insiste, la situación normal, solo se está en condiciones de establecer cuando la función *no* es unimodal.

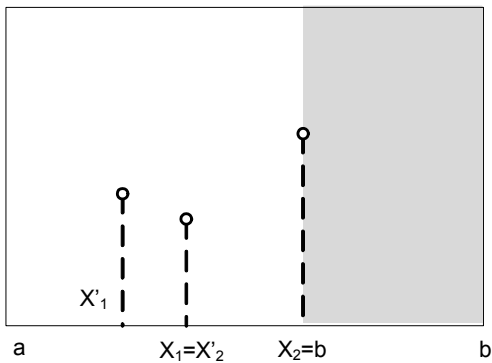


Figura 3. Búsqueda secuencial

En la figura 3, por ejemplo, se ha representado una situación posible, en la búsqueda de un mínimo, luego de un segundo paso en la estrategia de eliminación de regiones.

Otra vez se tienen dos puntos en el interior y ha quedado, de la etapa anterior, una evaluación sobre el borde de la zona, indicado como punto  $b$ .

Resulta claro que, si lo que se busca es un máximo de la función objetivo, ésta no es unimodal en ese sentido (habría sendos máximos a izquierda y derecha del punto  $x'_2$ ).

Ahora bien, si no se detectase una situación de esta índole no habría que inferir, por ello, que la función es unimodal, pues solo podría ser una consecuencia de la particular ubicación de los puntos de análisis. Si la situación se repitiese una y otra vez habría fundamentos para *estimar que* la función se *comporta* como unimodal.

## El método del Número de Oro

El método que se ha de analizar a continuación es uno de los más difundidos por la simplicidad de su programación y una notable eficiencia en el proceso de determinar el punto óptimo en una búsqueda unidireccional.

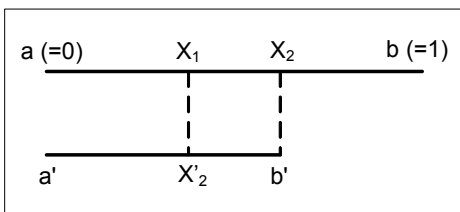


Figura 4. Número de Oro

La idea básica se muestra en la figura 4. Allí se han ubicado, en una primera etapa, los dos puntos requeridos para lograr la eliminación de un cierto sector de la zona de búsqueda inicial, el entorno  $\{a, b\}$ , normalizado en  $\{0, 1\}$ .

En la figura se ha supuesto, además, que la

zona eliminada es la ubicada entre  $x_2$  y  $b$ . De esta forma, el intervalo de búsqueda pasa a ser, ahora,  $\{a' = a, b' = x_2\}$ . (Nótese que como ya quedó dicho, uno de los nuevos límites de la zona coincide con un punto de análisis).

En la estrategia que se plantea el método del Número de Oro el punto que permanece en el interior del nuevo intervalo está ubicado en la posición relativa en la que se encontraba el otro punto, que ahora limita la zona; esto es, el anterior  $x_1$  será el nuevo  $x_2$ , y habrá que calcular un nuevo  $x_1$ , indicado como  $x'_1$  en la figura.

Para ello deberá cumplirse que

$$\frac{x_2}{1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1-x_2}{x_2} \Rightarrow x_2^2 + x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,6180339\dots$$

Es a este número irracional al que el método debe su nombre, ya que en la Grecia clásica la cifra 1,6180339... era conocida como "relación áurea", íntimamente ligada a la secta pitagórica: en su emblema, una estrella regular de cinco puntas, en la que todas sus líneas están divididas según esa proporción. Tiene propiedades geométricas singulares, por lo que no es de extrañar que los griegos, tan racionales, le atribuyesen cualidades inasibles como la belleza y utilizaran la relación áurea al erigir los espléndidos edificios de la Acrópolis ateniense, con lo cual vino a resultar cierto que tal proporción es sinónimo de belleza. Volviendo al método, la ubicación relativa de los puntos de una etapa de análisis hace posible que en la siguiente solo sea necesario el cálculo de un único punto nuevo, manteniendo siempre constante el factor de reducción de la zona de búsqueda (61,8 % del intervalo existente).

Al cabo de  $n$  etapas se habrán realizado  $n+1$  cálculos de la función objetivo (en la primera deben realizarse, necesariamente, dos) y el factor de reducción global alcanzado (relación entre intervalo final e inicial) será de  $(0,618)^n$ . De esto surge que el número de etapas que se requieren para lograr un determinado factor de reducción  $\delta$  es

$$\delta \geq (0.618\dots)^n \Rightarrow \frac{\log \delta}{\log(0.618\dots)} \leq n$$

Como queda dicho, el proceso de eliminación de regiones va dejando puntos de análisis sobre las fronteras de las zonas que se van aislando. Este hecho permite

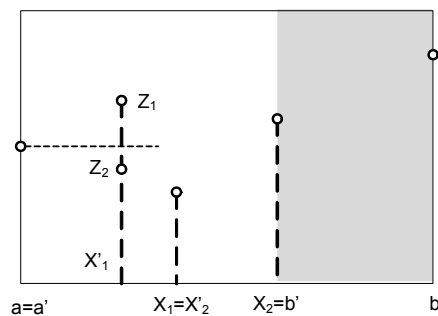
instrumentar, en forma paralela, un esquema de control de unimodalidad para la función analizada.

En la figura 5 se muestran algunas posibles alternativas en la aplicación del método, al buscar el mínimo de la función objetivo.

Se ha supuesto allí que se conocen, por tratarse de anteriores puntos de análisis, los valores de la función objetivo en  $a$  y  $b$ , los extremos del intervalo de búsqueda.

La aplicación del criterio de eliminación de regiones a la situación expuesta hace que deba descartarse la zona comprendida entre  $x_2$  y  $b$ , con lo cual  $x_2$  pasa a ser el nuevo  $b$  ( $b'$ ),  $x_1$  será  $x'_2$  y se requiere calcular el nuevo  $x_1$ .

Al hacerlo, el valor de la función objetivo en ese punto puede ser más alto o no que el del extremo  $a$  (recuérdese que se está buscando un mínimo), siendo en la figura el valor de la función objetivo en  $a$  mayor que en  $x'_2$ .



**Figura 5. No unimodalidad**

Si la situación es la indicada como  $z_2$  se estaría en la condición normal y el proceso puede seguir su curso; si, en cambio, el resultado fuese el indicado como  $z_1$  se puede afirmar que la función no presenta un comportamiento unimodal y no se podría aplicar la estrategia de eliminación de regiones, al menos en la forma que se ha expuesto hasta aquí.

Con todo lo anterior es posible formular un algoritmo para el método que, en términos de un pseudocódigo, sería como el que se muestra en el Cuadro 1.

Datos:	$a, b$ : extremos del intervalo inicial
	$\delta$ : cota de final
1.	Inicialización
1.1	Hacer $c = (5^{0.5} - 1)/2$
	$f_a = \text{FunciónObjetivo}(a)$
	$f_b = \text{FunciónObjetivo}(b)$
1.2	Para $i = 1$ hasta 2
	$x_i = \text{NuevoPunto}(i)$
	Calcular $f_i = \text{FunciónObjetivo}(x_i)$

<p>2. Mientras <math>x_2 - x_1 &gt; \delta</math> hacer</p> <p>2.1 Si <math>f_1 &gt; f_2</math></p> <p>2.1.1 entonces hacer: <math>a = x_1 ; f_a = f_1 ; x_1 = x_2 ; f_1 = f_2 ; i = 2</math></p> <p>2.1.2 si no hacer: <math>b = x_2 ; f_b = f_2 ; x_2 = x_1 ; f_2 = f_1 ; i = 1</math></p> <p>2.2 Calcular <math>x_i = \text{NuevoPunto}(i)</math>; <math>f_i = \text{FunciónObjetivo}(x_i)</math></p> <p>2.3 Si <math>i = 1</math> y <math>f_1 \geq \text{máx}(f_2, f_a)</math> ó <math>i = 2</math> y <math>f_2 \geq \text{máx}(f_1, f_b)</math></p> <p>2.3.1. entonces <i>fin</i> (La función no es unimodal).</p> <p>2.3.2. si no volver a 2.</p> <p>3. Hacer</p> <p><math>x_{\text{opt}} = 0.5(x_1 + x_2)</math></p> <p><math>f_{\text{opt}} = \text{FunciónObjetivo}(x_{\text{opt}})</math></p> <p>4. Fin</p> <p>Nuevo Punto (i)</p> <p>Si <math>i=1</math></p> <p><math>\text{NuevoPunto}(i) = a + (1-c)(b-a)</math></p> <p>si no</p> <p><math>\text{NuevoPunto}(i) = a+c(b-a)</math></p> <p>Nota: En el procedimiento de cálculo de la función objetivo, si se viola alguna restricción se devuelve un valor positivo grande.</p>
---

**Cuadro 1.** Algoritmo del método del Número de Oro (mínimo)

El algoritmo del Cuadro 1 presupone el conocimiento exacto de los límites entre los que debe buscarse el óptimo. En la realidad puede suceder que *a*) estos límites sean tan amplios que es equivalente a no conocerlos o *b*) aunque conocidos, hay restricciones sobre las variables de estado que resultan más limitativas que las cotas explícitas de la variable de decisión; esto es

$$\begin{aligned} & \min \text{FO}(x, y_1, \dots, y_n) \\ & \text{con } f_i(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (1) \quad i = 1, \dots, n \\ & \quad h_j(x, y_1, \dots, y_n) \leq 0 \quad (2) \quad j = 1, \dots, p \\ & \quad a \leq x \leq b \end{aligned}$$

y puede ser que  $x$  esté dentro del entorno  $\{a, b\}$  y, sin embargo, no cumplirse totalmente las condiciones (2).

En ambos casos el hecho coincidente es que no se conocen los valores de los verdaderos extremos entre los que debe efectuarse la búsqueda del óptimo, por lo

cual el algoritmo anterior a) carecería de los datos iniciales o b) estos no serían los que corresponden.

Para el primero de los casos la cuestión es encontrar los valores de a y b que corresponden al problema. Sería deseable, claro está, que el esfuerzo realizado en tal búsqueda fuese aprovechado, luego, durante la optimización, al aplicar el método del número de oro.

En la figura 6 se esboza un esquema de exploración que permite, al encontrar el intervalo a-b, dejar ubicado un punto según las exigencias de la metodología a aplicar.

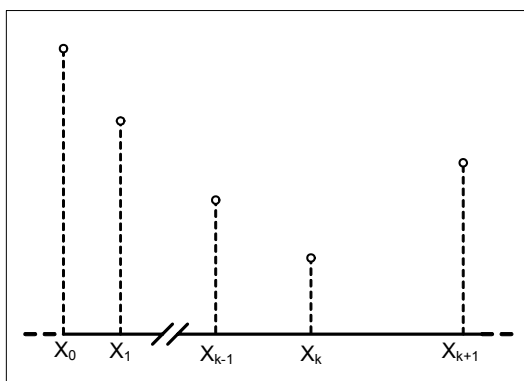


Figura 6. Problema no restringido

El procedimiento parte de disponer de un punto inicial  $x_0$  y un *paso inicial de búsqueda*  $p_0$ .

Se procede a evaluar la función objetivo en  $x_0$  y luego en  $x_1 = x_0 + p_0$ . Si en este punto la función objetivo resultase peor que en el anterior se procede a cambiar de ubicación los puntos,  $x_1$  pasa a ser  $x_0$  y viceversa y la dirección de búsqueda,

$$p_0 = -p_0.$$

Para determinar  $x_2 = x_1 + p_1$ , siendo  $p_1 = r \cdot p_0$  y, en general,  $x_{k+1} = x_k + p_k$  con  $p_k = r \cdot p_{k-1}$ . El proceso se detiene cuando, como se muestra en la figura, la evaluación de la función objetivo en un punto  $x_t$  ( $t > 1$ ) resulta igual o peor que en el anterior. Cuando esto suceda  $x_{k-1}$  será el extremo a y  $x_{k+1}$  el b.

Puede verse fácilmente que si  $r$  es igual a  $(5^{1/2} + 1)/2 = 1,618...$  (la relación áurea) el punto  $x_k$  ocupa la posición correspondiente a  $x_1$  en el método. No sólo esto sino que, además, ahora son conocidos los valores de la función objetivo en los extremos del intervalo.

Queda, pues, resuelto el primero de los problemas planteados. Para el segundo, que se establece, como se recordará, a partir de la existencia de restricciones implícitas, existen varias vías de ataque, compartidas por la mayor parte de los métodos de optimización, las que se verán más adelante.



En algunos casos es posible adecuar la búsqueda a las características del problema, considerando, en forma simultánea, la existencia de límites implícitos en las variables de decisión.

Esta adecuación puede verse en la optimización de la red de intercambio mostrada en la figura 7. En ella se debe considerar que la unidad funciona 8400 h/año y que son datos conocidos:

Flujos entálpicos en  $W/^\circ C$

$$W_1 = 7620 \quad W_2 = 8792 \quad W_3 = 6087 \quad W_4 = 10550$$

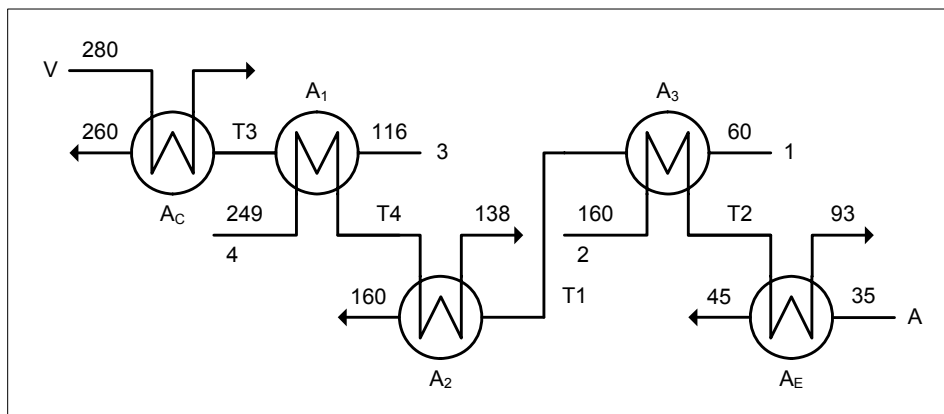
Coefficientes globales de transferencia en  $W/m^2 \text{ } ^\circ C$

$$U_C = 1136 \quad U_E = U_1 = U_2 = U_3 = 852$$

Costo de servicios auxiliares en  $\$/kg$

$$\text{Agua} = 6,3 \cdot 10^{-5} \quad \text{Vapor} = 9,5 \cdot 10^{-4}$$

Amortización anual del equipamiento, en  $\$/año$ , igual a  $190 A^{0,65}$



**Figura 7.** Esquema tecnológico del problema

En este sistema, las restricciones termodinámicas se expresan, matemáticamente, de forma tal que si las temperaturas de las corrientes frías superasen a las de las calientes a la entrada o salida de un equipo, en la ecuación de diseño del mismo aparecería una indeterminación insalvable al computar la temperatura media logarítmica.

Si ello ocurriese no podría continuarse con el orden de cálculo prefijado y, consecuentemente, con la evaluación de la función objetivo. Cuando se da esta situación se ha de recurrir a asignar a la misma un valor arbitrario, suficientemente

alto (considerando siempre que se busca un mínimo). Esta imposición resulta coherente con la construcción de la función objetivo adoptada.

La variable de decisión elegida para la solución del problema es  $T_1$  siendo el orden de cálculo:

Elegir  $T_1$  tal que  $60 \leq T_1 \leq 138$

a) Cómputo de temperaturas intermedias

$$T_4 = 138 + \frac{7620}{10550} (160 - T_1)$$

$$T_3 = 116 + \frac{10550}{6087} (249 - T_4)$$

$$T_2 = 160 - \frac{7620}{8792} (T_1 - 60)$$

debiendo ser

$$160 \leq T_4 \leq 249 ; 116 \leq T_3 \leq 249 ; 93 \leq T_2 \leq 160$$

b) Cómputo de servicios auxiliares

$$q_v = 3,94 \cdot 10^{-3} (260 - T_3)$$

$$q_A = 0,21 (T_2 - 93)$$

c) Cómputo de áreas de intercambio

$$A_C = 5,36 \ln (14 - 0,05 T_3)$$

$$A_1 = 16,89 \ln \left( \frac{T_4 - 116}{249 - T_3} \right)$$

$$A_2 = 32,2 \ln \left( \frac{138 - T_1}{T_4 - 160} \right)$$

$$A_3 = 67,09 \ln \left( \frac{T_2 - 60}{160 - T_1} \right)$$

$$A_E = 19,07 \ln ((T_2 - 45) / 58)$$

d) Función objetivo

$$FO = 190 \sum_{\forall A} A^{0,65} + 28728 q_v + 1905 q_A$$

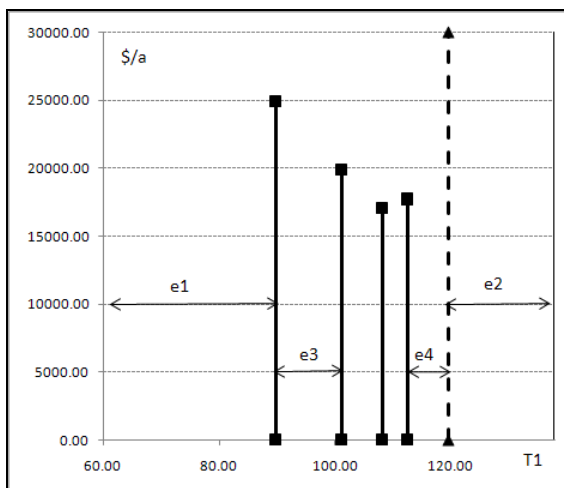
La consideración de las restricciones implícitas se puede hacer adoptando un valor de FO, por tratarse de la búsqueda de un mínimo, “grande positivo” – se tomará  $4 \cdot 10^6$ -, en los casos en que se violen una o más de las restricciones

impuestas sobre las temperaturas. El valor adoptado como un "número grande positivo" responde a la expresión  $100 \text{ FO}^\#$ , siendo  $\text{FO}^\#$  un valor típico alto de la función objetivo (40000 \$/a para este caso).

Debe advertirse que el criterio adoptado puede transformar la función objetivo en no unimodal. En efecto, las restricciones implícitas sobre  $T_1$ , que imponen las restantes temperaturas, podrían hacer que el ámbito efectivo de variación fuese más estricto que el originalmente planteado, 60 - 138.

Si se alcanzara uno de los límites efectivos, el área de algún equipo habría de resultar infinitamente grande y, en consecuencia, sería infinito el valor de la función objetivo. Sobrepasado el límite, en cambio, el costo anual sería, por definición, arbitrariamente grande pero finito, con lo que, sobre los límites, se estarían generando mínimos locales, que se agregarían al que, conceptualmente, es esperable encontrar dentro de la zona.

A pesar de esta consideración, puede trabajarse igual con el método, admitiendo que los valores desusados de la función objetivo se han de producir en un entorno extremadamente próximo de los límites (la función "trepas bruscamente), con lo cual, desde un punto de vista numérico, los mínimos que genera la estrategia adoptada tiene muy escasa posibilidad de ser detectados.



**Figura 8.** Evolución de la búsqueda

En la figura 8 se muestra la evolución de los primeros pasos en la búsqueda del óptimo del costo total anual para el problema planteado, tomando como intervalo inicial para  $T_1$ , 60 - 138.

Se ha indicado la secuencia de los sucesivos puntos de análisis 1, 2,... así como las regiones que van siendo eliminadas e1, e2,...

Puede advertirse que el proceso descarta de modo natural la zona implícitamente no admisible (eliminaciones e2 y e4), ignorando el hecho de que para  $T_1 = 112,56^\circ\text{C}$  la función objetivo toma un valor infinito, al hacerse  $T_3$  igual a

249°C, como se puede comprobar con un poco de manejo algebraico de las ecuaciones.

Para un intervalo de incertidumbre final no superior a 0,5°C, el método del Número de Oro encuentra el óptimo para  $T_1 = 111,60$  °C siendo el costo total anual de 16192,42 \$/a y los valores de las áreas de intercambio y servicios auxiliares los que siguen:

$$\begin{array}{llll} A_C = 2,55 \text{ m}^2 & A_1 = 65,13 \text{ m}^2 & A_2 = 22,91 \text{ m}^2 & A_3 = 8,92 \text{ m}^2 \\ A_E = 3,59 \text{ m}^2 & q_A = 4,678 \text{ kg/s} & q_V = 0,048 \text{ kg/s} & \end{array}$$

En la solución encontrada, la aproximación mínima en el intercambiador de área  $A_1$  es igual a 1,2 °C, un valor evidentemente muy bajo.

Esto obedece a que el costo relativo de los servicios es muy superior al de las amortizaciones, lo que hace que se extreme el aprovechamiento térmico a costa de equipos de gran área. El problema debería reformularse considerando una razonable aproximación mínima técnica.

Si la presunción de "trepada brusca" no se hubiese cumplido, esto es, si la no unimodalidad generada hubiese sido detectada, se debería aplicar otra estrategia para poder manejar el problema que introducen las restricciones implícitas.

Para ello, antes de emprender la optimización en sí, se deben buscar los límites reales de la variable de decisión mediante un proceso de prueba y error, que va encerrando la zona donde se encuentra el límite buscado. El inconveniente de esta línea de acción es que se efectúa una gran cantidad de cálculos que luego no pueden ser plenamente aprovechados.

La idea de relacionar el valor de la función objetivo con la violación de la zona de soluciones posibles se volverá a considerar más adelante, generalizando el tratamiento de la búsqueda de un óptimo en presencia de restricciones, cuando se utiliza un algoritmo no plenamente capacitado para tener en cuenta la totalidad de las relaciones existentes en el problema.

## Métodos para problemas de dos o más variables

Como ya quedó dicho los problemas con dos o más grados de libertad imponen una dificultad numérica insalvable, cual es la imposibilidad práctica de establecer, con certeza, la naturaleza óptima de un punto.

Este obstáculo se vuelve más formidable cuanto mayor es la dimensionalidad del problema, circunstancia que se agrega a la complejidad natural de una formulación extensa en el número de variables -del orden del centenar-, con una matriz de existencia dispersa en extremo. Esto último obliga a la utilización de métodos numéricos específicos, que aprovechan adecuadamente la baja densidad de ocurrencia de las variables, con lo que se logra reducir la propagación de errores o los requerimientos de espacio para almacenar información.

Bajo esta óptica puede establecerse una división adicional a las que se han mencionado al comienzo de este capítulo, teniendo en cuenta, básicamente, el comportamiento de los métodos en relación a la magnitud de los problemas a ser resueltos.

Puede hablarse así de *métodos empíricos de optimización*, los más tradicionales y sencillos, pero con un campo de aplicación restringido, como lo demuestra la experiencia, a problemas pequeños, con pocos grados de libertad.

El otro grupo lo constituyen los *métodos por aproximaciones sucesivas*, todos con una importante fundamentación matemática y con la común característica de estructurar los procedimientos en base a un supuesto comportamiento del problema, para el cual son capaces de obtener la solución. Esta vía de ataque ha demostrado ser mucho más eficiente que la anterior, con capacidad para abordar problemas de la magnitud que caracteriza, por ejemplo, a la simulación completa de una planta de proceso con simuladores en base a ecuaciones.

Lamentablemente, lo complejo de su formulación y el cúmulo, importante, en verdad, de cuestiones numéricas que se asocian a estos métodos impide, so pena de forzar los alcances previstos para esta obra, un tratamiento pormenorizado de los mismos.

La exposición se restringirá, en consecuencia, a presentar, en forma detallada, dos de los métodos empíricos más difundidos, perteneciente al grupo de los

No confundir este método Simplex con el método Simplex de Dantzig para Programación Lineal.

llamados *algoritmos politópicos*, el *Simplex* de Spendley, Hext y Himsworth (SHH) y el *Complex* de Box, y luego, brevemente, se han de explorar los fundamentos y principales características de otras dos metodologías para el tratamiento de problemas de optimización multivariables, el *Gradiente Reducido Generalizado* (GRG) de Abadie y Carpentier y la *Programación Cuadrática Sucesiva* de Han y Powell, ambos pertenecientes al grupo de métodos por aproximaciones sucesivas.

## El método Simplex de Spendley, Hext y Himsworth (SHH)

Este método de búsqueda directa para dos o más variables de decisión, se aplica a problemas sin restricciones. Como tal no sería de utilidad en ingeniería química; sin embargo, puede utilizárselo conjuntamente con la función Penalidad que se verá en el próximo acápite.

El método toma como base de análisis una figura geométrica regular (conocida como simplex) formada por  $n+1$  puntos, en un espacio de  $n$  dimensiones. Así, por ejemplo, para dos variables de decisión se tendrá un triángulo equilátero.

Una vez ubicados los puntos, se calcula el valor de la función objetivo en cada uno de ellos y se comparan sus valores. El peor de todos es reflejado sobre el centro de gravedad o centroide de los puntos restantes, y el nuevo reemplaza al reflejado, preservando la forma geométrica de la figura. Hecho esto, se calcula el valor de la función objetivo en ese punto. Las coordenadas del nuevo punto (N) se determinan de acuerdo a la siguiente ecuación, donde C corresponde al centroide y P al punto peor.

$$x_{i,C} = \frac{1}{n} \sum_{j \neq P} x_{i,j} \quad ; \quad x_{i,N} = 2x_{i,C} - x_{i,P}$$

Este procedimiento de reflexión constituye la llamada *regla 1* del método y su aplicación reiterada determina un camino en zigzag hacia la posición del óptimo.

Varias dificultades pueden surgir por la aplicación de esta regla. Puede suceder que el nuevo punto tenga el peor valor de la función objetivo, de tal manera que, si se lo refleja, se vuelve al simplex anterior. Para evitar esta situación se postula la *regla 2*, por la cual, en esa situación, no se refleja el peor sino el segundo peor. En

el caso de dos variables sería el de valor intermedio, nombre con que se lo suele denominar en general.

Cuando se llega a un punto cercano al óptimo, el algoritmo tiende a seguir un ciclo, girando alrededor del mejor punto. En estos casos, luego de más de K iteraciones en los que el punto mejor permanece siendo el mismo, se contrae el simplex hacia él y los nuevos puntos se ubican en la mitad de los lados. El valor de K depende del número de variables, según la ecuación:  $K = 1,65 n + 0,05 n^2$ . Todo esto constituye la *regla 3* del método. Las coordenadas de los nuevos puntos se calculan de acuerdo a la expresión:  $x'_{i,j} = (x_{i,M} + x_{i,j}) / 2$

La búsqueda termina cuando, tras la aplicación de la regla 3, el lado del simplex es menor que una cota prefijada.

El método requiere de una figura inicial para comenzar la búsqueda. Los simplex siguientes se obtienen cambiando sólo uno de los vértices de la figura anterior. Puede tomarse cualquier conjunto de puntos, siempre y cuando formen la figura deseada.

Por ejemplo, el conjunto de n+1 puntos de la Tabla 1, constituye el simplex inicial de lado a, para un problema de n variables, donde uno de los puntos es el origen de coordenadas. Por supuesto, una transformación lineal permite desplazar esta figura a cualquier lugar del espacio n-dimensional.

En la Tabla 1 puede verse que, salvo la primer fila de ceros (el origen) y una diagonal de términos p, el resto se compone sólo de términos q.

n coordenadas de cada punto						
Punto j	$\rho_{1,j}$	$\rho_{2,j}$	$\rho_{3,j}$	.....	$\rho_{n-1,j}$	$\rho_{n,j}$
1	0	0	0	.....	0	0
2	p	q	q	.....	q	q
3	q	p	q	.....	q	q
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
n	q	q	q	.....	p	q
n+1	q	q	q	.....	q	p

**Tabla 1.** Coordenadas para un conjunto de vértices

Se puede demostrar que los valores de p y q vienen dados por las expresiones:

$$p = \frac{a}{n\sqrt{2}}(\sqrt{n+1} + n - 1) \quad ; \quad q = \frac{a}{n\sqrt{2}}(\sqrt{n+1} - 1)$$

## Técnicas de Penalización

En oportunidad de tratarse los métodos para resolver problemas de optimización de una variable de decisión se utilizó el criterio de *penalizar* a la función objetivo por el no cumplimiento de las restricciones impuestas al problema como una de las formas de tenerlas en cuenta durante el proceso de optimización. Esta misma estrategia se puede utilizar para aplicar métodos que no contemplan restricciones, como el Simplex SHH que se acaba de ver, a problemas que sí las tienen.

El planteo general de la *técnica de penalización* consiste en reemplazar la búsqueda del óptimo de la función objetivo del problema restringido

$$\begin{aligned} & \text{mín } FO(x_1, \dots, x_{n+m}) \\ & \text{con } f_i(x_1, \dots, x_{n+m}) = 0 \quad ; i = 1, \dots, m \\ & \text{y } h_j(x_1, \dots, x_{n+m}) \geq 0 \quad ; j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

por otra, formalmente no restringida, cuya función objetivo es

$$\begin{aligned} \text{min } FO_p(x_1, \dots, x_{n+m}, P) = \\ = \min \left( FO(x_1, \dots, x_{n+m}) + P \left[ \sum_{i=1}^p \sigma_i h_i^2(x_1, \dots, x_{n+m}) + \sum_{i=1}^m f_i^2(x_1, \dots, x_{n+m}) \right] \right) \end{aligned}$$

P es una constante razonablemente grande, por ejemplo  $10^2 FO\#$ , siendo  $FO\#$  un valor típico de la función objetivo dentro de la zona de soluciones admisibles. En los problemas de máximo el término agregado debe *restarse* a la función objetivo original.

La variable  $\sigma_i$  valdrá 0 si la restricción  $h_i$  se cumple y 1 en caso contrario, con lo cual sólo se produce un aporte a la función objetivo considerada cuando no se cumple la restricción. En el caso de las relaciones de diseño, el aporte se produce siempre que  $f_i \neq 0$ .



En consecuencia, el efecto de la sumatoria agregada a la función objetivo original es la de aumentar significativamente el valor de ésta en aquellos puntos que se encuentran fuera de la zona de soluciones admisibles.

La metodología de trabajo con la técnica de penalización requiere un tratamiento gradual para evitar la detección de falsos óptimos. El siguiente ejemplo, elemental, puede clarificar la cuestión:

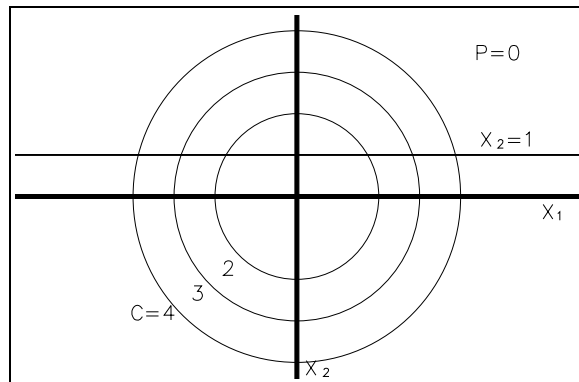
$$\min_{x_1, x_2} x_1^2 + x_2^2 \quad \text{para } x_2 = 1$$

El óptimo, obviamente se encuentra sobre la recta  $x_2 = 1$  para  $x_1 = 0$ , donde, como se muestra en la figura 9, la misma es tangente a una curva de nivel.

El problema, formulado en términos de una estrategia de penalización sería

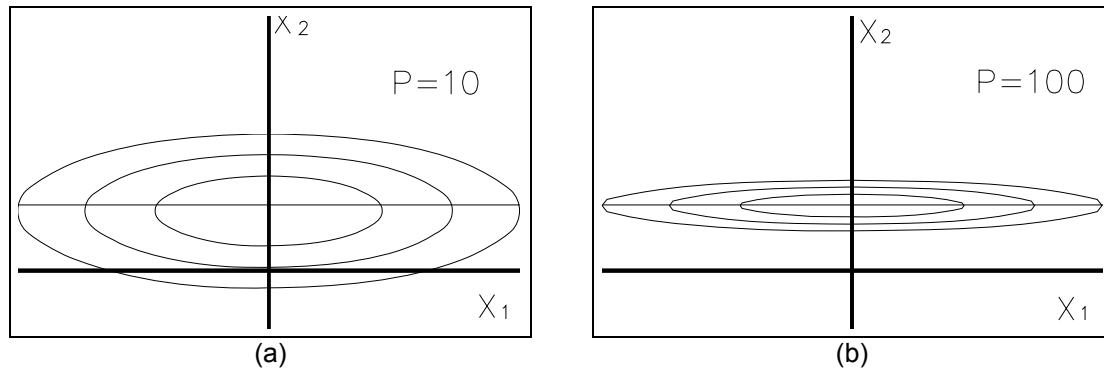
$$\min_{x_1, x_2} [x_1^2 + x_2^2 + P(x_2 - 1)^2]$$

Al hacerlo, el problema deja de estar acotado pero ahora las curvas de nivel de la nueva función objetivo son elipses concéntricas donde la ubicación de los ejes y la excentricidad dependen del valor de la constante de penalización  $P$ , como se muestra en las figuras 10 (a) y (b). (Debe aclararse que la recta  $x_2 = 1$  se ha dejado exclusivamente como referencia, ya que no forma parte del problema).



**Figura 9.** Curvas de nivel ( $P = 0$ )

Se puede apreciar que el aumento del valor de  $P$  incrementa la excentricidad de las elipses, lo que significa que la función objetivo varía rápidamente sobre un eje y en forma muy lenta sobre el otro.



**Figura 10.** Curvas de nivel ( $P = 10$  ,  $P= 100$ )

Lo anterior determinará que, en el proceso de análisis y con valores muy altos de  $P$ , se privilegie el cumplimiento de la restricción por sobre la búsqueda de un mejor valor de la función objetivo, con lo que, si se está lejos del óptimo, éste podría no ser encontrado. Por tal razón, el problema debe ser resuelto en forma sucesiva para valores crecientes de  $P$  y partiendo en cada etapa de la solución hallada en la etapa anterior, hasta conseguir constancia en el óptimo encontrado.

## El método Complex

La idea general de los métodos empíricos de optimización se basa en construir una estrategia eficiente para resolver las diversas dificultades que son típicas en este tipo de problemas: el tratamiento de las restricciones, la determinación de una dirección de búsqueda, la incidencia del acarreo de errores, etc.

El punto fundamental del método Complex consiste en la construcción, en el espacio  $n$ -dimensional examinado, de una figura de  $k$  vértices,  $k > n+ 1$  (Box recomienda  $k = 2n$ , salvo para valores de  $n$  superiores a 5 ó 6, donde puede ser un poco menor).

En lo que sigue se aceptará que el problema está planteado en una forma levemente distinta a la expuesta como formulación general. Lo que realmente se ha de considerar es el sistema que surge de resolver las relaciones de diseño

$$f_i(x_1, \dots, x_{n+m}) = 0 \quad i=1, \dots, m < n$$

con lo que queda, siendo  $x_{Dj}$  el conjunto de variables de decisión

$$\begin{aligned} & \min FO(x_{D1}, \dots, x_{Dn}) \\ r_1) & \quad h'_e(x_{D1}, \dots, x_{Dn}) \geq 0 \quad e = 1, \dots, p \\ r_2) & \quad \underline{x}_{Dj}^l \leq x_{Dj} \leq \underline{x}_{Dj}^s \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

La aplicación de las distintas operaciones del método requiere disponer de  $k$  puntos iniciales que satisfagan los conjuntos de restricciones  $r_1$  y  $r_2$ . En rigor, solo es absolutamente necesario un punto inicial, ya que el resto puede ser generado a partir de los límites  $r_2$  impuestos a las variables.

Para el punto  $x_j = (x_{D1j}, \dots, x_{Dnj})$ , ( $j = 2, \dots, k$ ), el valor de la variable  $x_{Dij}$  (coordenada  $i$  del punto  $x_j$ ) se puede hacer:

$$x_{Dij} = x_{Dij}^l + \varepsilon_{ij} [x_{Dij}^s - x_{Dij}^l] \quad i = 1, \dots, n \quad j = 2, \dots, k \quad (1)$$

donde  $\varepsilon_{ij}$  es un número aleatorio en el rango  $0 \leq \varepsilon_{ij} \leq 1$ . Obviamente, esto no asegura que se cumplan, en su totalidad, las condiciones  $r_1$ . Si se violase alguna de ellas el punto  $x_j$  se mueve hacia el *centroide* de los  $j-1$  puntos anteriores ( $j \geq 2$ )

$$x_{Dij} = C_i + 0,5 [x_{Dij} - C_i] \quad (2)$$

siendo  $C_i$  las coordenadas del centroide dadas por

$$C_i = \left[ \frac{1}{j-1} \right] \sum_{p=1}^{j-1} x_{Dip} \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

Nótese que, si la región de soluciones posibles es convexa, el centroide será siempre, por construcción, un punto perteneciente a ella. Por consiguiente, el procedimiento propuesto debe concluir con el vértice  $j$  dentro de la zona. Recuérdese que la región  $R$  se dice convexa si para todo  $x_1 \in R$ ,  $x_2 \in R$  siendo  $\mu \in \{0, 1\}$  y  $x = \mu x_1 + (1-\mu)x_2$  resulta ser  $x \in R$ .

Este proceso de *contracción* hacia el centroide se verificará en todo momento en que, al proponerse el análisis de un punto en el espacio de las variables de decisión, se verifique que el mismo se encuentra fuera de la zona permitida.

La operación básica del método es la *reflexión* del vértice donde la función objetivo presenta el peor valor, considerando la totalidad de los puntos que constituyen la figura. Esta reflexión se efectúa a través del centroide de los vértices restantes a una distancia  $\alpha > 1$  del mismo (1,3 según Box).

En términos matemáticos

$$x_{DIR} = C_i + \alpha(C_i - x_{DIP}) \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

siendo  $x_{DIP}$  las coordenadas del punto "peor".

Este punto *reflejado*  $\underline{x}_{DR}$  (o, si fuera no factible, el que resulte luego del proceso de contracción hacia el centroide) ha de reemplazar a  $\underline{x}_{DP}$  para dar lugar a una nueva figura y reiterar la totalidad del procedimiento.

En la figura 11 se muestra un hipotético problema en 2 variables. Se han representado dos curvas de nivel de la función objetivo (la más externa con el peor valor) y la frontera de una restricción ( $r = 0$ ), admitiéndose que la zona permitida es hacia abajo y a la izquierda.

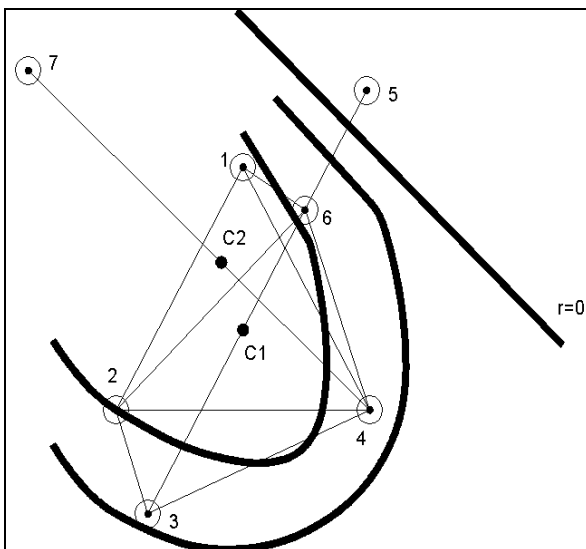


Figura 11. Método Complex

Inicialmente constituyen la figura los puntos 1 a 4. El peor es, evidentemente, el 3, por lo que se procede a proyectarlo sobre el centroide de 1, 2 y 4 (punto C1). Así se obtiene el punto 5, que no es admisible, por lo que debe procederse a contraer sobre C1, determinándose el punto 6.

La nueva figura, ahora, la constituyen 1, 2, 4 y 6. El punto "peor" es el 4, por lo que se lo refleja sobre

C2, centroide de 1, 2 y 6.

Resulta interesante observar el comportamiento del método en las proximidades de la frontera de la restricción, en particular los puntos 1, 4 y 6. No resulta difícil imaginar que si los dos primeros hubiesen estado más cerca del borde de la zona y en una posición próxima a la paralela, el punto 6 hubiese sido colineal con los otros dos.

En esta circunstancia, donde el nuevo vértice se puede expresar como una combinación lineal de otros que ya forman parte de la figura, se dice que la figura ha *colapsado* (en el caso de dos variables, el cuadrilátero se transformaría en un triángulo). Este colapso de la figura es la causa de instrumentar el método con

$k > n + 1$  puntos, siendo este último el estrictamente necesario para tener una figura en el espacio  $n$ -dimensional.

El método prevé que en los casos en los que el punto reflejado resulte ser el peor en la nueva figura, en ésta no debe efectuarse el proceso de reflexión sino que tal punto ha de contraerse sobre el centroide de los restantes, con lo que se produce una reducción de las dimensiones de la figura, facilitando la búsqueda de nuevas direcciones.

Por último, el final del procedimiento se verifica al producirse una reducción de las dimensiones de la figura al límite establecido para el esquema de búsqueda.

Todo lo dicho anteriormente puede ser resumido en el algoritmo del Cuadro 2.

<p>Datos: <math>\underline{x}_1</math> : punto inicial (<math>x_1 \equiv x_{D11}, x_{D21}, \dots, x_{Dn1}</math>)</p> <p><math>k</math> : número de puntos del esquema de análisis (<math>k \approx 2n</math>)</p> <p><math>\delta</math> : cota de final</p> <p>1. Inicialización</p> <p><i>Para <math>j = 2..k</math> hacer</i></p> <p>1.1 Calcular el centroide de los puntos <math>\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{j-1}</math> (ec. 3)</p> <p>1.2 Determinar el punto <math>\underline{x}_j \equiv x_{D1j}, \dots, x_{Dnj}</math> (ec. 1)</p> <p>1.3 Si <math>\underline{x}_j</math> viola alguna restricción, contraer hacia el centroide (ec. 2) hasta que las satisfaga a todas.</p> <p>2. Mientras {<i>distancia promedio al centroide</i>} <math>&gt; \delta</math> hacer</p> <p>2.1 Ordenar los puntos de análisis según valores crecientes de la función objetivo.</p> <p>Sea <math>\underline{x}_P</math> donde se verifica el valor más alto.</p> <p>2.2 Calcular el centroide de todos los puntos excluido <math>\underline{x}_P</math></p> <p>2.3 Si es la 1ª vez o <math>\underline{x}_P</math> no es el punto reflejado</p> <p>2.3.1. Obtener <math>\underline{x}_R</math> por reflexión de <math>\underline{x}_P</math> (ec. 4, <math>\alpha \approx 1,3</math>)</p> <p>2.3.2. Si <math>\underline{x}_R</math> viola alguna restricción, contraerlo hacia el centroide hasta que cumpla todas.</p> <p>2.4 Reemplazar <math>\underline{x}_P</math> por <math>\underline{x}_R</math>.</p> <p>2.5 Si <math>\underline{x}_R</math> es el peor punto de la nueva figura, contraer <math>\underline{x}_R</math> hacia el centroide.</p> <p>3. Final</p> <p>3.1 Considerar <math>\underline{x}_{opt}</math> el mejor punto disponible <math>f_{opt} = \text{FunciónObjetivo}(x_{opt})</math></p> <p>3.2 Fin</p>
---

**Cuadro 2.** Algoritmo del método Complex (mínimo)

Como siempre, para poder fijar mejor las ideas, se tomará como punto de referencia un ejemplo sencillo, la red de intercambio térmico que se muestra en la figura 12, que corresponde, con otra estructura, al mismo problema de la figura 7.

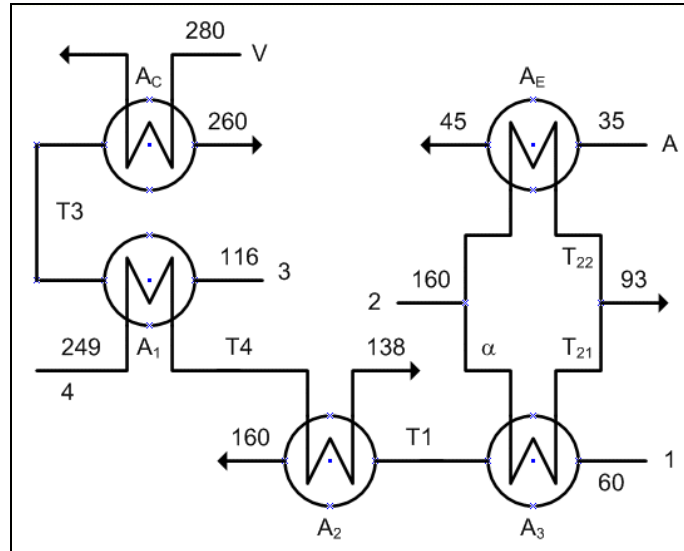


Figura 12. Esquema tecnológico del problema

Allí la corriente 2 ha sido subdividida en sus intercambios con el servicio auxiliar frío y la porción más fría de la corriente 1.

En este caso el modelo matemático permanece inalterado para el calentador y los intercambiadores 1 y 2. Las ecuaciones modificadas para el enfriador y el intercambiador 3, así como las del mezclador, se muestran a continuación:

Intercambiador 3

$$\alpha 8792 (160 - T_{21}) = 7620 (T_1 - 60) \quad T_1 \geq 60$$

$$\ln \frac{160 - T_1}{T_{21} - 60} = 852 A_3 \left[ \frac{1}{8792 \alpha} - \frac{1}{7620} \right] \quad T_{21} \geq 60$$

Enfriador

$$q_A = 0,21(1 - \alpha) (160 - T_{22}) \quad T_{22} \leq 160$$

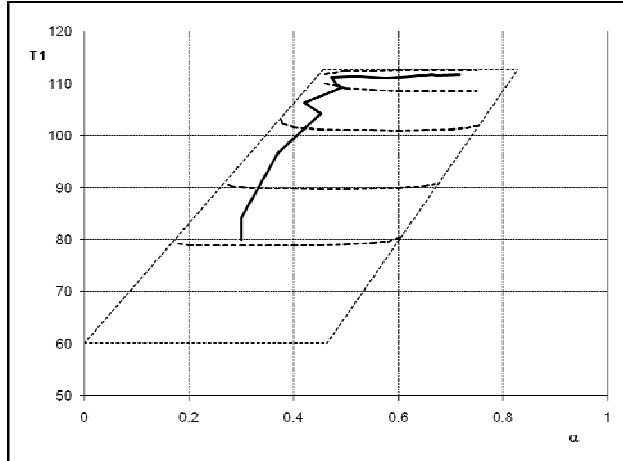
$$\ln \frac{115}{T_{22} - 35} = 852 A_E \left[ \frac{1}{8792(1 - \alpha)} - \frac{1}{4186,8 q_A} \right]$$

Mezclador

$$\alpha T_{21} + (1 - \alpha) T_{22} = 93 \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Un ordenamiento de cálculo conveniente fija como variables de decisión a  $T_1$  y  $\alpha$ , la primera restringida, en principio, al entorno (60,138) y la segunda a (0,1). Debe notarse, sin embargo, que, al igual que antes, existen restricciones sobre las variables de estado que pueden imponer a las de decisión límites más severos que los fijados en forma explícita.

Un análisis numérico detallado del problema conduce a la situación mostrada en la figura 13 donde la zona de soluciones admisibles queda delimitada por cuatro fronteras rectas todas definidas en forma implícita, salvo la inferior,  $T_1 = 60^\circ\text{C}$ .



**Figura 13.** Trayectoria al óptimo

Se han indicado, asimismo, curvas de valor constante de la función objetivo, desde 30000 \$/a en la parte inferior hasta 17000 \$/a en el sector alto de la figura. Se debe hacer notar que todas ellas son, en realidad, curvas cerradas que presentan, sobre las fronteras, un efecto de agolpamiento que impide un dibujo claro.

A este efecto de "trepada brusca" debe agregarse la escasa sensibilidad de la función objetivo al factor de división  $\alpha$ , salvo, lógicamente, en las proximidades de las fronteras. De hecho, se podría haber trabajado con un valor adecuado de  $\alpha$ , por ejemplo, 0,5 y considerar sólo  $T_1$  como variable de decisión. En este sentido, el factor de división sería una variable de decisión no significativa en este problema.

En la misma figura se muestra, esquemáticamente, la evolución seguida por el punto "mejor" a lo largo de una búsqueda que se inicia, aproximadamente, en  $T_1 = 80^\circ\text{C}$  y  $\alpha = 0,3$  hasta las proximidades del punto óptimo, donde la distancia promedio al centroide de los puntos de la figura de búsqueda es menor a 0,1.

Puede advertirse el comportamiento del algoritmo en las proximidades de las fronteras, donde se verifica un desplazamiento casi paralelo a las mismas, avanzando siempre en el sentido de los menores costos operativos totales.

La aplicación del método al problema planteado arroja los siguientes resultados

$$\begin{array}{llll}
 \alpha = 0,717 & T_1 = 111,68^\circ\text{C} & \text{FO} = 16254 \text{ \$/año} & \\
 A_E = 3 \text{ m}^2 & A_1 = 66,53 \text{ m}^2 & A_2 = 22,96 \text{ m}^2 & A_3 = 10,83 \text{ m}^2 \\
 A_C = 2,54 \text{ m}^2 & q_A = 4,66 \text{ kg/s} & q_V = 4,77 \cdot 10^{-2} \text{ kg/s} & 
 \end{array}$$

## Optimización por aproximaciones sucesivas

En un problema de Programación No Lineal (PNL), cuya formulación general se puede poner como

$$\begin{array}{l}
 \min \text{FO}(x_1, \dots, x_{n+m}) \\
 \text{con } f_i(x_1, \dots, x_{n+m}) = 0 \quad i = 1, \dots, m_0 \quad (m_0 < n + m) \\
 h_j(x_1, \dots, x_{n+m}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, p \\
 x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad i = 1, \dots, n + m
 \end{array}$$

la resolución utilizando de métodos de optimización como Complex requiere que, previo a la verificación del cumplimiento de las  $h_j(\underline{x})$  y la posterior determinación de la función objetivo, se proceda al cálculo del valor las  $m$  variables de estado, cumplimentando, si fuera necesario, todas la iteraciones que demanda ese cálculo.

Hay un grupo de métodos donde pueden llevarse a cabo, simultáneamente, la búsqueda del óptimo y los procesos iterativos que demanda el orden de cálculo elegido.

Pero no es sólo eso: su potencialidad es superior a los enfoques politópicos y resultan muy adecuados para trabajar con programas de gran complejidad, como planillas de cálculo o simuladores de proceso.

Este grupo, por los manejos matemáticos que utilizan, se lo suele denominar *métodos por aproximaciones sucesivas* y, de ellos, en este capítulo, se han de exponer los esquemas metodológicos básicos de los dos principales: *Gradiente Reducido Generalizado (GRG)* y *Programación Cuadrática Sucesiva (PCS)*.

En ambos, se parte de un punto de la búsqueda  $\underline{x}^k$ , alrededor del cual se realiza una aproximación del problema, bajo la forma de un desarrollo en serie hasta el



término de primer o segundo orden. Esta aproximación permite encontrar una dirección sobre la cual se tratará de mejorar la solución disponible.

Un primer aspecto a considerar en el tratamiento del tema es la formulación que se adoptará para el problema. En lo que sigue se han de incluir en el planteo sólo las ecuaciones originales y aquellas restricciones donde el punto  $\underline{x}^k$  se encuentra en la frontera (*restricciones “activas”*). La actualización del conjunto “activo” a lo largo de la búsqueda del óptimo será considerado en el tratamiento de cada método. Se tendrá, entonces, que deberá resolverse

$$\begin{aligned} \min & \text{FO}(x_1, \dots, x_{n+m}) \\ \text{con} & f_i(x_1, \dots, x_{n+m}) = 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Con respecto a la búsqueda para mejorar la solución  $\underline{x}^k$ , admitiendo que se dispone de una dirección  $\underline{d}^k$ , encontrada por alguno de los métodos que se verán más adelante, el nuevo punto vendría dado por la relación  $\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k + \alpha \underline{d}^k$  siendo  $\alpha$  un escalar positivo. Para encontrar su valor, entre otros enfoques metodológicos, se define una función llamada “de mérito”,  $\phi(\underline{x})$ , vinculada al problema planteado pero donde se incrementa la significación de algunos aspectos del mismo, como la violación de las restricciones.

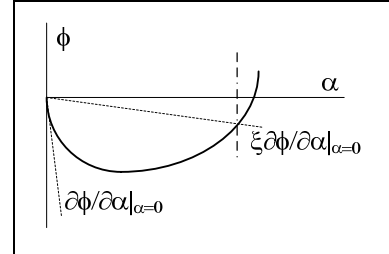
Por otra parte, debe considerarse que, en general, en toda búsqueda de un óptimo sobre una dirección adecuada en un punto, la función bajo análisis comenzará por mejorar pero, a partir de un cierto punto, dejará de hacerlo y se alcanzarán valores peores. Esto es, no se precisa que se viole restricción alguna para un desmejoramiento de la función de evaluación.

Al disponer de la solución  $\underline{x}^k$ , se ha de poder calcular  $\phi(\underline{x}^k)$  y, también, el gradiente de  $\phi(\underline{x}^k)$ . Este último ha de ser negativo, ya que  $\underline{d}^k$  es una dirección que mejora la función objetivo planteada. Obviamente, esto último sólo puede asegurarse en las proximidades de  $\underline{x}^k$ , por lo que conviene explorar la nueva solución a través de un apartamiento “adecuado” de la anterior, siempre haciendo uso de la dirección  $\underline{d}^k$ . Para ello, se suele plantear una búsqueda denominada tipo Armijo donde, formalmente, se requiere que el valor de  $\alpha$  elegido cumpla con

$$\frac{[\phi(\underline{x}^k + \alpha \underline{d}^k) - \phi(\underline{x}^k)]}{\alpha} \leq \xi \frac{\partial \phi(\underline{x}^k + \alpha \underline{d}^k)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

donde  $\xi$  es un valor entre 0 y 1, normalmente muy pequeño.

En la figura 14 se ha representado, con línea llena, la función de mérito  $\phi(\alpha)$ . Puede verse que la desigualdad planteada expresa que la pendiente de la secante entre  $\alpha = 0$  y el valor en consideración para ese parámetro debe ser menor a una fracción de la derivada de  $\phi$  en  $\alpha = 0$ . En la figura se ha indicado, limitado con una línea de trazo y punto, el ámbito en el cual se encuentran los valores de  $\alpha$  que cumplen con la relación.



**Figura 14.** Función de mérito

Resta, ahora, considerar los dos métodos elegidos para determinar la dirección de búsqueda, Gradiente Reducido Generalizado y Programación Cuadrática Sucesiva. En ambos casos se comenzará por plantear el problema en dos variables con una única relación que las vincula, para luego extender ese planteo al caso multivariable.

En el caso de GRG, la idea básica del método es lograr una formulación que dependa exclusivamente de las variables de decisión, para lo cual habrá que poner las variables de estado en función de éstas.

La no linealidad de las relaciones involucradas obliga a realizar una aproximación lineal de las mismas, donde sea posible la explicitación deseada. Así, si se dispone de un punto  $\underline{x}^k$  en la búsqueda del óptimo,  $\underline{x}^k = (x_1^k, x_2^k)$ , punto factible y, por lo tanto,  $f(\underline{x}^k) = 0$ , para el caso sencillo que se está analizando, se puede poner

$$\Delta f(x_1, x_2) = \frac{\partial f(x_1^k, x_2^k)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^k) + \frac{\partial f(x_1^k, x_2^k)}{\partial x_2} (x_2 - x_2^k) = 0$$

ya que se busca que se siga cumpliendo  $f(\underline{x}) = 0$ .

En una notación más compacta

$$f_1^k \Delta x_1 + f_2^k \Delta x_2 = 0 \rightarrow \Delta x_2 = -f_1^k \Delta x_1 / f_2^k \quad (5)$$

con lo que se tiene la variación de  $x_2$  en función de  $x_1$ , la que será estrictamente válida en las proximidades de  $\underline{x}^k$ .

A su vez, es posible desarrollar en serie la función objetivo, alrededor de  $\underline{x}^k$ . Si se toman solo los términos de primer y segundo orden quedaría

$$\Delta FO = FO - FO^k \approx FO_1^k \Delta x_1 + FO_2^k \Delta x_2 + \frac{1}{2} \left[ FO_{11}^k (\Delta x_1)^2 + 2FO_{12}^k \Delta x_1 \Delta x_2 + FO_{22}^k (\Delta x_2)^2 \right]$$

siendo  $FO^k = FO(x_1^k, x_2^k)$ ,  $FO_j^k = \partial FO(x_1^k, x_2^k) / \partial x_j$ ,  $FO_{ij}^k = \partial^2 FO(x_1^k, x_2^k) / \partial x_i \partial x_j$

Pero, teniendo en cuenta que la variación de  $x_2$  depende de la de  $x_1$ , de modo de respetar  $f(\underline{x}) = 0$ , según la relación 5, lo anterior se puede poner

$$\Delta FO \approx \left[ FO_1^k + FO_2^k \left( -f_1^k / f_2^k \right) \right] \Delta x_1 + O^2(\Delta x_1) \quad (a)$$

$$O^2(\Delta x_1) = \frac{1}{2} \left[ FO_{11}^k - 2FO_{12}^k \left( f_1^k / f_2^k \right) + FO_{22}^k \left( f_1^k / f_2^k \right)^2 \right] (\Delta x_1)^2 \quad (b)$$

Ahora, la función objetivo ha quedado expresada exclusivamente en términos de la variable independiente y puede ser analizada considerando solamente el comportamiento de ésta. La expresión entre corchetes en 6(a) es el *gradiente* de FO, pero *reducido* a la variación de la variable de decisión.

Obviamente, el reemplazo realizado requiere que el desplazamiento de la solución mantenga inalterado el conjunto activo, en este caso,  $f(x_1, x_2) = 0$ . De no ser así, debería adecuarse el análisis, considerando, ahora, la nueva situación.

Volviendo a la expresión 6, debe admitirse que la dirección en la que se busca la nueva solución debe permitir mejorar la existente, para lo cual  $\Delta FO < 0$ . En las proximidades de  $\underline{x}^k$  el término preponderante será el de primer orden y una *posible* solución que logra disminuir el valor de la función objetivo es la dirección del gradiente reducido.

$$\Delta x_1 = \alpha d_1 = -\alpha \left[ FO_1^k + FO_2^k \left( -f_1^k / f_2^k \right) \right]$$

con  $\alpha$ , como antes un escalar positivo.

Se ha recalcado el carácter de posible, ya que no es la única alternativa. La elección del gradiente puede llegar a presentar problemas en la velocidad de convergencia al óptimo, por lo que algunos autores han propuesto otras alternativas, como gradientes conjugados, pero que requieren un manejo matemático de mayor complejidad, donde, por ejemplo, se tienen en cuenta aspectos tales como la consideración del término de segundo orden o la estimación del valor de las derivadas segundas.

En razón del carácter introductorio que tiene este capítulo no se han de considerar estas alternativas, restringiendo el análisis a lo dicho hasta aquí.

Para una mejor exposición del caso general, se ha de dividir el conjunto de variables  $x_1, \dots, x_{n+m}$  en dos grupos, el de variables de estado,  $x_{Ei}$ ,  $i = 1, \dots, m$  y el de de decisión,  $x_{Dj}$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

La aproximación de primer orden del conjunto de funciones  $f_i(x_{E1}, \dots, x_{Em}, x_{D1}, \dots, x_{Dn}) = 0$ ;  $i = 1, \dots, m$ , alrededor del punto  $\underline{x}^k = \{\underline{x}_E^k \cup \underline{x}_D^k\}$  conduce a tener que resolver el sistema lineal

$$\sum_{\forall j \in E} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_{Ej}} \right)^k \Delta x_{Ej} + \sum_{\forall j \in D} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_{Dj}} \right)^k \Delta x_{Dj} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{\forall j \in E} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_{Ej}} \right)^k \Delta x_{Ej} = - \sum_{\forall j \in D} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_{Dj}} \right)^k \Delta x_{Dj} \quad i = 1, \dots, m$$

lo que permite, al hacerlo, poner las componentes de  $\Delta \underline{x}_E$  en función de  $\Delta \underline{x}_D$ . Aquí será necesario contar con la matriz inversa de los coeficientes  $(\partial f_i / \partial x_{Ej})^k$  asociados a las variaciones  $\Delta \underline{x}_E$  y, de este modo, lograr expresar las mismas como una función lineal de las  $\Delta \underline{x}_D$ ,

$$\Delta x_{Ei} = \sum_{\forall j \in D} a_{ij}^k \Delta x_{Dj} \quad i = 1, \dots, m \quad (7)$$

A su vez, la función objetivo también se puede desarrollar en serie para tener

$$FO(\underline{x}) = FO(\underline{x}^k) + \sum_{j \in E} \left( \frac{\partial FO}{\partial x_{Ej}} \right)^k \Delta x_{Ej} + \sum_{j \in D} \left( \frac{\partial FO}{\partial x_{Dj}} \right)^k \Delta x_{Dj}$$

donde, al reemplazar  $\Delta \underline{x}_E$  por las funcionalidades que surgen de la ecuación 7, quedará una expresión del tipo  $\Delta FO(\underline{x}_D) = \sum_{j \in D} c_j \Delta x_{Dj}$

Una vez más, una dirección que logra disminuir el valor de la función objetivo es  $\underline{d}^k = - \underline{c}$ .

Restaría ahora, utilizando la dirección encontrada, realizar la búsqueda del nuevo punto. Para ello, como ya se dijo, es preciso definir una función de "mérito". En este caso, será, directamente,  $FO(\underline{x})$ , ya que, como se verá, el cumplimiento de las restricciones no activas se ha de controlar a lo largo de toda la búsqueda.

Pero para poder conocer  $FO(\underline{x})$ , y, en general, para cualquier función de mérito adecuada que se formule, es preciso conocer el verdadero valor de las variables

de estado, para un dado conjunto de variables de decisión. Esto es, conocido  $\underline{x}_D$ , debe resolverse  $f(\underline{x}_D, \underline{x}_E) = 0$  para saber cuánto vale  $\underline{x}_E$ , y, recién entonces, poder calcular  $FO(\underline{x}_D, \underline{x}_E)$ .

Es decir que el método de GRG ha de estar acompañado de un método de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, normalmente, uno de tipo Newton.

Cuando se resuelve el sistema de ecuaciones determinado por las restricciones activas en  $\underline{x}^k$  puede suceder que

- a) se encuentra una solución para el sistema de ecuaciones que cumple con todas las restricciones no activas y donde, además, se cumple el criterio impuesto sobre los valores de  $\alpha$
- b) la solución que se encuentra para el sistema de ecuaciones no respeta las restricciones no activas o no se cumple el criterio para  $\alpha$ , lo que obliga a proponer un nuevo  $\alpha$ , menor que el anterior o
- c) la situación anterior se ha reiterado un número predeterminado de veces, lo que indica la necesidad de modificar el grupo de restricciones activas y, consecuentemente, replantear la búsqueda con nuevos conjuntos  $\underline{x}_D$  y  $\underline{x}_E$ .

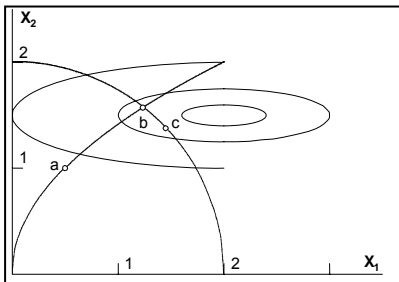
En resumen, los pasos básicos en cada etapa del método del Gradiente Reducido Generalizado pueden plantearse como se indica en el cuadro 3.

- a) Determinar, para el conjunto activo de restricciones, las componentes del gradiente reducido en el punto  $\underline{x}^k$  bajo análisis
- b) Verificar si el punto  $\underline{x}^k$  puede considerarse un óptimo local. Si es así, terminar; si no
- c) Determinar una dirección de búsqueda  $\underline{d}^k$  para generar un nuevo punto  $\underline{x}^{k+1}$ .
- d) Proponer un valor de  $\alpha$  para generar  $\underline{x}_D^{k+1} = \underline{x}_D^k + \alpha \underline{d}^k$
- e) Resolver el sistema de ecuaciones del conjunto activo para encontrar  $\underline{x}_E^{k+1}$
- f) Si el punto  $\underline{x}^{k+1} = \underline{x}_D^{k+1} \cup \underline{x}_E^{k+1}$  verifica el conjunto de restricciones no activas, ir a g). Si no, si no se ha excedido el número permitido de reducciones por paso del valor de  $\alpha$ , reducir su valor y volver a d). Si se ha excedido, cambiar el conjunto activo y volver a a)
- g) Calcular  $FO(\underline{x}_D^{k+1}(\alpha); \underline{x}_E^{k+1}(\alpha))$

h) Si se ha producido una reducción significativa de la función objetivo, tomar  $\underline{x}^{k+1}$  como nuevo punto de análisis y volver a a). Si no, reducir el valor de  $\alpha$  y volver a d).

**Cuadro 3.** Algoritmo básico del método GRG

Un ejemplo elemental puede servir para terminar de fijar ideas. En la figura 15 se muestran las curvas de nivel y las fronteras de las restricciones para el problema.



**Figura 15.** Gráfica del ejemplo

$$\min FO(\underline{x}) = \min (x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 1,5)^2$$

$$r1: -x_1 + 0,5 x_2^2 \leq 0$$

$$r2: x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0$$

$$r3: x_1 \geq 0$$

$$r4: x_2 \geq 0$$

Si se considera el punto a de la figura, (0,5; 1), puede verse que se encuentra sobre la frontera de la restricción 1, mientras que se halla en el interior de las restantes. Esto es, en las proximidades de (0,5; 1) el problema puede considerarse planteado como

$$\min (x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 1,5)^2$$

$$r1: -x_1 + 0,5 x_2^2 = 0$$

Tomando el punto [0,5; 1] como base del desarrollo, resulta:

$$\min 3,25 - 3 \Delta x_1 - 4 \Delta x_2 + O^2(\Delta x_1, \Delta x_2)$$

$$r1: -\Delta x_1 + \Delta x_2 = 0$$

Asignando a  $x_2$  el rol de variable de estado, será  $\Delta x_2 = \Delta x_1$ . Al producir el reemplazo en la función objetivo se tendrá

$$\min 3,25 - 7 \Delta x_1 + O^2(\Delta x_1)$$

y una dirección de búsqueda es  $d_1 = 7$ , es decir,  $x_1^n = 0,5 + 7 \alpha$

Si se considera  $\alpha = 0,05$  se obtendrá  $x_1 = 0,5 + 7 \cdot 0,05 = 0,85$ . La búsqueda del  $x_2$  que cumpla con la restricción  $r_1$  debe conducir a  $x_2 = \sqrt{1,7} = 1,304$ , que cumple  $r_2$  a  $r_4$ , con lo que  $r_1$  permanece como conjunto activo. Para estos valores  $FO(0,85; 1,304) = 1,4764$  y resulta ser

$$\frac{FO(\underline{x}^{k+1}) - FO(\underline{x}^k)}{\alpha} = \frac{1,4764 - 3,25}{0,05} = -35,472 < \xi \left. \frac{\partial FO}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}^k} \frac{d\underline{x}}{d\alpha} = 0,1(-7)7 = -4,9$$

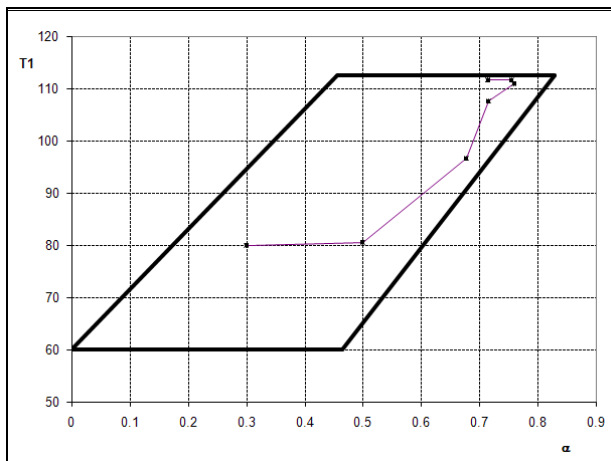
donde se ha considerado  $\xi$  igual a una décima parte del valor de la derivada para  $\alpha = 0$ .

Al analizar el gradiente reducido en (0,85; 1,304) y siempre con  $r_1$  como conjunto activo, se encuentra que su valor es  $-3,5036 \neq 0$  y el proceso debe continuar a partir del punto encontrado.

Este proceso seguiría así hasta que se encuentre la frontera de  $r_2$ . En este momento el conjunto activo pasará a ser esta última restricción y sobre ella se encontrará, finalmente, el punto óptimo  $x^* = (1,455; 1,372)$ . Esas situaciones se han indicado como puntos b y c en la figura presentada al formular el problema.

El método del GRG se encuentra implementado en la mayor parte de las planillas de cálculo, como un complemento para el tratamiento de problemas de optimización y la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. Las razones de esta elección se verán más adelante.

La aplicación del Solver, nombre bajo el cual se dispone del GRG en la planilla Excel, al problema ya resuelto aplicando el método Complex, conduce a la traza que se muestra en la figura 16.



**Figura 16.** Trayectoria al óptimo

El resultado que se encuentra es  $T_1 = 111,55$  °C y un valor de 0,716 para el factor de división, con un CTA de 16250 \$/año.

El otro método de optimización por aproximaciones sucesivas que se verá en este capítulo es Programación Cuadrática Sucesiva (PCS), donde la dirección de búsqueda se determina

aproximando el problema original por uno cuya función objetivo es de segundo orden y cuyas restricciones son lineales.

Para este último tipo de formulación (Programación Cuadrática) existen algoritmos de resolución muy eficientes, lo que permite una rápida solución de la aproximación efectuada.

Además, PCS tiene, en principio, una velocidad de convergencia al óptimo mayor que en el caso del GRG, basado, en su versión más simple, en una aproximación de primer orden. Sin embargo, hay algunos aspectos que hacen que, bajo determinadas circunstancias, GRG sea más conveniente que PCS.

Al igual que en el caso anterior, se comenzará por analizar el problema en dos variables con una sola restricción activa:

$$\begin{aligned} \text{mín } & \text{FO}(x_1, x_2) \\ \text{con } & f(x_1, x_2) = 0 \end{aligned}$$

La justificación de PCS surge de considerar la solución, por el método de Newton, del sistema de ecuaciones no lineales que resulta de abordar el problema anterior haciendo uso de la función aumentada de Lagrange, con lo cual tendremos un problema de optimización no restringido

$$\min L(x_1, x_2, \lambda) = \text{FO}(x_1, x_2) + \lambda f(x_1, x_2)$$

donde se deben cumplir las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

$$\begin{aligned} \partial L / \partial x_1 &= \partial \text{FO} / \partial x_1 + \lambda \partial f / \partial x_1 = 0 \\ \partial L / \partial x_2 &= \partial \text{FO} / \partial x_2 + \lambda \partial f / \partial x_2 = 0 \\ \partial L / \partial \lambda &= f = 0 \end{aligned}$$

O, en una notación más compacta

$$\begin{aligned} L_1 &= \text{FO}_1 + \lambda f_1 = 0 \\ L_2 &= \text{FO}_2 + \lambda f_2 = 0 \\ L_\lambda &= f = 0 \end{aligned}$$

Si, para resolver el sistema de ecuaciones no lineales que plantean las condiciones KKT se utiliza el método de Newton, efectuando el desarrollo alrededor del punto  $(x_1^k, x_2^k)$ , se tendrá

$$\begin{aligned} \text{FO}_1^k + (\text{FO}_{11} + \lambda f_{11})^k \Delta x_1 + (\text{FO}_{12} + \lambda f_{12})^k \Delta x_2 + f_1^k \lambda &= 0 \\ \text{FO}_2^k + (\text{FO}_{21} + \lambda f_{21})^k \Delta x_1 + (\text{FO}_{22} + \lambda f_{22})^k \Delta x_2 + f_2^k \lambda &= 0 \\ f_1^k \Delta x_1 + f_1^k \Delta x_1 &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$



donde  $\phi_i^k = \partial\phi/\partial x_i|_{\underline{x}^k}$  y  $\phi_{ij}^k = \partial^2\phi/\partial x_i\partial x_j|_{\underline{x}^k}$

El sistema de ecuaciones 8 no es otra cosa que las condiciones KKT para el problema

$$\text{mín } FO_1^k\Delta x_1 + FO_2^k\Delta x_2 + \frac{1}{2}(L_{11}^k\Delta x_1^2 + 2L_{12}^k\Delta x_1\Delta x_2 + L_{22}^k\Delta x_2^2) \quad (9)$$

$$\text{con } f_1^k\Delta x_1 + f_2^k\Delta x_2 = 0$$

$$\text{Obviamente, } L_{12}^k = L_{21}^k$$

El problema 9 es la aproximación a la que se hacía referencia al presentar el método. Al resolverlo se tendrá, además del valor de  $\lambda$ , las direcciones  $d_1^k$  y  $d_2^k$  en las que, a partir de  $x_1^k, x_2^k$  debe explorarse la posibilidad de mejorar el valor de la función objetivo

$$x_1^{k+1} = x_1^k + \alpha d_1^k$$

$$x_2^{k+1} = x_2^k + \alpha d_2^k$$

Debe notarse que la aproximación efectuada requiere disponer, o poder estimar, valores de las derivadas segundas, tanto de la función objetivo como de la restricción activa, para poder construir los términos  $L_{ij}^k$ . Obviamente, se podría llegar a calcular esos valores por diferenciación numérica, pero sería computacionalmente muy costoso. Lo habitual es utilizar una técnica de estimación de los valores de  $L_{ij}^k$ , actualizada permanentemente, por ejemplo, utilizando algún enfoque como el propuesto por Broyden, ya visto en oportunidad de tratar los métodos de iteración.

La determinación de un valor adecuado de  $\alpha$  requiere adoptar una función de mérito, que suele ser la aumentada de Lagrange. En este caso sería

$$\phi(x_1, x_2) = FO(x_1, x_2) + \lambda f(x_1, x_2)$$

Si hubiesen restricciones no activas, por ejemplo,  $h(x_1, x_2) \leq 0$ , se podría utilizar una función penalidad para la evaluación

$$\phi(x_1, x_2) = FO(x_1, x_2) + \eta[\lambda f(x_1, x_2) + \text{máx}(h(x_1, x_2), 0)]$$

La extensión al caso general es inmediata. Siempre considerando la formulación del problema teniendo en cuenta el conjunto de restricciones activas, la solución de

$$\begin{aligned} & \text{mín } FO(x_1, \dots, x_{n+m}) \\ & \text{con } f_e(x_1, \dots, x_{n+m}) = 0 \quad e = 1, \dots, m \end{aligned}$$

se puede encontrar aplicando reiteradamente un esquema de búsqueda, donde las sucesivas direcciones se obtienen al resolver

$$\begin{aligned} & \text{mín } \sum_{i=1}^N FO_i^k \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_{ii}^k \Delta x_i^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N L_{ij}^k \Delta x_i \Delta x_j \\ & \text{con } \sum_{i=1}^N f_{ei}^k \Delta x_i = 0 \quad e = 1, \dots, m \end{aligned}$$

donde  $N = n + m$  y  $L(x_1, \dots, x_N, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = FO(x_1, \dots, x_N) + \sum_{e=1}^m \lambda_e f_e(x_1, \dots, x_N)$ .

Una vez más, en el proceso de búsqueda los valores de  $L_{ij}^k$  serán estimados y actualizados en cada paso de la búsqueda.

El criterio de finalización de la búsqueda puede implementarse evaluando la función

$$\mu_{KT}(\Delta \underline{x}, \underline{\lambda}) = \sum_{\forall i} |FO_i \Delta x_i| + \sum_{\forall e} |\lambda_e f_e| \leq \varepsilon$$

siendo  $\varepsilon$  una cota prefijada.

Los pasos básicos del método PCS se resumen en el cuadro 4.

- a) Determinar, en el punto  $\underline{x}^k$  bajo análisis, las derivadas de la función objetivo y de las restricciones activas. Actualizar la estimación de  $L_{ij}$ .
- b) Verificar si el punto  $\underline{x}^k$  puede considerarse un óptimo local. Si es así, terminar; si no
- c) Determinar una dirección de búsqueda  $\underline{d}^k$  para generar un nuevo punto  $\underline{x}^{k+1}$ .
- d) Proponer un valor de  $\alpha$  para generar  $\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k + \alpha \underline{d}^k$
- e) Si el punto  $\underline{x}^{k+1}$  verifica el conjunto de restricciones no activas, ir a f). Si no, si no se ha excedido el número permitido de reducciones por paso del valor de  $\alpha$ , reducir su valor y volver a d). Si se ha excedido, cambiar el conjunto activo y volver a a).
- f) Calcular  $FO(\underline{x}^{k+1})$ . Si se ha producido una reducción significativa de la función objetivo, tomar  $\underline{x}^{k+1}$  como nuevo punto de análisis y volver a a). Si no, reducir el valor de  $\alpha$  y volver a d).

**Cuadro 4.** Algoritmo básico del método PCS

Una última cuestión a considerar es la conveniencia de utilizar GRG o PCS, frente a un determinado problema de optimización.

Si bien PCS tiene una velocidad de convergencia al óptimo mayor que GRG, el manejo operacional que requiere es mucho más complejo.

El método GRG, a diferencia de PCS, aprovecha las restricciones activas para reducir la dimensionalidad del problema.

En base a estas dos simples consideraciones, resulta sencillo entender que PCS sea preferible como método de optimización en simuladores modulares, donde la simulación puede verse como una gran “caja negra”, en la que el usuario maneja unas pocas variables de diseño.

En simuladores en base a ecuaciones o las planillas de cálculo, en cambio, las relaciones están explícitas y, al usar PCS, hay que considerar tanto las variables de decisión como las de estado. En esta situación, la reducción de la dimensionalidad que ofrece GRG es determinante para que sea este método más conveniente.

## El complemento Solver

La planilla Excel® dispone de un complemento, Solver, que permite la optimización de problemas de Programación No Lineal Entera Mixta (PNLEM). También es posible resolver problemas de Programación Lineal (PL) y sistemas de ecuaciones no lineales.

El método utilizado en el primero de los casos, PNLEM, es el Gradiente Reducido Generalizado (GRG), de acuerdo a un algoritmo debido a Lasdon y Waren.

En la figura 17 se muestra la ventana principal que se abre al invocar el complemento Solver. Esta ventana y las siguientes corresponden a versiones de Excel 2007 o anteriores. Para algunas

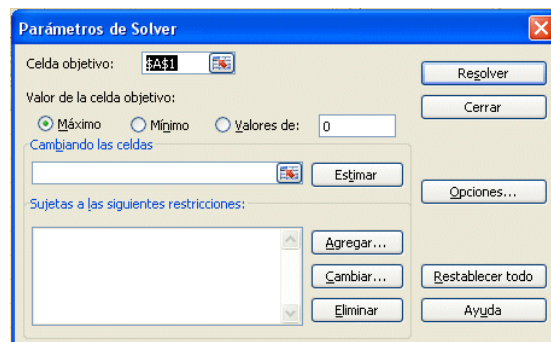



Figura 17. Solver: ventana principal

posteriores pueden registrarse cambios pero, en lo esencial, son equivalentes.

Se pueden ver tres cajas para ingresar información, con los rótulos *Celda objetivo*, *Cambiando las celdas* y *Sujetas a las siguientes restricciones*.

En las dos primeras, con el botón  que se encuentra a la derecha, es posible direccionar celdas de una hoja de la planilla, seleccionando, así, para la celda objetivo, la ubicación de la función de la que se desea encontrar el máximo o el mínimo, según se haya elegido.


En el cuadro de las celdas cambiantes se deberán indicar las ubicaciones de los valores que deben ser modificados por el Solver, esto es, las variables de decisión y las supuestas en el orden de cálculo.

Las restricciones se ingresan mediante el botón Agregar y al oprimirlo, se abre una ventana como la de la figura 18, donde hay tres sectores en los que se debe ingresar



**Figura 18. Restricciones**

información de: en el cuadro rotulado *Referencia de la celda*, la celda o celdas que contienen las relaciones funcionales entre las variables, que deben guardar una determinada relación ( $\leq$ ,  $=$ ,  $\geq$ , etc.) con un valor que se ingresa o que está contenido en una celda, lo que se indica en el cuadro *Restricción*.

También en esta ventana aparece el botón , lo que permite el direccionamiento directo en la hoja de cálculo.

Como se dijo, en los valores a ser modificados por el Solver se deben incluir las variables supuestas y por cada una de ellas deberá existir, en el orden de cálculo, una ecuación, esto es, una restricción que debe cumplirse respetando el signo igual.

Con respecto al modelo matemático que se vuelca en la planilla, hay que extremar los recaudos en la formulación, de modo de evitar que algún valor propuesto por el método pueda hacer que, en algún cálculo, se produzca un error insalvable, antes de que el método verifique la inviabilidad de esa propuesta.

Un ejemplo de ello sería la determinación de una fuerza impulsora media logarítmica, en un modelo que incluya un intercambio térmico. Allí, las temperaturas de la corriente caliente deberán ser siempre mayores que las de la corriente fría, pero la propuesta del Solver puede, en algún momento, no respetar

esta condición. Luego el algoritmo GRG ha de verificar la violación y procederá a modificar la propuesta.

Un planteo del cálculo que no tenga en cuenta esta dinámica puede hacer abortar el proceso de búsqueda. Para evitarlo habría que analizar todas las eventuales condiciones de error y elaborar una formulación del modelo matemáticamente robusta.

En el caso planteado se podría, por ejemplo, considerar el valor absoluto de las diferencias de temperatura, en lugar de los valores con su signo. Restaría, aún, tener en cuenta la posibilidad de una diferencia nula entre las temperaturas, lo que obligaría a utilizar una operación lógica, que considere, si ocurriese ese caso, un valor extremadamente pequeño en lugar del real.

Otro aspecto que se debe considerar en el uso del complemento Solver es el manejo de las opciones, al que se accede oprimiendo el correspondiente botón en la ventana principal.

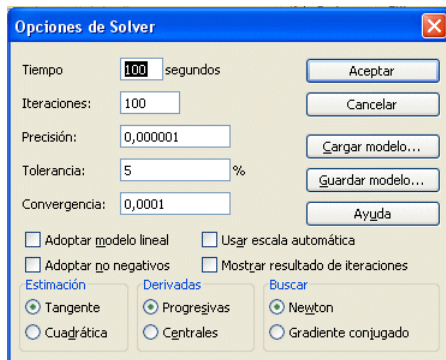


Figura 19. Solver: Opciones

Al hacerlo, se abre una ventana como la de la figura 19, donde se pueden ver los valores y selecciones por defecto del complemento.

El *Tiempo* y el número de *Iteraciones* determinan la máxima duración del proceso de optimización.

La *Precisión* es el error permitido para considerar el cumplimiento de las restricciones.

La *Tolerancia* es un parámetro que se utiliza en la búsqueda de soluciones enteras, la que se lleva a cabo mediante un procedimiento de búsqueda y acotamiento (Branch & Bound). Allí, se ha de considerar, para seguir explorando, toda solución que difiera más del valor de la tolerancia respecto de la mejor encontrada.

La opción *Adoptar modelo lineal* cambia el algoritmo de optimización al método Simplex para Programación Lineal y habilita un análisis del modelo propuesto, para determinar si se puede o no aplicar esa metodología.

La opción *Adoptar no negativos* está referida a las celdas cambiantes definidas en la ventana principal, en tanto que al elegir *Usar escala automática* obliga a un escalado interno antes de proceder a la solución.

Si se selecciona *Mostrar resultados de iteraciones*, obligará a que se detenga el proceso de optimización luego de cada iteración principal, mostrando el resultado parcial obtenido.

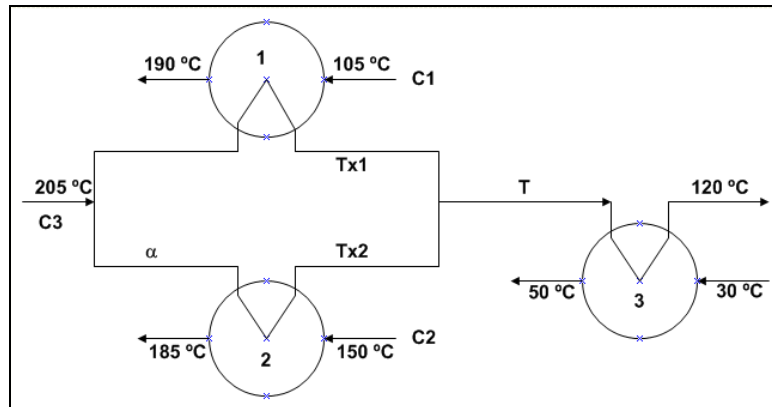
Por último, las restantes opciones, *Convergencia*, *Estimación*, *Derivadas* y *Buscar*, son parámetros que utiliza el método GRG. En el caso de las tres últimas, en la segunda línea se encuentra la alternativa más compleja.

## Bibliografía

- Abadie J., Carpentier J., "Generalization of the Wolfe Reducer Gradient Method to the Case of Nonlinear Constraint" en Optimization, R.Fletcher, Ed., Academic Press, 1969.
- Biegler L.T., Grossmann I.E., Westerberg A.W., "Systematic Methods of Chemical Process Design", Prentice Hall, 1997.
  - Edgar T.F., Himmelblau D.M., "Optimization of Chemical Processes", McGraw Hill, 1988.
  - Fylstra D., Lasdon L., Watson J., Waren A., "Design and Use of the Microsoft Excel Solver", INTERFACES, Vol. 28, No. 5, Sept-Oct 1998, pp. 29-55.
  - Iglesias O.A., Paniagua C.N., "Use of Spreadsheets in Optimization Problems Involving Iterations", Computer Applications in Engineering Education, Vol 7, N°4, pp.227 - 234, 1999.
  - Reklaitis G.V., Ravindran A., Ragsdell K.M., "Engineering Optimization", Wiley-Interscience, 1983.
  - Rao S.S., "Engineering Optimization. Theory and Practice", John Wiley & Sons, 1996.
  - Schittkowski K., "Nonlinear Programming Codes: Information, Test, Performance", Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Spriger-Verlag, vol.183, 1980.

## Propuestas de trabajo

1) Hallar, usando el Método del Número de Oro, las condiciones óptimas del sistema de la figura, de forma tal que el gasto en servicios auxiliares más la amortización de los equipos (tomados en base anual) resulte un mínimo.



### Datos:

- $W_1 = 13600 \text{ kcal/h } ^\circ\text{C}$  ;  $W_2 = 18100 \text{ kcal/h } ^\circ\text{C}$  ;  $W_3 = 27200 \text{ kcal/h } ^\circ\text{C}$
- Coeficientes globales de transferencia de calor ( $\text{kcal/h m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ ):  
500 (entre corrientes de proceso) ; 700 (en el enfriador)
- Costo de intercambiadores (\$):  $4000 A^{0,74}$  (A en  $\text{m}^2$ )
- Amortización: lineal 10% anual
- Costo del agua de enfriamiento:  $0,2 \text{ } \$/10^6 \text{ kcal}$
- Tiempo de operación: 8000 h/año

2) Minimizar la siguiente función, usando el Método Simplex Secuencial.

$$f(x_1, x_2) = 2(x_1 - 15)^2 + (x_2 - 20)^2 + x_1 * x_2 * (1 - \exp(-0.2(x_1 + x_2)))$$

Punto inicial: (11; 10) ; paso inicial: 1 ; Paso final = 0,5

3) Dado el problema 1 de las propuestas de trabajo del capítulo 7 y considerando como función objetivo el beneficio total anual

a) Realizar 7 pasos del Método Complex de Box para acercarse al óptimo, partiendo de los puntos que se indican en la tabla. Para simplificar el

procedimiento, rehacer el orden de cálculo usando el método de sustitución.

- b) Encontrar la solución óptima usando el optimizador de una planilla de cálculo. En este caso usar el orden de cálculo con el reciclo persistente.
- c) ¿Modificaría el esquema propuesto?

Punto	$T_1$ [°C]	$C'_{A0}$ [gmol/l]
1	65,5	6,5
2	66,0	6,0
3	68,0	7,0
4	67,0	5,8



# CAPÍTULO 9

## PROGRAMACIÓN LINEAL

### Introducción

Es una de las técnicas de optimización más ampliamente usadas y una de las más efectivas. El término Programación Lineal fue inventado por Dantzig en 1947 para referirse al de optimización de problemas en los cuales tanto la función objetivo como las condiciones son lineales y todas las variables no negativas.

Algunos casos donde puede usarse esta técnica son:

- Problemas de mezclado
- Programas de fabricación
- Problemas de transporte
- Problemas de almacenamiento
- Formulación de dietas
- Restricciones de presupuesto

Cuando se enuncia matemáticamente cada uno de esos problemas, el modelo matemático involucra un gran número de variables y de ecuaciones o inecuaciones. Una solución no sólo debe satisfacer todas las ecuaciones y restricciones, sino también alcanzar un extremo de la función objetivo, por ejemplo máximo beneficio o mínimo costo.

Con la ayuda de la computadora se pueden resolver problemas lineales con cientos de variables y condiciones. Una herramienta muy eficiente es el optimizador "Solver" del Excel®. Productos similares se disponen en otras planillas de cálculo.

A fin de visualizar gráficamente las características básicas de los problemas a los que se aplica la técnica de Programación Lineal propongamos uno, hipotético, en dos variables,  $X_1$  y  $X_2$ .

En los problemas de Programación Lineal es normal establecer la no negatividad de las variables involucradas:

$$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0$$

Cada una de estas relaciones divide el espacio total en dos subespacios (uno con los puntos que cumplen la restricción y otro con los que no la cumplen). Las restricciones permiten hablar así de soluciones permitidas (admisibles o posibles) y no permitidas. En este caso, el problema queda restringido a valores de  $X_1$  y  $X_2$  que se ubican en el primer cuadrante.

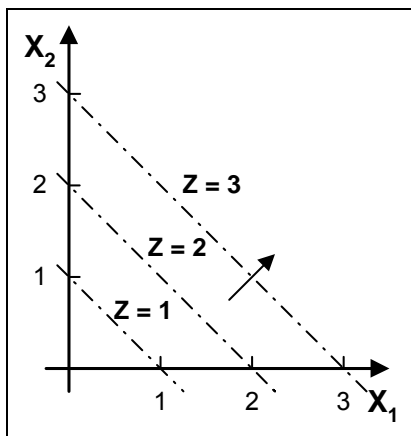


Figura 1. Rectas de nivel

Esta consideración se admite en forma implícita, por lo cual, salvo expresa indicación en contrario se supondrá que las variables deben ser no negativas.

Sea la función objetivo lineal de la forma:

$$\text{máx } Z = X_1 + X_2$$

En la figura 1 están representadas algunas de sus rectas de nivel. Ellas son rectas paralelas y en el sentido perpendicular a cualquiera de ellas se encuentra la dirección de máxima variación de  $Z$ , que corresponde a la del vector gradiente.

Puede notarse que, como no existe otra restricción sobre las variables, excepto la no negatividad, el máximo de  $Z$  se encuentra en el infinito.

Si se agrega otra restricción, por ejemplo,  $X_2 \leq 3$ , la situación es la que se presenta en la figura 2. En este caso, al buscar el óptimo, el valor de  $X_2$  queda fijo en 3 y la función objetivo se desplaza sobre la frontera de la restricción y su máximo se sigue encontrando en el infinito.

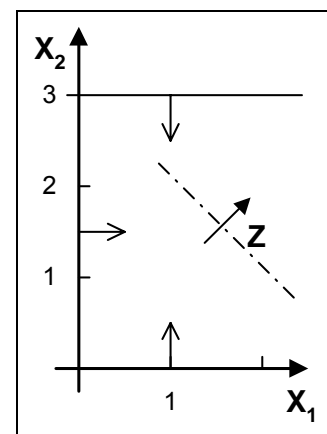


Figura 2.  $X_2 \leq 3$

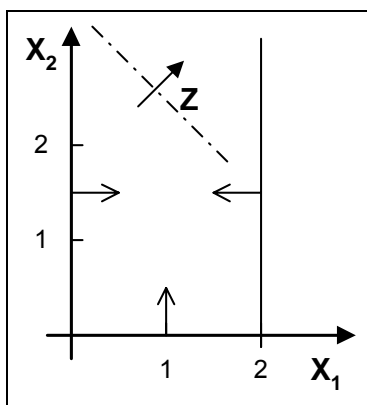


Figura 3.  $X_1 \leq 2$

Si la restricción fuese, en cambio,  $X_1 \leq 2$ , se puede ver, como lo muestra la figura 3, que el máximo se encuentra para un valor infinito de  $X_2$ , y es  $X_1$  la variable que tiene un valor finito.

Si se consideran a la vez ambas restricciones, la zona de soluciones admisibles (ZSA) está limitada por una poligonal cerrada y la función objetivo, en este caso, no puede crecer más allá del punto A de la figura 4. En ese punto, al igual que en cualquiera

de los vértices de la poligonal, se agotan los grados de libertad.

En todo problema de Programación Lineal, siempre que se tenga una zona de soluciones posibles cerrada, habrá un mínimo y un máximo de la función objetivo para valores finitos de las variables. Si la zona está abierta un extremo se encuentra en el infinito, el máximo o el mínimo, dependiendo del sentido de crecimiento de la función objetivo. Si se observan las figuras 2 y 3 hay un mínimo en el origen de coordenadas pero si se busca máximo se lo hallará en el infinito.

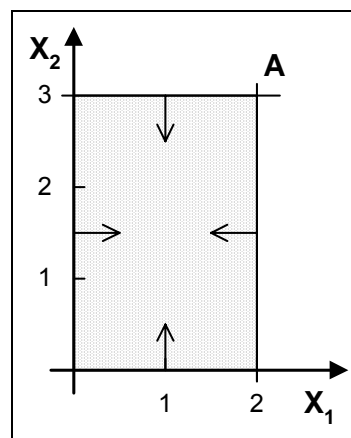


Figura 4. ZSA cerrada

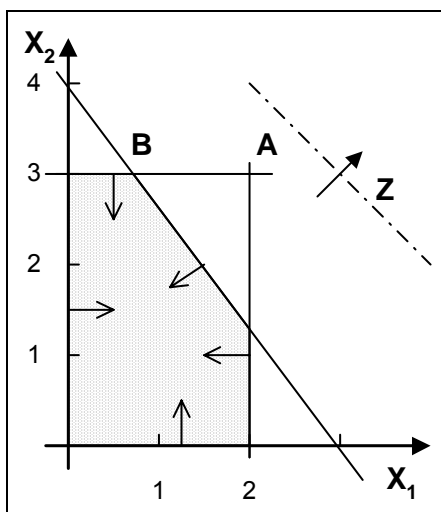


Figura 5.  $4X_1 + 3X_2 \leq 12$

Si al problema se le agrega la restricción  $4X_1 + 3X_2 \leq 12$ , el máximo, como puede observarse en la figura 5, se encuentra en B y nuevamente está en la intersección de dos fronteras.

Se puede inducir, entonces, que, para dos variables, de existir un óptimo finito en un problema de programación lineal, éste debe encontrarse en la intersección de dos restricciones. En general, para  $n$  variables, se encontrará en la intersección de  $n$

*restricciones*. En cualquiera de estas situaciones, el sistema carece de grados de libertad.

Si se admitiera que las soluciones capaces de ser óptimas poseyeran algún grado de libertad, aplicando el método de sustitución y dada la naturaleza lineal de la función objetivo, se encontraría tal óptimo en el infinito. La solución óptima se obtiene, entonces, por la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

El concepto expuesto es sumamente importante, puesto que si bien el conjunto de soluciones posibles o permitidas tiene infinitos puntos, sólo se deberían analizar las intersecciones de  $n$  restricciones. O sea que la búsqueda se efectuaría sobre un número finito de posibilidades. Este número puede, todavía, ser demasiado grande. Para un caso genérico de  $m$  restricciones y  $n$  variables, siendo  $m \geq n$ , el número de vértices estará dado por:

$$C_n^m = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

lo que arroja para 10 variables y 20 restricciones, 184756 vértices. Obviamente, no todos estos vértices pertenecen a la zona de soluciones admisibles, por lo que se hace imprescindible la utilización de una metodología que minimice el número de casos a ser analizados. En los problemas de Programación Lineal las zonas que delimitan las restricciones son siempre *convexas*. En una zona de este tipo dos puntos que se encuentran dentro de la misma, definen un segmento que está totalmente incluido en la zona.

Cuando ese segmento es un lado de la poligonal que define la zona de soluciones admisibles, la totalidad de la misma ha de quedar dentro de uno de los subespacios que define la recta a la que pertenece dicho segmento. Esto garantiza que, una vez encontrado un óptimo local, este será el óptimo global existente en el problema.

## Formulación del problema de programación lineal

La formulación adoptada como canónica o estándar es:

*Encontrar el máximo de una función objetivo lineal en  $n$  variables de decisión no negativas.*

$$\text{máx } Z = C_0 + \sum_{j=1}^n C_j X_j$$

*dentro de una zona de soluciones posibles definida por las desigualdades lineales*

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \leq d_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

La no negatividad de las variables agrega, al conjunto anterior, las restricciones

$$X_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Muchas variables químicas y físicas son por definición cantidades positivas, por ejemplo, presión absoluta, concentración, temperatura absoluta. Si por alguna razón se deben permitir valores negativos para ciertas variables, deberán realizarse transformaciones lineales para poder trabajar con variables no negativas,  $X' = X - X_{\min}$ , siendo  $X_{\min}$  el menor de los valores negativos posibles o utilizar una escala donde no se registren valores negativos en esas variables. Si, por ejemplo, se debe trabajar con temperaturas inferiores a  $0^\circ\text{C}$  una opción es usar la escala Kelvin.

Aunque la formulación presentada parezca algo restrictiva, de ninguna manera es así. Por una parte, se puede ver que buscar *mín*  $Z$  es equivalente a buscar *máx*( $-Z$ ).

Por otra parte,  $\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \geq d_i$  es lo mismo que  $-\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \leq -d_i$  esto, claro, desde un punto de vista formal ya que el algoritmo que se verá más adelante exige que los  $d_i$  sean siempre no negativos. Lo anterior obligará a trabajar con las desigualdades de mayor o igual sin ningún tipo de adecuación.

Además,  $\sum_{j=1}^n a_{ij}X_{ij} = d_i$  puede reemplazarse por dos restricciones que obligan a cumplir la igualdad.

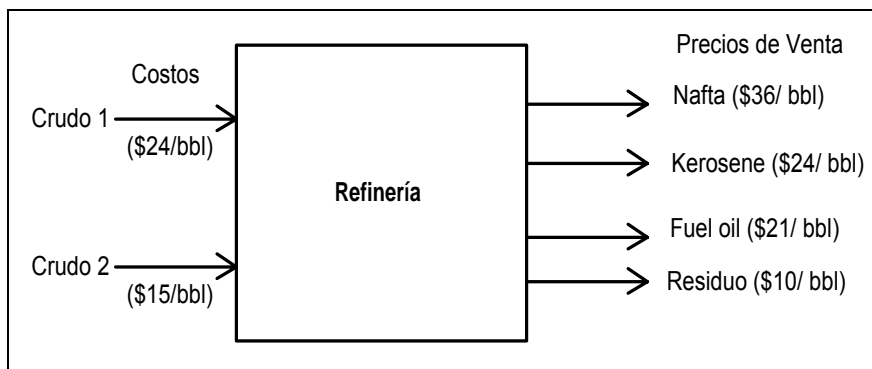
$$\sum_{j=1}^n a_{ij}X_{ij} \leq d_i \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}X_{ij} \geq d_i$$

Otra manera de abordar la cuestión de las relaciones de igualdad es por sustitución, donde, haciendo los reemplazos que correspondan, el problema se expresa en un número de variables igual a los grados de libertad que existen.

En realidad, el tratamiento en los algoritmos convencionales de este tipo de relaciones utiliza una tercera vía, como se verá oportunamente.

## Presentación del problema

Se usará como ejemplo una versión muy simplificada de una refinería cuyo esquema se muestra en la figura 6.



**Figura 6.** Esquema del ejemplo

La tabla 1 muestra la información necesaria para procesar los dos crudos que ingresan a la refinería, así como las limitaciones establecidas por el mercado para los productos (demanda) y los costos de procesamiento.

Como función objetivo se considerará:

$$\text{máx } B \text{ [\$ / día]} = \text{Ventas} - \text{Costos materias primas} - \text{Costos Procesamiento}$$

	Producción % en volumen		Demanda [bbl/día]
	Crudo 1	Crudo 2	
Nafta	80	40	24000
Kerosene	5	10	2000
Fuel oil	10	40	6000
Residuo	5	10	
Costo Procesamiento [\$/bbl]	0,5	1	

**Tabla 1.** Datos de materias primas y productos de la refinería

Se tendrán las siguientes variables:

$$X_1 = \text{bbl procesados/día de crudo 1}$$

$$X_2 = \text{bbl procesados/día de crudo 2}$$

$$X_3 = \text{bbl producidos/día de nafta}$$

$$X_4 = \text{bbl producidos /día de kerosene}$$

$$X_5 = \text{bbl producidos /día de fuel oil}$$

$$X_6 = \text{bbl producidos /día de residuo}$$

por lo tanto, la función objetivo será:

$$\text{máx } B = 36 * X_3 + 24 * X_4 + 21 * X_5 + 10 * X_6 - 24 X_1 - 15 X_2 - 0,5 X_1 - 1 X_2$$

Usando los datos de producción, se pueden plantear cuatro balances de materia para cada uno de los productos:

$$e_1 \quad \text{Nafta:} \quad 0,80 X_1 + 0,40 X_2 = X_3$$

$$e_2 \quad \text{Kerosene:} \quad 0,05 X_1 + 0,10 X_2 = X_4$$

$$e_3 \quad \text{Fuel oil:} \quad 0,10 X_1 + 0,40 X_2 = X_5$$

$$e_4 \quad \text{Residuo:} \quad 0,05 X_1 + 0,10 X_2 = X_6$$

En el problema existen restricciones sobre las variables, dadas por las limitaciones de producción que pueden verse en la tabla 1. Por lo tanto las desigualdades del problema son:

$$r_1 \quad \text{Nafta:} \quad X_3 \leq 24000$$

$$r_2 \quad \text{Kerosene:} \quad X_4 \leq 2000$$

$$r_3 \quad \text{Fuel oil:} \quad X_5 \leq 6000$$

Existe otro conjunto de restricciones no explícitamente enunciado en la formulación del problema, que corresponde al hecho que todas las variables deben ser no negativas:

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \dots, X_6 \geq 0$$

El problema tiene dos grados de libertad. La dimensionalidad del mismo puede reducirse eliminando, por ejemplo, las variables  $X_3, X_4, X_5, X_6$ , dejándolo en función de las variables  $X_1$  y  $X_2$ . Si se hacen los reemplazos correspondientes, la función objetivo se expresa:

$$\begin{aligned} \text{máx } B = & 36 (0,80 X_1 + 0,40 X_2) + 24 (0,05 X_1 + 0,10 X_2) + \\ & + 21 (0,10 X_1 + 0,40 X_2) + 10 (0,05 X_1 + 0,10 X_2) - 24,50 X_1 - 16 X_2 \end{aligned}$$

finalmente:  $\text{máx } B = 8,10 X_1 + 10,20 X_2$

y las condiciones:

$r_1$  Nafta:  $0,80 X_1 + 0,40 X_2 \leq 24000$

$r_2$  Kerosene:  $0,05 X_1 + 0,10 X_2 \leq 2000$

$r_3$  Fuel oil:  $0,10 X_1 + 0,40 X_2 \leq 6000$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

En la figura 7 se muestra la zona de soluciones posibles OGFDA y la traza de la función objetivo.

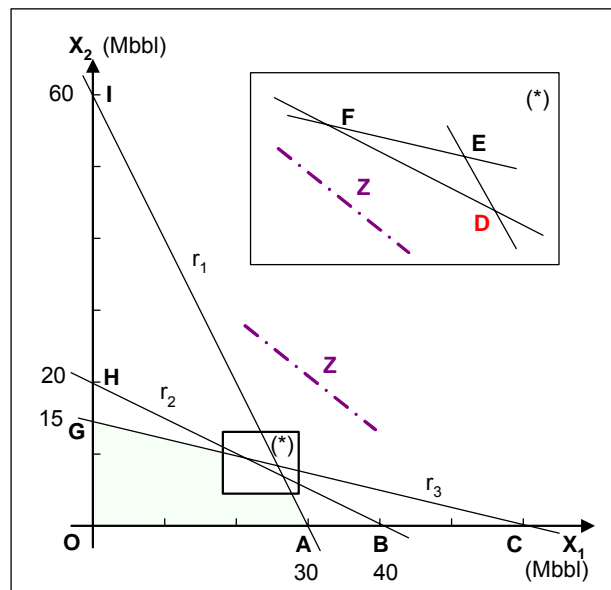


Figura 7. ZSA del problema



Puede observarse que si se desplaza la función objetivo desde el origen hacia la dirección de máximo crecimiento vamos encontrando distintas soluciones, desde la obvia de no hacer nada (O), pasando por los vértices G y F hasta llegar a la solución óptima que corresponde al vértice D, en la intersección de  $r_1$  y  $r_2$ , con un valor de \$284000.

Las 5 restricciones producen 10 intersecciones, de las cuales sólo 5 pertenecen a la zona de soluciones admisibles OGFDA.

## Caracterización de las soluciones

Para caracterizar a un punto perteneciente a la zona de soluciones posibles, se introduce un conjunto de variables auxiliares, que se conocen con el nombre de flojas (slacks). Estas variables convierten la desigualdad lineal  $\sum_{j=1}^n a_{ij}X_j \leq d_i$

en una igualdad:  $\sum_{j=1}^n a_{ij}X_j + S_i = d_i$

$S_i$  se interpreta como la distancia de un punto a la frontera de la restricción  $i$ , medida en una escala que es función de los cosenos directores de esa frontera. La dirección positiva se toma hacia la zona de soluciones posibles.

Más adelante se verá como se caracterizan, utilizando variables flojas, restricciones del tipo  $\sum_{j=1}^n a_{ij}X_j \geq d_i$  o  $\sum_{j=1}^n a_{ij}X_j = d_i$

Para las restricciones  $X_j \geq 0$  no es necesario definir variables flojas ya que su valor sería igual al de la variable. Debe tenerse en cuenta que, por ejemplo, la frontera  $X_1 = 0$  es el eje  $X_2$ . Por lo tanto el valor que tome  $X_1$  en una determinada solución, podrá considerarse como la distancia de ese punto al eje de las ordenadas. Otro tanto ocurre con  $X_2 = 0$ .

De acuerdo a estas definiciones, un punto estaría caracterizado por las coordenadas

$$\{ X_j (j = 1, \dots, n) ; S_i (i = 1, \dots, m) \}$$

y pertenecerá a la región de soluciones admisibles solamente si se cumple que:

$$X_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$S_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

En base a esto, las restricciones del problema se transforman en:

$$r_1 \quad 0,80 X_1 + 0,40 X_2 + S_1 = 24000$$

$$r_2 \quad 0,05 X_1 + 0,10 X_2 + S_2 = 2000$$

$$r_3 \quad 0,10 X_1 + 0,40 X_2 + S_3 = 6000$$

y las intersecciones de las restricciones del problema estarán caracterizadas por las coordenadas (en miles bbl) que se muestran en la tabla 2, donde se puede observar que sólo cumplen las restricciones los puntos O, A, D, F, G.

El modelo del problema planteado tiene 3 ecuaciones (provenientes de las 3 restricciones originales) y 5 variables (3 variables flojas, provenientes de las 3 restricciones y las 2 variables originales).

	O	A	B	C	D	E	F	G	H	I
X <sub>1</sub>	0	30	40	60	26,67	25,71	20	0	0	0
X <sub>2</sub>	0	0	0	0	6,67	8,57	10	15	20	60
S <sub>1</sub>	24	0	-8	-24	0	0	4	18	16	0
S <sub>2</sub>	2	0,5	0	-1	0	-0,14	0	0,50	0	-4
S <sub>3</sub>	6	3	2	0	0,67	0	0	0	-2	-18

**Tabla 2.** Intersecciones

En la tabla 2 se ve que siempre dos de las coordenadas son nulas, lo cual es lógico ya que, en cada intersección, las distancias a las dos fronteras que se intersecan deben ser nulas.

En el caso general, con  $m$  restricciones en  $n$  variables, en la *intersección de  $n$  fronteras* el valor de  $n$  variables del conjunto  $\{X_j \ (j = 1, \dots, n) \cup S_i \ (i = 1, \dots, m)\}$  deberán ser *nulas*.

A este tipo de solución de los problemas de Programación Lineal se lo designa como *solución básica* y corresponde, como queda dicho, a la intersección de  $n$  restricciones, siendo  $n$  el número de grados de libertad.

Una solución básica es *posible* si todas sus coordenadas cumplen la condición de no negatividad.

De lo dicho, el óptimo de un problema de Programación Lineal sólo puede encontrarse en una solución básica posible del mismo, con lo que su búsqueda debe restringirse al análisis de ese conjunto.

Para obtener una solución básica es necesario expresar  $m$  variables del conjunto  $\{X \cup S\}$  en función de las  $n$  restantes, y hacer éstas iguales a cero.

Adviértase que con la introducción de las variables flojas se ha generado un sistema de esas características

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}X_j + S_i = d_i \quad i = 1, \dots, m$$

o, lo que es lo mismo

$$S_i = d_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}X_j \quad i = 1, \dots, m$$

donde las variables independientes son las  $X_j$ . La solución básica surge de hacer  $X_j = 0 \forall j$  (el origen de coordenadas será siempre *solución básica*) y las  $S_i$  resultan iguales al correspondiente término independiente  $d_i$ , en el ejemplo  $S_1 = 24000$ ,  $S_2 = 2000$  y  $S_3 = 6000$ .

En la terminología de Programación Lineal a las variables dependientes se las denomina *variables básicas* o *en base* y *no básicas* o *fuera de base* a las independientes. Una solución básica, en consecuencia, se obtiene para *valores nulos de todas las variables no básicas* y será posible si las *básicas son no negativas*.

Esa solución básica puede o no ser posible (si todas las restricciones son del tipo  $\sum_{j=1}^n a_{ij}X_j \leq d_i$  siempre será posible) y raramente será óptima. Resultará necesario, entonces, generar una nueva solución básica tratando que:

- a) si la actual no es posible, la nueva lo sea o, al menos, esté más próxima a la zona de soluciones admisibles o
- b) si la actual es posible, la nueva también lo sea y se mejore el valor de la función objetivo.

Para encontrar esa nueva solución puede hacerse uso de las transformaciones características del método de Gauss-Jordan de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Estos conceptos se usan en la metodología sistemática que se verá a continuación.

## **Método Simplex de Dantzig**

Este método, es un algoritmo que parte de una solución básica posible y encuentra otra que mejora el valor de la función objetivo. Este procedimiento se repite hasta que se alcanza el óptimo, si éste existe, o se arriba a una condición de final anormal, las que pueden deberse a la inexistencia de una zona de soluciones posibles o el óptimo en el infinito.

El método realiza una búsqueda eficiente pero no necesariamente recorriendo la ruta más corta.

El método hace uso de una tabla de coeficientes de  $m + 1$  filas, correspondiendo a las  $m$  restricciones y a la función objetivo y  $n + m + 2$  columnas donde las  $n$  primeras corresponden a las variables originales, las  $m$  siguientes a las flojas, la penúltima a la variable asociada a la función objetivo y la restante contiene los términos independientes de las restricciones. Esto es válido para problemas donde todas las restricciones son del tipo  $\sum a_{ij} X_j \leq d_i$  con  $d_i \geq 0$ . Más adelante se verá como se modifica esta matriz para otros casos.

La función objetivo  $Z = C_0 + \sum C_j X_j$  se incorpora a la tabla bajo la forma  $Z - \sum C_j X_j = C_0$  y es posible considerar a  $Z$  como una variable más.

En la tabla 3 se muestra el cuadro inicial para el problema planteado.

	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	Z	d
$r_1$	0,80	0,40	1	0	0	0	24000
$r_2$	0,05	0,10	0	1	0	0	2000
$r_3$	0,10	0,40	0	0	1	0	6000
FO	-8,10	-10,20	0	0	0	1	0

**Tabla 3.** *Tabla inicial*

El origen de coordenadas es una solución básica posible que se usa para iniciar el cálculo. Corresponde a la solución obvia de no hacer nada, por lo cual el beneficio es nulo.

Corresponde ahora ver si es posible mejorar el valor de la función objetivo. Para ello se debe analizar las consecuencias de un posible incremento sobre alguna de aquellas variables que son cero,  $X_1$  o  $X_2$ , por ser las variables independientes o de decisión. Obviamente, para que la nueva solución no abandone la zona admisible, no pueden considerarse valores negativos para tales variables.

Como las variaciones permitidas son positivas, la función objetivo aumentará más rápidamente con aquella variable que tenga el mayor coeficiente  $c_j$  positivo, esto es, en la tabla, el más negativo de la fila de la FO.

Esta variable dejará de ser nula y, en consecuencia, *entrará en base*. La columna que corresponde a esta variable se denominará *columna pivote*, ya que ella determinará las transformaciones que sufra la tabla.

Para el ejemplo que se está analizando se elige  $X_2$ .

Ahora resta determinar cuánto puede aumentarse  $X_2$  sin violar la no negatividad de las demás variables. Dejando  $X_1$  nula, de la tabla 3 se ve que deberá cumplirse:

$$\text{para la restricción 1: } 0,40 X_2 + S_1 = 24000 \quad \Rightarrow X_2 = 60000$$

$$\text{para la restricción 2: } 0,10 X_2 + S_2 = 2000 \quad \Rightarrow X_2 = 20000$$

$$\text{para la restricción 3: } 0,40 X_2 + S_3 = 6000 \quad \Rightarrow X_2 = 15000$$

De acuerdo a estos valores, en un caso el movimiento sería hasta el punto I ( $X_2 = 60000$ ), o hasta el punto H ( $X_2 = 20000$ ) o finalmente hasta el punto G ( $X_2 = 15000$ ). Como puede observarse, la condición 3 es la más restrictiva.

Esta fila se denominará *fila pivote* por la misma razón que la apuntada, en su momento, para la columna. La intersección de fila y columna determina el *elemento pivote*.

Si la variable  $X_2$  entrará en base otra variable que está en base debe salir para mantener constante el número de variables no básicas. Para asegurar que la nueva solución básica sea posible, esa variable debe ser  $S_3$ , que pasará a valer cero – la distancia a la restricción 3 será nula – y la solución se ubicará sobre la frontera de dicha restricción.

Para elegir la fila pivote se realiza, en cada fila, el cociente entre el término independiente y el coeficiente de la columna pivote, por ejemplo, en la fila 1,  $24000/0,40 = 60000$ .

Si hubiese aparecido, en la columna pivote, algún coeficiente negativo, es fácil comprobar que, para esa restricción, la variable seleccionada podría aumentar indefinidamente sin violar la no negatividad de la respectiva variable en base, esto es, aquella cuya relación con las variables independientes está expresada por la fila en cuestión.

De lo anterior surge que, si en la columna pivote no existe, al menos, un coeficiente positivo, la solución del problema se encuentra en el infinito.

Una vez establecidas la columna (l), la fila (k) y el elemento pivote ( $a_{kl}$ ) se está en condiciones de realizar las modificaciones para llegar a otra solución básica posible.

Las transformaciones concluyen con el elemento pivote igual a 1 y los demás coeficientes de la columna pivote igual a cero.

Las transformaciones se realizan de la siguiente manera:

*Fila Pivote* ( $i = k$ ): para lograr que el nuevo coeficiente en la ubicación del pivote sea igual a uno, se divide toda la fila por el elemento pivote.

$$a_{kj}^n = \frac{a_{kj}}{a_{kl}} \quad ; \quad d_k^n = \frac{d_k}{a_{kl}} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n + m + 1$$

*Filas restantes* (  $i = 1, \dots, m, i \neq k$  ): para lograr que, en la columna del pivote todos los elementos sean nulos, se resta, a cada fila, la obtenida en el paso anterior, multiplicada por el elemento que se desea hacer cero.

$$a_{ij}^n = a_{ij} - a_{kj} \frac{a_{il}}{a_{kl}} = a_{ij} - a_{kj}^n a_{il} \quad ; \quad \forall j = 1, 2, \dots, n + m + 1 \quad ; \quad j \neq l$$

$$d_i^n = d_i - d_k \frac{a_{il}}{a_{kl}} = d_i - d_k^n a_{il}$$

*Función Objetivo*: se procede igual que en el paso anterior para lograr que el coeficiente de la variable que está entrando en base sea nulo:

$$C_j^n = C_j - C_l \frac{a_{kj}}{a_{kl}}; \quad \forall j = 1, 2, \dots, n + m + 1 \quad ; \quad j \neq l$$

$$C_0^n = C_0 - C_l \frac{d_k}{a_{kl}}$$

Los cambios realizados sobre la tabla 3 conducen a la tabla 4, en la cual se puede ver que si las variables no básicas ( $X_1$  y  $S_3$ ) son nulas,  $X_2$  es igual a 15000,  $S_1$  es 180000 y  $S_2$  es 500 bbl/día, dando un beneficio de 153000 \$/día.

	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	Z	d
$r_1$	0,70	0	1	0	-1	0	18000
$r_2$	0,025	0	0	1	-0,25	0	500
$r_3$	0,25	1	0	0	2,50	0	15000
FO	-5,55	0	0	0	25,50	1	153000

**Tabla 4.** Primera transformación

Esta solución básica posible se halla sobre la frontera de la restricción 3, en el punto G de la figura 7.

Si se mira la fila de la función objetivo se puede ver que aún es posible aumentar su valor ya que el coeficiente de la variable  $X_1$  es negativo. Como hay un único coeficiente con esa característica, ésta es la columna pivote. La restricción 2 es la elegida como fila pivote por lo cual la variable  $S_2$  saldrá de base. Las modificaciones llevan a la tabla 5, que corresponde al punto F de la figura 7.

	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	Z	d
$r_1$	0	0	1	-28	6	0	4000
$r_2$	1	0	0	40	-10	0	20000
$r_3$	0	1	0	-10	5	0	10000
FO	0	0	0	222	-30	1	264000

**Tabla 5.** Segunda transformación

Continuando con el procedimiento se obtiene la tabla 6 que corresponde a la solución óptima (punto D de la figura 7). La optimalidad de esta solución se deduce del hecho que, en la fila de la función objetivo, no existe ningún coeficiente negativo y, en consecuencia, cualquier apartamiento de esta solución redundará en una disminución del beneficio obtenido.

	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	Z	d
$r_1$	0	0	0,17	-4,67	1	0	666,67
$r_2$	1	0	1,67	-6,67	0	0	26666,67
$r_3$	0	1	-0,83	13,33	0	0	6666,67
FO	0	0	5	82	0	1	284000,00

**Tabla 6.** Solución óptima

En el plan de producción óptimo se produce el máximo permitido de nafta y kerosene y faltan 666,67 bbl/día (=  $S_3$ ) para llegar al máximo de fuel oil.

En este problema, los coeficientes de las variables no básicas en la fila de la función objetivo son positivos. Puede ocurrir que en el cuadro correspondiente a la solución óptima, alguno de esos coeficientes sean nulos. Esto significa que la correspondiente variable puede entrar en base sin que cambie el valor de la función objetivo. Hay, por lo tanto, más de un vértice igualmente óptimo en la zona de soluciones posibles y debido a su convexidad puede decirse que todos los puntos que son combinación lineal de dichos vértices son también óptimos. En consecuencia, puede decirse que el problema tiene *infinitas soluciones*.



## El origen de coordenadas no es solución posible

En muchos problemas de Programación Lineal la elección de una primera solución básica posible no es tan simple como en el caso visto previamente. El origen de coordenadas, la solución básica inicial siempre disponible, puede no ser una solución posible y es necesario recurrir a un artificio para solucionar el impedimento.

Esto surge cuando hay ecuaciones o alguna de las restricciones del problema es de la forma:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \geq d_i \quad , \quad d_i \geq 0$$

Se continuará trabajando con el problema de la refinería considerando, en este caso, que la producción mínima de nafta debe ser de 24000 bbl/dia. Este problema será referenciado como Problema 2.

Con la nueva restricción, el modelo es:

$$\text{máx } B = 8,10 X_1 + 10,20 X_2$$

sujeto a:

$$\text{Nafta:} \quad 0,80 X_1 + 0,40 X_2 \geq 24000$$

$$\text{Kerosene:} \quad 0,05 X_1 + 0,10 X_2 \leq 2000$$

$$\text{Fuel oil:} \quad 0,10 X_1 + 0,40 X_2 \leq 6000$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

La representación gráfica se muestra en la figura 8.

El agregado de las variables flojas en las restricciones de mayor o igual, para que su no negatividad siga indicando la pertenencia a la región de soluciones posibles, debe hacerse como sigue:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j - S_i = d_i$$

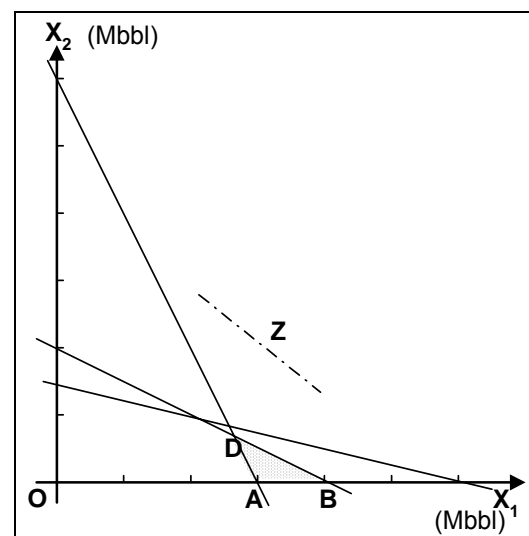


Figura 8. ZSA del Problema 2

Las restricciones del ejemplo se transforman en:

$$r_1 \quad 0,80 X_1 + 0,40 X_2 - S_1 = 24000$$

$$r_2 \quad 0,05 X_1 + 0,10 X_2 + S_2 = 2000$$

$$r_3 \quad 0,10 X_1 + 0,40 X_2 + S_3 = 6000$$

Es evidente que en este caso el origen de coordenadas no es una solución básica posible. Para obviar esto se hace uso, para cada restricción, de un tipo especial de variables auxiliares,  $v_i$ , llamadas *artificiales* que, en la misma escala que la correspondiente variable floja, mide la distancia de un punto a la frontera de la restricción, pero en dirección hacia el exterior de la zona de soluciones permitidas. De lo anterior surge que, en una determinada solución, mientras alguna de estas variables tenga valor positivo, el punto en cuestión estará fuera de la zona de soluciones admisibles.

La transformación de la restricción  $\sum_{j=1}^n a_{ij}X_j \geq d_i$  en una igualdad toma la forma:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}X_j - S_i + v_i = d_i$$

Dadas las coordenadas  $X_j$  de un punto, la ecuación anterior queda con un grado de libertad: se puede, para un punto dado, aumentar  $S_i$  incrementando en igual medida a  $v_i$ .

Este grado de libertad se consume introduciendo la relación  $S_i * v_i = 0$ , esto es, la distancia de un punto a la frontera sólo se evalúa mediante una de las variables auxiliares; la floja para el interior y la artificial en el otro caso. En la frontera ambas son nulas.

El Método Simplex de Dantzig, respetará, en forma implícita, esta relación, ya que  $S_i$  y  $v_i$  no podrán estar, simultáneamente, en base. Esto es así, ya que la columna asociada a  $v_i$  es, exactamente, la de  $S_i$ , pero cambiada de signo.

Haciendo uso de las variables artificiales exclusivamente en las restricciones que lo requieren, el problema se plantea bajo la forma:

$$\text{máx } B = 8,10 X_1 + 10,20 X_2$$

sujeto a:

$$r_1 \quad 0,80 X_1 + 0,40 X_2 - S_1 + v_1 = 24000$$

$$\begin{aligned}
 r_2 \quad & 0,05 X_1 + 0,10 X_2 + S_2 & = & 2000 \\
 r_3 \quad & 0,10 X_1 + 0,40 X_2 + S_3 & = & 6000 \\
 & X_1, X_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

La solución básica disponible es  $X_1 = X_2 = S_1 = 0$ , con lo cual  $v_1 = 24000$ ,  $S_2 = 2000$  y  $S_3 = 6000$ , claramente un vértice fuera de la zona admisible.

Toda solución posible debe cumplir la condición que  $v_1 = 0$ . Para encontrar una de esas soluciones se puede plantear un problema, que se denomina artificial.

En el mismo se busca minimizar la función objetivo artificial (FOA), igual a la suma de las variables artificiales utilizadas:  $U = \sum v_i$ . Para el problema que se está analizando es:

$$\text{mín } U = \text{mín } v_1 = 24000 - 0,8 X_1 - 0,4 X_2 + S_1$$

Si el mínimo de  $U$  es cero, la solución es un punto donde todas las variables artificiales son nulas y, por consiguiente, pertenece a la zona de soluciones admisibles. En caso contrario, las restricciones del problema son mutuamente incompatibles y no existe zona de soluciones admisibles.

Esta estrategia se integra en el procedimiento denominado “*Fase I - Fase II*”.

En la *Fase I* se resuelve el problema artificial y, a continuación, si el mínimo de  $U$  es cero, en la *Fase II* se hace lo propio con el problema original, a partir de la solución encontrada en la fase anterior.

De acuerdo a esto, en la tabla 7 se muestra el cuadro inicial.

	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$v_1$	Z	(-U)	d
$r_1$	0,8	0,4	-1	0	0	1	0	0	24000
$r_2$	0,05	0,1	0	1	0	0	0	0	2000
$r_3$	0,1	0,4	0	0	1	0	0	0	6000
FO	-8,1	-10,2	0	0	0	0	1	0	0
FOA	-0,8	-0,4	1	0	0	0	0	1	-24000

**Tabla 7.** Cuadro inicial del Problema 2

Se puede observar que en la función objetivo artificial (FOA) los coeficientes aparecen cambiados de signo respecto de su definición original. Ello se debe al

hecho que se debe buscar un mínimo y como la forma canónica del problema es máximo, debe efectuarse la transformación indicada previamente.

En esta fase, desde un punto de vista formal, es posible no incorporar en la tabla la fila de la función objetivo real (FO). Se lo hace, sin embargo, para simplificar el manejo posterior pero debe tenerse en cuenta que los coeficientes de esa fila no intervienen en el cálculo para determinar el pivote. La primera transformación se muestra en la tabla 8, cuyo resultado corresponde al punto A de la figura 8.

	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$v_1$	Z	(-U)	d
$r_1$	1	0,5	-1,25	0	0	1,25	0	0	30000
$r_2$	0	0,075	0,0625	1	0	-0,0625	0	0	500
$r_3$	0	0,35	0,125	0	1	-0,125	0	0	3000
FO	0	-6,15	-10,125	0	0	10,125	1	0	243000
FOA	0	0	0	0	0	1	0	1	0

**Tabla 8.** Primera transformación

Puede verse que en la fila de la FOA de la tabla 8 no aparecen coeficientes negativos, por lo que el problema artificial ha concluido. Como además el valor de la FOA es cero, la solución encontrada es una solución básica posible del problema original.

Por otro lado, cuando al finalizar el problema artificial se ha encontrado una solución básica posible, todas las variables artificiales estarán fuera de base.

Por la forma en que se ha construido la FOA, todos los coeficientes en su fila serán cero, salvo los de las variables artificiales y el de (-U) que son iguales a uno.

Esta es la manera correcta de evaluar el fin del problema artificial ya que puede suceder que una determinada variable artificial esté en base, pero toma un valor nulo en la solución básica disponible. Si fuese la única la FOA valdría cero pero el problema artificial no habría terminado.

En consecuencia, el final del problema artificial donde se alcanza una solución posible básica del problema original es cuando la totalidad de las variables artificiales se encuentran fuera de base. Si no se dan estas

condiciones, el problema original no tiene solución ya que no existe zona de soluciones posibles.

Al finalizar la Fase I en forma satisfactoria, se pueden eliminar las columnas de las variables artificiales y la de (-U) y la fila de la función objetivo (resaltadas en la tabla 8).

Con el resto del cuadro se sigue trabajando en la Fase II. La próxima solución básica posible encontrada es la solución óptima del problema original, como se puede apreciar en la tabla 9 (punto B de la figura 8).

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	Z	d
r <sub>1</sub>	1	2	0	20	0	0	40000
r <sub>2</sub>	0	1,2	1	16	0	0	8000
r <sub>3</sub>	0	0,2	0	-2	1	0	2000
FO	0	6	0	162	0	1	324000

**Tabla 9.** Solución óptima

En el plan de producción óptimo se consumen 40000 bbl/día del crudo 1 y nada del crudo 2. La cantidad de nafta producida es 8000 bbl/día (valor de S1) por encima del nivel mínimo de 24000. La producción de kerosene es exactamente la cota máxima de 2000 (S2 es nulo) y se producen 2000 bbl/día menos del máximo de 6000 establecido para el fuel oil.

## Tratamiento de las ecuaciones de diseño

El hecho de reducir manualmente la dimensión del problema, dejándolo sólo en función de sus grados de libertad, es viable, en términos prácticos, siempre y cuando se esté trabajando con un problema de pocas variables. Cuando aumenta ese número, las sustituciones se vuelven laboriosas y se incrementa la posibilidad de cometer errores.

En cuanto a la automatización de este procedimiento, aparte de la necesidad de contar con un software capaz de realizar las sustituciones, la complejidad de

las expresiones resultantes no justifica la reducción de dimensionalidad alcanzada, frente a la eficiencia, en el manejo de grandes sistemas, que presentan los algoritmos de Programación Lineal.

El problema original de la refinería se planteaba

$$\text{máx } B = 36 X_3 + 24 X_4 + 21 X_5 + 10 X_6 - 24,5 X_1 - 16 X_2$$

sujeto a las siguientes condiciones:

$$\text{Producción de Nafta: } 0,80 X_1 + 0,40 X_2 = X_3 \quad X_3 \leq 24000$$

$$\text{Producción de Kerosene: } 0,05 X_1 + 0,10 X_2 = X_4 \quad X_4 \leq 2000$$

$$\text{Producción de Fuel oil: } 0,10 X_1 + 0,40 X_2 = X_5 \quad X_5 \leq 6000$$

$$\text{Producción de Residuo: } 0,05 X_1 + 0,10 X_2 = X_6$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$$

Anteriormente, se utilizaron las ecuaciones de producción para realizar una sustitución en las variables, dejando expresado el modelo en los dos grados de libertad que tiene. Existe otra manera de trabajar con las ecuaciones de diseño que consiste en *agregar una variable artificial a cada ecuación*. Por ejemplo, para la producción de nafta, la ecuación se transforma en

$$0,80 X_1 + 0,4 X_2 = X_3 \rightarrow 0,80 X_1 + 0,4 X_2 - X_3 + v_1 = 0$$

En la tabla 10 se han introducido las ecuaciones haciendo uso de las variables artificiales. El incremento de complejidad que se aprecia al comparar esta con la tabla 3 no es tan dramático como aparece, ya que en los algoritmos de Programación Lineal disponibles sólo se requiere introducir las relaciones entre las variables originales, además del tipo de relación que se trata.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	Z	(-U)	d
$e_1$	0,8	0,4	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$e_2$	0,05	0,1	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$e_3$	0,1	0,4	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$e_4$	0,05	0,1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$r_1$	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	24000
$r_2$	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2000
$r_3$	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	6000
FO	24,5	16	-36	-24	-21	-10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
FOA	-1	-1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

**Tabla 10.** Cuadro inicial del Problema 1 sin sustitución

Mucho más importante que esto es el hecho de que el tratamiento de ecuaciones con el agregado de variables artificiales permite automatizar la formulación del problema de acuerdo a los requerimientos de la técnica de Programación Lineal.

La introducción de variables artificiales obliga a utilizar el procedimiento Fase I – Fase II. En la tabla puede observarse que, si bien la función objetivo artificial vale 0, no se ha alcanzado el final de la Fase I ya que las variables artificiales se encuentran en base, con un valor nulo.

Cuando en una solución básica, una o más de las variables básicas toma un valor nulo se dice que dicha solución es “degenerada”. Si se recuerda que cada variable de un problema de Programación Lineal tiene las características de una distancia a la frontera de una restricción, el hecho de que más de  $n$  de esas distancias sean nulas implica que, en ese vértice particular, se cortan más de  $n$  fronteras. Por consiguiente, si ese número fuese  $n+p$ , han de existir  $p$  fronteras que son combinación lineal de las  $n$  restantes y de las  $n+p$  restricciones sólo  $n$  de ellas intervienen en la definición de la zona de soluciones admisibles. En la figura 9 se muestra la solución degenerada que se produce en el punto A, donde  $r_3$  es superflua.

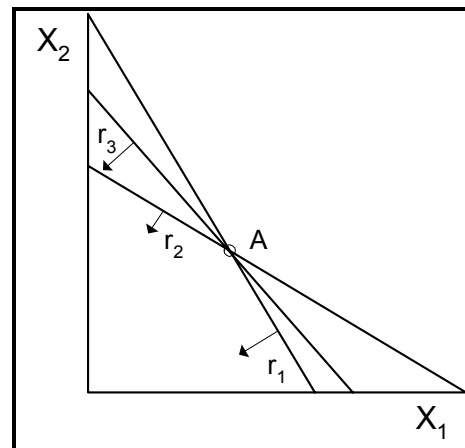


Figura 9. Solución “degenerada”

## Sensibilidad Paramétrica

Un problema de optimización real raramente queda definido de una manera única, ya sea porque alguno de los parámetros que lo determinan pueden variar o bien porque ciertas políticas pueden modificar las condiciones impuestas.

Por esto es muy importante efectuar un estudio posterior a la obtención del óptimo, en el cual se deberá admitir que los valores adoptados para los

parámetros pueden variar y el objetivo es analizar cuan sensible es la solución encontrada a esas variaciones y proponer, eventualmente, modificaciones para conservar la naturaleza óptima.

A este estudio se lo llama análisis *post-optimal* por el momento en que se lleva a cabo; y por el tipo de conclusiones a las que arriba se lo llama estudio de *sensibilidad paramétrica*.

En el caso de problemas que pueden resolverse por Programación Lineal, es clásico analizar variaciones en los términos independientes  $d_i$  de las restricciones o en los coeficientes  $C_j$  de la función objetivo.

En el presente acápite se comenzará por considerar problemas en dos variables, sobre los que se efectuará el estudio de sensibilidad en forma gráfica. El ejemplo original de la refinería, servirá para ilustrar dicho análisis.

Posteriormente, se analizará la información de post optimalidad suministrada por una planilla de cálculo, disponible a través del respectivo complemento de resolución de problemas de Programación Lineal.

### **Caso I. Análisis gráfico de la modificación del término independiente de una restricción**

Al modificar el término independiente de una restricción se irán obteniendo, como fronteras, rectas paralelas a la original, cambiando la forma de la zona de soluciones posibles del problema.

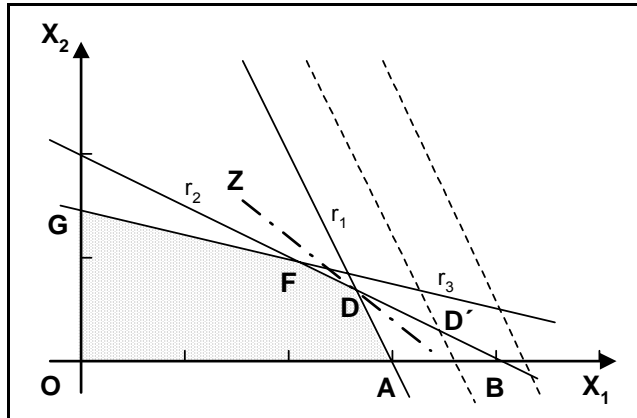
Se analizará la modificación del término independiente de la restricción 1, que significa modificar la máxima producción diaria de nafta.

En la figura 10 puede verse que si la producción máxima de nafta es superior a 24000, la solución óptima se irá desplazando sobre el segmento DB, por ejemplo, para un valor cualquiera menor a 32000 bbl/día dicho óptimo se encontrará en D'.



La solución óptima seguirá encontrándose en la intersección de las fronteras de las restricciones  $r_1$  y  $r_2$  (Las variables  $S_1$  y  $S_2$  estarán fuera de base).

Para el valor 32000, o lo que es lo mismo, con el incremento de 8000 bbl/día sobre el  $d_1$  original, el óptimo se ubicará en



**Figura 10.** Variación de la producción de nafta

el punto B. Aquí se tendrá una solución degenerada: las variables  $S_1$  y  $S_2$  seguirán estando fuera de base pero la distancia  $X_2$  (en base) será nula. La intersección de  $r_1$  modificada con  $r_2$  coincide con la intersección de  $r_2$  con el eje de abscisas en  $X_1 = 40000$  para un valor de  $d_1$  igual a 32000.

El punto B es el extremo superior de  $d_1$  en el cual la solución óptima puede estar expresada con  $S_1$  y  $S_2$  como variables no básicas. Para valores mayores la zona de soluciones posibles no se modifica, ya que la condición 2 es más restrictiva y por lo tanto la solución óptima permanece en B, es decir, queda expresada con  $S_2$  y  $X_2$  fuera de base.

Si en cambio se disminuye la producción máxima de nafta a un valor intermedio entre 24000 y 20000 bbl/día la solución óptima se desplaza sobre el segmento DF sin que se modifique la naturaleza de la misma, es decir,  $S_1$  y  $S_2$  seguirán estando fuera de base.

Si se continúa la disminución hasta un valor de 6000 bbl/día, la solución óptima se expresa con  $S_1$  y  $S_3$  como variables independientes, desplazándose sobre el segmento FG.

Por debajo de 6000 bb/día la solución óptima se ubicará en la intersección de  $r_1$  ( $S_1 = 0$ ) y el eje de ordenadas ( $X_1 = 0$ ). Esto será así hasta el valor  $d_1 = 0$  donde la zona de soluciones admisibles se reduce a un punto, el origen de coordenadas.

La figura 11 muestra la variación de la función objetivo y de las variables  $X_1$  y  $X_2$  en función de las modificaciones analizadas.

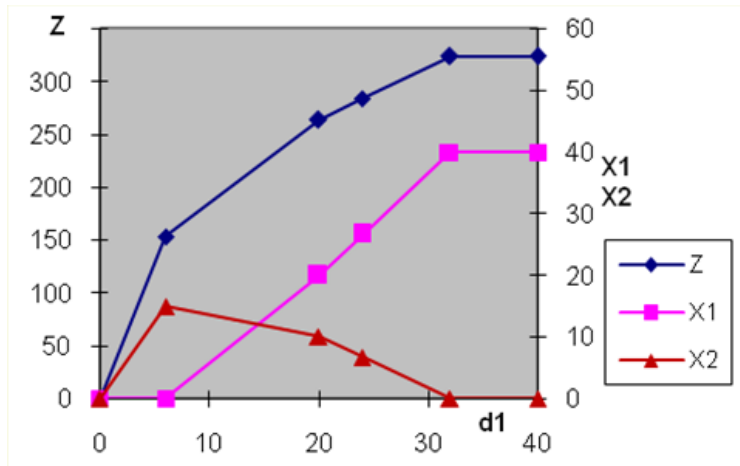


Figura 11. Variación paramétrica

## Caso II. Análisis gráfico de la modificación de un coeficiente de la función objetivo

Si los costos de los crudos o los precios de venta de los productos de la refinería cambian, se modifican los coeficientes de la función objetivo. Una modificación en un coeficiente, corresponde a un cambio en la pendiente de la función objetivo, como puede verse en la figura 12.

Obviamente, ya que  $X_1$  y  $X_2$  son variables básicas en la solución óptima, estos cambios modificarán el valor de la función objetivo.

Se analizará la modificación del coeficiente  $C_1$  de la función objetivo.

Si a partir de la solución óptima, punto D de la figura 12, se aumenta el coeficiente hasta el valor 20,4, la

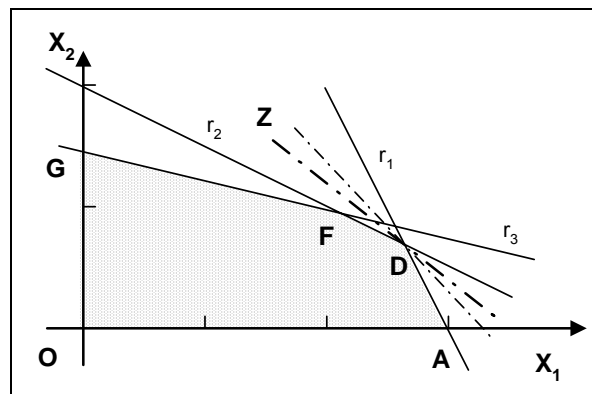


Figura 12. Modificación de la pendiente de la FO

pendiente de la función objetivo ( $-20,4/10,2 = -2$ ) coincide con la de la restricción  $r_1$ . En ese momento se tienen infinitas soluciones y resultan óptimos todos los puntos entre los vértices D y A.

Un incremento adicional en  $C_1$  deja al punto A como única solución óptima. Dicha solución se caracteriza por  $S_1$  y  $X_2$  como variables no básicas (se cambia

$S_2$  por  $X_2$ ) y el punto seguirá siendo óptimo para todo valor de  $C_1$  superior a 20,4.

Si en cambio, a partir del punto D, en lugar de aumentar el coeficiente  $C_1$ , se lo disminuye, la pendiente de la función objetivo, aumentará y el movimiento será en el sentido antihorario.

Mientras la pendiente de la función esté entre  $-2$  y  $-0,5$ , valor que corresponde a la pendiente de la restricción  $r_2$ , el óptimo seguirá estando en el punto D.

En el momento que la pendiente es igual  $-0,5$ , nuevamente se tienen infinitas soluciones: todos los puntos entre los vértices D y F son soluciones óptimas.

Un aumento adicional deja a F como solución óptima, caracterizada por las variables  $S_2$  y  $S_3$  fuera de base (distancias nulas a las respectivas restricciones). Esto quedará así hasta que la pendiente de la función objetivo coincida con la de la restricción  $r_3$ , es decir que sea igual a  $-0,25$ , lo que corresponde a un valor de  $C_1$  igual a 2,55. Nuevamente se tendrán infinitas soluciones entre los vértices F y G.

Para valores de la pendiente superiores a  $-0,25$  el óptimo se encontrará siempre en el punto G.

En la figura 13, puede verse la evolución de la función objetivo así como los cambios -en escalón- sufridos por las variables  $X_1$  y  $X_2$ .

Para	El óptimo está en
$C_1 > 20,4$	A
$5,1 < C_1 < 20,4$	D
$2,55 < C_1 < 5,1$	F
$C_1 < 2,55$	G

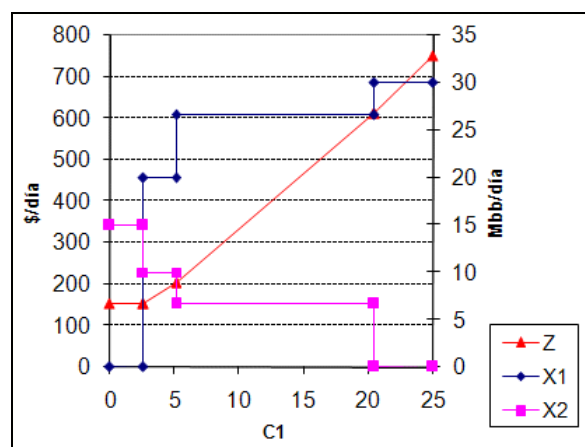


Figura 13. Evolución de Z,  $X_1$  y  $X_2$

## Resolución del problema original en una planilla de cálculo

Resolveremos en la planilla Excel® el ejemplo de la refinería en su primera versión, es decir, considerando 2 variables independientes y sólo restricciones del tipo menor o igual a un valor no negativo.

La figura 14 muestra una forma posible de introducir el problema en la planilla. En la barra de fórmulas puede verse la ecuación introducida en la celda E10, para el beneficio de la operación,

	A	B	C	D	E	F	G
1	X1	X2					
2	26667	6667					
3							
4	Matriz de Coeficientes		Término ind.		Condiciones		
5	0.8	0.4	24000		24000	<=	
6	0.05	0.1	2000		2000		
7	0.1	0.4	6000		5333		
8							
9	Función Objetivo				Beneficio		
10	8.1	10.2	0		284000		
11							

Figura 14. El problema en la planilla

donde se hace uso de la función SUMAPRODUCTO.

Esta misma función se ha utilizado para formular cada una de las restricciones, como lo muestra el comentario de la celda E7.

Una vez que se ha introducido el modelo, puede realizarse la optimización usando el complemento Solver desde el menú Herramientas. En la figura 15 se muestra la ventana del mismo, con la información del problema.

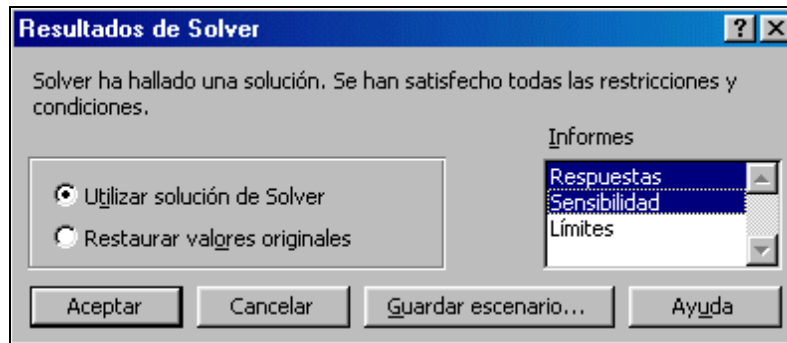
Al encontrar la solución aparece una ventana como la de la figura 16, que contiene un mensaje, que resume el resultado de la optimización, exitosa en este caso. Otras posibilidades podrían indicar



Figura 15. Planteo en el Solver

la inexistencia de zona de soluciones admisibles o un óptimo en el infinito.

En esta ventana existe la posibilidad de utilizar la solución encontrada (valor por defecto) o no. Si se la acepta, esa solución se mostrará en las celdas que contienen las variables independientes.



**Figura 16.** Mensaje del resultado de la optimización

También se puede elegir generar distintos tipos de informes. En la figura se han seleccionado Respuestas y Sensibilidad. Estos reportes son generados en las hojas “Informe de respuestas” e “Informe de sensibilidad”, creadas automáticamente por la planilla.

Estos informes permiten caracterizar completamente la solución encontrada así como determinar las variaciones en la formulación del problema para las que dicha solución continúa siendo óptima.

### **Información de post optimalidad. Informe de Respuesta**

En este informe aparecen los valores originales y finales de la función objetivo y de cada una de las variables independientes en las que se encuentra planteado el problema. Además, se indican las restricciones que son activas en la solución óptima y las que no, con los correspondientes valores de las variables flojas, identificadas como Divergencia.

En la tabla 11 puede verse que el beneficio máximo obtenible es de 284000 \$/día, que se obtiene procesando 26667 bbl/día de crudo 1 y 6667 de crudo 2.

Las producciones de nafta y kerosene alcanzan los valores máximos permitidos - las restricciones están activas, que se indica como Estado = Obligatorio -, con lo cual las variables flojas  $S_1$  y  $S_2$  asociadas a ellas tienen un valor nulo. La producción de fuel oil está 667 bbl/día por debajo del máximo

(S3 = 667), es decir que el punto óptimo se encuentra en el interior de la restricción 3 (Estado = Opcional).

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$E\$10	Beneficio	0	284000

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$A\$2	X1	0	26667
\$B\$2	X2	0	6667

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Divergencia
\$E\$5	Condiciones	24000	\$E\$5<=\$C\$5	Obligatorio	0
\$E\$6	Condiciones	2000	\$E\$6<=\$C\$6	Obligatorio	0
\$E\$7	Condiciones	5333	\$E\$7<=\$C\$7	Opcional	667

**Tabla 11.** Informe de respuesta para el Problema 1

### Información de post optimalidad. Informe de sensibilidad

En este informe se muestran las modificaciones que pueden realizarse en los coeficientes de la función objetivo y en los términos independientes de las restricciones para que la solución óptima obtenida siga teniendo activas las mismas restricciones. Las variaciones en los coeficientes de la función objetivo mantendrán no sólo la naturaleza de la solución sino también los valores óptimos de las variables, modificándose solamente el valor de la función.

Las modificaciones en los términos independientes producirán alteraciones en los valores óptimos de las variables originales del problema y, por consiguiente, también el de la función objetivo. Como queda dicho, sólo se mantendrán activas las mismas restricciones.

En la tabla 12 se muestra el informe de sensibilidad para el problema de la refinería actualmente bajo análisis.

#### Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente Reducido	Coefficiente Objetivo	Aumento Permisible	Disminución Permisible
\$A\$2	X1	26667	0	8.1	12.3	3
\$B\$2	X2	6667	0	10.2	6	6.15

#### Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Aumento Permisible	Disminución Permisible
\$E\$5	Condiciones	24000	5	24000	8000	4000
\$E\$6	Condiciones	2000	82	2000	143	500
\$E\$7	Condiciones	5333	0	6000	1E+30	666

Tabla 12. Informe de sensibilidad para el Problema 1

Para interpretar el informe se pueden hacer las siguientes consideraciones:

#### Celdas cambiantes

**Valor igual:** indica los valores óptimos de las variables independientes,  $X_1 = 26667$  y  $X_2 = 6667$  en este caso.

**Gradiente reducido:** indica cuánto deberá cambiar el coeficiente de la función objetivo de la variable independiente original, en el caso en que se encuentre fuera de base, para que la misma deje de tener valor nulo. En este caso, dado que, tanto  $X_1$  como  $X_2$  son variables básicas, el cambio es igual a cero.

**Coefficiente objetivo:** son los valores originales de los coeficientes de la función objetivo.

**Aumento / Disminución permisible:** incremento o disminución permitida en los coeficientes de la función objetivo para que no se produzcan cambios en la solución óptima encontrada.

Si se recuerda lo visto previamente, la solución seguirá estando en el vértice D siempre y cuando el coeficiente  $C_1$  esté entre  $8,1 - 3 = 5,1$  y  $8,1 + 12,3 = 20,4$ . De acuerdo a la tabla 12, el valor de  $C_2$  puede variar de  $10,2 - 6,15 = 4,05$  a  $10,2 + 6 = 16,2$  sin que se modifique el óptimo encontrado.

#### Restricciones

**Valor igual:** indica el valor que toma, en la solución óptima, el lado izquierdo de cada restricción. Por ejemplo, la restricción sobre la producción de nafta ( $r_1$ ) se encuentra activa en la solución óptima y el valor alcanza el máximo permitido,

coincidiendo con el término independiente original. La restricción sobre producción de fuel oil, en tanto, no está activa en el óptimo y existe una diferencia entre el valor alcanzado (5333) y el máximo permitido (6000).

*Precio sombra:* son los valores, en el óptimo, de los coeficientes en la fila de la función objetivo de las variables flojas asociadas a las restricciones. Indican la modificación en la función objetivo si se “relaja” la restricción, permitiendo una variación positiva o negativa de la respectiva variable floja. Obviamente, solo se producirán variaciones (precio sombra no nulo) para aquellas variables que se encuentren fuera de base. Así, por ejemplo, si se pudiera producir más nafta, se incrementaría la utilidad en 5\$ por cada barril diario adicional que se produzca. Por supuesto que se reduciría en la misma cantidad si el máximo permitido fuese menor que 24000 bbl/día.

*Restricción lado derecho:* indica los términos independientes originales de las restricciones.

*Aumento/Disminución permisible:* representa cuánto puede aumentarse o disminuirse el término independiente sin que se altere la naturaleza de la solución óptima..Por ejemplo, se puede aumentar la producción de nafta hasta 8000 bbl/día, esto es, una producción máxima de  $24000 + 8000 = 32000$  bbl/día y, en el óptimo, seguirán estando activas las restricciones 1 y 2. El informe de sensibilidad no indica como se modifican los valores de las variables originales  $X_1$  y  $X_2$ . En este caso es posible un análisis gráfico pero, en general, debe resolverse, aparte, el sistema resultante tras la modificación. En este caso sería:

$$0.80 X_1 + 0.40 X_2 = 32000$$

$$0.05 X_1 + 0.10 X_2 = 2000$$

que conduce a la solución  $X_1 = 40000$ ;  $X_2 = 0$ , el punto B de la figura 10.

Del mismo modo, se puede decir que mientras la producción máxima de nafta no caiga más allá de  $24000 - 4000 = 20000$  bbl/día el punto óptimo seguirá siendo determinado por  $S_1 = S_2 = 0$ .



## Problema de Transporte

El problema de transporte o de asignación es un caso especial de programación lineal. Aparece toda vez que un determinado artículo es requerido desde diversos destinos y sus pedidos deben ser satisfechos desde distintos orígenes. Existe un costo por unidad transportada desde un origen cualquiera hacia cualquier destino y el objetivo es cumplir con los requerimientos al *menor costo total de transporte*.

En general, se habla de  $n$  orígenes  $A_1, A_2, \dots, A_n$  cada uno con una disponibilidad  $d_1, d_2, \dots, d_n$  y de  $m$  destinos  $B_1, B_2, \dots, B_m$  que efectúan pedidos de  $p_1, p_2, \dots, p_m$  unidades respectivamente. Enviar una unidad desde el origen  $A_i$  al destino  $B_j$  costará  $C_{ij}$  y tal envío será de  $x_{ij}$  unidades.

El problema de transporte normalizado que se considerará exige que la *disponibilidad total  $D_T$  sea igual al requerimiento total  $R_T$* :

$$D_T = \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{j=1}^m p_j = R_T \quad (1)$$

Obviamente, todo destino debe ser satisfecho en sus requerimientos

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = p_j \quad j = 1, \dots, m \quad (2)$$

y en cada origen, las entregas deben ser iguales a las disponibilidad existente

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = d_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

Es fácil ver que el sistema de  $n+m$  ecuaciones en  $n \times m$  incógnitas formado por (2) y (3) tiene solamente  $n+m-1$  ecuaciones linealmente independientes, al tenerse que cumplir la ecuación (1).

El problema es, entonces, encontrar

$$\text{mín } C_T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m C_{ij} x_{ij}$$

asociado a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_{ij} &= p_j & j &= 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} &= d_i & i &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

de las cuales sólo  $n + m - 1$  ecuaciones son linealmente independientes.

Puede verse que este problema, análogo al presentado en apartados anteriores, tiene un conjunto de variables formado por las  $x_{ij}$  originales y las variables artificiales  $v_i$  que se han de incorporar en cada ecuación. Aquí también el óptimo deberá encontrarse en una solución básica posible, es decir, en el conjunto de las asignaciones  $x_{ij}$  donde

- a) Todas las variables deben ser no negativas
- b)  $(n - 1) (m - 1) = (n \times m) - (n + m - 1)$  variables deberán anularse
- c) Existirán  $n + m - 1$  variables básicas, en principio, con valores positivos, salvo la existencia de una solución degenerada.

Las variables artificiales habrán desaparecido al finalizar la Fase I.

Si bien la formulación adoptada para el problema normalizado, demanda total igual a disponibilidad total, parece altamente restrictiva, al igual que en el caso general de Programación Lineal, con ella se pueden tratar todos los casos posibles. Si los requerimientos totales fuesen menores a las unidades disponibles en todos los orígenes, deberá considerarse un destino adicional donde se almacenen los excedentes. Si en cambio, los requerimientos totales superan lo disponible en los orígenes aparecerá uno adicional que suministra el faltante. En este último caso, el agregado puede visualizarse como compras que se realizan a terceros para cumplir con los pedidos, con lo cual, a los costos de transporte propiamente dichos deberán adicionarse las diferencias entre los valores de compra externa y los costos de producción propios.

En la bibliografía tradicional pueden encontrarse formas específicas de resolución del problema de transporte, Rincón Noroeste, Índices de Vogel, etc. Estas metodologías han quedado desactualizadas ante la posibilidad de usar los algoritmos eficientes de programación lineal en las computadoras personales.

En la figura 17 se muestra como se introduce en la planilla de cálculo un modelo de transporte de 3 orígenes con disponibilidades de 13, 6 y 10 unidades respectivamente y 4 destinos que solicitan 7, 4, 5 y 7 unidades respectivamente. Se ha introducido un almacén en el que se guardarán 6 unidades de producto ( $29 - 23 = 6$ ) y para generalizar la formulación se ha

incorporado un origen ficticio Orig\_F con una disponibilidad nula. En el caso general, el almacenamiento se definirá como el máximo entre 0 y la diferencia entre la disponibilidad total y los requerimientos totales. Una fórmula similar definirá al origen ficticio, donde la disponibilidad se considerará como el máximo entre 0 y  $R_T - D_T$ . En la figura, además, se han incorporado comentarios para mostrar las distintas fórmulas introducidas en las celdas.

		=MAX(0,SUMA(C2:F2)-SUMA(B3:B5))							
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		<b>Matriz de Costos</b>					Almacén		
2		Orig. \ Dest.	7	4	5	7	6		=MAX(0,SUMA(B3:B5)-SUMA(C2:F2))
3	A	13	70	30	90	60	0		
4	B	6	60	20	40	30	0		
5	C	10	40	70	80	70	0		
6	Orig_F	0	0	0	0	0	0		
7									
8									=B3-SUMA(C10:G10)
9		<b>Matriz de Asignaciones</b>							
10			0	4	0	6	3	0	
11			0	0	5	1	0	0	
12			7	0	0	0	3	0	
13			0	0	0	0	0	0	
14									
15			0	0	0	0	0		
16									
17		<b>mín. Costo</b>	990						=SUMA(F10:F12)-F2
18									
19									=SUMAPRODUCTO(C3:G6,C10:G13)

Figura 17. El problema de transporte en la planilla

En este caso, para determinar únicamente el costo de transporte, se ha considerado que el costo de almacenamiento es nulo en todos los orígenes. Se podrían tomar valores diferenciados, no nulos, que incluyesen tanto los costos financieros de la producción inmovilizada como los asociados a la ocupación de los espacios físicos.

En cualquiera de las variantes las unidades destinadas al almacenamiento no deberían ser producidas, y las asignaciones que se obtengan por una u otra vía, estarán respondiendo a los criterios subyacentes en la definición de los costos de transporte introducidos. En el primer caso, resulta indiferente de que origen se trate en tanto que en el otro, resultarán privilegiados, *ceteris paribus*, aquellos de menor costo.

## Modelo de Transbordo

Un problema relacionado con el de transporte visto en el apartado anterior es el modelo de transbordo. En él se tiene un conjunto de orígenes o proveedores y destinos o clientes adicionales, además de los originales. Las localizaciones adicionales cumplen un rol similar a las ficticias introducidas en el problema de transporte.

El problema de transbordo recibe su nombre por la introducción, en el modelo, de un grupo de almacenamientos intermedios, donde depositan sus disponibilidades los proveedores y retiran sus pedidos los clientes. Más precisamente, cada proveedor aporta a determinados almacenes y desde un conjunto especificado de ellos cada cliente retira sus pedidos.

Asimismo, el modelo admite la posibilidad de llevar a cabo transferencias entre almacenes, teniendo habilitadas, cada uno de ellos, determinadas rutas internas e impedidas otras.

En general, todos los proveedores y clientes, salvo los adicionales, tienen especificadas las transferencias que se realizan con cada uno de los almacenes a los que tienen acceso, con lo cual su aporte al costo total resulta una constante y no se lo considera en la búsqueda del óptimo. Tampoco se consideran las transferencias entre almacenes porque suele asignárseles un costo nulo.

Con esto, en la función objetivo han de intervenir sólo las cantidades transferidas por los proveedores y clientes adicionales.

A continuación se realizará el planteo genérico para uno de los  $N_A$  almacenes que considera el modelo

Siendo

$\{O\}_k$ : conjunto de proveedores que están habilitados a suministrar sus productos al almacenamiento  $k$

$\{OA\}_k$ : ídem para el conjunto de proveedores adicionales.

$\{D\}_k$ : conjunto de clientes a los que se les permite retirar productos del almacenamiento  $k$

$\{DA\}_k$ : ídem para el conjunto de clientes adicionales

$\{A_F\}_k$ : conjunto de almacenes que pueden transferir productos al almacén  $k$   
 $\{A_S\}_k$ : conjunto de almacenes a los que puede transferir productos el almacén  $k$ .

En la figura 18 se muestra un almacenamiento  $k$  al que le llegan los aportes de los proveedores originales y adicionales y del conjunto de almacenes  $\{A_F\}_k$  habilitados para aportar al almacenamiento  $k$ . Por otra parte, de este almacén  $k$ , retiran productos todos los clientes habilitados y el excedente pasa al conjunto de almacenes  $\{A_S\}_k$ .

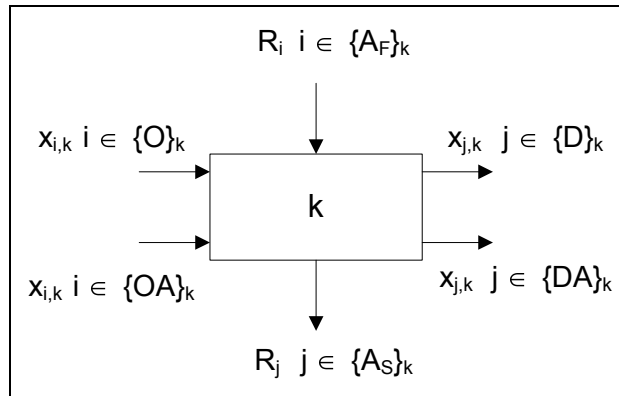


Figura 18. Almacenamiento  $k$

Con estas consideraciones, se plantea un balance para cada almacén  $k$ :

$$\sum_{i \in \{O\}_k} x_{ik} + \sum_{i \in \{OA\}_k} x_{ik} + \sum_{i \in \{A_F\}_k} R_i = \sum_{j \in \{D\}_k} x_{jk} + \sum_{j \in \{DA\}_k} x_{jk} + \sum_{j \in \{A_S\}_k} R_j$$

donde se encuentran especificados los aportes de los proveedores y los pedidos de los clientes, en ambos casos originales, es decir que son valores conocidos  $x_{ik}$ , con  $i \in \{O\}_k$  y  $x_{jk}$  con  $j \in \{D\}_k$ .

La función objetivo, considerando coeficientes de costo unitarios  $C_i$ ,  $C_j$ , puede plantearse como:

$$FO = \sum_k \sum_{i \in \{OA\}_k} C_i x_{ik} + \sum_k \sum_{j \in \{DA\}_k} C_j x_{jk}$$

Puede verse que el sistema de ecuaciones resultante para el modelo es de naturaleza lineal.

## Bibliografía

- Edgar T.F., Himmelblau D.M., "Optimization of Chemical Processes", McGraw Hill, 1988.

- Frontline Systems, Inc., “Solver Tutorial for Optimization Users”, <http://www.solver.com/tutorial.htm>
- Reklaitis G.V., Ravindran A., Ragsdell K.M., “Engineering Optimization: Methods and Applications”, Wiley-Interscience, 1983.

## Propuestas de trabajo

1) Para los tres casos siguientes:

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Encontrar	máx $Z = 2 X_1 + X_2$	máx $Z = 6 X_1 + X_2$	mín $Z = X_1 + X_2$
sujeto a:			
$r_1$ :	$X_1 - 2 X_2 \leq 2$	$3 X_1 + 5 X_2 \leq 13$	$2 X_1 + X_2 \geq 8$
$r_2$ :	$- 3 X_1 + X_2 \leq 3$	$6 X_1 + X_2 \leq 12$	$X_1 + 2 X_2 \leq 2$
	$X_1, X_2 \geq 0$	$X_1, X_2 \geq 0$	$X_1, X_2 \geq 0$

Resolver:

- a) Gráficamente
- b) Por el Método Simplex de Dantzig
  - b.1) Indicar el conjunto de variables básicas y no básicas y sus valores en las tablas inicial y final
  - b.2) En cada iteración identificar en el gráfico el punto obtenido.

2) Tres materiales A, B y C son utilizados en la fabricación de dos mezclas  $M_1$  y  $M_2$  que se comercializan en el mercado.

Las composiciones de ambas mezclas se indican en la tabla adjunta.

	A	B	C	Inerte
$M_1$	30%	30%	15%	25%
$M_2$	40%	50%	10%	

Se disponen para mezclar 120 t/mes como mínimo de A, 300 t/mes de B como máximo, 105 t/mes de C como máximo. El inerte se dispone en cantidades ilimitadas.

Los estudios de mercado indican que para  $M_1$  existe una demanda mensual mínima de 100 t y que no podrán colocarse más de 400 t de  $M_2$ .

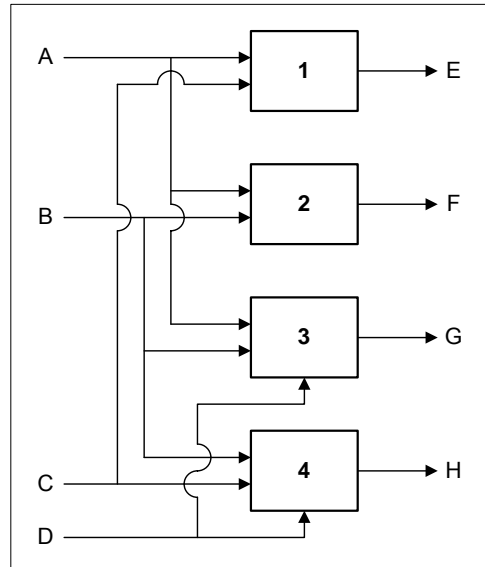
Los beneficios netos son 6\$/t y 12\$/t para  $M_1$  y  $M_2$  respectivamente.

- a) Obtener las cantidades óptimas a producir por mes de ambas mezclas.
- b) Obtener un gráfico que permita determinar las cantidades mensuales óptimas a producir de las mezclas y el beneficio obtenido cuando la disponibilidad de B toma los siguientes valores: 210, 230, 330 y 350 t/mes.
- c) Determinar en que rangos de valores del beneficio neto de  $M_1$ , la solución encontrada en A sigue siendo óptima.

3) Una planta química fabrica cuatro productos y utiliza cuatro materias primas. Cada producto se produce en un proceso separado, de acuerdo a la figura adjunta.

Las cantidades de A, B, C y D están limitadas.

Los productos F y G usan el reactor R1 y los E y H el R2. R1 produce 100 lb/h del producto F o 200 lb/h del producto G. R2 produce 120 lb/h del producto E o 250 lb/h del producto H.



Materia Prima	Máximo disponible [lb/día]	Costo [\$/lb]	Mínimo obligado a tomar por contrato
A	4000	1,80	2500
B	3000	2,00	1500
C	3500	2,20	---
D	2500	0,50	---

Datos de Proceso:

Proceso	Producto	Reactivos necesarios [lb/lb producto]	Costo Operativo	Precio de venta [\$/lb]
1	E	0,7 A; 0,25 C	0,01\$/lb A (consumidos en 1)	4,00
2	F	0,4 A; 0,8 B	0,005 \$/lb B (consumidos en 2)	3,30
3	G	0,35 A; 0,25 B; 0,5 D	0,01 \$/lb G	3,80
4	H	0,3 B; 0,3 C; 0,3 D	0,02 \$/lb H	4,50

Hallar la cantidad a producir de cada uno de los productos y la cantidad consumida de cada materia prima para obtener el máximo beneficio usando planilla de cálculo.



# CAPÍTULO 10

## SÍNTESIS DE REDES DE INTERCAMBIO TÉRMICO. MÉTODO DE TRANSBORDO

### Introducción

Si bien el Método Pinch, es una buena herramienta para la estructuración de redes de intercambio térmico (RIT), tiene algunas limitaciones en su aplicación. No puede, por ejemplo, manejar intercambios prohibidos, como es el caso de las corrientes que se encuentran ubicadas en sectores muy separados de la planta. Asimismo, tampoco puede usarse para determinar el mínimo número de equipos de transferencia. Por último, la combinación metodológica del procedimiento de Linnhoff y Flowers con el método Pinch deja sin considerar problemas con múltiples servicios auxiliares de un mismo tipo.

Estas cuestiones pueden resolverse por medio del Modelo de Transbordo, que utiliza Programación Lineal Entera Mixta (PLEM). Esta técnica es numéricamente compleja por lo que se requiere el auxilio de una computadora con el software adecuado para este tipo de problema.

El nombre del modelo proviene de la forma como se consideran los intervalos de temperatura de la Cascada de Calor. Los mismos operan como almacenamientos de calor intermedios entre las fuentes, corrientes o servicios auxiliares calientes, y los sumideros, corrientes o servicios auxiliares fríos.

### Presentación del caso

La formulación del modelo de transbordo se realizará usando un caso sencillo de 2 corrientes calientes y 2 frías, cuyos datos se presentan en la

tabla 1. Se dispone de un servicio auxiliar de cada tipo, cuyos datos se muestran en la tabla 2. Se considerará una aproximación mínima de 10 °C.

El problema se resolverá utilizando distintas funciones objetivo:

- a) mínimo costo en el consumo de servicios y
- b) mínimo número de equipos de transferencia

Corriente	WCp [kW/ °C]	T. entrada [°C]	T. salida [°C]
C1	2	180	40
C2	4	150	40
F1	3	60	180
F2	2.6	30	130

**Tabla 1.** Datos de Corrientes de Proceso

Servicio auxiliar	T. entrada [°C]	T. salida (máx) [°C]	Costo unitario anual [\$ / kW año]
Agua	30	40	1
Vapor	250	250	10

**Tabla 2.** Datos de Servicios Auxiliares

## Determinación de los intervalos de temperatura

Para una mejor comprensión de cómo aplicar el Modelo de Transbordo al problema planteado será conveniente construir la Cascada de Calor para el mismo.

Como el tamaño de los modelos matemáticos que se plantean dependen del número de intervalos de temperatura de la Cascada de Calor, es una buena política reducir al máximo ese número.

En la presentación realizada del método Pinch, los intervalos en la Tabla del Problema se definían usando las temperaturas de entrada y salida de todas las corrientes. Con esta política, para un problema con 3 corrientes calientes, 2 frías y un servicio auxiliar de cada tipo, el máximo número de intervalos posibles es trece, suponiendo que en las corrientes de proceso y los servicios no existen cambios de fase, con lo cual las temperaturas de entrada y salida no coinciden.

Pero, como ya se vio, el punto pinch sólo puede ubicarse sobre *las temperaturas de ingreso de las corrientes y servicios fríos y calientes*, con lo

cual, si para definir los intervalos sólo se consideran estas temperaturas, el número de los mismos tendrá una sustancial reducción. Así, en el ejemplo hipotético planteado anteriormente, la cota superior baja de trece a seis. Para el ejemplo propuesto esa cota superior para los intervalos resulta ser igual a cinco.

En la figura 1 se muestra la Cascada de Calor para el mismo, considerando la aproximación mínima de 10°C establecida. Debido a que la temperatura de entrada del agua coincide con la temperatura de entrada de la corriente fría F2, existen cuatro intervalos, un intervalo menos que el dado por la cota calculada anteriormente.

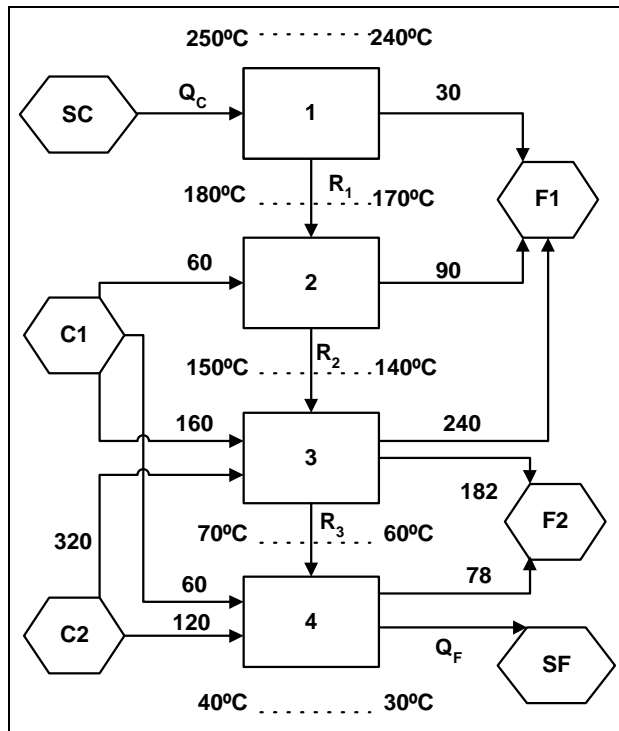


Figura 1. Cascada de Calor Reducida

En dicha figura, en cada uno de los intervalos  $k$ , se consideran los aportes de calor de las corrientes de proceso y servicios calientes

presentes en el mismo. También se registra el ingreso del calor no utilizado a temperaturas superiores,  $R_{k-1}$ . A su vez, en el intervalo se contabilizan las cantidades de calor tomadas por las corrientes de proceso y servicios fríos presentes en él y el calor remanente  $R_k$ , disponible en niveles térmicos más bajos. En este caso, en cada intervalo, no se distingue de donde proviene el calor disponible, ya sea para que lo tome una corriente sumidero o se integre al remanente.

Para calcular los aportes de cada corriente de proceso en cada intervalo hay que tener en cuenta el salto de temperatura que esa corriente registra en ese intervalo

El salto puede ser igual o menor que la diferencia de las temperaturas extremas del intervalo, según cual sea la temperatura de salida de la corriente.

Así, en el caso de C1, la corriente está presente en los intervalos 2, 3 y 4 y las variaciones de temperatura coinciden con los saltos en los intervalos, Para C2 ocurre lo propio pero sólo en los intervalos 3 y 4. Adviértase que la coincidencia en el último intervalo se debe a la aproximación mínima adoptada, ya que si, por ejemplo, hubiese sido de 5°C, el salto en el intervalo 4 seguiría siendo de 30°C, de 30°C a 60°C para las frías y de 65°C a 35°C para las calientes. Las corrientes C1 y C2 estarían parcialmente involucradas en ese intervalo, de 65°C a 40°C.

En la figura, los aportes anotados para C1 y C2 corresponden, directamente, al producto del flujo entálpico por la diferencia de temperaturas de cada intervalo. En el caso de F1, su temperatura de salida está por debajo del límite superior del intervalo 1 (180 frente a  $250 - 10 = 240$ ), por lo que la cantidad de calor que extrae de ese intervalo será  $3 \cdot (180 - 170)$ .

Otro tanto ocurre con F2 en el intervalo 3, ya que su temperatura de salida es 130°C y el límite superior del intervalo (para las corrientes frías) es 140°C. La extracción será, entonces, igual a  $2,6 \cdot (130 - 60) = 182$ .

En la figura se ha indicado con  $Q_C$  el aporte de calor del vapor y con  $Q_F$  el extraído por el agua; ambos valores desconocidos en el momento del planteo del problema.

## Planteo del Modelo de Transbordo

Si se plantea el balance de calor para el intervalo 1, se tendrá que la cantidad de calor que suministra el vapor, deberá ser igual a la que absorbe la corriente fría 1 (30 kW) más el excedente que se usará en los niveles inferiores.

$$R_1 + 30 - Q_C = 0$$

En el intervalo 2 la corriente caliente C1 aporta 60 kW y la fría F1 toma 90 kW. Además, debe tenerse en cuenta el excedente que proviene del intervalo 1 y el que se generará en este intervalo, disponible en los siguientes. El balance será:

$$R_2 - R_1 + 90 - 60 = 0$$

De la misma manera, los balances en los intervalos 3 y 4 serán:

$$\text{Int. 3: } R_3 - R_2 + 240 + 182 - 160 - 320 = 0$$

$$\text{Int. 4 } - R_3 + 78 - 60 - 120 + Q_F = 0$$

En la ecuación del intervalo 4 se ha dejado establecido que no existe calor remanente para ser usado fuera de la red, esto es,  $R_4 = 0$ .

Para proceder a generalizar las relaciones anteriores se adoptará la siguiente nomenclatura:

- $TI$  : conjunto de intervalos de temperatura  $TI = \{TI_1, \dots, TI_P\}$
- $\{CC\}$ : Conjunto de corrientes de proceso calientes
- $\{CC_k\}$ : Conjunto de corrientes de proceso calientes que proveen calor al intervalo  $k$ . Así,  $\{CC_1\} \cup \dots \cup \{CC_P\} = \{CC\}$
- $\{SC\}, \{SC_k\}$  : Idem para los servicios auxiliares calientes
- $\{CF\}, \{CF_k\}$  : Idem para las corrientes de proceso frías.
- $\{SF\}, \{SF_k\}$  : Idem para los servicios auxiliares fríos
- $c_i$  : Costo del servicio auxiliar caliente  $i$
- $c_j$  : Costo del servicio auxiliar frío  $j$

De acuerdo a esa nomenclatura, en el ejemplo que se está considerando se tendrá:

$$TI = \{TI_1, \dots, TI_4\}$$

$$\{CC\} = \{C1, C2\}$$

$$\{CC_1\} = \text{vacío} ; \{CC_2\} = \{C1\} ; \{CC_3\} = \{CC_4\} = \{C1, C2\}$$

$$\{SC\} = \{SC\}$$

$$\{SC_1\} = \{SC\} ; \{SC_2\} = \{SC_3\} = \{SC_4\} = \text{vacío}$$

etc.

Si existen servicios auxiliares que no cambian de fase, en la cascada sólo se los considera ingresando en el intervalo correspondiente a la temperatura de entrada, independientemente de que, por el salto máximo admitido, intervengan o no en otros intervalos de la cascada. Esto es así, ya que a diferencia de las corrientes de proceso, la cantidad total de calor a transferir es una variable; por lo que resulta inconveniente subdividirla, generando tantas incógnitas como intervalos en los que está presente. Si se usa o no el salto de temperaturas máximo permitido es algo que se verá al estructurar la red. Por ejemplo, en el

caso del agua de enfriamiento, si la diferencia entre la temperatura de entrada de la corriente caliente y la máxima temperatura admitida para la salida del refrigerante es menor que la aproximación mínima adoptada, el salto de temperaturas del agua deberá ser menor que el admitido, lo que obligará a incrementar el caudal circulante para extraer la cantidad de calor requerida.

La figura 2 indica los posibles flujos de calor en un intervalo de temperatura  $k$  de una Cascada de Calor. En dicha figura, puede verse que al “depósito”  $k$  llegan los aportes de calor  $Q_{ik}$  de las corrientes de proceso calientes  $\{CC_k\}$ , de los servicios auxiliares calientes  $\{SC_k\}$  y el aporte del calor residual del intervalo anterior  $R_{k-1}$ . De ese depósito toman calor

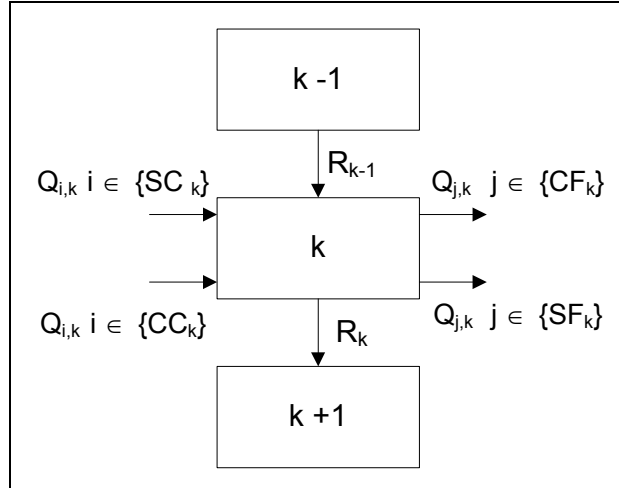


Figura 2. Flujos de calor en un intervalo  $k$

$Q_{jk}$  las corrientes de proceso frías  $\{CF_k\}$  y los servicios auxiliares fríos  $\{SF_k\}$ . Habrá, además, un cierto excedente de calor  $R_k$  que pasará al intervalo siguiente.

Si ahora se pasa a la generalización tenemos que:

El balance de entradas y salidas de calor en cada uno de los intervalos será:

$$R_{k-1} + \sum_{i \in \{SC_k\}} Q_{i,k} + \sum_{i \in \{CC_k\}} Q_{i,k} = R_k + \sum_{j \in \{SF_k\}} Q_{j,k} + \sum_{j \in \{CF_k\}} Q_{j,k} \quad \forall k = 1, \dots, P$$

$$R_0 = R_P = 0 \quad S-1$$

$$R_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, P-1$$

En cada intervalo  $k$  los aportes de calor de las corrientes de proceso calientes  $Q_{ik}$ ,  $i \in \{CC_k\}$ , así como el calor removido por las frías  $Q_{jk}$ ,  $j \in \{CF_k\}$ , son valores conocidos para cada una de las corrientes presentes en el intervalo.

Quedan por determinar, en consecuencia, los consumos de los servicios auxiliares  $Q_{ik}$ ,  $i \in \{SC_k\}$  y  $Q_{jk}$ ,  $j \in \{SF_k\}$  y los calores remanentes en los intervalos  $R_k$ ,  $k = 1, \dots, P-1$ .

Si bien en el planteo de S-1 aparece  $R_0 = R_P = 0$  esto no es conveniente puesto que aumenta innecesariamente el número de variables. Lo correcto es que no se las considere en la formulación del problema, por eso, en el párrafo anterior, al explicitar los valores  $R_k$  a determinar, hemos excluido a  $R_0$  y  $R_P$ , en el entendimiento que ellos no figuran en el modelo.

## Mínimo costo en el consumo de servicios

En el ejemplo planteado, puesto que se considera sólo un servicio auxiliar caliente y uno frío, es equivalente minimizar el costo que el consumo de los servicios.

Además, puesto que el calentamiento o el enfriamiento externo están vinculados ( $Q_C - Q_F = \text{cte}$ ), la función objetivo puede simplificarse y minimizar el consumo de vapor, con lo que se estará haciendo lo propio sobre el agua de enfriamiento.

El modelo, para este problema, es:

$$\begin{aligned} & \text{mín } Q_C \\ & \text{sujeto a las ecuac. 1 a 4} \\ & \text{con } R_1, R_2, R_3, Q_C, Q_F \geq 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones pueden reescribirse:

$$\begin{aligned} Q_C &= R_1 + 30 \\ R_1 &= R_2 + 30 \\ R_2 &= R_3 - 58 \\ R_3 &= Q_F - 102 \end{aligned}$$

Este modelo sencillo para mínimo costo en el consumo de fuentes o sumideros externos permite el tratamiento de aquellos casos donde existen múltiples servicios auxiliares. La función objetivo, en este caso, es:

$$\min\left\{\sum_{k \in TI} \left( \sum_{i \in \{SC_k\}} c_i Q_{i,k} + \sum_{j \in \{SF_k\}} c_j Q_{j,k} \right)\right\}$$

Como todas las variables involucradas son continuas y no negativas y las condiciones y la función objetivo son lineales, el Modelo de Transbordo es un problema de Programación Lineal.

Aplicando al ejemplo en consideración cualquier algoritmo para problemas de Programación Lineal, la solución que minimiza  $Q_C$  es:

$$R_1 = 30, R_2 = 0, R_3 = 58, Q_C = 60, Q_F = 160$$

La ubicación del Punto Pinch requiere que, en la Cascada de Calor, no exista transferencia entre los intervalos donde está localizado. En el ejemplo esto se cumple entre los intervalos 2 y 3 ( $R_2 = 0$ ), en consecuencia, las temperaturas del Pinch son  $150^\circ\text{C}$  para las corrientes calientes y  $140^\circ\text{C}$  para las frías.

## Cascada Expandida

En la cascada de la figura 1, conocida como “Cascada Reducida”, no se puede seguir el flujo de calor aportado por cada corriente o servicio caliente y, por lo tanto, no se puede identificar donde se utiliza. Si se requiere individualizar de donde proviene el calor que toma una determinada corriente o servicio frío, es necesario disponer de un esquema donde se discriminen los orígenes y destinos de los flujos de calor. Un caso típico donde se requiere esta información es cuando hay restricciones sobre el intercambio entre algunas corrientes.

En esa nueva cascada, que se denominará “Cascada Expandida”, en cada intervalo se deberá poder distinguir de donde proviene el calor que toma cada corriente o servicio frío, así como identificar de que corriente o servicio caliente provienen los excedentes de calor.

En la figura 3 puede verse la Cascada Expandida para el ejemplo propuesto.

Como se vio en el caso de la Cascada Reducida, las cantidades de calor aportadas por las corrientes calientes  $Q_{ik}$ ,  $i \in \{CC_k\}$  así como el calor removido por las frías  $Q_{jk}$ ,  $j \in \{CF_k\}$  son valores conocidos para cada una de las corrientes presentes en cada uno de los intervalos.



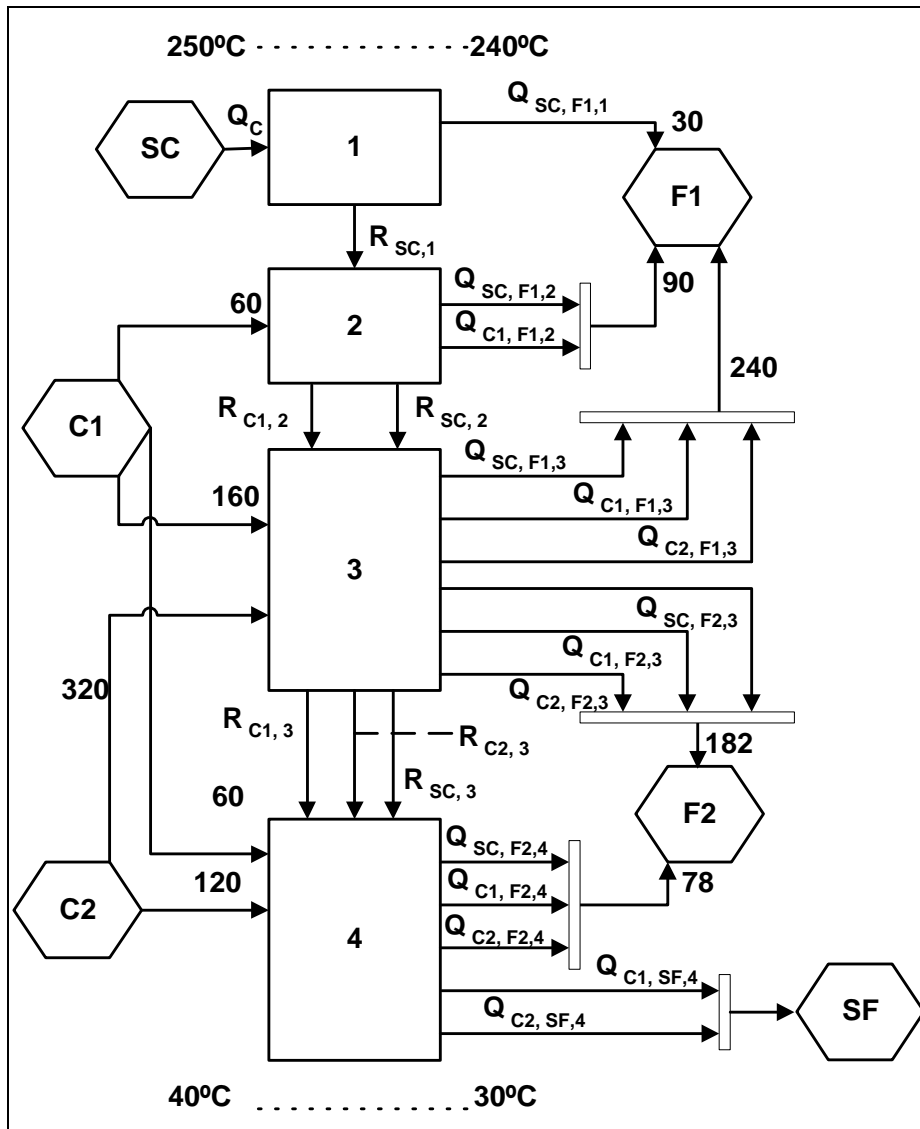


Figura 3. Cascada Expandida

Para poder identificar de donde toma calor una corriente de proceso o servicio auxiliar frío, se ha definido una nueva variable  $Q_{i, j, k}$  que es la cantidad de calor que se transfiere desde una corriente caliente  $i$ ,  $i \in \{CC_k\}$ , o servicio auxiliar caliente,  $i \in \{SC_k\}$ , a una corriente de proceso fría  $j$ ,  $j \in \{CF_k\}$ , en el intervalo  $k$ . Para los sumideros auxiliares fríos se ha definido una variable similar,  $\{SF_k\}$ , con la salvedad de que no podrá recibir calor desde un servicio auxiliar caliente.

Puede verse que, en los distintos intervalos, los calores residuales permanecen discriminados de acuerdo al origen. De este modo, el número de los mismos, en un intervalo cualquiera, dependerá de las corrientes de proceso

y servicios auxiliares calientes que están presentes en ese intervalo o en los de niveles térmicos superiores.

Ahora, usando la Cascada Expandida para el ejemplo propuesto, al plantear los balances de calor se tendrá que:

En el intervalo 1 ( $k = 1$ ),

- La cantidad de calor  $Q_C$  que suministra el vapor al intervalo debe ser igual a la que le cede el vapor a la corriente fría 1 ( $Q_{SC,F1,1}$ ) más el excedente que se usará en los niveles inferiores:

$$R_{SC,1} + Q_{SC,F1,1} - Q_C = 0$$

- La cantidad de calor que la corriente fría absorbe del intervalo (30 kW) debe ser igual a la suma de todos los calores aportados a ella por todas las corrientes y servicios calientes que intervienen en el intervalo. En este caso:

$$Q_{SC,F1,1} = 30$$

En el intervalo 2 ( $k = 2$ ),

- Aquí entra en juego la corriente caliente C1 y el remanente del vapor del intervalo 1, por lo que se deben plantear sendos balances de calor:

$$R_{SC,2} - R_{SC,1} + Q_{SC,F1,2} = 0$$

$$R_{C1,2} + Q_{C1,F1,2} = 60$$

- Como en el intervalo sólo se encuentra la corriente fría F1, habrá un único balance:

$$Q_{SC,F1,2} + Q_{C1,F1,2} = 90$$

Del mismo modo, el modelo para los intervalos 3 y 4 puede formularse como:

( $k = 3$ ):

$$R_{SC,3} - R_{SC,2} + Q_{SC,F1,3} + Q_{SC,F2,3} = 0 \quad (\text{para SC})$$

$$R_{C1,3} - R_{C1,2} + Q_{C1,F1,3} + Q_{C1,F2,3} = 160 \quad (\text{para C1})$$

$$R_{C2,3} + Q_{C2,F1,3} + Q_{C2,F2,3} = 320$$

$$Q_{SC,F1,3} + Q_{C1,F1,3} + Q_{C2,F1,3} = 240$$

$$Q_{SC,F2,3} + Q_{C1,F2,3} + Q_{C2,F2,3} = 182$$

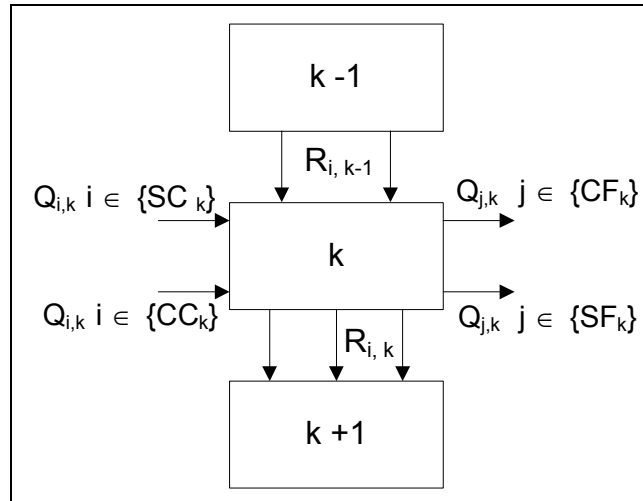
( $k = 4$ ):

$$- R_{SC,3} + Q_{SC,F2,4} = 0$$

$$\begin{aligned}
& - R_{C1,3} + Q_{C1,F2,4} + Q_{C1,SF,4} = 60 \\
& - R_{C2,3} + Q_{C2,F2,4} + Q_{C2,SF,4} = 120 \\
& Q_{SC,F2,4} + Q_{C1,F2,4} + Q_{C2,F2,4} = 78 \\
& Q_{C1,SF,4} + Q_{C2,SF,4} - Q_F = 0
\end{aligned}$$

Como se puede observar en los balances planteados, son incógnitas los calores remanentes  $R_{i,k}$ , los aportes de las fuentes calientes  $Q_{i,k}$   $i \in \{SC_k\}$ , las extracciones de los servicios fríos  $Q_{j,k}$  ,  $j \in \{SF_k\}$ , y los calores transferidos  $Q_{i,j,k}$ .

Para poder generalizar el modelo, en la figura 4 se muestra un intervalo de temperatura  $k$  genérico de una Cascada de Calor Expandida.



**Figura 4.** Intervalo  $k$  en Cascada Expandida

Los balances de calor en el intervalo  $k$  quedan definidos por los siguientes balances y condiciones (Sistema S-2):

a) Balances de las corrientes calientes

$$R_{i,k} - R_{i,k-1} + \sum_{j \in \{CF_k\}, \{SF_k\}} Q_{i,j,k} = Q_{i,k} \quad i \in \{CC_k\}, \forall k = 1, \dots, P$$

b) Balances de los servicios auxiliares calientes

$$R_{i,k} - R_{i,k-1} + \sum_{j \in \{CF_k\}} Q_{i,j,k} - Q_{i,k} = 0 \quad i \in \{SC_k\}, \forall k = 1, \dots, P$$

c) Balances de las corrientes frías

$$\sum_{i \in \{CC_k\}, \{SC_k\}} Q_{i,j,k} = Q_{j,k} \quad j \in \{CF_k\}, \forall k = 1, \dots, P$$

d) Balances de los servicios auxiliares fríos

$$\sum_{i \in \{CC_k\}} Q_{i,j,k} - Q_{j,k} = 0 \quad j \in \{SF_k\}, \forall k = 1, \dots, P$$

e) y las condiciones

$$R_{i,0} = R_{i,P} = 0 \quad ; \quad R_{i,k} \geq 0 \quad i \in \{CC_k\}, \{SC_k\}; \forall k = 1, \dots, P-1$$

$$Q_{i,j,k} \geq 0 \quad i \in \{CC_k\}, \{SC_k\}; j \in \{CF_k\}; \forall k = 1, \dots, P$$

$$Q_{i,j,k} \geq 0 \quad i \in \{CC_k\}; j \in \{SF_k\}; \forall k = 1, \dots, P$$

Se puede ver que el planteo de la Cascada Expandida es sustancialmente más complejo que el de la reducida por lo cual se debe acudir a él en las situaciones en las que resulta inevitable. Esto es, si sólo se desea minimizar el costo en la utilización de los servicios auxiliares y no existen intercambios no permitidos, el cálculo debe realizarse utilizando la Cascada Reducida.

Se verá más adelante que la Cascada Expandida permite realizar la estructuración de la red. Si esta estructuración exige respetar el mínimo costo en el uso de servicios auxiliares, el análisis comenzará resolviendo esa primera cuestión a través de la Cascada Reducida, si es ello posible y, recién entonces, sobre cada uno de los distintos subsistemas definidos por el o los puntos Pinch que se hayan encontrado, se aplicará la metodología que requiere el uso de la Cascada Expandida.

## Intercambios no permitidos

Cuando dos corrientes de proceso se encuentran o se han de ubicar en sectores de la planta espacialmente muy separados entre si o, por las características fisicoquímicas de las mismas, se considera desaconsejable su

manejo en un mismo equipo, la estructuración de la red debe excluir la posibilidad de un intercambio entre esas dos corrientes.

Como es fácil imaginar, en el caso que no se admitan intercambios entre la corriente caliente  $m$  con la fría  $n$ , basta con hacer  $Q_{m, n, k} = 0$  en todo intervalo  $k$ . Si bien esto es correcto, no resulta lo más conveniente desde el punto de vista del cálculo, ya que no se aprovecha la posibilidad de reducir el número de variables. En lugar de mantener en el planteo las  $Q_{m, n, k}$  e igualarlas a cero, es más lógico suprimirlas del mismo, con lo cual se agiliza el cálculo del problema.

## **Mínimo número de equipos de transferencia**

Se tratará ahora la determinación del mínimo número de equipos para la red que se debe estructurar. El objetivo a tener en cuenta es encontrar el mínimo número de equipos de transferencia para una red donde el costo en el consumo de servicios externos es mínimo.

Un planteo diferente o bien conduce a un problema no lineal, por ejemplo, si se consideran las amortizaciones del equipamiento de la red más los gastos en servicios auxiliares o a una solución obvia, cuando se busca minimizar el número de unidades, al margen de los costos en el uso de corrientes auxiliares.

En este último caso, todas las calefacciones se realizarán usando la cantidad necesaria del servicio caliente de más alta temperatura y todas las refrigeraciones, con el frío más frío. En efecto, si se tuviesen  $N_C$  corrientes calientes,  $N_F$  frías y, por ejemplo, un servicio de cada tipo, deberían esperarse  $N_C + N_F + 1$  equipo para la red, en tanto si todos los calentamientos y enfriamientos se llevan a cabo con servicios auxiliares, se tendrán sólo  $N_C + N_F$  unidades.

Cuando se pretende preservar el gasto mínimo en corrientes auxiliares, hay que encontrar, previamente, la ubicación del o de los puntos pinch, aislar los bloques limitados por ellos y trabajar sobre cada uno de ellos por separado.

En lo que sigue, para la estructuración de la red, se considerará que el intercambio entre una fuente y sumidero particulares está unívocamente asociado a un único equipo.

En consecuencia, es equivalente contabilizar equipos o intercambios, siendo esto último más sencillo de realizar.

Ya sea que se esté trabajando bajo la restricción de mínimo costo de servicios o no, para representar cada posible intercambio se definirá un conjunto de variables binarias  $y_{i,j}$ , las que tendrán valor no nulo si hay un intercambio entre la corriente de proceso o servicio auxiliar caliente  $i$ ,  $i \in \{CC\}$  ó  $i \in \{SC\}$  y la corriente de proceso o servicio auxiliar frío  $j$ ,  $j \in \{CF\}$  ó  $j \in \{SF\}$  y serán  $y_{i,j} = 0$  si no existe tal intercambio. En el caso de los servicios auxiliares fríos no se admitirán intercambios con los servicios calientes, es decir, cuando  $j \in \{SF\}$ , la variable  $y_{i,j}$  se incluirá en el modelo sólo si  $i \in \{CC\}$ .

Se necesitará, además, que exista una conexión entre la variable binaria  $y_{ij}$  y las variables continuas correspondiente al calor transferido  $Q_{i,j,k}$  entre el par  $ij$ , en los distintos intervalos. Las siguientes condiciones lógicas (Sistema S-3) fuerzan a que la variable binaria  $y_{i,j}$  sea igual a 1 cuando uno o más de los calores intercambiados  $Q_{i,j,k}$  es positivo:

$$\sum_{k \in TI} Q_{i,j,k} - U_{i,j} y_{i,j} \leq 0 \quad i \in \{CC\}, \{SC\}; j \in \{CF\}$$

$$\sum_{k \in TI} Q_{i,j,k} - U_{i,j} y_{i,j} \leq 0 \quad i \in \{CC\}; j \in \{SF\}$$

donde  $U_{i,j}$  puede ser cualquier valor mayor que la suma de todos los calores puestos en juego entre las corrientes/servicios calientes  $i$  y las corrientes/servicios fríos  $j$ . De todos modos, el valor no conviene que sea muy grande ya que puede hacer que el modelo sea muy difícil de resolver. Un valor posible para  $U_{i,j}$  es la máxima cantidad de calor que se puede intercambiar entre la fuente  $i$  y el sumidero  $j$ . Adviértase que ese máximo es igual al mínimo entre la cantidad de calor que debe removerse de la fuente  $i$  y la que debe transferirse al sumidero  $j$ .

Para determinar el mínimo número de equipos de transferencia basta con plantear la función objetivo  $\min \left[ \sum_{i \in \{CC\}, \{SC\}} \sum_{j \in \{CF\}, \{SF\}} y_{i,j} \right]$  que, sujeto a las relaciones de los sistemas S-2 y S-3, permite resolver el problema.

Las relaciones y la función objetivo del problema son lineales y las variables involucradas son de naturaleza continua - calores intercambiados - y binaria -  $y_{i,j}$  -, por lo que el problema es de Programación Lineal Entera Mixta.

Para ejemplificar lo anterior se ha de determinar el mínimo número de equipos para el problema considerado en este capítulo, manteniendo el objetivo de mínimo costo en la utilización de servicios.

Ello implica resolver por separado los bloques frío y caliente oportunamente determinados. El punto Pinch, para la aproximación mínima adoptada, se ubica entre los intervalos 2 y 3 de la cascada de la figura 1.

Para el bloque frío, el modelo es :

$$\text{mín } [y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} + y_{1F} + y_{2F}]$$

sujeto a:

(k = 3):

$$R_{C1,3} + Q_{C1,F1,3} + Q_{C1,F2,3} = 160$$

$$R_{C2,3} + Q_{C2,F1,3} + Q_{C2,F2,3} = 320$$

$$Q_{C1,F1,3} + Q_{C2,F1,3} = 240$$

$$Q_{C1,F2,3} + Q_{C2,F2,3} = 182$$

(k = 4):

$$- R_{C1,3} + Q_{C1,F2,4} + Q_{C1,SF} = 60$$

$$- R_{C2,3} + Q_{C2,F2,4} + Q_{C2,SF} = 120$$

$$Q_{C1,F2,4} + Q_{C2,F2,4} = 78$$

$$Q_{C1,SF} + Q_{C2,SF} = 160$$

Intercambios:

$$Q_{C1,F1,3} - U_{11} y_{11} \leq 0 \quad U_{11} = \text{mín}(220,240)$$

$$Q_{C1,F2,3} + Q_{C1,F2,4} - U_{12} y_{12} \leq 0 \quad U_{12} = \text{mín}(220,260)$$

$$Q_{C2,F1,3} - U_{21} y_{21} \leq 0 \quad U_{21} = \text{mín}(440,240)$$

$$Q_{C2,F2,3} + Q_{C2,F2,4} - U_{22} y_{22} \leq 0 \quad U_{22} = \text{mín}(440,260)$$

$$Q_{C1,FF} - U_{1F} y_{1F} \leq 0 \quad U_{1F} = \text{mín}(220, 160)$$

$$Q_{C2,FF} - U_{2F} y_{2F} \leq 0$$

$$U_{2F} = \text{mín}(440, 160)$$

donde:

$$R_{i,k}, Q_{i,j,k} \geq 0 \quad \forall i = C1, C2 ; \forall j = F1, F2, SF \quad y \quad \forall k = 3, 4$$

$$y_{i,j} = \text{binaria} \quad \forall i = C1, C2 ; \forall j = F1, F2, SF$$

Los resultados que se obtienen son

$$Q_{C1,F2,3} = 160; Q_{C1,F2,4} = 60; Q_{C2,F1,3} = 240; Q_{C2,F2,3} = 22; Q_{C2,F2,4} = 18;$$

$$Q_{C2,SF,4} = 160;$$

$$y_{11} = 0; y_{12} = 1; y_{1F} = 0; y_{21} = 1; y_{22} = 1; y_{2F} = 1$$

Con los que, por inspección, permiten estructurar la red de la figura 5.

Este caso, sencillo para resolver con esta metodología, presenta un gran inconveniente para ser resuelto con el método pinch.

En el esquema de la figura 6 puede observarse que si bien al hacer el intercambio entre la corriente C2 y la F1 no se violan las reglas del método pinch

en esa primera instancia, luego hay que incorporar vapor para poder calentar la corriente F2 y por lo tanto se aumenta el consumo de agua.

La corriente C2 debería haberse dividido para intercambiar con las corrientes F1 y F2.

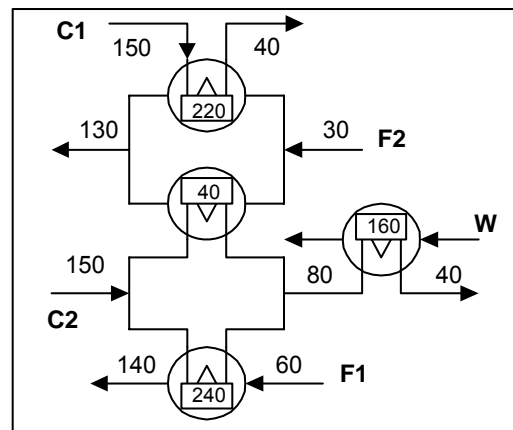


Figura 5. Síntesis del bloque frío

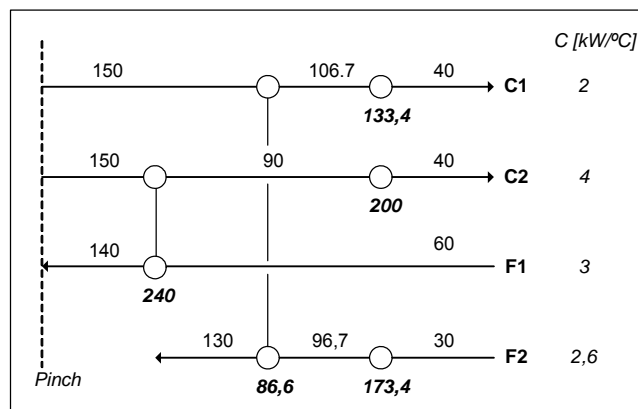


Figura 6. Inconveniente del Método Pinch



Si se plantea el modelo para el bloque caliente se llega a los resultados:

$$Q_{SC,F1,1} = 30; Q_{SC,F1,2} = 30; Q_{C1,F1,3} = 60$$

$$y_{S1} = 1; y_{11} = 1$$

Con lo que, la estructura de la red es la de la figura 7.

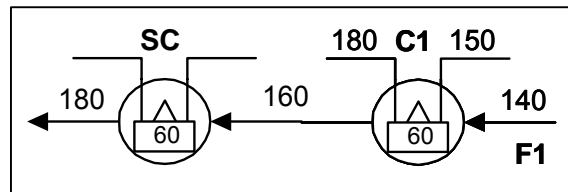


Figura 7. Síntesis del bloque caliente

## Complemento Transbordo

Este complemento permite sintetizar una red de intercambio térmico usando el Modelo de Transbordo. Su uso requiere que en la planilla Excel esté disponible el complemento Solver.

Los problemas que pueden ser tratados con el complemento no tienen límites en cuanto al número de corrientes y servicios auxiliares a utilizar.

Al cargarse el complemento genera el elemento de menú *Transbordo*, desde el cual es posible seleccionar las distintas operaciones. Eligiendo la orden *Nuevo Problema*, se comienza por ingresar el número de corrientes de proceso de cada tipo y de servicios externos. Inmediatamente se crea un nuevo libro con la hoja *Datos del Problema*. En ella existen áreas resaltadas, específicas para el ingreso de los datos de corrientes y servicios.

Una vez terminado este ingreso se deben definir, si existen, los intercambios no permitidos en el problema.

Con ello se concluye la etapa de entrada de datos y se está en condiciones de realizar las operaciones básicas previstas en el complemento: *Generar Modelo* o *Dibujar Cascada*.

La orden *Generar Modelo* admite dos alternativas:

- Mínimo Costo de Servicios

- **Mínimo Número de Equipos**

En ambos casos, el complemento arma la matriz de coeficientes, el vector de variables y la función objetivo que corresponde al modelo elegido.

Para proceder a determinar la solución óptima del problema, el usuario debe completar la información requerida por el complemento Solver.

El complemento se puede utilizar para determinar, simultáneamente, el mínimo número de equipos con un costo de servicios mínimo. Para ello, se debe, primero, calcular la condición de dichos servicios y luego, la de los equipos, si existe Pinch, resolviendo cada bloque por separado; si no, agregando al modelo que genera el complemento, las ecuaciones que determinan los consumos encontrados en el paso anterior.

Con la orden *Dibujar Cascada*, se obtiene un esquema simple en el que se observan los distintos intervalos de temperatura. En cada uno de ellos aparecen, además, los aportes de calor de las corrientes calientes y los requerimientos de las frías, así como los puntos de ingreso y extracción de los servicios auxiliares.

Lo expuesto aquí es una síntesis de los aspectos básicos del complemento. Una información más completa se puede obtener accediendo a la ayuda del mismo. Además, en el Anexo B se agrega una tutoría con las distintas posibilidades de uso del complemento.

## **Bibliografía**

- Biegler L.T., Grossmann I.E., Westerberg A.W., "Systematic Methods of Chemical Process Design", Prentice Hall, 1997.
- Gundersen, "A Process Integration Primer", International Energy Agency, 2002.
- Paniagua, C.N., Iglesias, O.A., "Aplicación del método de transbordo en la enseñanza de la estructuración de Redes de Intercambio Térmico", Actas (CD ROM) 1º Congreso en Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC's) en la Enseñanza de las Ciencias, TICEC 05, La Plata, 2005.

- Papoulias S.A., Grossmann I.E., "A structural optimization approach in process synthesis – II: Heat recovery networks", *Comput. Chem. Eng.* 7, 707, 1983.

## Propuesta de trabajo

Dados los siguientes datos para las corrientes de proceso y servicios auxiliares disponibles y una aproximación mínima de 10 K

Corriente	W [MW / K]	Tent. [K]	Tsal. [K]
C1	2,5	420	340
C2	3,8	390	340
C3	2,0	320	440
C4	2,0	320	390
Vapor alta presión: 500 K		\$80/kW año	
Vapor baja presión: 400 K		\$50/kW año	
Agua de enfriamiento: 310 K		\$20/kW año	

- a) Dibujar la Cascada de Calor
  - a1) Identificar las corrientes que dan origen a los límites de los intervalos.
  - a2) Indicar, en cada intervalo, las temperaturas superiores e inferiores de cada corriente de proceso que interviene en los mismos.
  - a3) Formular los balances de calor para los dos primeros intervalos de la cascada.

Usando el complemento Transbordo.xla, determinar:

- b) El mínimo costo de servicios.
- c) El mínimo número de equipos.
- d) El esquema de la configuración de la red que satisface ambos objetivos.
- e) El mínimo costo de servicios para una red de intercambio térmico donde la corriente C1 no puede intercambiar con la corriente C3.

# CAPÍTULO 11

## SÍNTESIS DE REDES DE INTERCAMBIO DE MASA. MÉTODO DE TRANSBORDO

### Consideraciones generales

Como quedó dicho en su momento, el método Pinch no permite cubrir eficazmente un número importante de situaciones que suceden al definir la estructura para una determinada red de intercambio. Baste recordar el ejemplo de estructuración de RIM propuesto en el capítulo cinco, donde la aplicación del método se realizaba sobre un caso simplificado, en virtud de que los valores particulares de costos y rangos de variación permitidos para las concentraciones reducía a uno el número de corrientes auxiliares de extracción disponible. Claro que también podría habérselo usado sin que se diese esta circunstancia favorable, teniendo en cuenta la información que surge de la Tabla del Problema o cualquier otra herramienta equivalente.

Sin embargo, debe dejarse en claro que el análisis hubiese resultado algo más complicado.

Si, al igual que en el caso de la estructuración de RIT, determinados intercambios estuviesen vedados o si lo que se buscara fuese la determinación del mínimo número de equipos en la red, el método Pinch no sería una herramienta adecuada, debiéndose usar el de Transbordo.

Al igual que en RIT, habrá que distinguir aquellos casos en los que se busca minimizar el costo en el uso de corrientes auxiliares de aquellos en los que se trata de obtener una estructura con el menor número de equipos posible o, cuando en esa estructuración, deben tenerse en cuenta intercambios no permitidos.

Se debe recordar que para el primero de ellos, se trabaja considerando, en cada intervalo, los aportes que, globalmente, efectúan las fuentes disponibles y, también en forma global, las extracciones imputables a los sumideros. En

cualquiera de los otros casos se requiere individualizar los flujos que se transfieren desde cada fuente a cada uno de los sumideros en particular.

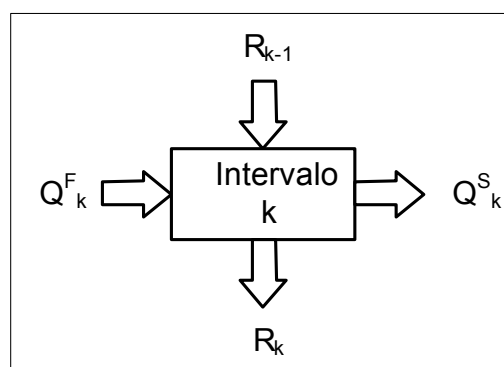
En forma similar al caso de estructuración de RIT, cada intervalo queda definido por dos valores de concentración de soluto contaminante, ordenados en forma decreciente.

Se supondrá que el número total de intervalos es  $N$  y que, en el problema, están involucradas  $N_R$  corrientes ricas y  $N_P$  pobres, de las cuales las primeras  $N_{PP}$  son corrientes de proceso. De aquí en adelante, se referenciarán como fuentes a las ricas y sumideros a las otras.

Al igual que en el caso de RIT, para generar estos intervalos sólo hace falta considerar los valores de concentración a la entrada de cada corriente, fuente o sumidero. Por la naturaleza del problema, no habrá que tener en cuenta concentraciones de salida de sumideros que excedan la más alta de las entradas de las fuentes ni es posible que exista una concentración de salida de las fuentes inferior a la menor de las entradas en los sumideros.

Hechas estas precisiones, se comenzará por plantear el caso cuando se ha de considerar la determinación del mínimo costo en el uso de corrientes de extracción externas al proceso.

En la figura 1 se esquematizan los flujos de materia a considerar en un intervalo genérico  $k$ .



**Figura 1.** *Intervalo genérico*

Allí, se ha indicado con

$Q_k^F$ : Flujo total que ceden las fuentes presentes en el intervalo  $k$ ;

$Q_k^S$ : Flujo total que retiran los sumideros presentes en el intervalo k;

$R_k$ : Flujo total a ser removido en intervalos por debajo de k.

Lógicamente, los aportes globales que fuentes y sumideros realizan en el intervalo k son iguales a

$$Q_k^F = \sum_{i \in F_k} Q_{i,k} \leq \sum_{i \in F_k} W_i^F (Y_k^{\text{sup}} - Y_k^{\text{inf}}) \quad , \quad Q_k^S = \sum_{j \in S_k} Q_{j,k} \leq \sum_{j \in S_k} W_j^S (Y_k^{\text{sup}} - Y_k^{\text{inf}})$$

siendo:

$F_k$  y  $S_k$  los conjuntos de fuentes y sumideros, respectivamente, presentes en el intervalo k;

$W_i$  y  $W_j$  los caudales de fuentes y sumideros presentes en k;

$Q_k^F$  y  $Q_k^S$  los aportes o extracciones globales de fuentes y sumideros en el intervalo k

$Q_{i,k}$  y  $Q_{j,k}$  los aportes o extracciones de cada fuente o sumidero presentes en el intervalo k

$Y_k^{\text{sup}}$  y  $Y_k^{\text{inf}}$  las concentraciones límites del intervalo k.

En las expresiones, la relación de menor se cumple cuando la corriente no se encuentra presente en la totalidad del intervalo. En rigor, siendo  $Y^{\text{ent}}$ ,  $Y^{\text{sal}}$  las concentraciones de entrada y salida de una corriente, debe ser:

$$Q_{i,k} = W_i^F (Y_k^{\text{sup}} - Y_i^k) \quad ; \quad Y_i^k = \max(Y_k^{\text{inf}}, Y_i^{\text{sal}}) \quad ; \quad i \in F_k$$

$$Q_{j,k} = W_j^S (Y_j^k - Y_k^{\text{inf}}) \quad , \quad Y_j^k = \min(Y_k^{\text{sup}}, Y_j^{\text{sal}}) \quad ; \quad j \in S_k$$

En el balance global del intervalo resulta

$$Q_k^F + R_{k-1} = Q_k^S + R_k \quad \Rightarrow \quad R_k = Q_k^F + R_{k-1} - Q_k^S \quad ; \quad R_0 = 0 \quad (1)$$

y debe ser  $R_k \geq 0$  en todos los intervalos. En particular, para cumplimentar los requerimientos que se imponen a la red, en el último intervalo, debe ser  $R_N = 0$ .

A este conjunto de relaciones se le impondrá el objetivo de minimizar el costo asociado a la utilización de sumideros externos, en la suposición de que el uso de corrientes de proceso no implica costo alguno, al menos en un nivel significativo:

$$FO = \min_{W_j} \sum_{j=N_{SP}+1}^{N_S} C_j^S W_j^S$$

## Análisis de un caso

Supóngase que la remoción de fenol vista en el capítulo anterior se plantea en términos algo diferentes, siendo 0,00003 el valor de la concentración de salida para R2 y 0,02 el costo unitario de S5. En la tabla 1 se indican los valores para las corrientes de proceso, fuentes y sumideros. En esa tabla, para evitar confusiones, se han renombrado las corrientes ricas como F# en lugar de R#.

Corr.	Caudal [kg/s]	Fracc. másica entrada	Fracc. másica salida	Cte. Equil.	Aprox. Mín. [f.másica]	Fracc. entrada despl.	Fracc. salida despl.
F1	2	0,050	0,010	-	-		
F2	1	0,030	0,00003	-	-		
S1	5 <sup>1</sup>	0,005	0,015 <sup>2</sup>	2	0,001	0,012	0,032
S2	3 <sup>1</sup>	0,010	0,030 <sup>2</sup>	1,53	0,001	0,01683	0,04743
Notas: 1. Caudal máximo disponible      2. Concentración máxima permitida							

**Tabla 1.** Datos del caso

A su vez, la tabla 2 contiene los nuevos valores para las corrientes externas de extracción disponibles.

Corr.	F. másica entrada	F. másica salida	Cte. equilibrio	Aprox. Min. [f.másica]	Costo [\$/kg]
S3	0	0,11	0,02	0,001	0,081
S4	0	$x_{4s}$	0,09	0,001	$0,19+0,128 x_{4s}$
S5	0	0,029	0,04	0,001	0,02

**Tabla 2.** Datos de las corrientes externas

En la tabla 3 se repiten los valores de fracciones de masa expresados en unidades de corrientes fuentes.



S3		S4		S5	
entrada	salida	entrada	salida	entrada	salida
0,00002	0,00222	0,00009	$0,09(x_4+0,001)$	0,00004	0,0012

**Tabla 3.** Valores desplazados

Como ya se analizó en el capítulo anterior, S4 nunca será elegible frente a S3, si de minimizar costos se trata.

La situación con S5 ha cambiado y debe realizarse nuevamente el análisis comparativo. El costo por kilogramo de fenol removido para S3 era – y sigue siendo –  $0,081/0,11 = 0,736$  \$/kg, considerando la máxima remoción posible. Para S5 ahora resulta ser  $0,02/0,029 = 0,690$  y si bien S3 puede remover todo lo que es capaz de lograr S5, la relación de costos ahora no le es favorable.

Puede verse, también, que F2 requiere la presencia de S3, ya que S5 no es capaz de alcanzar el valor estipulado de 0,00003 para la fracción másica de salida.

En consecuencia, habrá que considerar ambas corrientes, S3 y S5, en el análisis.

Esta situación, si hubiese que abordarla a través del método Pinch, sería bastante complicada, con consideraciones que exceden los presupuestos básicos de la metodología.

La resolución mediante el método de Transbordo es, por el contrario, extremadamente simple.

Lo primero que se debe determinar son los límites de los intervalos. Para ello basta considerar los valores de concentraciones de fenol de entrada para cada corriente, aunque luego esto complique un tanto el cálculo de los aportes. Dichos límites, ordenados en forma descendente, son:

0,05      0,03      0,01683      0,012      0,00004      0,00002

Como se ha indicado, la participación de cualquier corriente en un determinado intervalo puede abarcar la totalidad del mismo o solamente una parte, dependiendo de los valores de concentración de entrada y salida.

Una cuestión adicional que diferencia la estructuración de una red de intercambio térmico de otra de masa, donde se remueve un cierto

contaminante, es que los caudales de las corrientes sumidero, tanto de proceso como externas, no tienen, en general, por qué estar fijos, siendo una de las cuestiones a determinar cual es el valor más conveniente de los mismos.

Si bien, para los sumideros externos no se admitirá limitación alguna, para los caudales de los de proceso existirá el límite impuesto por la disponibilidad máxima establecida en cada caso.

Esto introduce una complicación adicional, que refuerza la ventaja del método de Transbordo frente a la metodología Pinch.

En el tratamiento de programación matemática en la estructuración de RIT, se utilizó la Cascada de Calor como apoyo para la formulación del problema. Si bien aquí se podría hacer lo mismo, se ha de utilizar la Tabla del Problema como herramienta para ese fin, ya que como se dijo, ambas representaciones son equivalentes.

En el caso de mínimo costo en el uso de agentes externos, la tabla puede dar la estructura de las ecuaciones en forma completa; en tanto que en el caso de mínimo número de equipos o intercambios no permitidos, servirá como referencia en la formulación.

El hecho de que en la estructuración de RIM, los caudales de los sumideros a utilizar sean variables, hace que la construcción de la tabla no pueda realizarse, pero, si lo que se pretende es concretar el modelo matemático, pueden considerarse caudales unitarios para dichos sumideros y los valores que resulten afectarán, en las ecuaciones, a los caudales operativos.

Otra cuestión que deberá tenerse en cuenta es que, al tratar la estructuración de RIT por el Modelo de Transbordo, se modifica la convención utilizada en la Tabla en el método Pinch, ya que no aparecerán signos atribuidos a las distintas transferencias, debiendo ser incorporados en la formulación de las ecuaciones del modelo.

Con todas estas consideraciones, para el primer intervalo de concentraciones, los aportes son:

$$Q_{F1,1} = 2 (0,05 - 0,03); Q_{S1,1} = 1 (0,032 - 0,03); Q_{S2,1} = (0,04743 - 0,03);$$
$$Q_{F2,1} = Q_{S3,1} = Q_{S5,1} = 0$$

A partir de este punto, para una notación más compacta, los valores en las tablas y gráficos, de fracciones másicas se encuentran expresados como porcentajes y los de flujos de contaminante en g/s.

Con esto, la Tabla del Problema, para esos caudales unitarios en los sumideros, es la que se muestra en la tabla 4.

Ysup	Yinf	F1	F2	S1	S2	S3	S5	R
5,000	3,000	40,00	0	2,00	17,43	0	0	20,57
3,000	1,683	26,34	13,17	13,17	13,17	0	0	33,74
1,683	1,200	9,66	4,83	4,83	0	0	0	43,40
1,200	0,004	4,00	11,96	0	0	2,18	1,16	56,02
0,004	0,002	0	0,01	0	0	0,02	0	56,01

**Tabla 4.** *Tabla del Problema inicial*

En las dos primeras columnas figuran los valores de concentración superior e inferior de cada intervalo; en las seis siguientes los aportes o extracciones de cada corriente y la de la extrema derecha, el remanente  $R_k$  que se expresa en términos de la ecuación (1).

Puede verse que, aunque no existen violaciones termodinámicas (todos los  $R_k$  son no negativos), el sistema está desbalanceado ya que el último R no es nulo.

La solución, como siempre, es plantear el problema de Programación Lineal donde debe hacerse mínimo el costo asociado al consumo de agentes externos

$$\min [0,081W_3^S + 0,02W_5^S]$$

variando los valores de los caudales de las corrientes sumidero,

$$W_1^S, W_2^S, W_3^S, W_5^S$$

Los límites para los sumideros de proceso establecen que

$$W_1^S \leq 2,5 ; W_2^S \leq 1,961$$

En los intervalos, la condición de  $R_k \geq 0$ , salvo el último que debe ser igual a cero, se expresará, teniendo en cuenta que cada fila de la tabla 5 corresponde a caudales de sumideros unitarios

$$0,04 + 0,02 W_1^S + 0,01743 W_2^S \geq 0$$

.....

$$0,00001 + 0,00002 W_3^S = 0$$

Al resolver este problema, se encuentran los siguientes valores óptimos, considerando escalas no desplazadas

$$W_1^S = 5,00 \quad W_2^S = 2,079 \quad W_3^S = 0,01 \quad W_5^S = 0,596$$

La Tabla del Problema, con estos caudales, resulta ser la mostrada en la tabla 5.

Ysup	Yinf	F1	F2	S1	S2	S3	S5	R
5,000	3,000	40,00	0	5,00	23,69	0	0	11,31
3,000	1,683	26,34	13,17	32,93	17,90	0	0	0
1,683	1,200	9,66	4,83	12,08	0	0	0	2,42
1,200	0,004	4,00	11,96	0	0	1,09	17,28	0
0,004	0,002	0	0,01	0	0	0,01	0	0

**Tabla 5.** *Tabla del Problema en el óptimo*

Por una parte, puede verse que se utiliza la totalidad del caudal disponible de gas oil y sólo un 70%, aproximadamente, de la corriente de aceite. En los agentes externos, el uso de carbón activado es mínimo, apenas el suficiente para remover el fenol en las concentraciones más bajas.

También puede advertirse la aparición de dos puntos Pinch, el superior, en la fracción molar 0,01683 y otro, por debajo, a 0,00004.

La existencia de Pinch múltiples es consecuencia de la intervención de más de una corriente auxiliar de un mismo tipo. Extendiendo el concepto básico del método, cada bloque debe ser tratado en forma separada, para evitar las transferencias a través de los puntos Pinch existentes.

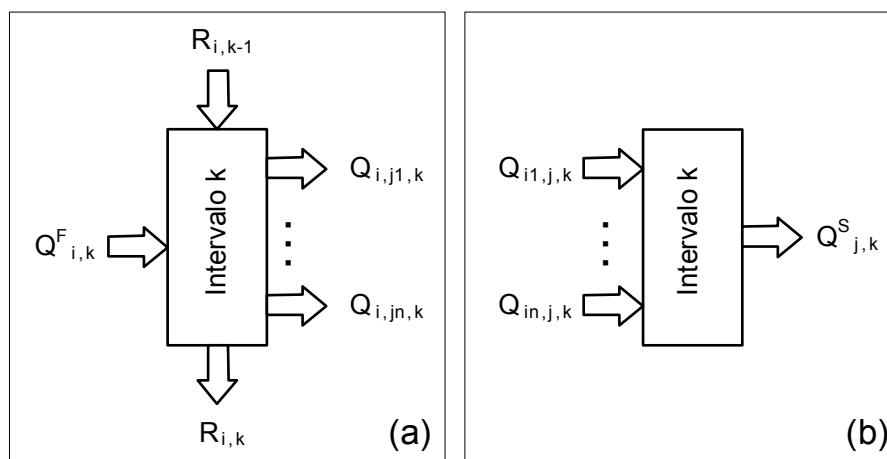
## Uso de la Cascada Expandida

El enfoque anterior es suficiente para los casos donde no resulta necesario individualizar las transferencias que tienen lugar entre una fuente en particular y un determinado sumidero.

Cuando ocurre esto último resulta necesario individualizar cada uno de esos aportes, por origen, destino y nivel en que se producen, así como también los remanentes de lo aportado por cada fuente, los que se hallan disponibles en intervalos de menor concentración.

Se indicarán, entonces, flujos transferidos  $Q_{i,j,k}$ , donde  
 $i$  es la fuente que realiza el aporte;  
 $j$  el sumidero que lo recibe y  
 $k$  el intervalo en el que se produce la transferencia.

En la figura 2 se esquematiza esta situación, donde se ha admitido que existen  $j_n$  sumideros en el intervalo  $k$  recibiendo aportes de la fuente  $i$  y un número  $i_n$  de fuentes que transfieren masa al sumidero  $j$ .



**Figura 2.** Intercambios de fuente y sumidero

La parte (a) de la figura 2 esquematiza los intercambios de la fuente en tanto que la (b) lo hace con los del sumidero.

A modo de resumen de notación, si se considera:

$Q^F_{i,k}$  : flujo de masa aportado por la fuente  $i$  en el intervalo  $k$ ;

- $Q_{j,k}^S$  : flujo de masa que recibe el sumidero j en el intervalo k;
- $\{F_k\}$  : conjunto de fuentes presentes en el intervalo k;
- $\{F_k^+\}$  : conjunto de fuentes presentes en el intervalo k o de un nivel de concentración superior;
- $\{S_k\}$  : conjunto de sumideros presentes en el intervalo k;
- $Q_{i,j,k}$  : flujo de masa intercambiado entre la fuente i y el sumidero j en el intervalo k;
- $R_{i,k}$  : flujo de masa a ser removido de la fuente i en los intervalos siguientes a k;
- $U_{i,j}$  : máximo flujo de masa posible de ser intercambiado entre la fuente i y el sumidero j, siendo
- $$U_{i,j} = \min \left\{ \sum_{\forall k} Q_{i,k}^F, \sum_{\forall k} Q_{j,k}^S \right\}$$
- $E_{i,j}$  : variable binaria igual a 1 si la fuente i intercambia con el sumidero j, 0 en caso contrario

Entonces, se puede plantear

- 1) un balance de masa para la fuente i en el intervalo k, de acuerdo a lo indicado en la figura 2 (a)

$$R_{i,k} = R_{i,k-1} + Q_{i,k}^F - \sum_{j \in \{S_k\}} Q_{i,j,k} \quad ; \quad i \in \{F_k^+\} \quad ; \quad k = 1, \dots, N \quad (2a)$$

- 2) un balance de masa para el sumidero j en el intervalo k, de acuerdo a lo indicado en la figura 2 (b)

$$\sum_{i \in \{F_k^+\}} Q_{i,j,k} = Q_{j,k}^S \quad j \in \{S_k\} \quad ; \quad k = 1, \dots, N \quad (2b)$$

- 3) un límite en el intercambio total entre la fuente i y el sumidero j

$$\sum_{\forall k} Q_{i,j,k} \leq E_{i,j} U_{i,j} \quad i \in \{F_k^+\} \quad ; \quad j \in \{S_k\}, \forall k \quad (2c)$$

- 4) restricciones sobre los remanentes de aportes

$$R_{i,k} \geq 0 \quad i \in \{F_k^+\} \quad ; \quad k = 1 \dots N-1 \quad ; \quad R_{i,N} = 0 \quad i \in \{F_N^+\} \quad (2d)$$

- 5) restricciones sobre los aportes y las variables de intercambio

$$Q_{i,j,k} \geq 0 \quad ; \quad E_{i,j} \in \{0,1\} \quad \forall i, \forall j, \forall k \quad (2e)$$

Las variables  $E_{i,j}$  y las relaciones (2c) sólo tienen sentido incluirlas cuando se pretende determinar el mínimo número de equipos en la estructuración de una RIM. En este caso debe lograrse

$$\min \sum_{\forall i} \sum_{\forall j} E_{i,j}$$

Si el problema plantea el mínimo costo en el uso de corrientes externas de extracción, el planteo de las relaciones (2a) a (2e) sólo se justifica cuando existen intercambios no permitidos entre fuentes y sumideros.

Al igual que en el caso de intercambio térmico, cuando existe una limitación para que la fuente  $F_p$  intercambie con el sumidero  $S_q$  bastará con hacer  $Q_{pqk} = 0$  para todo  $k$ , esto es, no considerar, en el planteo anterior, ningún flujo entre  $F_p$  y  $S_q$ .

Como aplicación de lo anterior, supóngase que se desea determinar el menor número de unidades de intercambio para el primer bloque de la tabla 5.

En la tabla 6 se resume la situación (tomando valores desplazados para los caudales y flujos)

Caudales [kg/s]		2,000	1,000	2,500	1,359	
Ysup	Yinf	F1	F2	S1	S2	R
5,000	3,000	40,00	0	5,00	23,69	11,31
3,000	1,683	26,34	13,17	32,93	17,90	0

**Tabla 6.** *Tabla del Problema inicial*

Los balances sobre las fuentes en cada intervalo quedan

1) para F1

$$\text{Int. 1: } R_{11} = 0,04 - (Q_{111} + Q_{121})$$

$$\text{Int. 2: } R_{12} = 0 = R_{11} + 0,02634 - (Q_{112} + Q_{122})$$

2) para F2

$$\text{Int.2: } R_{22} = 0 = 0,01317 - (Q_{212} + Q_{222})$$

Los correspondientes balances sobre los sumideros plantean que

1) para S1

$$\text{Int.1: } Q_{111} = 0,005$$

$$\text{Int.2: } Q_{112} + Q_{212} = 0,03293$$

2) para S2

$$\text{Int.1: } Q_{121} = 0,02369$$

$$\text{Int.2: } Q_{122} + Q_{222} = 0,0179$$

Los límites sobre los intercambios establecen que

1) para el par F1 – S1

$$Q_{111} + Q_{112} \leq E_{11} \min (0,06634, 0,03793) = 0,03793 E_{11}$$

2) para el par F1 – S2

$$Q_{121} + Q_{122} \leq 0,04159 E_{12}$$

3) para el par F2 – S1

$$Q_{212} \leq 0,01317 E_{21}$$

4) para el par F2 – S2

$$Q_{222} \leq 0,01317 E_{22}$$

La función objetivo, obviamente es

$$\min \{E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22}\}$$

Una variante al planteo anterior consiste en considerar variables los caudales de todos los sumideros, al igual que se hizo cuando se quería determinar el mínimo costo en el uso de agentes externos.

Los balances quedarán

1) para S1

$$\text{Int.1: } Q_{111} = (0,032 - 0,03) W^{S_1} = 0,002 W^{S_1}$$

$$\text{Int.2: } Q_{112} + Q_{212} = (0,03 - 0,01683) W^{S_1} = 0,01317 W^{S_1}$$

2) para S2

$$\text{Int.1: } Q_{121} = (0,04743 - 0,03) W^{S_2} = 0,01743 W^{S_2}$$

$$\text{Int.2: } Q_{122} + Q_{222} = (0,03 - 0,01683) W^{S_2} = 0,01317 W^{S_2}$$

Los caudales de los sumideros deben quedar limitados a los valores encontrados en la resolución del bloque, esto es

$$W^{S_1} \leq 2,5 ; \quad W^{S_2} \leq 1,359$$

Obviamente, la solución se ha de encontrar en esos límites para los sumideros – el sistema está equilibrado con las fuentes- pero, al admitir valores variables, el método de optimización es capaz de ajustarlos de modo que cumplan las relaciones planteadas, evitando que, al introducir las constantes, no se encuentren soluciones válidas, debido a errores de redondeo.



Pero ésta no es la única ventaja de este planteo. El considerar la totalidad de los caudales fijos en los valores que equilibran el sistema obliga, al menos en teoría, a no considerar una de las ecuaciones del conjunto (2a)  $\cup$  (2b).

En efecto, para una fuente cualquiera  $i$ ,  $i = 1, \dots, N_F$ , en el intervalo  $k$  se tiene

$$R_{i,k-1} + Q_{i,k}^F - \sum_{j \in \{S_k\}} Q_{i,j,k} = R_{i,k} \quad k = 1, \dots, N$$

Para esa fuente, considerando todos los intervalos y dado que, por estar equilibrado el sistema  $R_{i,N} = 0$ , resulta

$$\sum_{\forall k} \sum_{j \in \{S_k\}} Q_{i,j,k} = \sum_{\forall k} Q_{i,k}^F \quad k = 1, \dots, N$$

La cantidad total a ser transferida será

$$\sum_{\forall i} \sum_{\forall k} \sum_{j \in \{S_k\}} Q_{i,j,k} = \sum_{\forall i} \sum_{\forall k} Q_{i,k}^F$$

Para el sumidero  $j$ ,  $j = 1, \dots, N_S$ , en el intervalo  $k$  se puede poner

$$\sum_{i \in \{F_k^+\}} Q_{i,j,k} = Q_{j,k}^S \quad k = 1, \dots, N$$

Si se consideran todos los intervalos

$$\sum_{\forall k} \sum_{i \in \{F_k^+\}} Q_{i,j,k} = \sum_{\forall k} Q_{j,k}^S \quad j = 1, \dots, N_S$$

La cantidad total a ser removida será

$$\sum_{\forall j} \sum_{\forall k} \sum_{i \in \{F_k^+\}} Q_{i,j,k} = \sum_{\forall j} \sum_{\forall k} Q_{j,k}^S$$

Obviamente, al estar considerados todos los intercambios posibles entre fuentes y sumideros debe ser

$$\sum_{\forall i} \sum_{\forall k} \sum_{j \in \{S_k\}} Q_{i,j,k} = \sum_{\forall j} \sum_{\forall k} \sum_{i \in \{F_k^+\}} Q_{i,j,k}$$

Por ser un sistema equilibrado se cumple que

$$\sum_{\forall i} \sum_{\forall k} Q_{i,k}^F = \sum_{\forall j} \sum_{\forall k} Q_{j,k}^S$$

y las ecuaciones que definen el sistema (2a)  $\cup$  (2b) no son linealmente independientes, lo que obliga a deshechar una de ellas en el planteo.

Esto, como se dijo, es en teoría, ya que, con una adecuada precisión en el cálculo, el grado de libertad negativo que se genera al no eliminar una ecuación no ha de generar inconsistencia en los resultados. Obviamente, existe el riesgo

de que la precisión con la que trabaja el método no sea la necesaria y no se encuentre la solución.

El mínimo número de equipos que se obtiene para el problema de la tabla 6, considerando variables los caudales de los sumideros  $S_1$  y  $S_2$ , plantea intercambios entre la fuente  $F_1$  y ambos sumideros y entre  $F_2$  y  $S_2$ . Los valores de dichos intercambios son:

$$Q_{112} = 0,03792 \quad Q_{121} = 0,02842 \quad Q_{222} = 0,01317$$

En la figura 3 se muestra el esquema de la estructura resultante, la que coincide con la obtenida en la aplicación del método Pinch. En ella, se han indicado, recuadrados, en los ingresos de las corrientes o sus divisiones, los caudales de las mismas; en tanto que, sobre los intercambios, se encuentran los valores de los flujos.

En el problema de determinar el mínimo número de equipos para un determinado sistema hay una cuestión adicional, por cierto, no menor.

A poco que se analice el planteo se puede ver que, para el método, se unifican todos los intercambios que se realizan entre la fuente  $i$  y el sumidero  $j$ , independientemente del intervalo

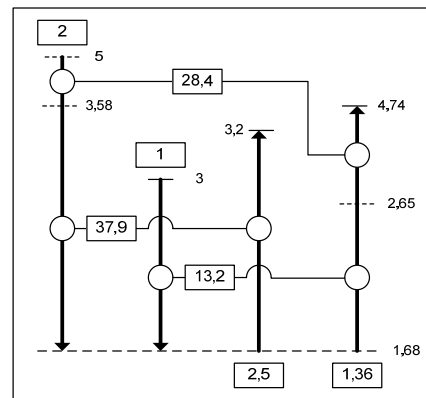


Figura 3. RIM - Mín N° equipos

donde se produce y sin considerar el caudal con el que participan las corrientes en cada uno de ellos. Es posible, entonces, que el caudal de la fuente o del sumidero, o ambos, no sea igual en los intercambios  $Q_{i,j,p}$  y  $Q_{i,j,q}$ , lo cual, técnicamente, debe traducirse como operaciones que suceden en dos equipos diferentes.

Así, por ejemplo, en el problema analizado hasta aquí sería posible encontrar una solución como la de la figura 4. En este caso, se habrían encontrado los siguientes valores para los distintos flujos:

$$\begin{aligned} Q_{111} &= 0,00500 & Q_{112} &= 0,01981 & Q_{121} &= 0,02369 \\ Q_{122} &= 0,01790 & Q_{212} &= 0,01317 & Q_{222} &= 0,00000 \end{aligned}$$

Puede verse que la solución encontrada obliga a dividir S1, para luego volver a la corriente completa. La fuente F1 intercambia con S1, primero con una de las ramas y luego con la porción final.

Así,  $Q_{111}$  y  $Q_{112}$ , que serían contabilizados por el método como un único equipo, procesan diferentes caudales del sumidero, lo que exige, técnicamente, diferentes equipos de transferencia.

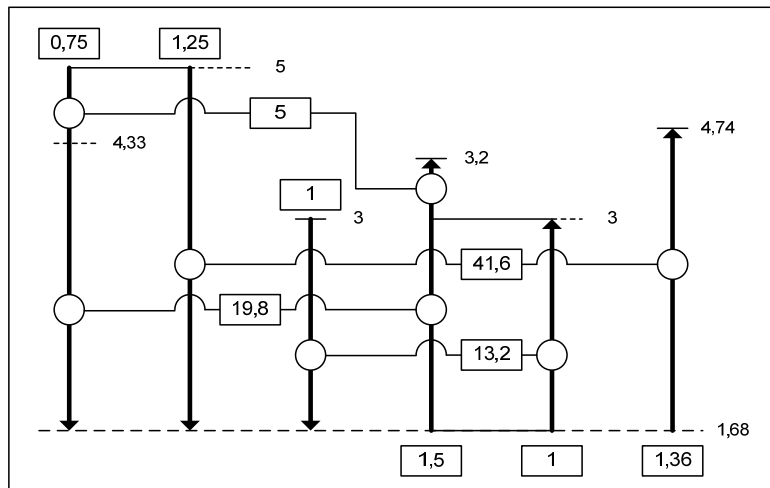


Figura 4. Solución alternativa

Una última consideración. En la determinación del mínimo número de equipos se ha trabajado considerando como necesaria la utilización de los sumideros de proceso.

Plantear el análisis en otras condiciones no tiene sentido. Siempre ha de existir, al menos, un sumidero auxiliar, que complete la capacidad de extracción de las corrientes de proceso. Si no se toman en consideración los costos de utilización de esos servicios ni se presentan problemas de disponibilidad, bastará con uno de ellos para dar satisfacción a cualquier requerimiento que se plantee.

Así, si el problema involucra, como corrientes de proceso, a  $N_F$  fuentes y  $N_S$  sumideros, debería esperarse un número de equipos  $N_U = N_F + N_S + 1 - 1 = N_F + N_S$ , para una estructura que minimice el consumo de la corriente auxiliar.

Pero, como el costo de su uso queda fuera de consideración, la solución obvia, donde se plantea extraer todo con el sumidero auxiliar, requiere, en principio, un menor número de equipos: apenas  $N_F$ .

## Complemento InteProc

Este complemento permite encontrar el mínimo consumo de servicios con intercambios no permitidos y el mínimo número de equipos con y sin esa restricción, para una red de intercambio (térmico o másico), usando el Modelo de Transbordo.

El complemento InteProc requiere el uso del Solver de la planilla Excel®, por lo que debe estar disponible en ella.

Los problemas que pueden ser tratados no tienen límites en cuanto al número de corrientes y servicios auxiliares a utilizar.

Al cargarse el complemento se genera el elemento de menú *Integración*, desde el cual es posible seleccionar las distintas operaciones: *Nuevo Problema*, *Intercambios no Permitidos*, *Definir Modelo* y *Dibujar Cascada*.

Al invocar *Nuevo Problema*, se debe definir el tipo (RIT o RIM) y el número de fuentes y sumideros de proceso y externos. Tras esto, el complemento genera una hoja donde se han de ingresar los datos: valores máximos y mínimos de las variables (temperatura o concentración), caudales, relación de transformación a la escala de trabajo elegida, intervalos del modelo de Transbordo y pertenencia, total o parcial, de cada corriente en cada uno de los intervalos.

Una vez ingresados los datos, si existiesen intercambios no permitidos, se deben definir los mismos, en este momento, mediante la orden específica.

El paso siguiente es dar la orden *Definir Modelo*, la que admite dos alternativas:

- Mínimo Costo de Servicios (cuando hay intercambios no permitidos)
- Mínimo Número de Equipos

En ambos casos, el complemento arma la matriz de coeficientes, calcula los balances y define el sector de variables.

El usuario debe construir la función objetivo que corresponde al modelo elegido, seleccionar las variables sobre las que actuará el optimizador y establecer las condiciones, para luego proceder a determinar la solución óptima del problema utilizando el complemento Solver.

El complemento se puede utilizar para determinar, simultáneamente, el mínimo número de equipos con un costo de servicios mínimo. Para ello, se debe, primero, calcular la condición de dichos servicios y luego, la de los equipos, si existe Pinch, resolviendo cada bloque por separado; si no, agregando al modelo que genera el complemento, las ecuaciones que determinan los consumos encontrados en el paso anterior.

Lo expuesto aquí es una síntesis de los aspectos básicos del complemento InteProc. Una información más completa se puede obtener accediendo a la ayuda del mismo.

Además, en el Anexo C se agrega una tutoría con las distintas posibilidades de uso del complemento.

## **Bibliografía**

- Iglesias O.A., Paniagua C.N., “InteProc, un Auxiliar para la Enseñanza Unificada de la Estructuración de Redes de Intercambio”, Actas de VI Conferencia Internacional de Educación en Ingeniería y Computación, pp. 1148-1151, Buenos Aires, Argentina, 2009.
- El-Halwagi M.M., “Pollution Prevention through Process Integration”, Academic Press, 1997.

## Propuesta de trabajo

Dado el siguiente sistema, y considerando una aproximación mínima en la fracción molar de 0,0005 para todos los agentes de extracción, determinar, utilizando el complemento *InteProc.xla*:

- El mínimo consumo de agentes externos.
- El mínimo número de equipos teniendo en cuenta el mínimo consumo.

Corr.	Flujo [kgmol/s]	Frac. molar de entrada	Frac. molar de salida	Cte. equilibrio	Costo [\$/kgmol]
R1	3,5	0,0110	0,0030		
R2	1,5	0,0100	0,0050		
R3	2,5	0,0080	0,0025		
S1	10,0(*)	0,0017	0,0025	1,2	
SA	$\infty$	0,0025	0,0100	1,0	1,5
SB	$\infty$	0	0,0050	0,5	2,3

(\*): Máximo

# CAPÍTULO 12

## PROGRAMACIÓN DINÁMICA

### Conceptos básicos de Programación Dinámica

Como ya quedase dicho, las llamadas *programaciones* constituyen uno de los grandes capítulos de las Técnicas de Optimización. Su aplicación se restringe a problemas que se pueden formular bajo una estructura específica, para la cual se desarrolla una estrategia de optimización sumamente eficiente.

La más antigua de estas técnicas es la Programación Lineal, cuyos conceptos y algoritmos operativos básicos datan de mediados del siglo pasado; fundados, principalmente, en los trabajos de Dantzig y el grupo de la Rand Corp.

En este caso, al igual que en la programación cuadrática o geométrica, las exigencias se refieren al tipo de ecuaciones que definen el problema.

La que ha de ocupar la atención de este capítulo no pertenece a las técnicas que requieren funcionalidades determinadas en la formulación del modelo matemático sino a la estructura del mismo.

*Programación Dinámica* es una técnica de optimización que se aplica exclusivamente a sistemas cuyo *diagrama de flujo de información es seriado multietapas*, entendiendo por serios aquellos diagramas donde en *toda* etapa las variables que ingresan a ella son *de decisión o provienen solo de la etapa que la precede de acuerdo al flujo de información*, tal como el que se muestra en la figura 1.

Allí se ha buscado representar con flecha entera gruesa conjuntos de variables, por ejemplo  $\underline{d}_k$  debe entenderse como un vector de componentes  $d_{k1}, d_{k2}, \dots$

Las variables escalares, como todas las  $r_i$ , por ejemplo, se indican con una media flecha fina. Estas variables  $r_i$  representan el aporte que realiza en forma

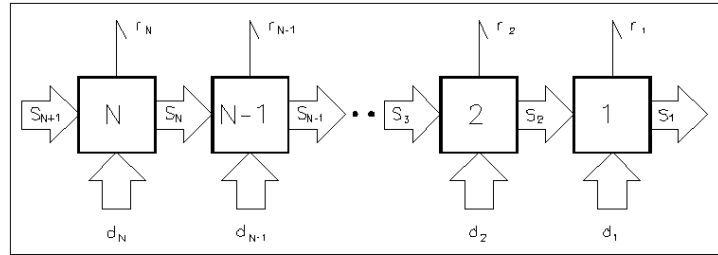


Figura 1. Sistema seriado multietapas

individual cada etapa a la función objetivo del sistema. En definitiva, el problema puede ser formulado como sigue

$$FO_N = \underset{d_1, \dots, d_N}{\text{opt}} \left[ \sum_{i=1}^N r_i \right] = \left( \sum_{i=1}^N r_i \right)^*$$

$$\text{con } f(S_{i+1}, S_i, d_i) = 0$$

$$g(S_{i+1}, S_i, d_i) \leq 0$$

$$r_i = r_i(S_{i+1}, S_i, d_i) \quad i = 1..N$$

donde  $f_i$  y  $g_i$  deben tomarse como vectores de funciones de componentes  $f_{i1}, f_{i2}, \dots, g_{i1}, g_{i2}, \dots$

Resulta importante aclarar que en todo el capítulo, al hacerse referencia a las variables de estado de una etapa, esto es, que abandonan esa etapa, solo se han de considerar, salvo expresa mención en contrario, las que se conectan con otra etapa, lo que de modo alguno quiere decir que sean las únicas que existan. Son las que interesan desde el punto de vista de Programación Dinámica, que es algo muy distinto, pero al momento de calcular los aportes a la función objetivo deben tenerse en cuenta, como es obvio, todas las variables, sean o no de interconexión.

Volviendo al diagrama de flujo de la figura 1, la particular estructura que presenta permite inferir rápidamente que las consecuencias de cualquier decisión que se tome en cualquier etapa se pueden proyectar solo hacia adelante en el flujo de información, en rigor, en forma directa, a la etapa siguiente y, a través de ésta, a las restantes.

Esto es típico, por ejemplo, en todo proceso que se desarrolla a lo largo del tiempo, donde las acciones que se toman en el presente solo han de tener consecuencias en el futuro. La situación presente, en tanto, es la resultante de las decisiones del pasado, inmodificable, por cierto, ante la cual, en consecuencia,



solo cabe aceptar la realidad y determinar el curso a seguir, en aras de alcanzar el mejor futuro posible.

Esta *dinámica* se repite en sistemas seriados multietapas, donde un "presente" en particular es el valor que toman las variables de interconexión que ingresan a una etapa  $k$  cualquiera ("*estado*" del sistema a la entrada de la misma), en tanto que el "futuro" lo constituye el subdiagrama que comienza en la etapa  $k$  y concluye con la final. Nótese que se habla de *valores de las variables y estado del sistema, ya que este último es un valor singular, que queda definido por los primeros.*

Para un determinado estado  $S_{k+1}$ , v.g.  $S_{k+1}^j$ , existe un conjunto de decisiones (podría decirse "en el futuro")  $d_k^j, \dots, d_1^j$  que logran un valor óptimo para el conjunto de aportes parciales  $r_1, \dots, r_k$ .

Dado que al fijarse  $d_k^j$  queda perfectamente determinado  $S_k^j$  y que, con esto, se tiene una situación, para las últimas  $k-1$  etapas, equivalente por completo a lo anterior, se puede poner que

$$FO_k(S_{k+1}) = \underset{d_k, \dots, d_1}{\text{opt}} \left[ \sum_{i=1}^{i=k} r_i \right] = \underset{d_k}{\text{opt}} [r_k + FO_{k-1}(S_k)] \quad (1)$$

donde ahora  $S_{k+1}$  tiene un valor genérico y las  $d_k, \dots, d_1$  que logran el óptimo de  $FO_k$  (y éste mismo) resultan ser *funciones* de ese valor.

Cuando lo anterior es cierto para cualquier valor de  $k$  entre 1 y  $N$  se tiene el óptimo para el sistema, según lo expresa el llamado *principio de optimalidad de Bellman*, quien, en la década del 50, planteó los fundamentos de Programación Dinámica, por el que se establece que *la política óptima  $d_N^*, \dots, d_1^*$  para un sistema de  $N$  etapas debe ser tal que el subconjunto de decisiones para las  $k$  últimas etapas  $d_k^*, \dots, d_1^*$  resulta óptimo para el estado  $S_{k+1}$ , para todo  $k$  entre 1 y  $N$ .*

La expresión (1), asimismo, establece la estructura fundamental de la estrategia de optimización por Programación Dinámica, como podrá verse a continuación.

## Estrategia básica

En la exposición de la estrategia o algoritmo básico de Programación Dinámica, para una mayor claridad en la exposición, se admitirá que en el diagrama de flujo

general de la figura 1 hay solo una variable de interconexión y una de decisión por etapa.

Esto permite que, en la determinación del estado a la entrada de cada etapa, se logre la mayor simplicidad de tratamiento pues basta con fijar el valor de una sola variable. Otro tanto ocurre con la búsqueda de los óptimos parciales la que se ha de efectuar, también, sobre una variable.

De modo alguno esto resta generalidad al tratamiento. Si se incrementase en uno o más puntos del diagrama el número de variables de interconexión habría de crecer la complejidad en la determinación del estado a la entrada de la etapa, o etapas, correspondiente, pero el concepto de estado ha de seguir siendo singular, con independencia de cuantas variables lo determinan. En forma análoga, si las modificaciones ocurriesen sobre las variables de decisión, sería cuestión de elegir, en cada caso, la metodología de optimización que mejor se ajuste al número de variables y tipo de problema particular.

Hecha esta aclaración es posible, ahora, entrar de lleno en el proceso de análisis que se desprende del principio de Bellman.

De acuerdo a la figura 1 se deberá comenzar por la última etapa, la número 1 en el diagrama (la numeración elegida obedece a que el proceso de análisis "transcurre" en sentido inverso al flujo de información), donde deberá encontrarse

$$FO_1(S_2) = \underset{d_1}{\text{opt}} [r_1(S_2, S_1, d_1)] = \underset{d_k}{\text{opt}} [r_1(S_2, S_1[S_2, d_1], d_1)]$$

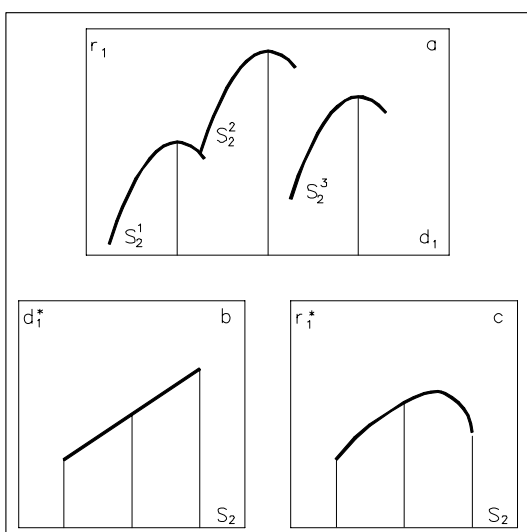


Figura 2. Optimización de la primera etapa

Si se admite que el paso de optimización indicado solo puede ser llevado a cabo en forma numérica (de hecho, la única vía de ataque siempre posible) habrá que determinar el óptimo de  $r_1$  para varios valores de  $S_2$ , de modo de disponer, en forma tabulada, las funciones  $FO_1(S_2)$  y  $d_1^*(S_2)$ .

Lo anterior se muestra en la figura 2, donde, en la parte a de la misma, se representa la búsqueda de los óptimos de

$r_1$  (máximo, en este caso) para distintos valores de  $S_2$ , mientras que en b y c las relaciones  $FO_1(S_2)$  y  $d_1^*(S_2)$  (En ambas figuras se han extrapolado los resultados para obtener lo indicado con las curvas gruesas).

En la segunda fase de optimización deben considerarse las dos últimas etapas y encontrar

$$FO_2(S_3) = (r_2 + r_1)^* = \underset{d_2}{\text{opt}} [r_2(S_3, S_2, d_2) + FO_1(S_2)]$$

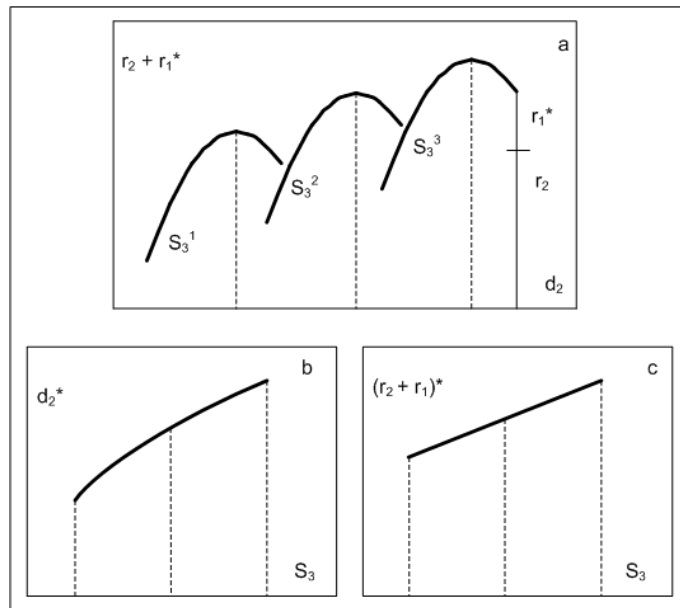
$$= \underset{d_2}{\text{opt}} [r_2(S_3, S_2(S_3, d_2), d_2) + FO_1(S_2(S_3, d_2))]$$

La cuestión es, en esencia, la misma que antes: debe buscarse el óptimo de  $r_1+r_2$  para distintos valores de  $S_3$ , obteniendo, asimismo, los respectivos  $d_2^*$ .

La única diferencia radica en que, dado un valor de  $S_3$ , para obtener el correspondiente a cada  $d_2$  en la función a optimizar, al resultado del cálculo de  $r_2$  debe agregarse el valor de  $FO_1$  que corresponda al  $S_3$  elegido. (Esto se muestra en la figura 3.a donde la ordenada está constituida por dos partes,  $r_2$  y  $r_1^*$ ).

El valor de  $FO_1$  surge interpolando en la tabla obtenida en la etapa anterior, para lo que debe tenerse en cuenta el estado a la salida ( $S_2$ ) que resulta de la combinación de la entrada ( $S_3$ ) y la decisión ( $d_2$ ). Todo esto se ha de repetir en el análisis de las etapas 3,4,...,N-1.

Para la última etapa, en cambio, lo usual es que el estado a la entrada de la



**Figura 3.** Optimización de la segunda etapa

misma se encuentre perfectamente determinado, ya que, si no lo estuviera, el tratamiento que sigue deberá efectuarse para cada uno de los posibles valores. Con esto, la búsqueda de

$$FO_N(S_{N+1}) = \underset{d_N}{\text{opt}} [r_N + FO_{N-1}(S_N)]$$

se reduce a la expresión siguiente, considerando que el estado  $S_{N+1}$  es conocido.

$$\text{opt}_{d_N} [r_N(S_N(d_N), d_N) + FO_{N-1}(S_N(d_N))]$$

Es decir que, en la última etapa, debe realizarse una única búsqueda sobre  $d_N$  para determinar el óptimo de la *función objetivo total*, tal como se indica en la figura 4.

A partir del valor encontrado de  $d_N^*$  es posible el cálculo de  $S_N^*$  y con ésta, a través de la tabla respectiva, determinar  $d_{N-1}^*$  y así, siguiendo ahora el sentido del flujo de información, hasta lograr  $d_1^*$ .

*Resumiendo: la estrategia que plantea Programación Dinámica consta de dos fases, una, primera, por la cual se han de obtener los óptimos parciales de las k últimas etapas y las decisiones óptimas de las mismas en función del estado a la entrada al subsistema; la otra fase, siguiendo el flujo de la información, permite obtener los valores de los estados y decisiones óptimas para todas y cada una de las etapas que componen el sistema.*

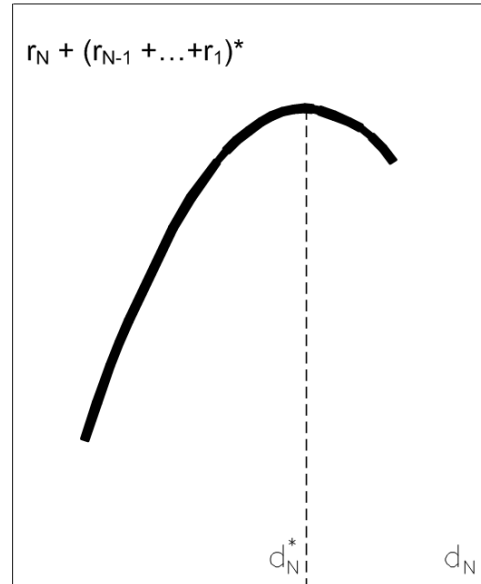


Figura 4. Optimización de la etapa final

Tal vez resulte conveniente fijar estos conceptos a través del análisis de algunos ejemplos sencillos.

En el primero de ellos -la extracción en tres etapas de un soluto con agregados parciales de solvente de extracción presentado en capítulos anteriores- es posible encontrar expresiones funcionales tanto para  $FO_i(S_{i+1})$  como para  $d_i^*(S_{i+1})$ ; en cambio, en el segundo - una red de intercambio térmico con división de corrientes, similar a la vista en el capítulo de ordenamiento de cálculo - debe acudir a la solución numérica planteada como estrategia general.

## Ejemplos demostrativos

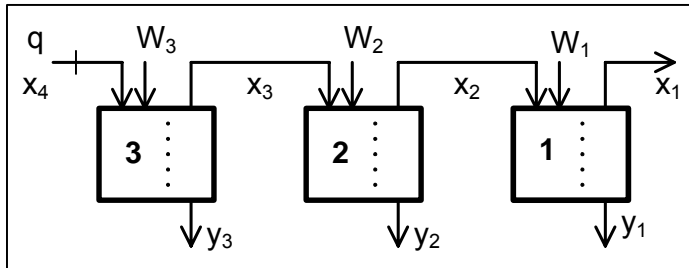


Figura 5. Proceso de extracción

*Problema 1:* En el proceso de extracción en tres etapas en equilibrio que se representa en la figura 5 se admitirá: a) la inmiscibilidad del solvente de extracción y b) una relación de equilibrio lineal  $y_i = k x_i$ , con lo que, además de ésta, la otra ecuación para cada etapa es

$$qx_{i+1} = qx_i + W_i y_i$$

Se busca maximizar la diferencia venta de soluto extraído y gasto de solvente de extracción, siendo C la relación de costo de este último al precio de venta del primero. Con esto, la función objetivo tendrá la forma

$$\text{máx } B = q(x_4 - x_1) - C \sum W_i$$

Los datos del problema serán el caudal q y la fracción  $x_4$ .

La figura 6 muestra el diagrama de flujo de información correspondiente, el que, como puede apreciarse, reúne los requerimientos exigidos para la aplicación de Programación Dinámica.

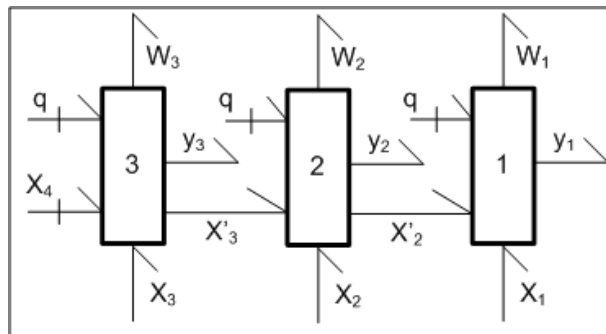


Figura 6. Diagrama de flujo de información

En las etapas 2 y 3 se ha añadido una ecuación ( $x_i = x'_i$ ) a fin de clarificar el uso de la técnica, al evitar que una misma variable,  $x_i$ , aparezca, en puntos sucesivos del diagrama, como de decisión y de estado interconectando etapas (Esto sólo por razones didácticas, ya que el tratamiento podría haberse realizado sin recurrir a este artificio).

Para el primer paso de optimización se puede considerar

$$\begin{aligned} \text{máx}_{x_1} [r_1 = q(x_4 - x_1) - CW_1] \\ W_1 = q(x'_2 - x_1) / kx_1 \end{aligned}$$

con lo cual

$$r_1 = q \left[ x_4 - x_1 - p \left( \frac{x_2'}{x_1} - 1 \right) \right], \quad p = \frac{C}{k}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_1} = -1 + p x_2' x_1^{-2} = 0 \Rightarrow x_1^* = \sqrt{p x_2'} \quad (2)$$

$$FO_1(x_2') = r_1^* = q \left[ x_4 + p - 2\sqrt{p x_2'} \right]$$

Como se puede apreciar, las relaciones (2) concluyen por determinar sendas expresiones analíticas para el óptimo parcial y la decisión de la etapa,  $FO_1$  y  $x_1^*$ , en función del estado a la entrada de la misma  $x_2'$ . Estas expresiones corresponden a las curvas estimadas en la figura 2 b y c.

Debe hacerse notar que debe verificarse la naturaleza del punto estacionario determinado, lo que, en este caso, resulta inmediato ya que  $\partial^2 r_1 / \partial x_1^2 = -2p x_2' x_1^{-3} < 0$

Para el segundo paso deben considerarse las dos últimas etapas buscando

$$\begin{aligned} \text{máx} [r_2 + FO_1] &= FO_1 - CW_2 = FO_1 - Cq \frac{x_3' - x_2}{kx_2} \\ &= q \left[ x_4 + p \left( 2 - \frac{x_3'}{x_2} \right) - 2\sqrt{p x_2'} \right] \end{aligned}$$

Esto lleva a

$$\frac{\partial (r_2 + FO_1)}{\partial x_2} = p x_3' x_2^{-2} - \sqrt{p/x_2} = 0 \Rightarrow x_2^* = \sqrt[3]{p x_3'^2}$$

$$FO_2(x_3') = (r_1 + r_2)^* = q \left[ x_4 + 2p - 3\sqrt[3]{p^2 x_3'} \right]$$

(Se deja a cargo del lector el verificar que la derivada segunda es igual a  $-3/2x_3 < 0$ ).

Antes de pasar al tercer, y último, paso de optimización conviene hacer notar que, hasta ahora, las funciones objetivos parciales dependían tanto de la decisión en la etapa inicial del respectivo subdiagrama como del estado a la entrada de la misma.

Al tratar el conjunto de las tres etapas la entrada al sistema está fija ( $x_4$  es un dato), por lo que  $x_3^*$  no será ya función de la misma sino simplemente un valor único (Adviértase el abandono de la utilización de la derivada parcial en la

determinación del punto estacionario). Conviene recordar esto dado que, en la formulación del problema, se ha omitido el darle valores numéricos a los datos y podría aparecer como que se reiteran las situaciones anteriores. Se trata, entonces, de encontrar

$$\max_{x_3} [r_3 + FO_2 = FO_2 - CW_3] = q \left[ x_4 + 3p - 3\sqrt[3]{p^2 x_3} - p \frac{x_4}{x_3} \right]$$

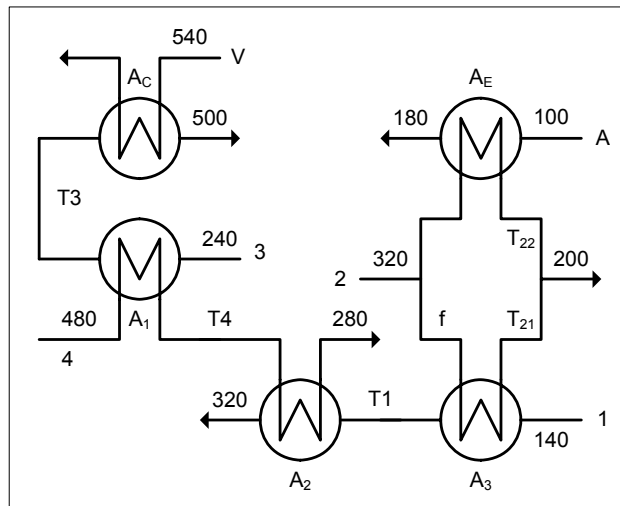
$$\frac{\partial(r_3 + FO_2)}{\partial x_3} = px_4 x_3^{-2} - 3\sqrt[3]{(p/x_3)^2} = 0 \Rightarrow x_3^* = \sqrt[4]{px_4^3}$$

$$FO_3 = (r_3 + r_2 + r_1)^* = q \left[ x_4 + 3p - 4\sqrt[4]{p^3 x_4} \right]$$

y ahora conocido  $x_3^*$  surgen de inmediato  $x_2^*$  y  $x_1^*$ , en la segunda fase de la estrategia de Programación Dinámica, siguiendo el flujo de la información:

$$x_3^{**} = x_3^* = \sqrt[4]{px_4^3} \quad x_2^* = \sqrt{px_4} = x_2^{**} \quad x_1^* = \sqrt[4]{p^3 x_4}$$

**Problema 2:** El esquema de la figura 7 se ha propuesto para resolver un problema de síntesis de redes de intercambio térmico, con dos corrientes de proceso “calientes” y dos “frías”. Se busca resolver el mismo de modo de lograr el mínimo costo total anual.



**Figura 7.** Esquema tecnológico del problema

Se ha de considerar que la unidad funciona 8400 h/año y que son valores conocidos:

Flujos entálpicos en BTU/h°F

$$W_1 = 13/9 \cdot 10^4 \quad W_2 = 15/9 \cdot 10^4 \quad W_3 = 15/13 \cdot 10^4 \quad W_4 = 2 \cdot 10^4$$

Coeficientes globales de transferencia en BTU/hft<sup>2</sup>°F

$$U_C = 200 \quad U_E = U_1 = U_2 = U_3 = 150$$

Propiedades físicas de los servicios

$$C_p A = 1 \text{ BTU/lb}^\circ\text{F} \quad \lambda_v = 657,5 \text{ BTU/lb}$$

Costo de servicios auxiliares en \$/lb

$$\text{Enfriamiento} = 2,86 \cdot 10^{-5} \quad \text{Calentamiento (Vapor)} = 4,29 \cdot 10^{-4}$$

Amortización anual del equipamiento, en \$/año, igual a  $39 A^{0,65}$

Las ecuaciones que definen el modelo matemático del problema son:

Calentador

$$657,5 q_v = \frac{15}{13} 10^4 (500 - T_3)$$

$$\frac{15}{13} 10^4 \left[ \ln \frac{540 - T_3}{40} \right] = 200 A_c$$

Intercambiador 1

$$2 \cdot 10^4 (480 - T_4) = \frac{15}{13} 10^4 (T_3 - 240) \quad T_3 \geq 240$$

$$\ln \frac{480 - T_3}{T_4 - 240} = 150 A_1 \left[ \frac{1}{2} - \frac{13}{15} \right] 10^{-4} \quad T_4 \leq 480; T_3 \leq 480$$

Intercambiador 2

$$2 \cdot 10^4 (T_4 - 280) = \frac{13}{9} 10^4 (320 - T_1)$$

$$\ln \frac{T_4 - 320}{280 - T_1} = 150 A_2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{9}{13} \right] 10^{-4} \quad T_4 \geq 320; T_1 \leq 280$$

Intercambiador 3

$$f \frac{15}{9} 10^4 (320 - T_{21}) = \frac{13}{9} 10^4 (T_1 - 140) \quad T_1 \geq 140$$

$$\ln \frac{320 - T_1}{T_{21} - 140} = 150 A_3 \left[ \frac{9}{15f} - \frac{9}{13} \right] 10^{-4} \quad T_{21} \geq 140$$



Enfriador

$$80 q_A = (1-f) \frac{15}{9} 10^4 (320 - T_{22}) \quad T_{22} \leq 320$$

$$\ln \frac{140}{T_{22} - 100} = 150 A_E \left[ \frac{9 \cdot 10^{-4}}{15(1-f)} - \frac{1}{q_A} \right]$$

Mezclador

$$f T_{21} + (1-f) T_{22} = 200 \quad 0 \leq f \leq 1$$

y la función objetivo

$$FO = 39 \sum A^{0.65} + 3,6 q_v + 0,24 q_A$$

La estrategia de cálculo para este problema determina como variables de decisión a  $T_1$  y al factor de división  $f$ .

El diagrama de flujo de información resultante se indica en la figura 8, donde otra vez se ha recurrido al artificio de introducir una variable de conexión,  $T_1' = T_1$ .

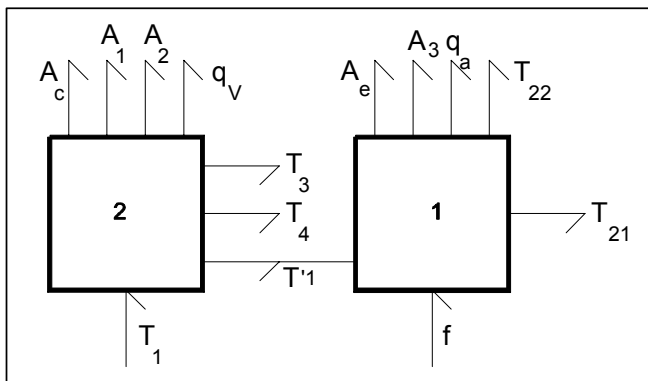


Figura 8. Diagrama de flujo de información

Por las características del diagrama queda claro que es aplicable Programación Dinámica, aunque la naturaleza matemática de las ecuaciones hace imposible una solución analítica como en el problema anterior.

Habrá que buscar

$\min_f [r_f = 39(A_e^{0.65} + A_3^{0.65}) + 0,24 q_A]$  para distintos valores de  $T_1'$ , lo que dará lugar a una tabla donde han de figurar los respectivos  $FO_1$ , necesarios para el siguiente paso de optimización, y de  $f^*$ , requeridos para la segunda fase de la técnica.

Una vez realizado esto habrá que proceder a resolver un único problema:

$$\min_{T_1} [r_2 + FO_1 = 39(A_c^{0.65} + A_1^{0.65} + A_2^{0.65}) + 3,6 q_v + FO_1]$$

Puede advertirse que ahora se está, en principio, frente a dos problemas de una variable en lugar de uno de dos, que fuera la forma como se resolvió anteriormente.

Esta reducción de la dimensionalidad de los problemas parciales, un aspecto fundamental de Programación Dinámica, se logra a costa de resolver reiteradamente cada uno de estos subproblemas, como se ha visto en los casos de las figuras 2a y 3a. De aquí la nota de prevención *en principio* expresada más arriba, ya que estas reiteraciones pueden llegar a anular los efectos derivados del menor número de variables de decisión por problema y, aún, a resultar perjudiciales, cuestión sobre la cual se ha de volver más adelante.

Retomando el problema planteado; la generación de la tabla requiere la adopción de una serie de valores de  $T_1'$ . Para ello debe considerarse que existe un límite superior implícito sobre  $T_1$ , que surge del umbral de necesidad de refrigeración en el enfriador, equipo complementario del intercambiador 3 .

Estos umbrales se pueden calcular mediante la Tabla del Problema, utilizando una aproximación mínima nula. Los consumos de servicios auxiliares que así se determinen constituirán un mínimo de índole termodinámica, ya que los intercambios que se propongan sobre el Pinch deberían realizarse en equipos con área infinita.

Para el problema, el umbral de refrigeración es del orden de  $63 \cdot 10^4$ , lo que arroja un valor máximo de 235°F, aproximadamente, para  $T_1$ .

En la construcción de la tabla, se ha tomado como límite superior para  $T_1'$  234,5 °F y 174,5 como el mínimo, con un total de 7 valores igualmente espaciados. Se estima, a priori, que el valor óptimo de  $T_1$  se ha de ubicar más cerca del límite superior que a la inversa, como un modo de ahorrar en el consumo de servicios auxiliares, más significativos en costo que la amortización de los equipos.

La tabla 1 muestra los valores encontrados en el primer paso de optimización.

Como resultado del segundo paso se encuentra el valor óptimo de  $T_1$ , 230,50°F y de la función objetivo global 9015 \$/año. El valor de  $f^*$  surge por interpolación en la tabla 1, resultando ser 0,688.

$T_1'$	$f^*$	$FO_1$
174,5	0,300	5578,46
184,5	0,373	5183,54
194,5	0,445	4786,64
204,5	0,514	4389,10
214,5	0,582	3992,01
224,5	0,649	3596,33
234,5	0,715	3202,98

**Tabla 1.** Primer paso de optimización

## Programación Dinámica con variables discretas

Hasta aquí se han considerado problemas cuya formulación se estructuraba sobre variables esencialmente continuas (caudales, concentraciones, temperaturas).

Hay otro grupo de problemas, de gran importancia práctica, donde a las variables solo se les permite adoptar ciertos y determinados valores, esto es, poseen, o tienen definido, un comportamiento discreto.

En este punto se suele utilizar lo que en la literatura se denomina *diagramas de rutas* o *grafos*, aludiendo a la situación que puede observarse sobre cualquier mapa vial, donde aparecen las ciudades vinculadas entre sí por una red caminera.

En la parte superior de la figura 9 se esquematiza, en una forma extremadamente simple, lo que podría ser un mapa de ese tipo. Por razones didácticas se ha adoptado un esquema absolutamente regular, pero esto no es un requisito necesario para la aplicación de la técnica que se ha de exponer, pudiendo el diagrama ser totalmente irregular.

Allí aparecen una serie de nodos (las ciudades) vinculadas por arcos o líneas de unión (los tramos carreteros).

Sobre cada uno de estos tramos aparece una cifra que representaría la distancia a cubrir.

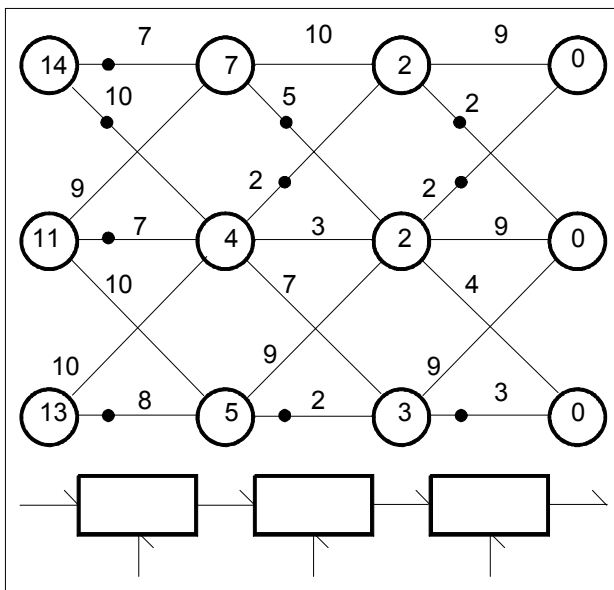


Figura 9. Diagrama de rutas

Se podría plantear como trasladarse de una cualquiera de las localidades del "extremo este" a otra cualquiera del otro extremo, avanzando siempre en dirección oeste y de modo tal que el viaje resulte lo más corto posible.

En adelante se adoptará un sistema de ejes coordenados para ubicar los nodos, correspondiendo la fila 1, columna 1 al extremo superior izquierdo y la fila 3,

columna 4 al inferior derecho, nodos  $n_{1,1}$  y  $n_{3,4}$  respectivamente. Esto se puede hacer por ser un diagrama regular, de lo contrario, debería numerarse cada nodo en forma individual.

Puede verse que en cada columna hay un número finito de nodos, tres en este caso, así como que, ubicado en un nodo, para avanzar a la columna siguiente, es posible elegir alguno de los arcos, tres como máximo, que salen del mismo.

En la parte inferior de la figura 9 se muestra un diagrama de flujo de información que podría asociarse al "mapa" simplificado de arriba. Para ello, bastaría admitir que todos los estados (inicial, intermedios y final) pueden tomar solo tres valores, los que corresponden a las filas 1,2 y 3 respectivamente, y que las decisiones en las etapas han de incrementar en uno la columna, manteniendo, incrementando o disminuyendo en uno el valor de la fila, siempre que el estado al que se arribe sea uno permitido.

Esta equivalencia entre un diagrama de rutas y otro de flujo de información posee, como se ha de ver más adelante, un real interés práctico, que supera a la actual circunstancia de servir como justificación teórica para el uso de una determinada técnica.

La aplicación de la estrategia de Programación Dinámica -el diagrama lo permite- debe comenzar analizando el aporte en la última etapa, esto en las transiciones que vinculan las "ciudades" de la columna 3 con las de la 4. El óptimo de este aporte, menor trayecto, dependerá, como ya se ha visto, del estado a la entrada de la etapa.

Puesto en los términos del mapa carretero simplificado, si uno se encontrase en el nodo 1,3 podría trasladarse al 1,4, recorriendo una distancia 9, o al nodo 2,4, ubicado a una distancia 2. La decisión óptima, en consecuencia, será esta última lo que genera un aporte de 2 a la distancia total a recorrer.

Si la posición fuese, en cambio, el nodo 2,3 lo mejor sería trasladarse al 1,4 con un aporte de 2. Para el 3,3 el viaje debe concluirse en el nodo 3,4, con un recorrido parcial de 3.

En la figura se han indicado las decisiones óptimas, así como los aportes a la distancia total que corresponda, esto dentro de los círculos que marcan los nodos.

Al pasar a considerar las dos últimas etapas el recorrido hasta el final resulta de

la suma del aporte de la transición de que se trate y la distancia óptima a recorrer desde la "ciudad" a que se llega hasta el final.

Así, por ejemplo, si se estuviese en el nodo 1,2 y se tomara la decisión de mantenerse en la fila, habría que cubrir una distancia de 10 para llegar a 1,3 y de allí, se sabe, 2 hasta el final, lo que hace un total de 12. En cambio si uno se trasladara al nodo 2,3 el recorrido sería de  $5 + 2 = 7$ , obviamente, mejor que lo anterior.

De esta forma se alcanzan los estados iniciales, columna 1, encontrándose que el menor recorrido total corresponde al nodo 2,1 con un valor de 11 y que las decisiones óptimas -segunda fase de la técnica- marcan el camino  $n_{2,1} - n_{2,2} - n_{1,3} - n_{2,4}$ .

Hay un caso de optimización de diagramas de rutas de gran importancia práctica, pues en él se basan todas las técnicas de planificación de tareas, cronogramas de ejecución de obras, etc. que se explicitan en métodos como PERT (Program Evaluation and Review Technique) o CPM (Critical Path Method).

En este tipo de problemas se encuentran fijos tanto el estado inicial, la entrada al sistema, como el final, a la salida de la última etapa.

Un caso como éste se muestra en la figura 10, donde se ha colocado, junto al diagrama de rutas, el de flujo de información del que podría provenir.

El que exista un único nodo inicial y sólo otro final (la entrada y la salida están fijas) es perfectamente entendible si ese diagrama de rutas está representando un conjunto de tareas en las que se ha subdividido un determinado trabajo (limpiar el terreno, poner los cimientos,... para construir una casa), donde, necesariamente, ha de existir un momento en el que pone en marcha el programa de trabajo y otro donde todo ha concluido.

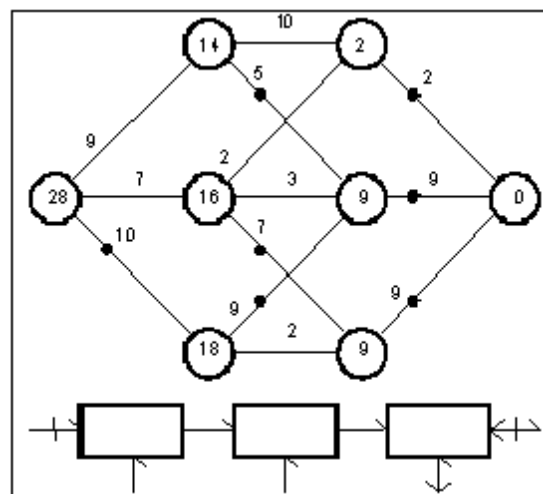


Figura 10. Estados inicial y final fijos

Cada arco en el diagrama debe entenderse como una tarea, siendo su duración el valor que se encuentra sobre el mismo. Cada nodo indica el momento en que concluye una tarea o está en condiciones de comenzar otra. De aquí que en el diagrama se esté indicando, también, la relación que existe entre las distintas tareas del programa: cuales son las que deben estar concluidas antes de poder comenzar con cada una.

Para este caso la función objetivo que se plantea es el menor tiempo en el que el programa puede estar concluido, respetando, claro está, las relaciones entre las tareas que lo componen.

Esto último significa que deberá buscarse el camino más largo, el de mayor duración, ya que permitirá que las restantes tareas, las que no se encuentran sobre el *camino crítico*, pueden concluirse sin inconvenientes.

De la misma forma que antes es posible ir determinando los máximos parciales que corresponden a cada estado, esto es, cuanto tiempo ha de transcurrir, aún, desde ese punto hasta que el programa se encuentre concluido.

Por ejemplo, resulta inmediato que las tareas que concluyen en el nodo 1,3 deberán estar terminadas 2 unidades de tiempo antes que el programa global, así como que las que lo hacen en el 2,3 lo deberán estar 9 unidades antes. Para determinar el valor correspondiente al nodo 1,2 (es decir, para las tareas que allí terminan) ha de tenerse en cuenta que por una vía, la que pasa por  $n_{1,3}$ , el lapso sería 12 ( $10 + 2$ ), mientras que por otro circuito, el que se conecta con  $n_{2,3}$ , el valor es 14 ( $5 + 9$ ) y será esto último lo que deba considerarse como fecha de terminación del nodo para permitir que *ambas* ramas terminen en tiempo.

Al llegar al estado inicial, se tendrá el tiempo total y, pasando a la segunda fase de la técnica, la posibilidad de determinar el conjunto de tareas que determinan este tiempo, integrando el camino crítico.

Este concepto de criticidad aparece en virtud de que una demora en la ejecución de cualquiera de estas tareas determinará la correspondiente prolongación del tiempo total de completamiento del programa.

En la figura 10 se han indicado, como siempre, en el interior de los nodos, el valor del máximo parcial, encontrándose que el tiempo mínimo de ejecución es 28 y el camino crítico está determinado por la secuencia  $n_{2,1} - n_{3,2} - n_{2,3} - n_{2,4}$ .

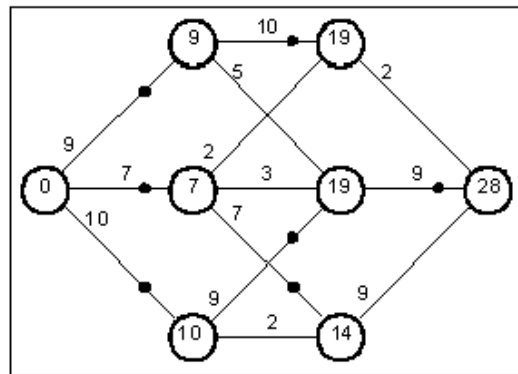


Figura 11. Otro modo de resolver

El hecho que tanto el estado final como el inicial estén fijos, permite resolver el problema también siguiendo el flujo de información, como se puede ver en la figura 11.

Más adelante se verá un tratamiento más detallado del tema de programación de tareas, aunque es necesario advertir que, en los casos reales, los diagramas son totalmente irregulares, lo que, sin embargo, no invalida la aplicación de todo lo visto.

### Tratamiento aproximado: diagrama de rutas equivalente

Del mismo modo en que antes se vinculaba un diagrama de flujo de información a uno de rutas es posible realizar la operación inversa, generando un diagrama de rutas *equivalente*, sobre el que será factible la aplicación de las técnicas ya vistas, resolviendo el problema original en forma aproximada.

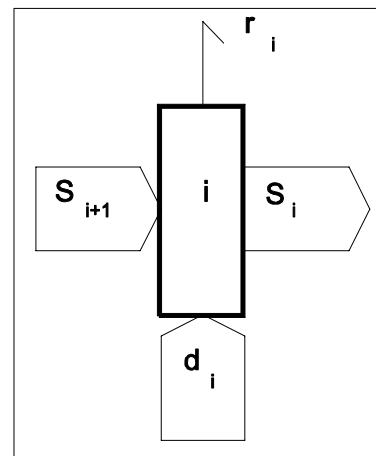


Figura 12. Etapa genérica

En la figura 12 se esquematiza una etapa genérica de un diagrama de flujo de información. Uno de rutas con el que estuviese vinculado tendría determinados valores para los estados  $S_{i+1}$  y  $S_i$ .

Si por un momento se omite la consideración del estado a la entrada de la etapa -para quien actúa, en todos los casos, como un dato del problema- un diagrama de rutas con el que estuviese vinculado el de información, debería tener

fijados un cierto número de posibles estados  $S_i$  los que, conectados con los correspondientes a  $S_{i+1}$ , han de generar las rutas o transiciones posibles.

Para fijar un estado en  $S_i$  es preciso darle valores a todas las variables que lo definen, reiterando que en tal definición solo se incluyen las que interconectan etapas. Tales valores pueden ser fijados dentro de ciertos márgenes razonables o habrán de surgir por cálculos en la etapa.

En la primera de las alternativas, fijar valores para las variables de salida, admitiendo siempre que el estado a la entrada es un dato conocido, ha de ser necesaria una inversión del flujo de información, transformando en variables de estado tantas decisiones como salidas se pretenda fijar.

Hay, pues, tres casos por analizar:

- a)  $S_i < d_i$     b)  $S_i = d_i$     c)  $S_i > d_i$

que se muestran en la figura 13.

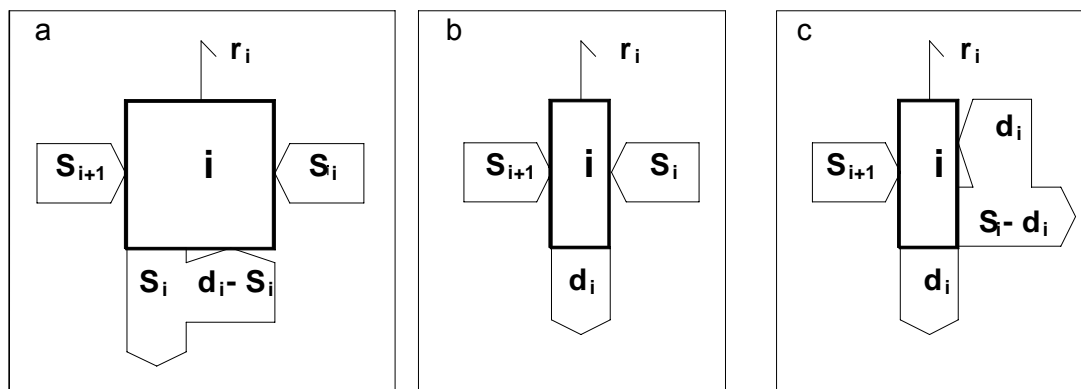


Figura 13. Casos de análisis

Debe aclararse que en los esquemas se ha tomado  $d_i$  como el número de variables que definen la decisión  $d_i$  y  $S_i$  la cantidad de las que determinan el estado  $S_i$ .

Puede verse que sólo en los casos a y b es posible fijar completamente la salida, mientras que en el caso c algunas de las variables que la determinan surgen por cálculo. A su vez, en el caso a, quedan aún variables de decisión por determinar, ya que la modificación del sentido del flujo de información no alcanza a invertirlas a todas.

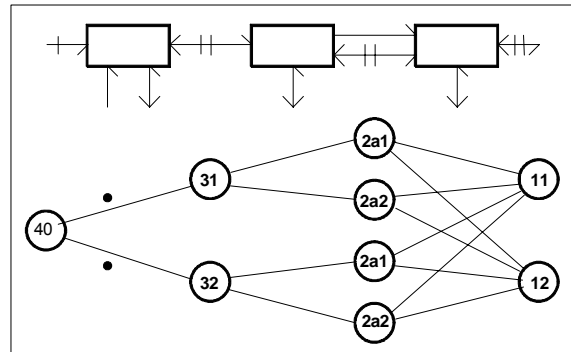


En este último caso, para lograr establecer el aporte sobre una transición cualquiera -desde un determinado  $S_{i+1}$  a un dado  $S_i$ -, se requiere conocer los valores de las variables de decisión que han quedado libres, lo que significa un problema de optimización para definir tal aporte. Este problema, obviamente, tiene una dimensionalidad menor que la que le corresponde a la etapa, habiéndose reducido en  $S_i$  variables.

El otro caso interesante es el c, donde se puede fijar sólo parte del estado a la salida y el resto debe ser calculado. En este cálculo participa el estado a la entrada de la etapa y, en consecuencia, aunque permanezcan invariables los valores fijados para la salida, al cambiar el estado  $S_{i+1}$ , habrán de generarse diferentes estados  $S_i$ , por la modificación de las componentes que surgen por cálculo. Podría decirse que se está en condiciones de fijar, por ejemplo, la latitud del punto de destino, pero la longitud depende de aquella y de cual sea el punto de origen.

En la circunstancia descrita el diagrama de rutas aparecerá con ramificaciones divergentes, originadas en cada uno de los valores elegidos para el estado  $S_{i+1}$ .

En la figura 14 puede apreciarse la transformación de un diagrama de flujo de información en otro de rutas equivalente.



Se ha supuesto que se dan dos valores a cada una de las variables que participan en la definición de los estados interetapas, variables que aparecen "tachadas" en el diagrama de flujo de información. Los valores se indican mediante dos dígitos en el interior de los nodos que representan los estados. Además se han marcado con un punto las transiciones sobre las cuales el cálculo del aporte a la función objetivo requiere de un proceso de optimización.

Puede advertirse que en los tramos que corresponden a la etapa 2 aparecen repetidos los valores fijados de la variable de salida, un par para cada valor del estado  $S_3$ .

Como quedase dicho, esta ramificación aparece toda vez que resulta imposible fijar la totalidad de las variables que determinan el estado  $S_2$ .

Merece un comentario final lo que sucede al aplicar esta metodología en la última etapa. Allí las variables de salida no se interconectan con nada y, por consiguiente, no existe un estado, tal como se ha expuesto para los restantes casos. No se requiere, necesariamente, invertir el flujo de información ni tiene importancia cuántas variables definen el estado y cuántas la decisión.

No obstante, por conveniencia en el cálculo, se ha de mantener en la última etapa el concepto de estado a la salida, fijando valores (discretizando) para las variables que se hayan elegido, en el número que corresponda, estén éstas integradas al estado de salida o a la decisión. Por todo lo dicho resulta claro que las transiciones en este punto nunca podrán presentarse en un esquema ramificado.

La precisión que se puede alcanzar por esta vía depende, como es obvio, de la cantidad de estados intermedios que se generan. Si bien cuando el problema está formulado en términos de variables continuas el número posible para los mismos es infinito, no resulta conveniente, en aras de una mayor exactitud, aplicar la estrategia expuesta sobre un número grande de estados intermedios.

En su lugar, es más efectivo proceder a una primera búsqueda que permita acotar un ámbito donde reiterar el procedimiento y, así, todas las veces que resulte necesario.

El problema 2, ya resuelto mediante el procedimiento riguroso, puede servir para fijar las ideas antes expuestas.

En la figura 15 se esquematiza la estructura básica del diagrama de rutas equivalente.

Para la variable  $T_1'$  se ha adoptado el rango 169,5-234,5.

En la última etapa se ha preferido utilizar como variable de estado, a  $T_{21}$  en lugar del factor

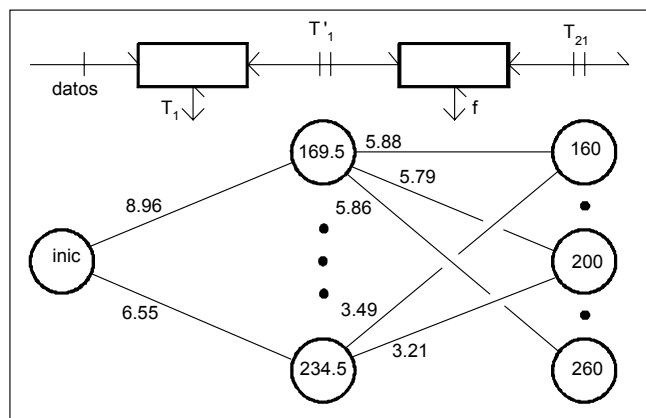


Figura 15. Tratamiento aproximado del problema 2

de división  $f$ , por ser más sencillo de acotar, en forma efectiva, los límites de variación, elegidos para el caso, 160 y 260.

La tabla 2 muestra los resultados obtenidos para 6 valores en cada uno de los estados.

$T_1'$		169.5	182.5	195.5	208.5	221.5	234.5
$T_{21}\downarrow$	$r_2\rightarrow$	8960	8058	7193	6398	5761	6553
160		5879 (0,160)	5397 (0,230)	4912 (0,301)	4429 (0,371)	3954 (0,441)	3489 (0,512)
180		5816 (0,183)	5313 (0,263)	4805 (0,344)	4298 (0,424)	3793 (0,505)	3294 (0,585)
200		5786 (0,213)	5274 (0,307)	4757 (0,401)	4239* (0,424)	3722* (0,589)	3209* (0,682)
220		5775* (0,256)	5263* (0,368)	4750* (0,481)	4242 (0,594)	3755 (0,706)	3445 (0,819)
240		5785 (0,320)	5297 (0,460)	4857 (0,601)	NF	NF	NF
260		5856 (0,426)	5877 (0,614)	NF	NF	NF	NF
	$r_2+r_1^*$	14735	13321	11943	10637	9483*	9762

**Tabla 2. Resultados obtenidos**

En la primera fila y columna de la tabla 2 figuran los valores de los distintos estados. En la segunda fila los aportes sobre las transiciones entre el nodo inicial y los correspondientes a  $T_1'$ .

De las filas tercera a octava se encuentran los aportes de la última etapa y, entre paréntesis, el valor de  $f^*$ . Con la sigla NF se marca el hecho que la transición correspondiente no resulta posible ( $T_{22}$  o  $f$  exceden los límites establecidos).

La lectura de una columna, considerando desde la tercera a la octava fila, permite decidir, para el respectivo valor de  $T_1'$ , cual es la mejor elección en la última etapa; por ejemplo: para  $T_1'=182,5$  resulta lo más adecuado  $T_{21} = 220$  o, lo que es equivalente,  $f = 0,368$ . Puede notarse que las transiciones óptimas para cada estado se indican con un asterisco.

En la última fila se muestra el resultado,  $r_2 + r_1^*$ , para las distintas decisiones posibles en la primera etapa. El menor de todos ellos representa el óptimo global, 9483 \$/año, aproximadamente un 5% superior al valor encontrado anteriormente.

Las decisiones óptimas serían  $T_1 = 221,5$  y  $f = 0,589$ .

Pero aún sería posible ajustar este resultado. De la inspección de la tabla 2 surge una zona, a la que se ha recuadrado, donde, evidentemente, se encuentra el óptimo del problema. Si se amplía la búsqueda en dicha zona, agregando dos nuevos valores de  $T_1$ , 215 y 228, y otros dos de  $T_{21}$ , 190 y 210, lo que implica tener calculada más de la tercera parte de la nueva tabla, se encuentra el óptimo para  $T_1 = 228$ ,  $f = 0,693$  y un costo de 9076 \$/año, apenas un 0,66% superior al valor exacto.

## **Programación Dinámica en sistemas ramificados**

Hasta el momento sólo se han considerado, para la aplicación de las técnicas de Programación Dinámica, solo aquellos problemas cuyos diagramas de flujo de información cumplieren *estrictamente* las características de seriadados multietapas, tal como fuera definido al iniciar el tratamiento del tema.

Cabría preguntarse si son ellos los únicos sobre los que puede ser aplicada la técnica o si resulta posible adecuar los diagramas, de modo tal que pueda hacerse.

La respuesta es que Programación Dinámica extiende su aplicación, en forma directa, a problemas cuyos diagramas de flujo de información son algo más complejos que los vistos, así como resulta posible usarla en otros, adaptando el respectivo diagrama.

Algunos de ellos serán vistos en este capítulo: sistemas donde existen, en algún sector del flujo de información, al menos dos ramas o vías independientes, que surgen de un punto común (sistemas divergentes) o concurren a uno determinado (sistemas convergentes). Los diagramas con reciclo de información será otro caso a considerar.

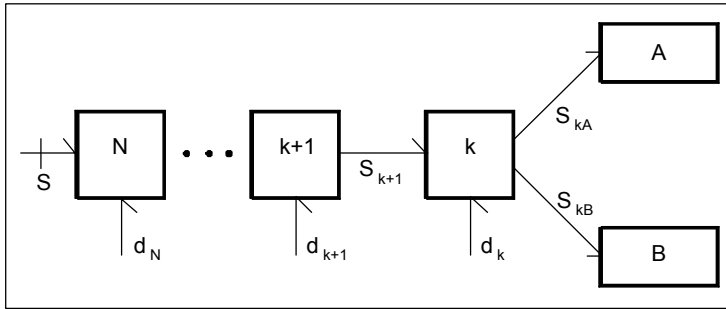


Figura 16. Sistema ramificado divergente

En la figura 16 se muestra la estructura básica de un sistema ramificado divergente, donde puede apreciarse la existencia de dos ramas, A y B, que se separan a partir de la etapa k. Cada una de ellas está constituida por un sistema seriado multietapas como el que se indicara al principio de este capítulo (Por simplicidad, esto no se ha indicado en el dibujo).

Si se omite por un momento la particular estructura del diagrama, considerando cada una de las ramas por separado, puede plantearse

$$FO_A(S_{kA}) = \text{opt}[\text{subsist A}]$$

$$FO_B(S_{kB}) = \text{opt}[\text{subsist B}]$$

Luego, evidentemente, es posible plantear

$$FO_k(S_{k+1}) = \text{opt}_{d_k} [r_k + FO_A(S_{kA}) + FO_B(S_{kB})]$$

con lo que, en consecuencia, la metodología a aplicar es esencialmente la misma que la ya vista, con la única particularidad de que *deben resolverse la totalidad de las ramas antes del tratamiento de la etapa donde se produce la divergencia.*

La figura 17 presenta otro caso de sistema ramificado: aquí hay dos ramas que *convergen* en un punto del diagrama y, a partir de allí, este presenta un flujo unificado.

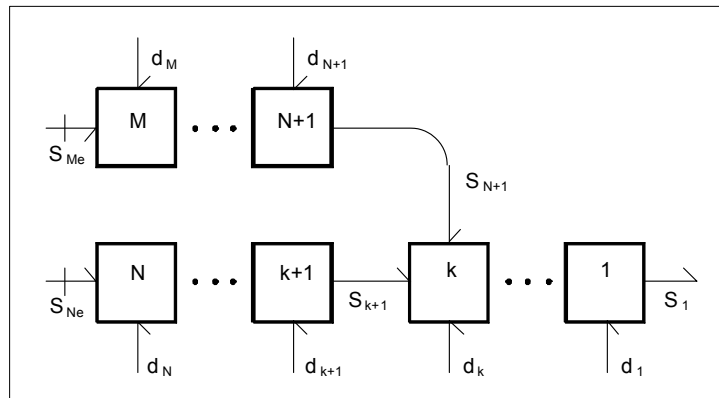


Figura 17. Sistema convergente

Comparado con el caso anterior, el tratamiento reviste una mayor complejidad.

Hasta la etapa k, incluida, no existe problema alguno porque, de hecho, esa porción del diagrama no tiene ninguna alteración. En ese punto se dispondría

de  $FO_k(S_{k+1}, S_{N+1}) = \underset{d_k}{\text{opt}} [r_k + FO_{k-1}(S_k)]$ , donde puede apreciarse que el óptimo parcial depende de estados sobre los que no se puede actuar *en forma simultánea*, ya que la decisión  $d_{k+1}$  puede modificar a  $S_{k+1}$  pero no a  $S_{N+1}$  y, a la inversa,  $d_{N+1}$ .

La solución a esto es instrumentar un tratamiento secuencial, resolviendo, por ejemplo, las etapas  $N, N-1, \dots, k \dots 1$  como si fuesen la última etapa de la rama  $M \dots N+1$ .

Ello significa que habrá que resolver, para distintos valores del estado  $S_{N+1}$

$$FO_{k+1}(S_{N+1}, S_{k+2}) = \underset{\dots d_{k+1}}{\text{opt}} [r_{k+1} + FO_k(S_{N+1}, S_{k+1})]$$

$$FO_N(S_{N+1}) = \underset{d_N}{\text{opt}} [r_N + FO_{N-1}(S_{N+1}, S_N)]$$

es decir que para lograr transformar el subdiagrama constituido por las etapas  $N \dots k \dots 1$  en la última de la secuencia  $M \dots N+1$  habrá que optimizar al primero, considerando al estado  $S_{N+1}$  como un dato, tantas veces como valores se establezcan para el mismo.

Una vez que lo anterior ha sido completado -sin duda, el paso computacionalmente más engorroso- el procedimiento continúa con la obtención de  $FO_{N+1}(S_{N+2}) = \underset{d_{N+1}}{\text{opt}} [r_{N+1} + FO_N(S_{N+1})]$ , de acuerdo a lo visto.

Si se cumple que  $S_{i+1} + d_i \geq S_i$  y  $S_{i+1} \leq S_i$ ;  $i = M \dots N+1$  es posible aplicar otra vía de solución: invertir *por completo* el sentido del flujo de información en la rama superior, con lo que el sistema, ahora, será *divergente* a partir de la etapa  $k$ . Para ello, será necesario incorporar, en esa etapa, tantas variables de decisión ficticias como dimensión tiene el estado  $S_{N+1}$ , para mantener los grados de libertad de la etapa  $k$ .

En el caso de querer aplicar esta estrategia para un diagrama donde existen más de dos ramas que convergen en un punto, la condición anterior deberá verificarse, al menos, para todas ellas menos una.

Otro de los casos donde es posible aplicar Programación Dinámica es sobre sistemas que presentan una derivación paralela (*bypass*), como el que se muestra en la figura 18.

La respuesta general a esta situación es modificar el diagrama, mediante la creación de variables interetapas, de forma que se elimine la rama lateral, como se muestra a la derecha de la figura. Esto significa el crecimiento de la dimensionalidad en los estados, cuestión que, como se verá, aumenta la dificultad en la aplicación de la técnica.

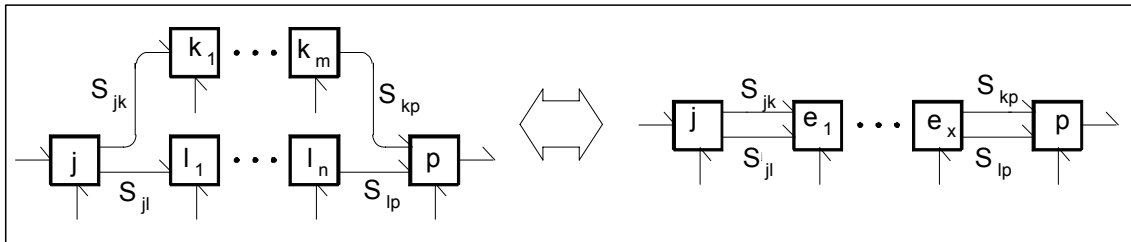


Figura 18. Sistema con derivación paralela

Por esta razón se suele acudir al artificio de modificar el diagrama, mediante un corte de la derivación lateral, de modo de obtener un sistema divergente. Esto se logra adoptando el estado  $S_{kp}$  como una decisión e invirtiendo el flujo de información, con la salvedad de mantener el carácter divergente requerido para el nuevo diagrama. (Se debe privilegiar la inversión de las decisiones por sobre los estados, lo que en la figura 19 se representa en el cambio de sentido en  $d_{km}$ ).

Debe advertirse que la vía de solución expuesta requiere el sostenimiento de  $S_{kp}$  a lo largo del proceso de optimización de ambas ramas divergentes generadas; esto es, en la etapa p se tiene  $FO_p(S_{lp}, S_{kp})$

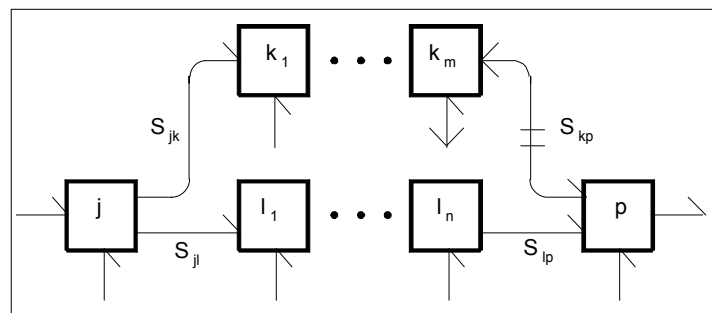


Figura 19. Otra estrategia para la derivación paralela

y en ese momento se asigna el subesquema ya tratado a la rama  $l_1...l_n$ , manejando  $S_{kp}$  como un dato (Numéricamente, habrá que resolver para varios valores de  $S_{kp}$ ). Al final se tendrá  $FO_{l_1}(S_{jl}, S_{kp})$ , punto en el cual se comienza el tratamiento de la rama k, comenzando por la etapa km, dejando a  $S_{kp}$  como **dato** hasta obtener  $FO_{k_1}(S_{jk}, S_{kp})$ . Es recién en este punto, al tratar la etapa donde se produce la *divergencia*, cuando se ha de producir la optimización con respecto a  $S_{kp}$ .

El último tipo de diagrama de flujo de información anómalo donde se ha de considerar la aplicación de Programación Dinámica será aquel donde existen ciclos de información, como el que se muestra en la figura 20.

La única posibilidad que existe de aplicar la técnica es a través de la eliminación del reciclo, lo que implica una modificación sustancial del diagrama de flujo.

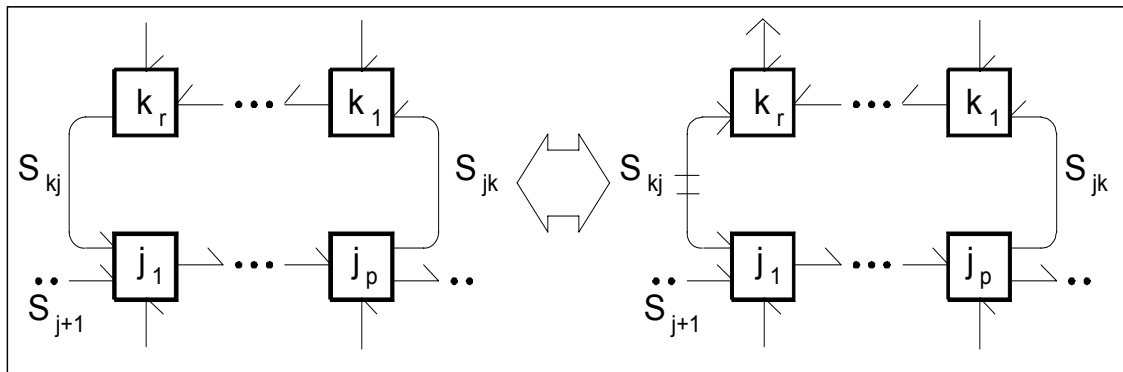


Figura 20. Tratamiento de reciclos

En la parte derecha de la figura 20 se esquematiza el procedimiento. El estado  $S_{kj}$  se transforma en decisión *simultáneamente* en las etapas  $j_1$  y  $k_r$ , lo que obliga a invertir el flujo en la rama superior.

La elección de  $S_{kj}$  no es arbitraria, ya que se busca que el sistema ramificado resultante sea divergente en la etapa  $j_p$ , por su mayor simplicidad en el tratamiento posterior. De aquí que la inversión a la que se hiciese referencia deberá privilegiar, otra vez y por la misma razón que antes, las decisiones por sobre los estados.

El procedimiento a seguir en la optimización del esquema modificado presenta la particularidad de que, por actuar  $S_{kj}$  en dos puntos diferentes del mismo, el tratamiento de la rama  $k_1 \dots k_r$  deberá hacerse manteniendo a  $S_{kj}$  como un dato; más aún, esta caracterización se ha de prolongar hasta el momento de considerar la etapa  $j_1$ , punto en el cual, recién, se podrá tratar a  $S_{kj}$  como una decisión.

El estudio de las técnicas de optimización es importante no sólo por la posibilidad de resolver problemas que presentan determinadas características sino -lo que tal vez sea más importante- porque *su conocimiento permite estructurar los problemas de forma tal que puedan ser utilizadas determinadas técnicas.*



En la figura 21 se muestra otra estructura para la red de intercambio del problema visto anteriormente.

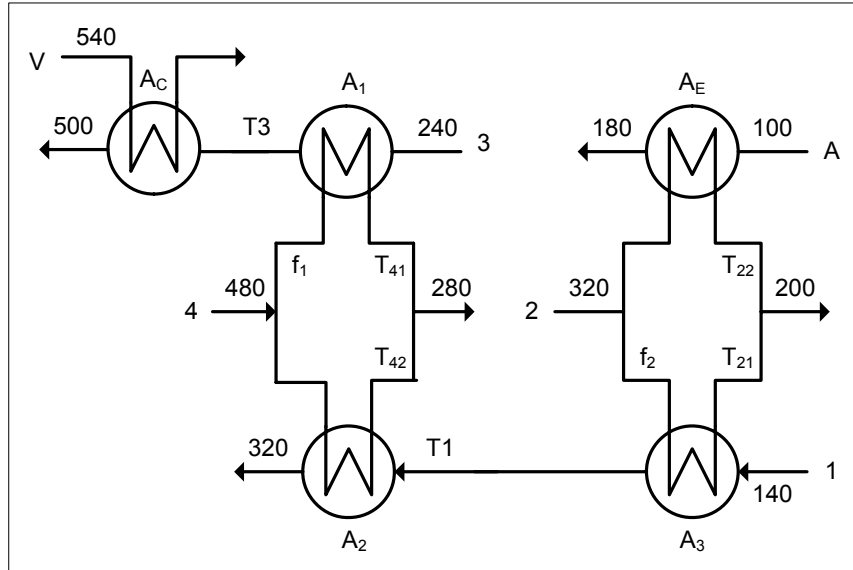


Figura 21. Otra red de intercambio térmico

En este caso, el número de grados de libertad es 3 y una de las alternativas es considerar, como variables de decisión, a la temperatura  $T_1$  y a los factores de división  $f_1$  y  $f_2$ .

Este problema puede ser resuelto mediante Programación Dinámica, con una importante reducción en la complejidad de los cálculos.

En la parte superior de la figura 22 se muestra el diagrama de flujo de información del problema. Los bloques E, C, 1, 2 y 3 se corresponden con los equipos de intercambio térmico, mientras que m1 y m2 representan los puntos de mezcla de las corrientes 4 y 2.

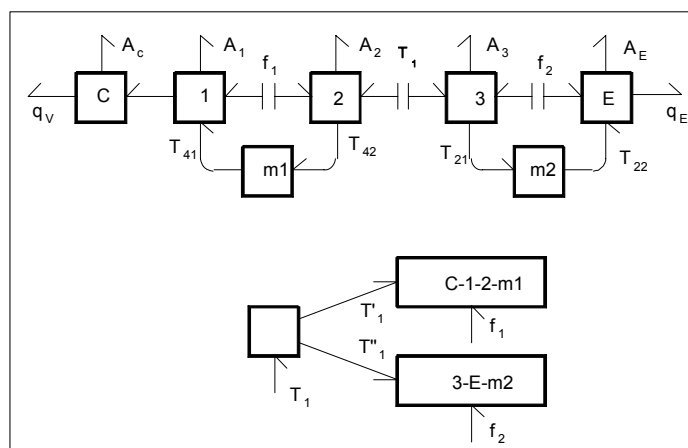


Figura 22. Diagramas de flujo de información

Puede verse, en este diagrama, que existen dos grandes segmentos, cada cual con uno de los factores  $f$  como variable de decisión exclusiva y compartiendo ambos a  $T_1$ .

La circunstancia apuntada conduce a pensar en la posibilidad de reestructurar el flujo de información bajo la forma de un sistema ramificado divergente, como se muestra en la parte inferior de la figura 22. Nótese que se ha recurrido al artificio de crear una etapa de interconexión y dos variables adicionales,  $T_1'$  y  $T_1''$ , ambas, lógicamente, iguales a  $T_1$ .

El planteo, ahora, es sencillo: hay que obtener el mínimo de cada una de las ramas,  $FO_{c..m1}(T_1')$  y  $FO_{3..m2}(T_1'')$ , operando sobre el correspondiente factor de división y, luego, considerar el mínimo de la suma, ya que la etapa

$T_1' = T_1''$	$f_1^*$	$FO_{c..m1}$	$f_2^*$	$FO_{3..m2}$
174,5	0,545	8689,6	0,300	5578,5
184,5	0,575	8009,5	0,373	5183,5
194,5	0,605	7356,7	0,445	4786,6
204,5	0,635	6748,6	0,514	4389,1
214,5	0,665	6224,3	0,582	3992,0
224,5	0,696	5907,3	0,649	3596,3
234,5	0,734	7611,6	0,715	3203,0

**Tabla 3.** Resultados obtenidos

de interconexión no aporta a la función objetivo, tal como se indica en la tabla 3.

El óptimo para el sistema se encuentra para  $T_1=228,7$ ,  $f_1=0,710$ ,  $f_2=0,676$ , con un costo de 9384 \$/año.

## Problemas de cálculo en Programación Dinámica

Hasta ahora se han podido apreciar las ventajas de Programación Dinámica, al reducir la dimensionalidad de los problemas y, consecuentemente, la complejidad numérica de su tratamiento.

Pero esto no es gratuito: tal reducción exige resolver, repetidamente, cada uno de los subproblemas que genera la estrategia de optimización.

Si el número de veces que hay que repetir la solución de los problemas es muy grande, aún cuando el número de grados de libertad de cada uno, esto es, su dimensionalidad, sea pequeño, bien podría suceder que resultase más sencillo

"olvidar" la estructura del diagrama de flujo de información, no aplicar Programación Dinámica y resolver el caso por búsqueda simultánea, entendiendo por esto el uso de cualquier técnica que aborde el tratamiento conjunto de las variables de decisión.

Para lograr enfocar la cuestión desde un punto de vista analítico se requiere contar con algún tipo de funcionalidad que vincule la dimensionalidad de un problema con la dificultad de optimizarlo. Tales expresiones son, en rigor, de dudosa generalidad para los métodos más difundidos.

Resulta posible, en cambio, establecer una cota superior a esta dificultad: basta con tomar un método ineficiente de optimización, para el que sea posible encontrar una funcionalidad del tipo buscado.

Un método que reúne estas características es el número de oro extendido a multivariadas, donde el número de cálculos a realizar para obtener el óptimo de una función de  $t$  variables puede expresarse bajo la forma  $b^t$ , siendo  $b$  una constante que depende de la exactitud deseada.

Volviendo al esquema general de la figura 1, supóngase que todas las etapas tienen decisiones y estados de interconexión definidos por  $D$  y  $S$  variables, respectivamente, estando fijo el estado a la entrada al sistema.

Supóngase, también, que en la búsqueda de  $FO_i(S_{i+1})$  se consideran  $a$  valores para cada una de las variables que integran el estado  $S_{i+1}$ . Esto dará  $a^S$  problemas con  $D$  variables de decisión para cada una de las etapas, salvo para el último paso de optimización, donde ha de existir uno solo, en virtud de estar fijo el estado a la entrada del sistema.

Con esto, la cota superior para las dificultades de cálculo inherentes a la estrategia de optimización por Programación Dinámica  $\Phi_{PD}$  y búsqueda simultánea  $\Phi_{BS}$  han de ser

$$\Phi_{PD} = b^D [(N-1)a^S + 1] \quad ; \quad \Phi_{BS} = b^{ND}$$

siendo la relación entre ambos

$$\Phi = \frac{\Phi_{PD}}{\Phi_{BS}} = b^{-D(N-1)} [(N-1)a^S + 1]$$

y la dificultad relativa aumenta, esto es, Programación Dinámica resulta menos atractiva frente a búsqueda simultánea, con el incremento del número de variables

de interconexión mientras que disminuye con el aumento del número de variables de decisión por etapas o la cantidad de éstas.

Lo anterior puede tomarse como una consideración de tipo general; la tendencia que se verifica al aplicar la técnica. Pero aún resulta posible, frente a un caso concreto, moverse dentro de los extremos que se han examinado; esto es, utilizar Programación Dinámica sobre un diagrama se han agrupado etapas, para ser optimizadas en forma conjunta.

Esto puede ser comprendido mejor mediante el análisis de un ejemplo simple, para el cual se tomará  $a=b=8$  en la correspondiente expresión de  $\Phi$ . Esto último implica una reducción del intervalo de incertidumbre menor al 5% en cada variable en el método del número de oro extendido a  $n$  dimensiones. Dichos valores serán utilizados en todo el análisis que sigue.

En la figura 23 (a) se muestra un hipotético diagrama de flujo de información, donde se han indicado sólo las *variables que componen las decisiones y los estados de interconexión*, en virtud de constituir ellas los únicos elementos a tener en cuenta.

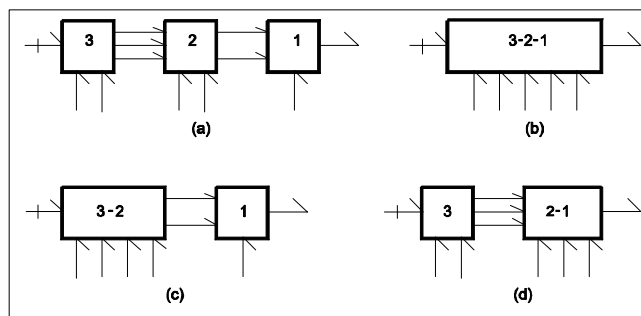


Figura 23. Distintas estrategias de solución

Nótese que aquí no hay constancia en el número de variables por etapa, lo que obliga a un análisis caso por caso.

Si el problema fuese resuelto por Programación Dinámica, sin efectuar ninguna modificación en el diagrama, la cota superior de la dificultad de cálculo sería

$$\Phi_{1-2-3} = 8^2 8^1 + 8^3 8^2 + 8^0 8^2 = 8^3 + 8^5 + 8^2$$

donde cada uno de los monomios se compone por el producto de  $8^{S_{i+1}}$  y  $8^{D_i}$

Si la solución se encara a través de una búsqueda simultánea, lo que, esquemáticamente, se indica en 23 (b) como una etapa única -se ignora, en absoluto, la existencia de subsistemas-, el grado de dificultad asociado sería  $\Phi_{[1-2-3]}=8^5$

Pero estas dos no son las únicas estrategias posibles. Existe la alternativa de apelar a esquemas mixtos: agrupar, por ejemplo, solo las dos primeras etapas, o

las dos últimas, como se indica en las figuras 23 (c) y (d). Para estos casos se tendrá

$$\Phi_{1-[2-3]} = 8^2 8^1 + 8^4 = 8^3 + 8^4$$

$$\Phi_{[1-2]-3} = 8^3 8^3 + 8^2 = 8^6 + 8^2$$

lo que lleva a la conclusión de que la mejor estrategia resulta de considerar en forma conjunta las etapas 2 y 3, agrupamiento que ha de formar parte de un diagrama seriado con la etapa 1.

Resulta obvia la imposibilidad de efectuar este análisis en detalle para todos los casos, donde, con seguridad, habrá que vérselas con diagramas de flujo, y alternativas, por ende, de mayor complejidad.

Sería deseable contar con un criterio simple, que no se viese afectado por las características estructurales del flujo de la información. Es posible contar con tal criterio, al menos en lo que concierne al agrupamiento de etapas.

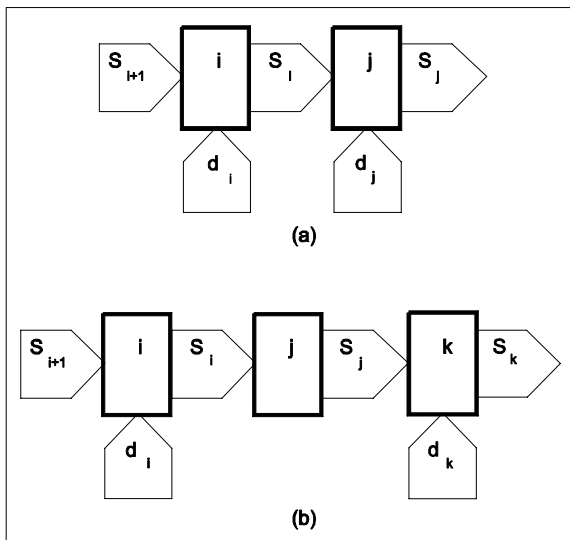


Figura 24. Diagramas de flujo (parciales)

En la figura 24 (a) se esquematiza un segmento, etapas i y j, del diagrama de flujo genérico. Allí  $S_i$  y  $d_i$  indican el *número de variables* que componen el estado y la decisión de la etapa, respectivamente.

Para estas dos etapas solamente, las estrategias posibles son tratarlas en forma separada o agruparlas.

Este análisis focalizado puede efectuarse, y sus conclusiones son válidas para cuando se considera el

segmento dentro del sistema total, por la estructura matemática (suma de monomios) que posee la expresión que permite el cálculo del grado de dificultad.

Volviendo al esquema, si las etapas se tratan en forma separada o conjunta, se tendrá, como dificultad relativa de la primera con respecto a la segunda

$$\begin{aligned}\Phi_{..j-i..} &= 8^{S_i+d_j} + 8^{S_{i+1}+d_i} \\ \Phi_{.[j-i]} &= 8^{S_{i+1}+d_i+d_j} \\ \therefore \Phi_{rel} &= 8^{[S_i-S_{i+1}]-d_i} + 8^{-d_j}\end{aligned}$$

y queda claro que esta dificultad relativa es mayor que 1, es decir, *conviene el agrupamiento*, toda vez que  $S_i - S_{i+1} \geq d_i$ .

Debe tenerse en cuenta que en la expresión anterior se consideran la totalidad de las variables que componen el estado a la entrada a la etapa pero *sólo las variables que integran el estado que la interconecta con quien se analiza el agrupamiento*. Lo anterior es particularmente importante cuando se consideran los puntos de divergencia en un sistema ramificado.

En la parte b de la figura 24 se presenta el caso de una etapa sin decisión. Aquí es posible ensayar cuatro estrategias: el tratamiento del diagrama tal como está, la búsqueda simultánea en todo el segmento o agrupar la etapa j con la k o la i. Considerando, cuando corresponda, una dificultad de cálculo  $\varepsilon$  para lograr expresar  $FOk(S_j)$  como  $FOj(S_i)$ , los grados de dificultad para cada alternativa, serán:

$$\begin{aligned}\Phi_{..k-j-i..} &= 8^{S_j+d_k} + \varepsilon + 8^{S_{i+1}+d_i} \\ \Phi_{[k-j-i]} &= 8^{S_{i+1}+d_i+d_k} \\ \Phi_{k-.[j-i]} &= 8^{S_j+d_k} + 8^{S_{i+1}+d_i} \\ \Phi_{[k-j]-i} &= 8^{S_i+d_k} + 8^{S_{i+1}+d_i}\end{aligned}$$

con lo que, como puede verse, siempre resulta conveniente el agrupamiento de j con una etapa contigua, por lo menos para eliminar el estado de interconexión definido por el mayor número de variables,  $S_i$  o  $S_j$ , con independencia de que convenga el tratamiento unificado de las tres etapas, lo que puede analizarse, luego, con el criterio expuesto anteriormente.

El último caso de agrupamiento a considerar es el de pequeños reciclos.

Ya se ha visto que es posible aplicar Programación Dinámica a este tipo de diagramas, aunque resulte bastante engorroso hacerlo.

De aquí que se pudiera pensar en un tratamiento conjunto de las etapas que se encuentran involucradas en un reciclo de información.

No resulta posible un tratamiento generalizado como en el caso anterior, por lo que se recurrirá a un enfoque de tipo heurístico.

En la figura 25 se muestra un sector de un diagrama de flujo donde aparece un reciclo, donde se supondrá que cada estado y decisión, que interesan en el análisis del reciclo, se componen de una sola variable.

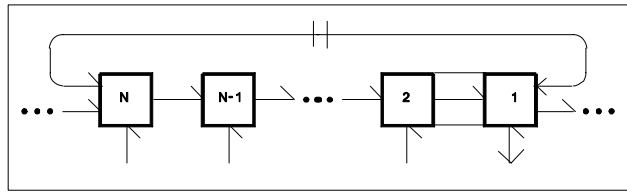


Figura 25. Reciclo simple

Como ya quedó visto, la solución por programación dinámica exige el manejo de la variable de reciclo como una decisión en suspenso, un dato, lo que lleva a invertir el flujo en la etapa 1, que quedaría sin decisión y, consecuentemente, se agrupará con la 2.

La dificultad relativa del tratamiento por separado de las, ahora, N-1 etapas con respecto al enfoque simultáneo será

$$\Phi_{rel} = \left( \frac{8^1 [(N-2)8^{1+1} + 8^1]}{8^N} \right)$$

donde se ha tenido en cuenta la búsqueda para un solo valor del estado a la entrada de la etapa N, en razón de ser algo común para ambas estrategias.

La expresión anterior resulta ser menor que la unidad para N mayor o igual que 4, por lo que, extendiendo el criterio a otros diagramas de flujo de información, se puede plantear que *reciclos con menos de cuatro variables involucradas en las decisiones deben ser resueltos por búsqueda simultánea*.

Estos criterios de agrupamiento de etapas deben constituir un paso previo a la optimización efectiva del sistema, el que, en definitiva, debería realizarse de acuerdo al siguiente esquema:

- 1) Formulación matemática del problema
- 2) Determinación de una estrategia de cálculo
- 3) Construcción del diagrama de flujo de información
- 4) Análisis de agrupamiento de etapas en el diagrama
- 5) Optimización efectiva del sistema

En el desarrollo de la estrategia mixta, que presupone el quinto y último paso, está implícita la selección del o de los métodos que resulten más adecuados para llevar a cabo el proceso de optimización.

## **Bibliografía**

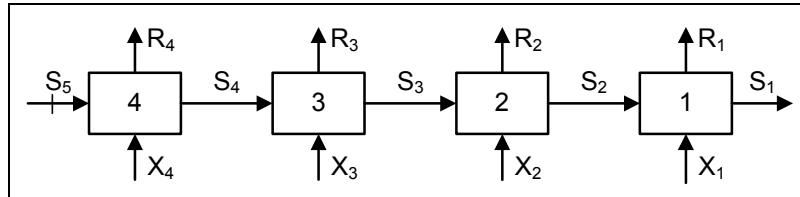
- Aris R., Blaisdell, "Discrete Dynamic Programming", 1963.
- Aris R., Nemhauser G.L., Wilde D.J., "Optimization of multistage cyclic and branching systems by serial procedures", AIChEJ 10 p.913, 1964.
- Wilde D.J., Beightler Ch.S., "Foundations of Optimization", Prentice Hall, 1967.



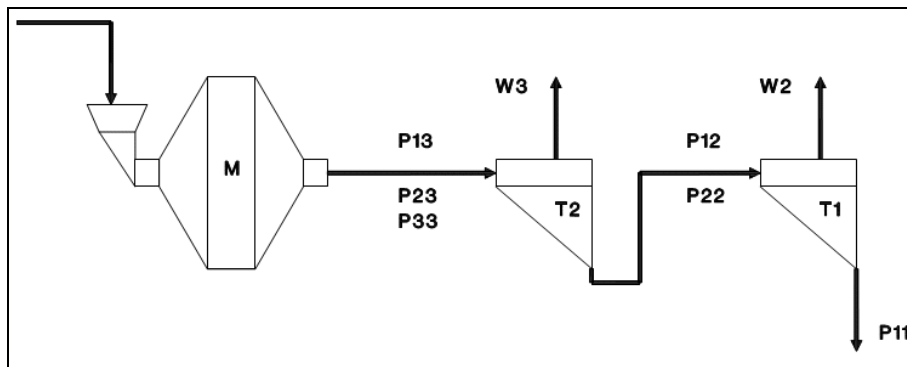
## Propuestas de trabajo

1) Usando programación dinámica, encontrar  $\max \sum_{i=1}^4 \ln X_i$  y la política óptima, siendo:

$$S_5 = 0 \quad ; \quad S_1 = k \quad ; \quad S_i = S_{i+1} + X_i$$



2) Se debe optimizar un proceso de molienda como el de la figura.



El molino M procesa 150 Mt de un material, del que se producen 3 tamaños nominales de productos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ , en cantidades  $P_{13}$ ,  $P_{23}$  y  $P_{33}$  respectivamente.

Se plantean 3 alternativas de planes de producción:

Alternativa	Producción [Mt]			Costo operativo [M\$]
	$P_{13}$	$P_{23}$	$P_{33}$	
1	60	50	40	10000
2	50	40	60	8000
3	40	30	80	7500

No se considera, a los efectos del problema, merma por pérdida de materiales.

En los tamices  $T_1$  y  $T_2$  se separan los productos  $W_2$  y  $W_3$ , que contienen la

totalidad del producto nominal grueso ( $P_{22}$  y  $P_{33}$  respectivamente), más una fracción del material fino ingresante.

El costo de operación de cada tamiz viene dado por:

$$CT_j = \text{cantidad de material ingresante} * k_j * \ln \frac{1}{(1 - \alpha_j)}$$

donde  $\alpha_j$  es la fracción de material fino ingresante que pasa por el tamiz, y a los efectos del problema se supondrá igual para todos los componentes.

Los coeficientes  $k_j$  son:  $k_1 = 50$  \$/t ;  $k_2 = 110$  \$/t

Los precios de venta para  $W_2$ ,  $W_3$ ,  $P_{11}$  son 500, 300 y 900 \$/t respectivamente.

- a) Calcular por programación dinámica el plan de producción del molino y los valores de  $\alpha_j$  que maximizan el beneficio.
- b) Resolver por rutas considerando valores de 20, 30 y 40 Mt para  $P_{12}$  y de 15, 20, 25 y 30 Mt para  $P_{11}$ . Sobre el diagrama de flujo original producir las modificaciones que dan lugar al diagrama de rutas utilizado.

3) Se desea comprimir aire desde 1 atm hasta 12 atm. La cantidad a ser comprimida es 1600 lb/min y la compresión se llevará a cabo en forma isentrópica en 4 etapas, con refrigeración interetapas a presión constante, llevándose a la temperatura de entrada al sistema, 25 °C.

La potencia consumida por etapa (en HP) es:

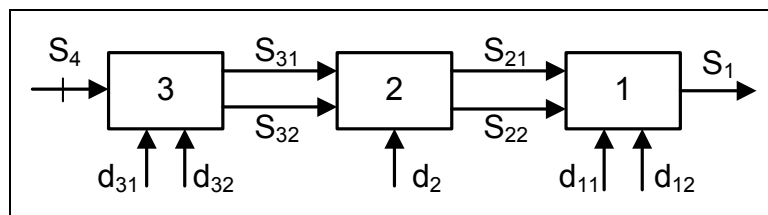
$$P = 9,91 Q T_1 [r^{0,283} - 1], \text{ donde } Q \text{ se expresa en lb/seg y } T_1 \text{ en } ^\circ R$$

Elegir las relaciones de compresión de las etapas, tal que el consumo de potencia total sea mínimo. Para ello, aplicar el método aproximado para programación dinámica (utilizando diagrama de rutas), tomando para las presiones los valores siguientes:

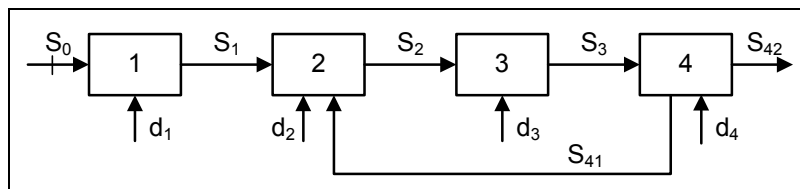
$$\begin{array}{cccccc}
 p_0 = 1 & p_{11} = & p_{21} = & p_{31} = 7 & p_4 = 12 \\
 & 1,5 & 3,0 & & \\
 & p_{12} = & p_{22} = & p_{32} = 9 & \\
 & 2,0 & 4,5 & & \\
 & p_{13} = & p_{23} = & p_{33} = 11 & \\
 & 2,5 & 6,0 & & 
 \end{array}$$

3) Realizar el diagrama de rutas para aproximar la solución del problema de optimización del sistema de la figura. Calcular los aportes a la función objetivo (Máx ri) y las variables que no son discretizadas en cada ruta. Hallar FO(S4), para un valor de S4 igual a 10. Hacer el diagrama en bloque modificado. Considerar los siguientes valores para las variables de estado a discretizar:

S31: 15 - 20      S32: 12 - 16      S21: 25 - 30      S1: 50 - 80

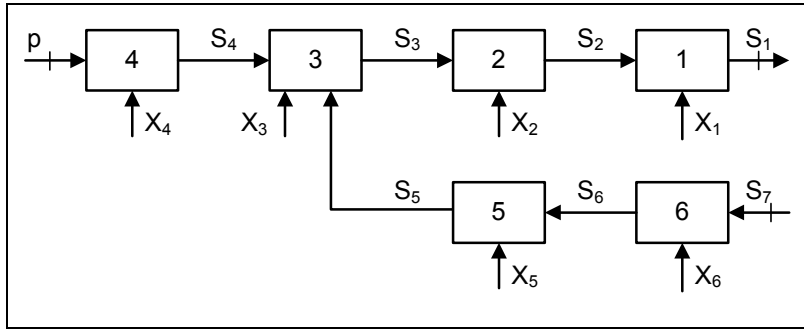


4) Usando Programación Dinámica, calcular  $\max \sum_{i=1}^4 r_i$  y encontrar la política óptima.



$$\begin{aligned}
 r_4 &= S_3 + d_4 & ; & \quad S_{41} = 2d_4 & \quad ; & \quad S_{42} = d_4 + S_3 \\
 r_3 &= S_3 + 2d_3 & ; & \quad S_3 = S_2 + d_3 & \quad ; & \quad d_3 \leq 4 \\
 r_2 &= 4d_2 - d_2^2 - S_{41}^2 & ; & \quad S_2 = S_1 + 2 \\
 r_1 &= S_0 + \frac{5}{d_1} - S_1 & ; & \quad S_1 = 2d_1 & \quad ; & \quad 2 \leq d_1 \leq S_0 & \quad ; & \quad S_0 = 5
 \end{aligned}$$

5) Hallar  $\max \sum_{i=1}^6 r_i$  usando Programación Dinámica, considerando que todas las variables de decisión deben ser no negativas y que a S1 se le asigna el valor 0,1.



$$p = 11 \quad ; \quad S_i = S_{i+1} - x_i \quad \forall i = 1, 2, 3$$

$$S_4 = 20 + 2\ln(p - x_4) \quad ; \quad S_5 = S_6 + x_5 \quad ; \quad S_6 = 1,5S_7 - x_6$$

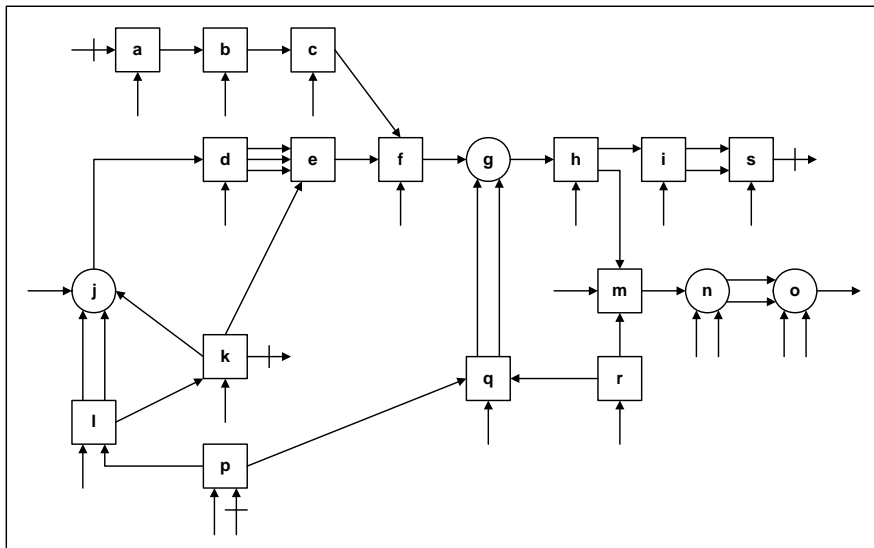
$$r_i = 50\ln x_i \quad \forall i = 1, 2, 5$$

$$r_3 = 2x_3 + S_4 - S_5 \quad ; \quad r_6 = 2S_6 - x_6^2 + 2x_6 \quad ; \quad S_7 = 10$$

$X_4$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_4$	10	11	15	23	38	50	65	67	68	68,5	68,7

Nota: Se aconseja resolverlo sin inversión del flujo (excepto donde sea obligatorio).

5) Modificar el sistema de la figura para que sea posible su resolución por programación dinámica.



# CAPÍTULO 13

## PLANIFICACIÓN DE TAREAS. DETERMINACIÓN DEL CAMINO CRÍTICO

### Conceptos básicos

Si bien ya se ha incursionado en el tema relacionándolo con los diagramas de flujo de información, el concepto de camino crítico se usa cuando se trabaja sobre un conjunto de tareas, que puede involucrar la simple construcción de una casa hasta la puesta en marcha de una planta de proceso.

Este concepto lo utilizan una serie de técnicas relacionadas tales como CPM (Critical Path Method), PERT (Program Evaluation and Review Technique).

La primera usa una estimación de tiempo única para cada tarea o actividad, en cambio PERT entra en el problema de la incertidumbre de las duraciones de cada actividad. Adicionalmente, existen otras técnicas que tienen en cuenta la disponibilidad de recursos o el costo del proyecto.

En lo que sigue, se planteará una metodología para determinar el *camino crítico*, es decir, la secuencia de tareas cuyo tiempo de ejecución permite que el resto de la obra pueda llevarse a cabo, respetando las relaciones entre las tareas que la componen.

Esto significa que deberá buscarse de entre todas las secuencias que van desde el inicio de la obra hasta el final de la misma, aquella de mayor duración, ya que así se permitirá que aquellas tareas que no pertenecen a la secuencia, puedan concluirse sin inconvenientes.

Además, disponer del camino crítico permite centrar la atención sobre las tareas que se encuentran sobre él, y proponer modificaciones del programa previsto ya sea para reducir el tiempo total de la obra o subsanar las demoras que puedan aparecer como consecuencia de inconvenientes en la ejecución de la misma.

Una herramienta útil para determinar el camino crítico es el empleo de un grafo orientado para representar la obra, donde cada arco equivale a una tarea y cada nodo indica el momento en que concluye una o se está en condiciones de comenzar otra. De esta forma, en el diagrama se está indicando, también, la relación de precedencia que existe entre las distintas tareas del programa, esto es, cuales son las que deben estar concluidas antes de poder comenzar con otra.

En este tipo de problemas, existe un único nodo inicial y sólo otro final, puesto que el grafo está representando un conjunto de tareas en las que se ha subdividido un determinado trabajo y, necesariamente, existe un momento en el que se pone en marcha la obra y otro donde todo ha concluido.

## Grafo y Camino Crítico

Para comprender como se genera el grafo y llegar a determinar el camino crítico, usaremos un ejemplo hipotético correspondiente a la parada y puesta en marcha de la zona de reacción de una planta de proceso. Los datos del problema se presentan en la tabla 1.

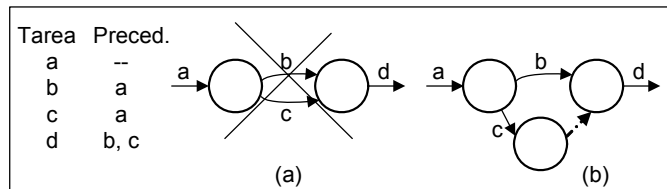
Tarea	Duración [UdT]	Tareas previas
a) Parar el reactor	6	--
b) Abrir intercambiador	2	a
c) Abrir reactor	3	a
d) Inspeccionar carcaza y tubos intercambiador	1	b
e) Reparar carcaza intercambiador	5	d
f) Renovar mazo de tubos	9	b
g) Rearmar intercambiador	2	e, f
h) Reemplazar o reparar distribuidor reactor	10	c
i) Reemplazar bolas de alúminao	8	c
j) Rearmar reactor	3	h, i
k) Puesta en marcha	8	g, j

**Tabla 1.** Parada y puesta en marcha de una zona de reacción

Para poder construir el grafo orientado debemos considerar algunas reglas:

- 1) Cada actividad es representada por una sola flecha, y a cada flecha corresponde una única tarea, identificada por los nodos de inicio y final.
- 2) Dos nodos no pueden estar unidos directamente por más de una flecha, como puede verse en la figura 1a. La forma correcta de representar las tareas b y c es usando

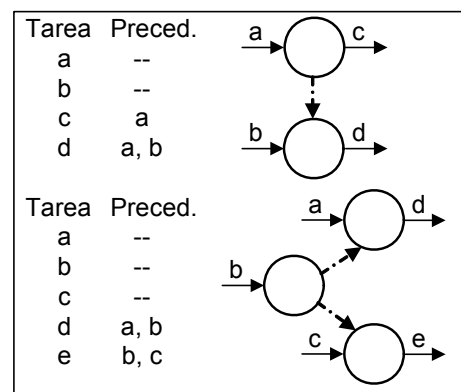
las llamadas tareas ficticias, de duración nula, como podemos ver en la figura 1b.



**Figura 1.** Tarea ficticia (c-d)

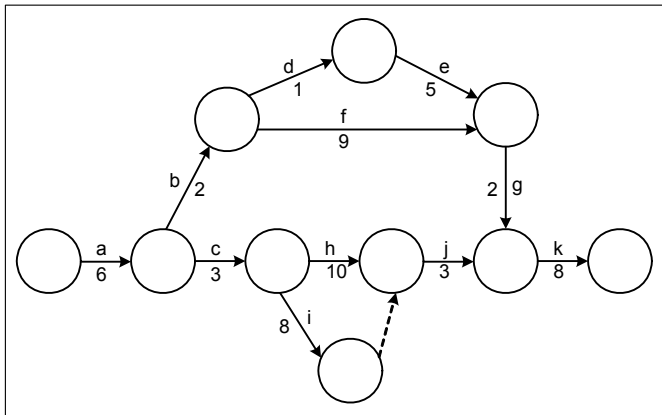
- 3) No es posible la existencia de lazos o bucles. Ninguna tarea puede tener una secuencia de tareas previas donde ella misma esté incluida. La única posibilidad que ocurra esto es que se haya formulado mal el orden de precedencia.

- 4) Todas las tareas que llegan a un nodo deben ser precedentes de las que comienzan en ese nodo. Para poder cumplir con esta condición puede necesitarse usar una o más actividades ficticias. Como puede verse en la figura 2, las tareas c y d tienen ambas como precedente a la tarea a, pero la tarea b es precedente sólo de d, por lo cual se necesita usar una tarea ficticia. También, en la figura 2, se ve que las tareas d y e tienen ambas como precedente a la tarea b; pero no pueden partir de un mismo nodo ya que tienen otra precedente distinta. Una vez más se requiere el uso de las tareas ficticias.



**Figura 2.** Necesidad de tareas ficticias

Teniendo en cuenta estas reglas, puede construirse el grafo para el ejemplo propuesto como se muestra en la figura 3. En él puede verse la necesidad de incorporar una tarea ficticia llegando al nodo en el que comienza la tarea j, debido a que sus dos tareas precedentes nacen ambas en un mismo nodo. En cada arco, además de la identificación de la tarea se incorpora su duración ( $d_i$ ).



**Figura 3.** Grafo orientado del ejemplo

Una vez generado el grafo, se está en condiciones de definir el conjunto de tareas que constituyen el camino crítico. Esto puede determinarse considerando la fecha más temprana en la que puede comenzar cada una de las tareas del plan de obra

propuesto. La duración total de la obra es, en este caso, la fecha temprana que se registra en el nodo final, punto en el cual se estaría en condiciones de comenzar otro proyecto.

Otro modo de hacerlo es tener en cuenta, para cada una de las tareas, el tiempo que falta, una vez finalizada la misma, hasta concluir la obra. En este caso, la duración total será el tiempo que se registra sobre el nodo inicial, el cual puede considerarse como el punto final de un programa de trabajo previo.

En ambos casos, la secuencia de tareas que determinan el tiempo máximo hallado, constituye el camino crítico.

Para la primera de las variantes podemos considerar que ninguna tarea puede comenzar antes de que haya concluido la última de sus tareas precedentes. Se puede “fechar”, entonces, el nodo de inicio de cada tarea con la llamada *fecha temprana* o *próxima* (para el nodo  $i$ ,  $fp_i$ ), que es igual al tiempo en que se encuentran terminadas todas las tareas que finalizan en ese nodo.

Para hacerlo, se considera que al nodo inicial le corresponde el tiempo cero, por lo tanto ésa será la fecha temprana para las tareas que no tienen ningún antecedente. Las fechas de los nodos donde ellas terminan serán la de la duración de esas tareas. A partir de allí, la fecha de un nodo cualquiera  $k$ , requerirá tener fechados todos los nodos donde comienzan las tareas que allí terminan. El valor de esa fecha será igual al máximo de la suma de la fecha de cada nodo de origen y la duración de la tarea que allí comienza.

En el grafo de la figura 3, la fecha temprana para la tarea  $a$  es cero. A su vez, para el nodo donde ella termina, la fecha temprana de  $b$  y  $c$ , será  $6$  ( $0 + d_a$



= 0 + 6). La fecha temprana para h e i será 9 ( $6 + d_c = 6 + 3$ ), en tanto que para j será 19 (máximo  $[9+10, 17+0]$ ), después de haber fechado el nodo donde comienza la tarea ficticia (9+8).

Estas fechas pueden volcarse en el grafo como se puede ver en la figura 4, donde, en el sector superior de cada nodo se ha colocado el número que identifica al mismo y, a la izquierda, el valor de la fecha temprana para comenzar las tareas que se inician en ese nodo.

El tiempo máximo que se tardará en ejecutar el programa de actividades propuesto es 30, como puede verse en el sector izquierdo del nodo final. Las tareas que determinan ese tiempo y, por lo tanto, constituyen el camino crítico son: *a, c, h, j, k*.

A fin de determinar el tiempo que resta para concluir la obra, considerando los momentos que marca cada uno de los nodos, deberemos recorrer el grafo en sentido inverso del flujo de información. El lapso sobre el nodo final es cero. Para aquellos nodos donde comienzan tareas que no son antecedentes de ninguna otra, ese valor será igual a la duración de la tarea.

Para el resto de los nodos, será preciso tener “fechados” todos los nodos finales de las tareas que se originan en ese punto. El lapso será, entonces, el máximo de las sumas de la fecha del nodo y la duración de la tarea que allí finaliza.

En el grafo de la figura 4, en el sector derecho de cada nodo se ha colocado el período de tiempo correspondiente, desde ese momento hasta el final de la obra. En el nodo final es, como se dijo, cero. Para el nodo 9, donde comienza la tarea k, que no tiene consecuentes, el lapso es 8.

Para poder fechar, por ejemplo, el nodo 3, debemos tener fechados los nodos 5 y 6. El lapso desde 3 hasta el final será 19, el máximo entre  $15+d_d = 16$  y  $10+d_f = 19$ .

Las tareas que constituyen el camino crítico no pueden demorarse, ya que si lo hicieran el programa sufriría un atraso. En cambio el resto de las tareas pueden tener un tiempo de demora. El mayor lapso de demora admisible constituye lo que normalmente se conoce como “margen de elasticidad” o

“flotación”. Como es obvio, el margen de elasticidad de las tareas críticas es nulo.

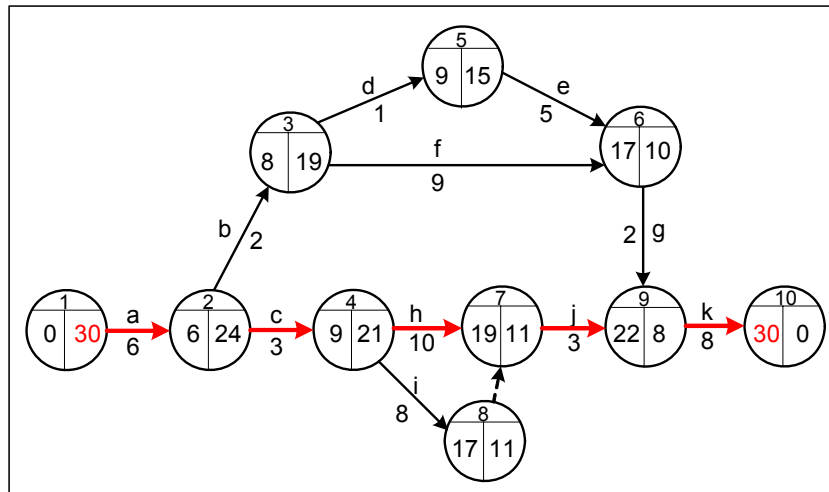


Figura 4. Determinación del camino crítico

Debe tenerse en cuenta que si se acorta el camino crítico por alguna razón, otros caminos pueden volverse críticos. Por otro lado, si se retrasa un camino no crítico, quizá se vuelva crítico.

Para una tarea  $k$  que comienza en el nodo  $i$  y concluye en el  $j$ , la fecha límite para comenzarla se calcula como:  $fl_k = DT - F_j - d_k$  y el margen de elasticidad está dado por:  $m_k = fl_k - fp_k$ , siendo  $DT$  la duración total de la obra y  $F_j$  el lapso desde el fin de la tarea hasta el fin de la obra.

Puede verse que en un único grafo como el de la figura 4, se encuentra toda la información necesaria para determinar dicho margen, además del camino crítico. Así, para la tarea  $d$ , por ejemplo, la fecha límite es  $fl_d = 30 - 15 - 1 = 14$  y el margen  $m_d = 14 - 8 = 6$ . En la tabla 2 se muestran los valores de las fechas límites y los márgenes de elasticidad de todas las tareas.

Tarea	Duración	Fecha fp	Lapso F	Fecha fl	Margen m
a	6	0	24	0	0
b	2	6	19	9	3
c	3	6	21	6	0
d	1	8	15	14	6
e	5	9	10	15	6

f	9	8	10	11	3
g	2	17	8	20	3
h	10	9	11	9	0
i	8	9	11	11	2
j	3	19	8	19	0
k	8	22	0	22	0

**Tabla 2.** Resultados del problema

Debe notarse que una tarea con un margen muy pequeño puede presentarnos cierta dificultad.

Para concluir, puede decirse que teniendo identificados el camino crítico y el resto de las tareas con sus márgenes correspondientes, se dispone de una buena herramienta para tomar decisiones, como podría ser la reasignación de recursos desde tareas no críticas a aquellas que lo son. Esto, en general, reducirá la duración del camino crítico, a costa de demorar la ejecución de las tareas que no se encuentran sobre él.

## Determinación del tiempo de la tarea

Hasta aquí, se ha considerado que no hay incertidumbre en la duración de las actividades involucradas en una obra. Normalmente, las tareas están sujetas a contingencias, por lo cual su duración se transforma en una variable aleatoria. Dificilmente se conozca la ley de probabilidades que las rige, apenas unos valores típicos (mínimo, máximo, más frecuente). Normalmente, a partir de esos valores, se asigna una distribución conocida como Beta, para la que se requiere disponer de tres parámetros:

- Estimación optimista ( $t_o$ ): es el tiempo mínimo en que la tarea puede ser realizada. Es el tiempo que resulta cuando no surgen inconvenientes.
- Estimación más frecuente ( $t_f$ ): es el tiempo que se registra con más frecuencia. Esta estimación es la que se utiliza cuando se ignora la naturaleza aleatoria de la duración de la tarea.
- Estimación pesimista ( $t_p$ ): es el tiempo máximo que puede necesitar la

tarea para ser ejecutada. Refleja la posibilidad de que se verifiquen todos los inconvenientes inherentes a la tarea.

El tiempo esperado o medio y la varianza para esta distribución se calculan de acuerdo a:

$$t_m = (t_o + 4t_f + t_p)/6 \quad ; \quad \sigma^2 = \left( \frac{t_o - t_p}{6} \right)^2$$

Usando la metodología vista con los valores de los tiempos medios para las tareas, se determinará el tiempo medio de duración de la obra. La varianza de la misma será la suma de las varianzas de las tareas críticas, con lo cual se está en condiciones de estimar los límites probables de tiempo de ejecución real de la obra. Esto es rigurosamente cierto sólo en el caso de un número muy grande de tareas, pero se acepta en todos los casos por cuanto es mejor que ninguna estimación de probabilidades de variación.

Si se admite que para toda la obra también se cumple la distribución beta, que la duración total DT determinada es el tiempo esperado y que el tiempo más frecuente para la misma,  $T_F$ , resulta ser la suma de los tiempos más frecuentes de las tareas críticas, se puede escribir:

$$DT = (T_O + 4T_F + T_P)/6 \quad ; \quad \sigma_{CC}^2 = ([T_P - T_O]/6)^2$$

siendo  $T_O$  y  $T_P$  los tiempos optimistas y pesimistas para la obra total. De esas expresiones surge que:

$$T_O = 3DT - 2T_F - 3\sqrt{\sigma^2} \quad ; \quad T_P = 3DT - 2T_F + 3\sqrt{\sigma^2}$$

## Diagrama de Gantt

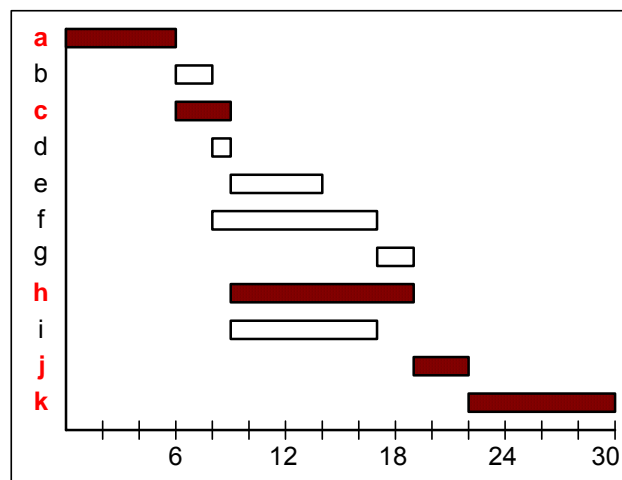
Existe otra representación de las actividades de un proyecto que está basada en un diagrama de barras o segmentos de longitud proporcional a la duración de las tareas.

Para su construcción, se disponen verticalmente las actividades del proyecto y horizontalmente se dibujan barras paralelas como puede observarse en la figura 5 para el ejemplo de la tabla 1. El eje horizontal constituye, a escala, el eje de tiempo.

La duración de cada tarea queda definida por la longitud de la barra y, por su ubicación, queda indicado el comienzo y final de la tarea.

En el diagrama, como mínimo, deberá poderse distinguir con claridad las tareas críticas de aquellas que no lo son, como se muestra en gris en la figura 5.

Además, se debe contar con un sistema que permita señalar la fecha actual, para poder ver las tareas que se deberían estar ejecutando.



**Figura 5.** Diagrama de Gantt del problema propuesto

Si bien el diagrama de Gantt brinda una visión gráfica clara y general de todas las actividades involucradas tiene algunos inconvenientes:

- a) No señala la dependencia existente entre las distintas tareas
- b) Requiere una escala temporal para la representación gráfica
- c) No es adecuado para analizar las modificaciones al plan de la obra, cuando en la misma se han verificado inconvenientes en el programa original.

## Bibliografía

- Zaderenko, S.G., "Sistemas de programación por camino crítico", Ed.Mitre, 3ªEd., 1968.

## Propuestas de trabajo

1) El cuadro siguiente resume una secuencia de tareas, con la duración estimada para cada una de ellas. Determinar el tiempo mínimo en el cual es posible completar la secuencia, los márgenes de elasticidad, el camino crítico y su representación en el diagrama de Gantt.

Tarea	a	b	c	d	e	f	g	h
Duración [días]	1	10	9	4	2	3	8	10
Tarea Previa	--	a	a	a	b	b	d	d
Tarea	i	j	k	l	m	n	o	p
Duración [días]	4	5	11	8	2	5	9	11
Tarea Previa	e	c,f,g	h	h	j,k	m	l	n,o
Tarea	q	r	s	t	u	v	w	
Duración [días]	10	12	9	8	5	7	2	
Tarea Previa	i,j	i,j	q,r	q,r	s	t	u,v	

2) En el cuadro siguiente se muestra una serie de tareas a cumplir para llevar a cabo el paro, reparación y puesta en marcha de una planta de hidrogenación. En el mismo se adjuntan las tareas previas a cada una y se pide determinar el camino crítico y su representación en un diagrama de Gantt. Hallar además, los márgenes de elasticidad.

Tarea	Tarea anterior	Tiempo optimista	Tiempo pesimista	Tiempo probable
a Bajar temperatura del horno, cortar carga	--	2	3,5	3
b Circular con hidrógeno y enfriar	a	8	12	10
c Apagar horno, vaporizar y bloquear	a	1	3	2
d Parar compresores, inertizar y entregar	b	5	12	8
e Depresionar el sistema, inertizar y entregar	b	7	16	10
f Colocar chapas ciegas en límite de la planta	e,c	3	5	4
g Desmontar válvula de seguridad, controlar y montar nuevamente	f	15	30	24
h Revisar bombas de proceso	a	20	30	25
i Limpiar filtros del circuito de hidrógeno	d	3	5	4
j Cambiar sellos a compresor	d	17	30	20
k Revisar Demister (rompeniebla)	e	12	25	15
l Destapar reactor	e	4	6	5
m Revisar y reparar distribuidor	l	6	15	8
n Colocar distribuidor y tapar	m	6	8	7

o	Retirar chapas ciegas	g, k, n	3	5	4
p	Prueba de estanqueidad	o	2	8	4
q	Inertizar	p	6	8	7
r	Circular hidrógeno	i, j, q	7	11	8
s	Dar carga a planta y normalizar	h, r	3.5	4,5	4

# CAPÍTULO 14

## ORDENAMIENTO DE CÁLCULO Y OPTIMIZACIÓN EN SIMULADORES MODULARES

### Tipos de simuladores de procesos

El aumento de capacidad de cálculo que trajo aparejada la presencia cotidiana de la computadora como una herramienta técnica auxiliar permitió el desarrollo de sistemas de alta complejidad orientados al análisis y diseño de plantas de proceso.

En un camino que comienza a mediados del siglo pasado, la presencia de los simuladores en la definición de la ingeniería de una planta química ha sido constante y creciente.

En el más simple de los planteos, simular el comportamiento de un proceso implica resolver el sistema de ecuaciones no lineales que constituyen el modelo matemático del mismo

$$h_i(x_1, \dots, x_{n+m}) = 0 \quad ; i = 1, \dots, m$$

$$r_j(x_1, \dots, x_{n+m}) = 0 \quad ; j = 1, \dots, n$$

$$x_k^S \leq x_k \leq x_k^I \quad ; k = 1, \dots, n + m$$

siendo  $h_i$  y  $r_j$  las relaciones inherentes al sistema (balances, por ejemplo) y las especificaciones impuestas al mismo y  $x_k^S, x_k^I$ , los límites de cada una de las variables del sistema.

En las ecuaciones que constituyen el modelo pueden distinguirse aquellas que se refieren a:

- 1) las unidades que componen el sistema (intercambiadores, columnas, reactores, etc.)



- 2) las especies que están presentes en algún punto del mismo (composiciones, caudales, temperaturas, propiedades fisicoquímicas, etc)
- 3) el esquema de proceso adoptado (definición -explícita o no- de las conexiones entre unidades)
- 4) las especificaciones particulares que se plantean para el sistema.

Todo lo anterior se encuentra comprendido dentro de un cierto esquema de organización global que, básicamente, puede adoptar alguna de las dos estructuras siguientes: *modular* o *basada en ecuaciones*. Existe una tercera, *modular simultánea*, a la que puede considerársela como una combinación de las otras dos.

Bajo el primero de los enfoques, las ecuaciones que definen cada unidad aparecen bajo la forma de "bloques", como procedimientos o rutinas de cálculo preestablecidas, integradas a una verdadera biblioteca de módulos de simulación.

En cada uno de ellos están perfectamente determinadas cuales son las variables "de entrada", esto es, aquellas cuyo valor debe ser conocido en el momento de utilizar el módulo, y las "de salida", que son calculadas por la rutina.

Para estas variables se determinan sus condiciones operativas, de acuerdo a las relaciones que se han definido en cada módulo. Las propiedades fisicoquímicas que se requieren para esos cálculos se encuentran disponibles en una "biblioteca", que constituye una suerte de "modulo de servicio" general.

Las conexiones entre unidades son manejadas a través de un programa ejecutivo que se encarga de transferir la información, de acuerdo al esquema de proceso adoptado, entre los distintos bloques de simulación.

Los datos del problema o, en términos más generales, toda información que deba suministrarse a cualquier rutina, no representa un problema, *siempre que la variable haya sido prevista en el correspondiente bloque como entrada al mismo*. En estas condiciones se estará frente a lo que se denomina un *problema de simulación*, para distinguirlo de aquellos donde la variable está concebida como una salida, llamados *problemas de diseño*, de mayor complejidad de cálculo, requiriéndose una vía indirecta para poder incorporar la información especificada,

debiendo simularse el sistema iterativamente hasta que la variable cumpla con la especificación impuesta.

En el caso de las estructuras basadas en ecuaciones, las relaciones que definen las unidades de proceso, las interconexiones que surgen del esquema adoptado y las especificaciones del problema -eventualmente, también las propiedades fisicoquímicas- aparecen integrando un gran sistema de ecuaciones no lineales acopladas que deben ser resueltas en forma simultánea para llevar a cabo la simulación.

En este tipo de estructura no tiene sentido distinguir entre problemas de simulación o de diseño, toda vez que el flujo de información no existe como una definición apriorística, con variables de entrada y salida preestablecidas. Esto permite un planteo del problema mucho más flexible, reduciendo al máximo el número de esquemas de iteración necesarios para alcanzar una solución.

El problema más serio que presenta este enfoque en la simulación de procesos está asociado con la necesidad de resolver un sistema de ecuaciones no lineales de gran magnitud, donde el usuario fija una condición inicial que puede comprometer la velocidad de convergencia o aún a esta misma.

La resolución en sí requiere disponer de un método genérico para grandes sistemas de ecuaciones no lineales, con rutinas de cálculo altamente complejas, como las destinadas al manejo de modelos dispersos.

Por el contrario, el enfoque modular es matemáticamente más modesto en cuanto a sus requerimientos, habida cuenta de que la etapa de desarrollo se realiza a nivel de subsistema o unidad de proceso, con un esquema predeterminado para el flujo de información, lo que presupone la posibilidad de resolver el orden de cálculo *interno a cada subsistema* de la forma más eficiente posible.

Este menor grado de exigencia en recursos fue, sin duda, uno de los factores determinantes en la elección del enfoque a utilizar en los primeros simuladores de procesos. Los posteriores desarrollos comerciales de estas versiones, de origen estrictamente universitario, condicionaron el actual perfil de simuladores disponibles en el mercado, mayoritariamente, en base a una estructura modular.

Por esta razón, será éste el modelo sobre el cual se han de efectuar todas las consideraciones que sigan.

## **Características básicas de los simuladores modulares**

En la estructura de un simulador de procesos de concepción modular pueden distinguirse ciertos núcleos fundamentales:

- a) un *programa ejecutivo*, a cargo de la coordinación general de las distintas instancias relacionadas con la simulación (instrumentación del orden de cálculo, llamado a rutinas, verificación de valores, manejo de entradas y salidas, etc.). En los simuladores comerciales el usuario no tiene acceso al funcionamiento de este programa, aunque sí puede definir algunos de los componentes que maneja (secuencias, métodos de cálculo, etc.).
- b) una *biblioteca de módulos* que incluye tanto a las rutinas que permiten modelar unidades de proceso como a las que resultan necesarias para el manejo de las especificaciones y la convergencia del cálculo. En esta biblioteca suele haber rutinas alternativas de diferente complejidad para realizar una misma operación (que implementan métodos rigurosos y aproximados, por ejemplo), lo que permite plantear la simulación con un adecuado grado de dificultad, reservando el máximo de detalle solo a aquellos sectores que lo requieren por su incidencia en los resultados finales.

Si bien existen módulos que representan unidades de proceso con una estructura compleja como una columna de destilación, también se cuenta con otros que modelan unidades simples, a partir de los cuales es posible la construcción de modelos intrincados. Así, el reactor de la planta de ácido sulfúrico, por ejemplo, puede simularse mediante la adecuada combinación de módulos que representan lechos catalíticos, intercambiadores de calor y divisiones y sumas de corrientes.

- c) una *biblioteca de propiedades*, normalmente, un conjunto de rutinas de predicción de distintas propiedades para los compuestos o mezclas de

ellos, con alcances muy diversos en cuanto a su aplicabilidad.

En la tabla 1 se muestra una lista típica de las propiedades incluidas en estos "paquetes".

Termodinámicas	Transporte
Coefficientes de fugacidad (Eq.líq-vap)	Viscosidad
Entalpía	Conductividad térmica
Entropía	Coefficiente de difusión
Energía libre de Gibbs	Tensión superficial
Volumen específico	

**Tabla 1.** *Propiedades típicas disponibles en un paquete de propiedades*

El éxito de la simulación de un proceso -entendiendo por tal una adecuada representación del comportamiento del sistema- está fuertemente influenciado (en muchos casos, determinada) por la elección que se efectúe de las rutinas de predicción. Los paquetes comerciales suelen incluir recomendaciones en el uso de los distintos métodos y modelos disponibles, en función del tipo de mezcla (idealidad de la misma, presencia de compuestos polares o gases livianos, etc.), la presión de trabajo, datos adicionales disponibles, etc.

El programa ejecutivo construirá una matriz de proceso, en base a la información que le ingresa el usuario sobre las relaciones que existen entre las unidades del sistema. En esta matriz cada bloque de cálculo tendrá asignado el módulo de la biblioteca que corresponda, así como la definición de cuales son las corrientes de entrada y salida al mismo.

Para cada una de estas corrientes se dispondrá de un conjunto de datos, expresados en un sistema coherente de unidades, que incluye información específica para cada uno de los  $N_{\text{comp}}$  compuestos presentes en la misma, así como datos globales para la corriente, como se muestra en la tabla 2.

Flujo molar de cada componente
Flujo molar total
Temperatura
Presión
Entalpía
Fracción molar vaporizada
Fracción molar líquida
Entropía
Densidad
Peso molecular

**Tabla 2.** *Información básica en una corriente de proceso*

En la figura 1 se esquematiza el sector de reacción de un proceso, donde existe una etapa previa de separación de contaminantes y una posterior de recuperación y reciclo de reactivos (fracción media del efluente del reactor). Todas las separaciones se llevan a cabo por destilación.

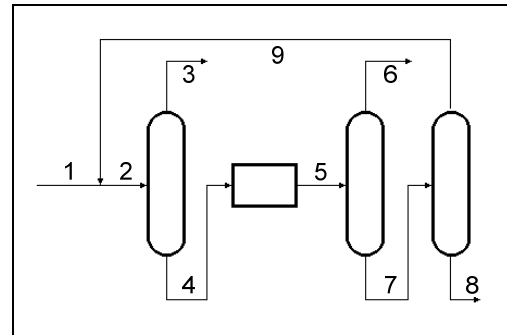


Figura 1. Sector de reacción de un proceso

Una vez que se ingrese la información correspondiente al diagrama de proceso, las composiciones de las corrientes de entrada y salida al sistema y los parámetros

de funcionamiento de los equipos, el simulador "traducirá" internamente esto en un esquema como el que se muestra en la figura 2.

Allí se puede apreciar una clara correspondencia con el sistema real, más allá de la explicitación de un quinto elemento (bloque B1), que permite considerar el

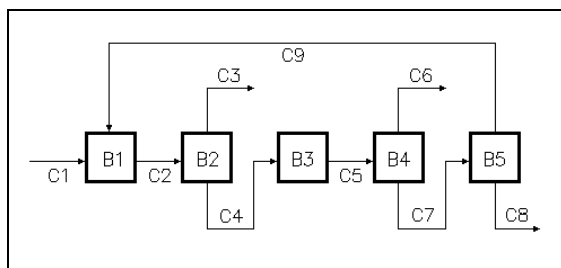


Figura 2. Esquema de proceso

reingreso del reciclo.

Adicionalmente al módulo de biblioteca SUM que permite la suma de dos o más corrientes, se requerirá el uso de los que modelen un reactor REACT y una columna de destilación DEST.

Tanto los bloques como las corrientes han sido individualizados por sendos códigos, Bi para los primeros, Cj para las últimas.

Con todo esto, la interpretación de la matriz de proceso que se muestra en la tabla 3 es inmediata.

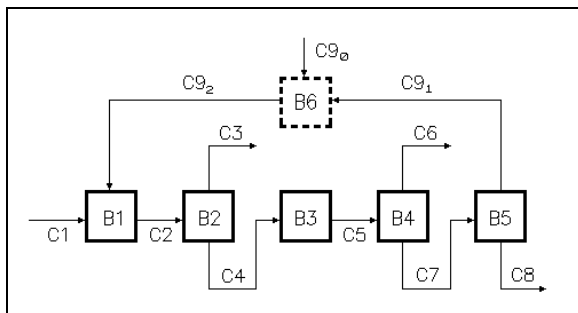
La resolución de la estructura que se muestra en la figura 2 presenta un problema debido a la existencia del reciclo, obligando a la adopción de

Bloque	Módulo	Entrada	Salida
B1	SUM	C1 C9	C2
B2	DEST	C2	C3 C4
B3	REACT	C4	C5
B4	DEST	C5	C6 C7
B5	DEST	C7	C8 C9

Tabla 3. Matriz de proceso

técnicas iterativas para el cálculo de la misma. Otro tanto ocurriría, como quedó dicho, cuando se especifica el valor de una variable que figura como salida en el correspondiente módulo de biblioteca.

Esto presupone a) la elección de un conjunto de variables a suponer, de modo que se pueda obtener una solución en forma directa y b) un procedimiento que permita la adopción de nuevos valores para ese conjunto, si la condición de convergencia establecida (normalmente  $|(X_{cal} - X_{sup})/X_{sup}| \leq \text{cota}$ ) no se satisface.



**Figura 3.** Estructura de cálculo

En la figura 3 se esquematiza una estructura de cálculo típica en un simulador de procesos para resolver este tipo de problemas.

Allí se han supuesto los valores de la corriente C9, expresados en la corriente C9<sub>2</sub> (inicialmente igual a los de C9<sub>0</sub>), los que son comparados con los que se obtienen, en la corriente C9<sub>1</sub>, al resolver el sistema B1...B5. Un módulo de biblioteca, el B6, está a cargo de proponer los nuevos valores en C9<sub>2</sub>, generalmente haciendo uso un método de solución de ecuaciones no lineales como los de tipo Newton, por ejemplo.

Adviértase que, bajo estas condiciones, la resolución del modelo, que originalmente podría haber sido planteado como

$$\begin{array}{lll}
 C2 = h_1(C1, C9) & C1 = \text{dato} & (B1) \\
 C3 = h_{21}(C2) & C4 = h_{22}(C2) & (B2) \\
 C5 = h_3(C4) & & (B3) \\
 C6 = h_{41}(C5) & C7 = h_{42}(C5) & (B4) \\
 C8 = h_{51}(C7) & C9 = h_{52}(C7) & (B5)
 \end{array}$$

queda reducido, al utilizar un simulador modular, a encontrar

$$C9_2 = C9_1 \text{ siendo } C9_1 = f(C1, C9_2)$$

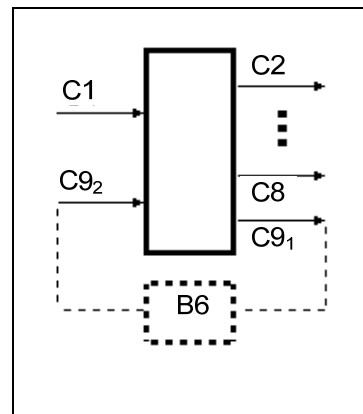
ya que los restantes valores de las distintas corrientes son calculados desde los módulos del simulador, en una forma "transparente" para el usuario.

En la figura 4, se esquematiza la "visión" que tendría quien utiliza el simulador desde el exterior al mismo, es decir, como un usuario "puro". El bloque de

convergencia se ha dejado explícito ya que si bien su tratamiento es análogo al de cualquier otro de la biblioteca, resulta conveniente visualizarlo de un modo distinto.

Los problemas numéricos que pueden aparecer están vinculados, fundamentalmente, a ese sector, ya que la convergencia interna de los módulos que representan las unidades son, por construcción, robustos desde el punto de vista de cálculo.

A continuación se abordará el tratamiento de la selección del conjunto de corte a suponer cuando existe un problema de reciclo y la metodología para resolver la iteración. Finalmente se verá la inclusión



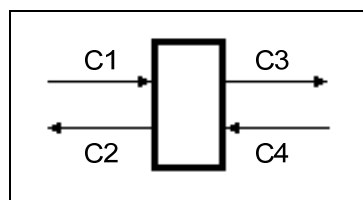
**Figura 4.** Convergencia

de técnicas de optimización conectadas con el uso de simuladores de proceso.

## El conjunto de corte

Como ya quedó dicho, al tratar en general los simuladores de procesos, los modulares deben acudir con frecuencia a esquemas iterativos de cálculo, no solo cuando el diagrama de flujo presenta corrientes de reciclo sino también cuando la rigidez propia del módulo impide la asignación directa de valores especificados.

En la figura 5 se esquematiza la estructura externa de un equipo para extracción en dos fases, a las que corresponden, respectivamente, las corrientes C1-C2 y C3-C4.



**Figura 5.** Módulo de extracción

Supóngase que en la construcción del módulo se toman como datos los correspondientes a las entradas a la etapa. Se admite que la operación de la misma se llevará a cabo sin efectos térmicos y en condiciones de equilibrio. Los solventes portador y extractor son mutuamente inmiscibles.

Para especificar una corriente, en consecuencia, bastará con establecer los valores de los caudales de cada uno de los compuestos, que se indicarán como

$Ck_i$ ,  $k = 1..4$ , siendo:  $i = a$  para el solvente A (sólo en la fase 1),  $i = b$  para el solvente B (sólo en la fase 2) e  $i = c$  para el soluto, presente en ambas fases.

Las ecuaciones que definen el sistema son

$$C2_a = C1_a$$

$$C2_b = C1_b = 0$$

$$C4_a = C3_a = 0$$

$$C4_b = C3_b$$

$$C1_c + C3_c = C2_c + C4_c$$

$$\text{re} \left( \frac{C2_c}{C2_b}, \frac{C3_c}{C3_a} \right) = 0$$

Al admitir como conocidos los valores correspondientes a  $C1$  y  $C3$ , el cálculo de los caudales de los solventes en las salidas es inmediato, restando, en consecuencia, la resolución del sistema compuesto por las dos últimas ecuaciones para conocer las cantidades de soluto en  $C2$  y  $C4$ .

Aquí puede apreciarse la facilidad que otorgan los simuladores modulares de procesos en cuanto a la robustez numérica de los cálculos internos que se instrumentan en las unidades de biblioteca.

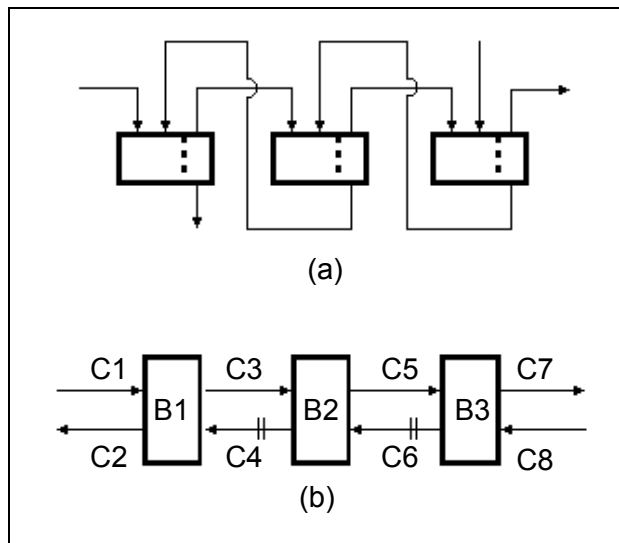
En efecto, en este extractor genérico, el sistema de ecuaciones que debe ser resuelto está totalmente definido en términos formales, lo que permite seleccionar el método y el punto inicial más adecuado para resolverlo, asegurando una buena velocidad de convergencia.

Supóngase ahora que debe simularse, haciendo uso de este módulo, el comportamiento de un sistema de tres extractores operando en contracorriente.

En la simulación se admitirán como conocidos los valores de las corrientes netas de entrada de la carga fresca y del solvente de extracción.



En la figura 6 (a) se muestra un diagrama del proceso y la parte (b) el correspondiente esquema, resultante de la utilización del referido módulo de biblioteca. De acuerdo al planteo, se admiten conocidos los valores de C1 y C8.



Resulta clara la imposibilidad de efectuar el cálculo del sistema en forma directa, debido a los reciclos de información C3-C4 y C5-C6.

Para hacerlo deben suponerse los valores de una corriente de cada grupo -C4 y C6, por ejemplo-, proceder al cálculo -de acuerdo a las suposiciones efectuadas, bloques B1-B2-B3, en ese orden- e iterar sobre los valores adoptados.

Las corrientes C4 y C6 constituyen, para este caso, las llamadas *corrientes de corte (tear streams)*. Sobre estas corrientes de corte se deberán suponer una o más variables (temperatura, presión, caudal) y luego verificar la exactitud de esta suposición.

Para lograr que la estructura resultante sea acíclica, deberemos elegir una o más corrientes de corte, lo que constituye el llamado *conjunto de corte*. Para seleccionar este conjunto tendremos en cuenta que la dificultad de cálculo asociada sea mínima, considerando el número de variables del conjunto y la estabilidad numérica de la iteración.

En el ejemplo, por su sencillez, basta la simple inspección para determinar el conjunto de corte. En casos de mayor complejidad es preciso instrumentar una cierta metodología para individualizarlo.

## Generación de la matriz de ciclos y arcos

El sistema mostrado en la figura 7 puede servir para fijar ideas. Allí se han indicado solamente los bloques que componen el sistema y las corrientes de entrada y salida a cada uno de ellos.

La selección de un conjunto de variables de corte es un tema profusamente abordado en la literatura. En todos los enfoques pueden visualizarse dos instancias sucesivas:

- la detección de todos los ciclos de información presentes en el sistema
- la selección del conjunto de corte propiamente dicha

Para la ejecución del primer paso se ha elegido, de entre un número importante de algoritmos, el debido a Forder y Hutchison modificado por Westerberg.

Para la aplicación del mismo se requiere disponer de la llamada *matriz de adyacencias*, un arreglo de  $n$  filas por  $n$  columnas, siendo  $n$  el número de nodos o bloques que componen el sistema. En esta matriz el elemento de la fila  $i$  y columna  $j$  indica si existe o no una corriente que abandona el nodo  $i$  para ingresar al nodo  $j$ , *arco  $ij$* . Dado que vamos a admitir que todos los arcos involucran el mismo número de variables desconocidas, los elementos de la matriz de adyacencias pueden ser numéricos o lógicos.

	1	2	3	4	5	6	7
1				●			
2	●				●		
3		●					●
4						●	
5				●			●
6		●	●				
7			●				

Figura 8. Matriz de adyacencias

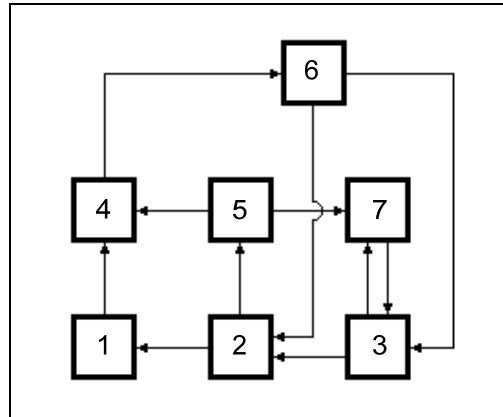


Figura 7. Diagrama de flujo de información

En la figura 8 se muestra la correspondiente matriz para el sistema de la figura 7.

A partir de esta información es posible construir la *matriz de ciclos y arcos*, donde se individualizan la totalidad de los ciclos de información presentes en el sistema y, para cada uno de ellos, los arcos que se encuentran involucrados.

En el cuadro 1 se resumen los pasos a seguir para determinar dicha matriz a partir de la información contenida en la de adyacencias, de acuerdo al algoritmo de Forder y Hutchison, modificado por Westerberg.

1. Generar una lista inicial vacía. Tomar un nodo cualquiera (fila) de la matriz de adyacencias.
2. Si el nodo figura en la lista de nodos ir a 5; si no
3. Incorporar el nodo a la lista de nodos.
4. Tomar una arco cualquiera que salga del nodo. Considerar el nodo al que ingresa el arco. Ir a 2.
5. La secuencia que comienza en la inclusión previa del nodo en la lista y que concluye con el arco elegido constituye un *ciclo*.
6. Si el ciclo ya ha sido detectado, desecharlo. Si no, incorporarlo a la *matriz de ciclos y arcos*.
7. Eliminar de la lista el último nodo. Considerar el nuevo último nodo (anterior penúltimo).
8. Si el nodo tiene, en la matriz de adyacencias, arcos de salida aún no considerados ir a 4; si no
9. Si en la lista de nodos hay un solo elemento *Terminar*, si no, ir a 7.

**Cuadro 1.** Generación de la matriz de ciclos y arcos  
Algoritmo de Forder-Hutchison-Westerberg

Así, tomado el bloque 1 como nodo inicial, por ejemplo, puede considerarse la secuencia de arcos (1-4), (4-6), (6-2) que se resumirían en la lista de nodos 1-4-6-2. Al considerar el arco (2-1), el nodo de llegada 1 ya está en la lista y, por lo tanto, la secuencia de arcos (1-4)(4-6)(6-2)(2-1) o, en forma de lista, (1-4-6-2-1), constituyen un ciclo, identificado con A en la figura 9, que muestra la matriz de ciclos y arcos para el ejemplo.

El proceso sigue, de acuerdo al algoritmo, eliminando el nodo 1 de la

		1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	7
Arcos		4	1	5	2	7	6	4	7	2	3	3
C i c l o s	A	●	●				●			●		
	B			●			●	●		●		
	C			●	●				●			●
	D					●						●
	E	●	●		●		●					●
	F			●	●		●	●			●	

**Figura 9.** Matriz de ciclos y arcos

lista y eligiendo otro arco aún no analizado que salga de 2, el (2-5). Si luego se elige el (5-4) la lista queda (1-4-6-2-5-4), detectándose otro ciclo, no considerado aún, el (4-6-2-5-4), indicado como B en la figura. De un modo análogo se detectan los restantes ciclos, C a F, que están presentes en el ejemplo.

## Selección del conjunto de corte

Una vez hecho esto, es posible abordar la tarea de encontrar el conjunto de corte más adecuado. Obviamente, el criterio adoptado para juzgar el grado de adecuación es lo que diferencia los distintos algoritmos. Aquí se ha de exponer el debido a Upadhye y Grens, uno de los más consistentes en su concepción básica.

El principio fundamental sobre el que se basa el algoritmo está vinculado al comportamiento que tendrá el sistema durante el proceso iterativo, generado como consecuencia de la elección de un determinado conjunto de variables de corte.

Upadhye y Grens visualizan la existencia de lo que denominan *familias de corte*, distintos conjuntos de corte que poseen el mismo comportamiento en la convergencia del proceso iterativo, lo que resulta fácil de ver a través de un ejemplo sencillo.

Para el sistema de la figura 10 se ha explicitado el proceso iterativo que da comienzo con la suposición de valores para  $S_3$  y  $S_4$  ( $S_3^0, S_4^0$ ) y el consecuente cálculo de  $S_1$ , luego  $S_2$  y  $S_3$  y por fin  $S_4$ , cerrando el ciclo (recuadro 1).

Puede verse que lo anterior es equivalente a comenzar el proceso con  $S_1$  como corriente de corte, cuando  $S_1 = S_1^1$  (recuadro 2).

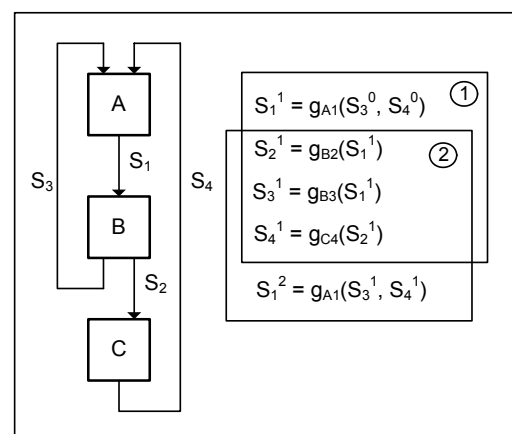


Figura 10. Familias de corte

Con esto la convergencia del proceso iterativo deberá ser igual tanto si se considera como conjunto de corte a  $S_3$  y  $S_4$  como a  $S_1$ , constituyendo estos dos grupos parte de una misma familia de corte.

Estas familias se generan de un modo muy simple, por la aplicación de la *regla de reemplazo* que puede enunciarse como sigue:

*Si  $\{D_1\}$  es un conjunto de corte y  $A_i$  un nodo donde todos sus arcos de entrada  $a_{ki}$  están en  $\{D_1\}$ , el conjunto  $\{D_2\}$ , que se obtiene al reemplazar todos los arcos de entrada  $a_{ki}$  por todos los arcos  $a_{ik}$  de salida de  $A_i$ , forma parte de la misma familia de corte que  $\{D_1\}$ .*

En el ejemplo de la figura 10  $\{D_1\} = \{S_3, S_4\}$  incluye la totalidad de las entradas al nodo 1, luego, por la aplicación de la regla enunciada, el conjunto de corte  $\{D_2\} = \{S_1\}$  pertenece a la misma familia que  $\{D_1\}$ , como se había visto.

Una familia de corte se caracteriza por su *vector de ciclos*, donde en la posición  $i$  del mismo se indica el número de veces que es abierto el ciclo  $i$  por cualquier miembro de la familia de corte, ordenando los ciclos con la convención A, B, C,.... Por ejemplo, un conjunto de corte posible para el caso de la figura 7 está compuesto por los arcos (2-1), (2-5), y (7-3), como puede verse en la correspondiente matriz de ciclos y arcos; el vector de ciclos resulta ser [1,1,2,1,1,1].

El *orden* de un conjunto de corte es igual al mayor valor de las componentes de su vector de ciclos, esto es, el máximo número de veces que ese conjunto de corte (y todos los de la familia) abre un ciclo cualquiera del sistema.

Para el conjunto considerado en el párrafo anterior el orden es 2. Nótese, además, que la aplicación de la regla de reemplazo sobre el nodo 5 (todas sus entradas pertenecen al corte) conduce al conjunto (2-1),(5-4),(5-7),(7-3) que tiene el mismo vector de ciclos -(2-5) abre B, C y F; (5-4) B y F y el arco (5-7) abre C.

Upadhye y Grens encontraron que al incrementar el orden del conjunto de corte se producía un incremento de la inestabilidad numérica del proceso iterativo. El objetivo del algoritmo será, entonces, encontrar el conjunto de corte de menor orden y, complementariamente, con el menor número de arcos.

En el cuadro 2 se resume el esquema del algoritmo. En el mismo se entiende por *columnas equivalentes* en la matriz de ciclos y arcos cuando los arcos que

representan están involucrados en los mismos ciclos, es decir, las columnas son iguales.

1. Eliminar de la matriz de ciclos y arcos todos los arcos, menos uno, cuyas columnas sean equivalentes.
2. Ordenar la columnas en orden decreciente al número de ciclos en que está involucrado el arco que representa.
3. Formar conjuntos de corte de 1,2,...,N arcos. En la generación desechar aquellos conjuntos incompletos cuyo orden iguale o exceda al del conjunto de menor orden encontrado.
4. Si se encuentra un conjunto de primer orden, interrumpir la búsqueda.
5. Aplicar, si resulta necesario, la regla de reemplazo para encontrar otro miembro de la familia que se estime más conveniente.

**Cuadro 2.** Selección de un conjunto de corte  
*Algoritmo de Upadhye y Grens*

En la figura 11 se han ordenado los arcos de acuerdo al criterio establecido en el punto 2. Asimismo, y por la aplicación del punto 1 el arco (2-1) se ha eliminado ya que su columna es equivalente a la del (1-4).

Puede verse que no existe ningún conjunto de corte de un solo arco.

Con dos arcos se pueden formar varios conjuntos de corte de orden 1: (4-6),(7-3); (6-2),(7-3),(6-3) o (1-4),(5-4),(7-3), por ejemplo, lo que concluye la búsqueda, de acuerdo al punto 4.

El criterio de menor número de arcos conduce a (4-6),(7-3) como conjunto de corte. Si no hubiese sido el primero en ser detectado, la aplicación de la regla de reemplazo hubiese permitido encontrarlo, después de aplicada un cierto número de veces: por ejemplo, el pasaje de (1-4),(5-4),(7-3) a (4-6),(7-3) es inmediato al operar sobre el nodo 4.

	4	2	3	1	5	6	6	7	3	5
	6	5	2	4	4	2	3	3	7	7
A	●			●		●				
B	●	●			●	●				
C		●	●					●		●
D								●	●	
E	●		●	●			●			
F	●	●	●		●		●			

**Figura 11.** Matriz final

## Convergencia y optimización en simuladores modulares

El problema general de optimización al utilizar un simulador modular se puede poner como

$$\begin{aligned} \min_{x,y} FO(x,y) \\ f(x,y) = 0 \\ g(x,y) \leq 0 \end{aligned}$$

siendo  $x$  e  $y$  vectores de dimensiones  $n$  y  $m$ , y  $f$  y  $g$  funciones vectoriales de dimensiones  $m$  y  $r$ . Esto es, con el problema de optimización coexiste otro de iteración sobre las variables  $y$  del conjunto de corte del problema.

Obviamente, las características del proceso de solución han de estar influenciadas por la metodología utilizada para alcanzarla.

Si, por ejemplo, se utiliza un algoritmo basado en la Programación Cuadrática Sucesiva (PCS), es posible abordar, en forma simultánea, ambos problemas. En estos casos, el algoritmo deberá trabajar sobre un problema de dimensionalidad no inferior a  $n + m$ , incluyendo como variables tanto al conjunto  $x$  como al  $y$ .

Si, en cambio, se adopta como vía de solución una metodología exclusivamente orientada a un problema del tipo

$$\begin{aligned} \min_{x,y} FO(x,y) \\ g(x,y) \leq 0 \end{aligned}$$

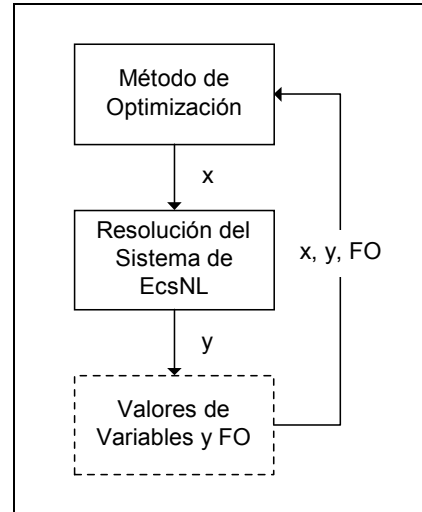
como es el caso del método Complex, será preciso recurrir a un método de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales para resolver, internamente al proceso de optimización, la iteración existente sobre las variables  $y$ .

En la figura 12 se esquematiza el procedimiento requerido por una metodología de optimización del tipo descrito, donde se aprecia, con claridad, el uso inevitable de una metodología de resolución de ecuaciones no lineales, conectada a la búsqueda del óptimo de la función objetivo planteada para el problema.

En los simuladores comerciales existen módulos específicos para el manejo de la convergencia en los conjuntos de corte, con lo cual un método tipo Complex no tiene inconveniente en ser utilizado.

Si se elige PCS, los módulos pueden usarse o no. En este último caso, la convergencia de los conjuntos de corte deberá explicitarse como una relación adicional.

En cambio, cuando existen relaciones de diseño entre variables, planteadas como especificaciones o condiciones que se imponen al margen del proceso iterativo, la única elección válida es PCS. Ya no existirá el auxilio de ningún módulo preexistente en el simulador y la utilización de una metodología como Complex estará vedada.



**Figura 12.** Optimización con métodos tipo Complex

## Bibliografía

- Biegler L.T., Grossmann I.E., Westerberg A.W., "Systematic Methods of Chemical Process Design", Prentice Hall, 1997.
- Seider W.D., Seader J.D., Lewin D.R., "Process Design Principles. Synthesis, Analysis and Evaluation", John Wiley & Sons, 1999.

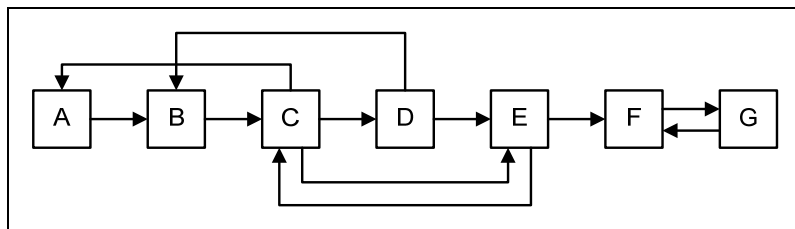


## Propuestas de trabajo

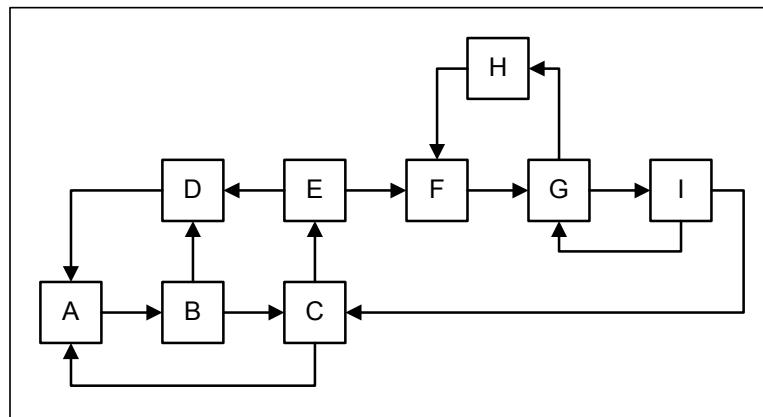
Para los sistemas de las figuras determinar

- La matriz de adyacencias.
- La matriz de arcos y ciclos.
- El conjunto de corte de menor orden y número de arcos.

1)



2)



# CAPÍTULO 15

## DISEÑO ÓPTIMO BAJO INCERTIDUMBRE

### Fundamentos del problema

El diseño de una unidad productiva, llámese ésta equipo o planta de proceso, consiste, en términos generales, en la elección de los niveles o características que deberán tener determinado número de *variables*, respetando las *relaciones* que existen entre ellas, para lograr *objetivos* prefijados en un *marco de referencia* preexistente.

Una mayor precisión permitirá la desagregación de los diferentes conceptos involucrados en el anterior juicio de características genéricas.

Así, las *variables* podrían ser clasificadas como *estructurales* (el esquema de proceso, por ejemplo), *geométricas* (las dimensiones de los equipos) u *operativas* (temperaturas, caudales, presiones, etc.).

Las *relaciones* entre variables pueden tener una naturaleza *teórica* (balances de calor, materia, energía mecánica), *empírica* (correlaciones, curvas de equilibrio) - estos dos tipos tomados como casos extremos- o *imperativos* (restricciones impuestas por la tecnología disponible o por el medio).

Los *objetivos* a cumplir pueden ser *externos* al diseño (las especificaciones de producto) o *internos* al mismo. Esto último ha de constituir la *función objetivo* que se fija el diseñador.

El concepto de *marco de referencia* busca ser más amplio que aquello que, convencionalmente, se acepta al referirse a los *datos del problema*. Aquí se incluyen no solo las características cuali y cuantitativas de los recursos disponibles por el diseñador para ejecutar su proyecto (cantidad y calidad de las materias primas, condiciones de mercado, medio ambiente, etc.) sino también la calidad de

la información que será utilizada en el diseño (exactitud de las correlaciones, variabilidad en las composiciones de los insumos, etc.).

Este marco de referencia afecta, en principio, a las relaciones entre variables, en particular, a las de naturaleza empírica, por el volumen de datos experimentales que contienen y, lógicamente, a las imperativas.

Al diseñador solo le cabe aceptar ese marco de referencia, pues es incapaz de modificarlo. Si no fuese así, esto es, si pudiese escoger un valor determinado para un cierto parámetro -temperatura ambiente, por ejemplo- lo correcto sería incluir ese parámetro dentro de las variables.

No siempre los datos de este marco resultan ser conocidos con certeza. La predicción de un coeficiente global de transferencia, por ejemplo, se hace en base a una correlación experimental, lo que conduce a un resultado cierto sólo en términos estadísticos. El valor correcto será conocido cuando el equipo entre en operación, es decir, en una instancia posterior al momento del diseño.

Bajo ciertas circunstancias, determinadas razones obligan a la adopción de uno de los posibles valores del dato incierto, aquel que resulta crítico en relación al problema: tal el caso, por ejemplo, del uso de la presión máxima previsible para un fluido contenido en un recipiente en el cálculo de los espesores de chapa. En esta situación, por razones de seguridad, se dimensiona para la condición de mayor riesgo.

Pero esto no resulta un criterio de aplicación general para resolver los problemas con incertidumbre en las condiciones de diseño.

Cuando la falta de certeza no resulte determinante sobre el funcionamiento seguro del sistema, habrá que analizar su influencia sobre los objetivos a cumplir, evaluando como afectan los eventuales errores en que se incurra debido al desconocimiento parcial en que se efectúa el diseño.

Aparece, de este modo, una complejidad adicional en el problema de diseño óptimo. Ahora, la función objetivo depende no solo de las variables de decisión sino de otras, sobre las cuales no se puede ejercer acción alguna

$$FO = FO(\{V_d\}, \{p\})$$

donde

$\{V_d\}$  es el conjunto de variables de decisión

$\{p\}$  es el conjunto de parámetros inciertos.

Se puede obtener un valor para la función objetivo si se fijan todas y cada una de las variables de decisión y se presuponen valores para el conjunto  $\{p\}$ , todo esto dentro de los límites preestablecidos para el sistema. Esta estrategia deja establecida una primera vía para abordar la optimización de un problema en condiciones de incertidumbre.

Si al hecho de otorgar valores a ciertas variables de decisión se lo considera como definir una *acción presente* y lo propio para los parámetros inciertos constituye el establecimiento de una *situación futura* puede entenderse con facilidad que, combinando adecuadamente acciones presentes y situaciones futuras, se puede obtener un panorama claro de la influencia de la incertidumbre sobre la función objetivo y obrar en consecuencia. Sin embargo, como se verá más adelante, no todas las variables de decisión definen, necesariamente, una acción presente.

Antes de seguir avanzando en los diferentes enfoques teóricos de los problemas con incertidumbre, resulta conveniente hacer alguna consideración sobre ciertos aspectos que resultan determinantes en el diseño de las vías de solución, particularmente en lo que se refiere a la formulación misma del problema.

## **Influencia de la incertidumbre en el análisis del problema**

En este tipo de problemas, el grupo de parámetros inciertos está constituido, como quedó dicho, tanto por datos "externos" al diseño (condiciones futuras del mercado, por ejemplo) como por valores relacionados con el sistema, los que, por su origen experimental, no resultan conocidos con exactitud en el momento de efectuarse el análisis.

En la determinación de los valores de coeficientes globales de transferencia, constantes de equilibrio, propiedades termodinámicas, etc., se hará uso de relaciones que las vinculan con otras variables del sistema. Las mismas, aunque tienen un fundamento teórico, han sido obtenidas en forma empírica, por lo que el

resultado que se obtenga deberá entenderse, en términos estadísticos, como el de mayor probabilidad, dentro de un determinado rango de variación. El valor exacto solo podrá conocerse midiéndolo sobre el sistema en funcionamiento.

Dentro de las variables que sí se encuentran a disposición del diseñador, es preciso distinguir, como de naturaleza distinta en lo respecta al análisis, entre las operativas y las que no lo son.

Una variable de decisión que pertenezca a la categoría de las estructurales, o geométricas, deberá quedar definida antes de que el sistema tenga existencia física, esto es, antes de poder conocer, con exactitud, el valor de los parámetros inciertos.

Así, por ejemplo, el esquema de proceso para una red de intercambio y las áreas de los equipos deberán estar definidos por el diseñador antes de que el funcionamiento del sistema permita conocer el valor exacto de los coeficientes globales de transferencia de calor.

Aquí aparece, con claridad, el inconveniente de esta inevitable secuencia temporal, ya que, de haberse conocido los valores de los parámetros inciertos, la política óptima podría haberse ajustado a ellos. Dada la imposibilidad relativa de modificar la definición de las variables estructurales o geométricas, el sistema, en general, no podrá funcionar en su punto óptimo o, mejor aún, como en los casos abordados mediante Programación Dinámica, el óptimo posible dependerá del estado inicial del sistema, quedando éste definido por las decisiones "irreversibles" adoptadas en la mesa de diseño y el valor que adopten los parámetros inciertos.

En este grupo no se deben considerar las variables de naturaleza operativa, pues son esencialmente modificables. Siempre existe la posibilidad de ajustar su valor al óptimo requerido por el diseño, una vez que se encuentre operativo el sistema.

Así, entonces, en el análisis de la función objetivo

$$FO = FO(\{V_d\}, \{p\})$$

en el conjunto  $A = \{V_d\}$  deben distinguirse dos subconjuntos, uno de ellos,  $A_1$ , integrado por las variables de naturaleza estructural o geométrica y otro,  $A_2$ , compuesto exclusivamente por variables operativas.

De este modo se habilita la posibilidad de abordar la optimización del sistema mediante un proceso en dos niveles o instancias, adecuando la decisión en las variables de  $A_2$  a la situación emergente de adoptar un determinado estado en  $A_1$  y presuponer una cierta situación futura  $S \in \{p\}$ , es decir, elegir el mejor  $A_2$  que corresponda para una particular combinación  $\{A_1, S\}$ . De esto surge que las variables que integran el conjunto  $A_1$  son las únicas que definen las acciones presentes.

Puede advertirse una primera diferencia en el proceso de optimización entre los casos con incertidumbre y aquellos en los que se acepta un entorno de certeza. Pero no es la única, ya que, además, ha de incidir en la propia formulación del problema y en la selección de las variables de decisión del mismo.

Cuando el diseño se lleva a cabo con un marco de referencia perfectamente conocido y disponiendo de un modelo matemático perfecto del sistema a optimizar, se está en condiciones de producir lo que se denomina una *inversión del flujo de información*, sin que esto afecte los resultados que se han de verificar, luego, en el sistema real.

Así, si  $f(x_1, x_2, p) = 0$  es el modelo exacto de un determinado sistema, siendo  $p$  un dato cierto, la elección de  $x_1$  o  $x_2$  como variables de decisión está sujeta, básicamente, a consideraciones sobre la dificultad de cálculo asociada a cada elección.

Poco importa si  $x_1$  es variable operativa y la otra geométrica para elegirla como variable de decisión, si la dificultad de cálculo emergente así lo indica. Si el modelo es perfecto, imponiendo, luego, a  $x_2$  el valor óptimo resultante se ha de verificar, sobre  $x_1$ , el que corresponda en la política óptima escogida.

En términos de diagramas de flujo de información, en el momento del cálculo la estructura es la mostrada en la figura 1(a), situación a partir de la cual se obtiene el par  $x_1^*, x_2^*$ . En el sistema real se operaría en forma inversa, como se indica en la figura 1(b).

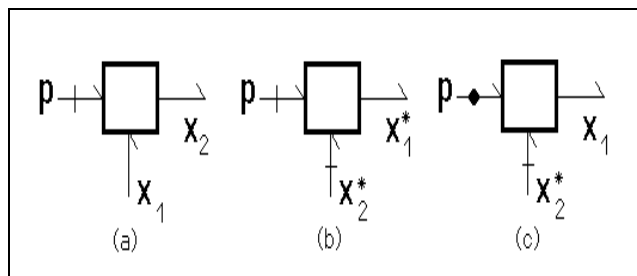


Figura 1. Flujos de información

Ahora bien, ¿qué ocurre si  $p$  no es un dato cierto (figura 1-c)? Aún admitiendo un modelo perfecto, es obvio que efectuar el diseño basado en uno cualquiera de los valores de  $p$  o, incluso, en una función de éstos, no asegura que, obtenido por vía de cálculo el par  $x_1^*, x_2^*$ , se logre  $x_1 = x_1^*$  al fijar  $x_2 = x_2^*$  en el sistema real, dado que el parámetro incierto puede tomar un valor diferente al usado.

La inversión del flujo de información pierde así su fundamento, no debido a imperfecciones relevantes en el modelo (caso en el que carecería de validez todo análisis de tipo matemático) sino a la imposibilidad de contar con un valor cierto de un parámetro que afecta las relaciones funcionales establecidas para el sistema.

Una correcta evaluación del efecto de la incertidumbre sobre la función objetivo obliga a elegir como variables de decisión aquellas que puedan realmente ser fijadas en la construcción u operación del sistema, preservando, en el análisis, una correspondencia verificable en el futuro entre las decisiones adoptadas y el cuadro de posibles valores del objetivo planteado.

Pero aún resta una cuestión de suma importancia, en lo que hace a la formulación propiamente dicha del problema y que puede apreciarse en el análisis del ejemplo siguiente.

La figura 2 muestra el esquema adoptado para calentar un fluido donde  $F[\text{kg/h}] \cdot C_p[\text{kJ/kg}^\circ\text{C}] = W_0$  es conocido desde una temperatura  $t_e$  hasta otra  $t_s$ , ambas especificadas. Para ello se dispone de dos fluidos calefactores a temperaturas  $T_{e1}$  y  $T_{e2}$  (datos) y que admiten saltos máximos de

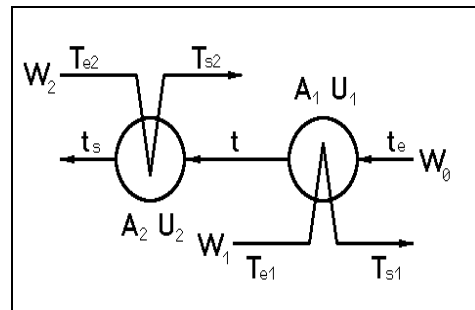


Figura 2. Esquema de calentamiento

$\Delta T_1$  y  $\Delta T_2$ , respectivamente. Dado que la utilización de estos fluidos implica un costo proporcional a la cantidad utilizada de cada uno de ellos, es obvio que, en principio, lo más conveniente sería que  $T_{s1} = T_{e1} - \Delta T_1$ .

El sistema debe diseñarse teniendo en cuenta que los coeficientes de transferencia  $U_i$  son predecibles con cierto margen de error, estando acotado el valor real al ámbito  $U_{\min} \leq U_{\text{real}} \leq U_{\max}$ .

El modelo del sistema puede expresarse como

$$1) \quad W_0(t - t_e) = W_1(T_{e1} - T_{s1})$$

$$2) U_1 A_1 \left( \frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_0} \right) = \ln \left[ \frac{T_{e1} - t}{T_{s1} - t_e} \right]$$

$$3) W_0 (t_s - t) = W_2 (T_{e2} - T_{s2})$$

$$4) U_2 A_2 \left( \frac{1}{W_2} - \frac{1}{W_0} \right) = \ln \left[ \frac{T_{e2} - t_s}{T_{s2} - t} \right]$$

sujeto a

$$T_{s1} \geq T_{e1} - \Delta T_1 \quad ; \quad t_e < T_{s1} \quad ; \quad t < T_{e1}$$

$$T_{s2} \geq T_{e2} - \Delta T_2 \quad ; \quad t < T_{s2} \quad ; \quad t_s < T_{e2}$$

La función objetivo contendrá términos que incluyan, por una parte, la amortización de los costos fijos (equipamiento) y, por otra, el gasto de utilización de los fluidos de calefacción.

Si, por ahora, se omite el problema que plantea la incertidumbre en los valores exactos de los  $U_i$ , el procedimiento corriente en la determinación de un orden de cálculo conduciría a

*Variable de decisión:*  $W_1$

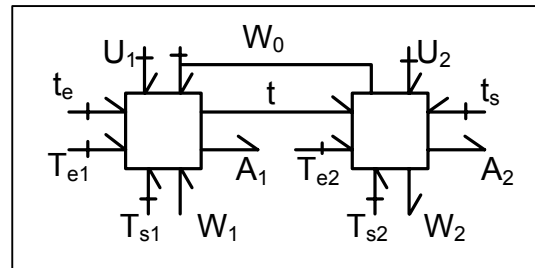
*Variables de estado:*

de la ec.1 calcular  $t$

de la ec.3 calcular  $W_2$

de la ec.2 calcular  $A_1$

de la ec.4 calcular  $A_2$



**Figura 3.** Flujo de información

ordenamiento que corresponde al diagrama de flujo de información mostrado en la figura 3. Queda claro que, desde el punto de vista de la dificultad de cálculo, la optimización debe efectuarse por búsqueda simultánea.

Se obtendrá, entonces, -siempre ignorando el problema de incertidumbre- un valor óptimo para  $W_1$  y, como consecuencia, los correspondientes  $W_2^*$ ,  $A_1^*$ ,  $A_2^*$  y  $t^*$ . En la construcción del sistema, obviamente, se ha de ordenar la fabricación de los dos intercambiadores con las áreas óptimas encontradas.

Puede notarse que al fijarse los valores de  $A_1$  y  $A_2$  se han superado los grados de libertad que tenía originalmente el problema y aún fijando  $W_1$  y  $W_2$  -con lo cual se agotan las variables operativas y geométricas disponibles para el diseñador- deberán verificarse los valores determinados para  $t_s$ ,  $T_{s1}$  y  $T_{s2}$ .



Todo ello en el supuesto de un modelo matemático adecuado y que se verifiquen, una vez en operación el sistema, las estimaciones sobre  $U_1$  y  $U_2$  utilizadas en el cálculo. Pero, ¿qué ocurre cuando dichos parámetros toman valores diferentes a los supuestos?

Una vez más se acudirá al auxilio del diagrama de flujo, ahora representando la situación en el momento en el que el sistema entra en operación, esto es, con las áreas de los equipos definidas, como se muestra en la figura 4.

Al transformarse  $A_1$  y  $A_2$  en datos deben invertirse  $W_1$  y  $T_{s2}$ , si es que  $W_0$ ,  $t_e$ ,  $T_{e1}$  y  $T_{e2}$  no pueden modificarse y se desea mantener el valor de  $t_s$ . Si los coeficientes globales de transferencia pueden tomar valores distintos a los supuestos, no puede asegurarse que  $T_{s2}$

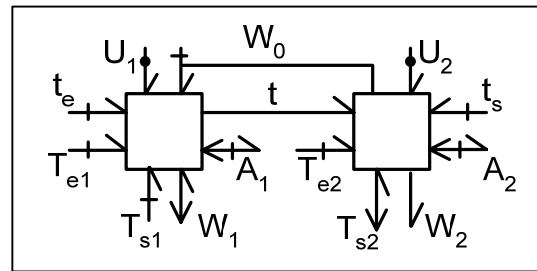


Figura 4. Flujo modificado

cumpla con la especificación aceptada, esto es, que en estas condiciones,  $T_{s2}$  no puede ser considerado dato del problema, violando claramente el planteo original.

Es evidente que se llega a esta situación como consecuencia del conocimiento incompleto que se tiene de determinados parámetros que intervienen en la definición del modelo del sistema, cosa que, si bien ha sido ignorado, forma parte del planteo original del problema.

Una lectura cuidadosa de lo expuesto permitirá advertir que las variables geométricas, al igual que las estructurales ( $A_1$ ,  $A_2$  y el esquema de proceso en este caso) *siempre* estarán definidas cuando el sistema esté funcionando, es decir, cuando sea posible conocer el valor exacto de los parámetros inciertos.

De este modo, y merced a una suerte de inversión del flujo de información que se produce al operarse el sistema, las variables se ajustan a la situación resultante. Algunas estaban libres en el planteo,  $W_1$  por ejemplo, y, por ello, no afectan las condiciones impuestas en el planteo. Pero puede resultar necesario modificar alguna condición aceptada como dato ( $T_{s1}$  ó  $T_{s2}$  en el ejemplo), para mantener alguna de estas exigencias -el valor de  $t_s$ , en este caso.

Para evitar esto último es preciso que *el número de grados de libertad sea, al menos, igual al número de variables geométricas y estructurales libres en el sistema.*

Además, atendiendo al hecho de que deben elegirse como variables de decisión, para poder evaluar correctamente la incidencia de la incertidumbre, aquellas que puedan ser fijadas, efectivamente, en la construcción y operación del sistema, *las variables geométricas y estructurales siempre deben ser elegidas como variables de decisión.*

## **Consideraciones básicas de la Teoría de Decisión**

Antes de abordar el análisis de las diferentes metodologías que se pueden aplicar a la solución de los problemas con incertidumbre conviene efectuar algunas consideraciones generales sobre algunos aspectos distintivos de la cuestión.

La *Teoría de Decisión* otorga fundamentos al análisis de situaciones donde la información sobre el comportamiento futuro de un sistema -dicho esto en un sentido general- no es perfecta o, lo que es equivalente, solo es predecible dentro de ciertos márgenes de variación.

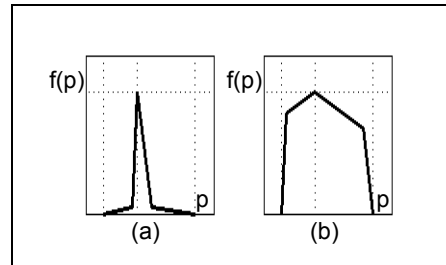
Desde esta óptica se habla de *problemas en condiciones de incertidumbre propiamente dicha* cuando solo es conocida la definición particular de cada una de las posibles situaciones futuras, esto es, los valores que pueden llegar a tener los parámetros inciertos que las definen.

Se admite estar frente a *problemas en condiciones de riesgo* cuando, además de la definición particular, se posee información estadística que permite mensurar la probabilidad de ocurrencia de cada situación futura.

Estas consideraciones son aplicables tanto a aquellos casos en los que los parámetros inciertos pueden tomar sólo un número finito de valores como a aquellos otros en los que dichos parámetros existen dentro de una gama continua, en la práctica, acotada.

Esta distinción entre diferentes tipos de problemas es determinante respecto del método a utilizar para su solución. Esto es obvio si se comprende que la calidad de la información disponible en uno y otro caso es esencialmente distinta y, por consiguiente, distintos son los modos que se habilitan para su tratamiento.

Las situaciones representadas en la figura 5 a y b, por ejemplo, muestran la información estadística disponible (frecuencia de probabilidad  $f$ ) de un determinado parámetro incierto  $p$ . Los límites de variación en ambos casos son los mismos, pero en (a) la moda es estadísticamente dominante, lo que no ocurre en (b).



**Figura 5.** Frecuencia de probabilidad

Si toda la información de que se dispusiese fuera el entorno en el que se ha de encontrar el valor de  $p$  (incertidumbre propiamente dicha) no se podría distinguir un caso de otro; el tratamiento del problema en condiciones de riesgo, en cambio, resultará notoriamente distinto, en virtud de la alta probabilidad de ocurrencia de un determinado valor existente en (a).

La naturaleza discreta o continua de las variables que definen las acciones presentes o los parámetros que hacen lo propio con las situaciones futuras, en cambio, es un hecho que no tiene influencia sobre los enfoques metodológicos, aunque sí alterará la complejidad de los cálculos. En rigor, el caso continuo no es sino una extensión, en el sentido matemático, del discreto, cualquiera sea la técnica que se adopte.

De aquí resulta la posibilidad de obtener, mediante una conveniente discretización, un resultado aproximado para los problemas donde las acciones presentes o las situaciones futuras acepten un continuo de valores, simplificando aquellos casos donde el tratamiento riguroso exige una alta complejidad de cálculo.

Una cuestión adicional que debe quedar clara en los problemas con incertidumbre es la aparición, muchas veces en forma implícita, de un segundo criterio o función objetivo, que no tiene que ver con el sistema que se está diseñando sino con el enfoque o actitud que adopta el diseñador.

Podría privilegiarse, por ejemplo, una postura conservadora (o de *aversión al riesgo*) frente a las cuestiones que se derivan de la falta de certeza en el valor de los parámetros, admitiendo que frente a cada una de las posibles acciones presentes, se ha de considerar la consecuencia más desfavorable, en términos absolutos o probables, adoptando, luego, la acción presente donde tales efectos sean mínimos.

También sería posible una posición totalmente contrapuesta, un enfoque optimista del problema. O, en los casos donde existe información de tipo estadística, adoptar lo que se conoce como *indiferencia frente al riesgo* y conducir el análisis en base a la asepsia de la esperanza matemática del valor de la función objetivo.

Antes de continuar conviene reparar en las equivalencias, entre los casos continuo y discreto, de algunas expresiones básicas del cálculo de probabilidades:

- 1) La probabilidad de que el valor de una variable aleatoria  $x$ , que tiene asociada una distribución de frecuencias  $f(x)$ , se encuentre dentro del entorno  $\{a, b / a \leq b\}$  es

$$p(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

La probabilidad de ocurrencia de  $n$  sucesos  $x = a_1, \dots, x = a_n$  mutuamente excluyentes, siendo  $x$  una variable aleatoria discreta está dada por

$$p(a_1 \cup \dots \cup a_n) = \sum_{i=1}^n p(x = a_i)$$

- 2) El valor esperado de una función  $g(x)$ , siendo  $x$  una variable aleatoria que puede tomar los valores  $a_1, \dots, a_n$  (caso discreto) o cualquiera dentro del rango  $a \leq x \leq b$  (caso continuo) viene dado por

$$\bar{g} = \sum_{i=1}^n g(x = a_i) p(x = a_i) ; \quad \bar{g} = \int_a^b g(x) f(x) dx$$

- 3) Un caso particular, que será considerado en los ejemplos que siguen, lo constituye el cálculo de probabilidad de ocurrencia simultánea de dos sucesos  $x = a$  e  $y = b$ , *estadísticamente independientes* (en el caso continuo sería  $a \leq x \leq a + \delta a, b \leq y \leq b + \delta b$ ). Las expresiones resultan ser:

$$p(x = a \cap y = b) = p(x = a)p(y = b)$$

$$p(a \leq x \leq a + \delta a \cap b \leq y \leq b + \delta b) = \int_a^{a+\delta a} f_x(x) dx \int_b^{b+\delta b} f_y(y) dy$$

## Metodologías de solución

Los distintos métodos aplicables en la resolución de los problemas de diseño óptimo bajo incertidumbre se han de plantear a través de un ejemplo simple que, con ligeras modificaciones en su planteo, permite cubrir adecuadamente todos los casos de interés.

En la figura 6 se muestra el esquema adoptado para calentar una corriente con  $W_f = 2560 \text{ kcal/h}^\circ\text{C}$  desde una temperatura de ingreso al sistema de  $30^\circ\text{C}$  hasta una salida de  $80^\circ\text{C}$ , a la vez que se enfría otra ( $W_c = 3420 \text{ kcal/h}^\circ\text{C}$ ) desde  $70^\circ\text{C}$  hasta  $40^\circ\text{C}$ .

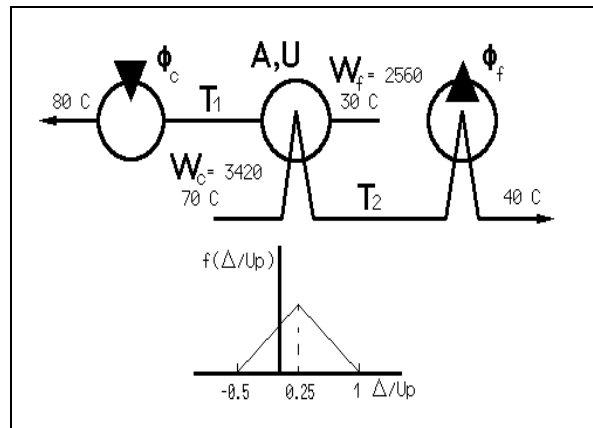


Figura 6. Esquema de intercambio

Los ajustes finales se realizan con medios auxiliares, aportando  $\phi_c \text{ kcal/h}$  y retirando  $\phi_f \text{ kcal/h}$ , en equipos preexistentes ya amortizados y con un grado suficiente de sobredimensionamiento que permite alcanzar exactamente las temperaturas de salida especificadas para las corrientes. En la predicción del coeficiente de transferencia  $U$  existe un cierto grado de error, asociado a la correlación de datos experimentales de forma que  $U_r = U_p + \Delta$ , siendo  $U_r$  el valor que efectivamente se ha de verificar en el equipo y  $U_p$  el que predice la correlación.

El sistema debe ser diseñado de forma tal que el costo total anual (amortización más gastos en servicios auxiliares) sea mínimo. La tabla 1 contiene los datos adicionales técnicos y económicos del problema.

Costo del intercambiador I	667,5A <sup>0,5</sup>	\$
Costo del medio calefaccionante	2,5	\$/10 <sup>6</sup> kcal
Costo del medio refrigerante	0,5	"
Base horaria de funcionamiento	8000	h/año
Tasa anual de amortización	20	%
Coefficiente de transferencia U <sub>p</sub>	385	kcal/hm <sup>2</sup> °C

**Tabla 1.** Datos del problema

Con un objetivo exclusivamente didáctico, el problema planteado será resuelto bajo dos hipótesis:

- a) Solo se conocen los valores extremos para la variación del coeficiente de transferencia U

$$-0,5 \leq \Delta/U_p \leq 1 \text{ o sea } 192,5 \leq U_r \leq 770$$

- b) la ley de distribución del parámetro incierto es la que se muestra en la parte inferior de la figura 6.

El conjunto de ecuaciones que sigue, donde se incluye la función objetivo, representa adecuadamente al sistema. Puede advertirse que existe un solo grado de libertad y, de acuerdo a las consideraciones efectuadas, el área de intercambio A debe ser elegida como variable de decisión, resultando obvio el ordenamiento de cálculo al que se llega en consecuencia.

1)  $2560 (T_1 - 30) = 3420 (70 - T_2)$

2)  $\ln \left[ \frac{70 - T_1}{T_2 - 30} \right] = U A \left[ \frac{1}{3420} - \frac{1}{2560} \right]$

3)  $\phi_c = 2560 (80 - T_1)$

4)  $\phi_f = 3420 (T_2 - 40)$

$$FO = 133,5 A^{0,5} + 0,02 \phi_c + 0,004 \phi_f$$

Desde el punto de vista del problema de incertidumbre, las posibles acciones presentes han de quedar definidas por las dimensiones que se fijen para el área de intercambio, mientras que las situaciones futuras lo serán por los diferentes valores que se verifiquen sobre el coeficiente global U.

Si en el problema hubiese habido más de una variable de decisión de tipo geométrico o estructural, se reitera, cada acción presente habría quedado definida

cuando se fijasen valores particulares para cada una de esas variables. Otro tanto puede decirse con respecto a las situaciones futuras y el número de parámetros inciertos.

Volviendo al problema planteado, si bien la variable de decisión y el parámetro incierto son de naturaleza continua, el desarrollo detallado de los cálculos se habrá de efectuar, a fin de no caer en excesivas complejidades computacionales, tomando solo valores discretos para ambas variables.

Esto permitirá visualizar el tratamiento aproximado de los problemas bajo condiciones de incertidumbre. Para el caso continuo se habrán de dejar indicado los esquemas metodológicos a emplearse en la solución numérica, que, en general, constituye la única vía posible de ataque.

En la discretización del coeficiente  $U$  se tomarán 6 valores, uniformemente distribuidos dentro del rango establecido ( $192,5 \leq U \leq 770$ ):

$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_5$	$U_6$
240,6	336,9	433,1	529,4	625,6	721,9

Para el área del intercambiador se han de tomar 5 valores dentro del rango que establecen los extremos razonables para el problema, tomando un valor máximo de  $A$  para  $T_1$  cercano a  $70^\circ\text{C}$  y un bajo  $U$  ( $67,5^\circ\text{C}$  y  $192,5$ , respectivamente) y un mínimo para  $T_1$  razonablemente alejado y un  $U$  alto ( $55^\circ\text{C}$  y  $770$ ).

La discretización, en este caso, conduce a considerar los siguientes valores

$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
13	29	45	61	77

Tomando un valor cualquiera de  $A$  y otro de  $U$ , es decir, fijando una acción presente y una situación futura, es posible calcular directamente el correspondiente valor de la función objetivo.

Lo que se hace, en definitiva, es calcular el costo total anual resultante de diseñar el intercambiador con una determinada área de transferencia y que, una vez fabricado, en el equipo se verifique un determinado valor de  $U$ .

Si dentro del conjunto de variables de decisión hubiera habido alguna operativa,  $Vd_0$  para fijar ideas, el cálculo de la función objetivo no hubiese sido tan inmediato ya que se requeriría la previa determinación del nivel de  $Vd_0$  que minimiza el costo total anual para el caso. Esto no es sino representar numéricamente el hecho que,

una vez el sistema en operación, se ha de ajustar  $Vd_0$  al mejor valor posible para la situación resultante.

Volviendo al problema en los términos originales del punto a), en la tabla 2 se muestran los distintos valores de la función objetivo, de acuerdo al par  $A_i, U_j$  que corresponda.

	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_5$	$U_6$
$A_1$	2005,4	1777,4	1618,4	1501,7	1413,3	1344,2
$A_2$	1731,7	1563,6	1461,8	1395,7	1350,7	1319,1
$A_3$	1696,1	1576,1	1510,8	1472,5	1449,2	1434,6
$A_4$	1733,1	1646,6	1604,3	1582,2	1570,3	1563,7
$A_5$	1798,2	1735,6	1708,3	1695,7	1689,7	1686,9

**Tabla 2.** Matriz de pérdidas y ganancias

Esta tabla se conoce con el nombre de *matriz de pérdidas y ganancias*, de acuerdo a la terminología habitual en la Teoría de Decisión.

Frente al cuadro de situaciones que se registra, son posibles, como ya quedó dicho, varios enfoques, que reflejan disposiciones de ánimo del diseñador (propensión -o aversión- al riesgo).

Se podría aplicar el mencionado criterio pesimista, considerando que para cada valor de  $A$  que se adopte, el  $U$  que se verificará en el futuro es aquel que hace mayor el costo total anual, esto es la peor situación posible. En el caso de la tabla esto sucede para  $U=U_1$  en todos los casos.

Una vez que se ha determinado cual es el peor valor posible de la función objetivo para cada acción presente, el criterio indica que se debe escoger aquella  $A_i$  donde la pérdida (costo, en este caso) límite sea menor (criterio *minimax*), lo que para el ejemplo conduce a  $A_3=45m^2$ .

Otro criterio de aplicación posible para problemas en condiciones de incertidumbre propiamente dicha - y que, por cierto, goza de gran predicamento - es el *Savage* o de *lamento minimax*.



Es enteramente similar al anterior solo que, en lugar de operar directamente sobre la matriz de pérdidas y ganancias lo hace sobre otra, derivada de ella, conocida con el jocoso, aunque ilustrativo, nombre de *matriz de lamentos*.

La idea planteada por Savage se basa en considerar, para cada situación futura, la mejor acción presente posible y calcular luego las diferencias en que se incurre si se ha escogido cualquiera de las otras posibles acciones presentes.

Estas diferencias no serían otra cosa que la medida del "lamento" expresado por no haber acertado en la elección (Técnicamente, la denominación precisa del lamento, aunque no tan gráfica, sería pérdida marginal).

En efecto, si el analista supiese que el coeficiente U que se ha de verificar en el equipo será  $U_2$  ha de elegir  $A_2$  como área de transferencia. Como esto no lo sabe puede llegar a elegir otro valor, por ejemplo,  $A_4$ , con lo que el costo anual se verá incrementado en \$83 respecto del mejor valor alcanzable.

En la tabla 3 se muestra la matriz de lamentos para el ejemplo en estudio.

	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_5$	$U_6$
$A_1$	309,3	213,8	156,5	106,1	62,5	25,1
$A_2$	35,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$A_3$	0,0	12,5	48,9	76,8	98,5	115,4
$A_4$	37,0	83,1	142,5	186,5	219,6	244,6
$A_5$	102,2	172,1	246,4	300,0	339,0	367,8

**Tabla 3.** *Matriz de lamentos*

La aplicación del criterio minimax antes expuesto conduce a la elección de  $A_2$  como área de intercambio para el equipo a diseñar, ya que allí se registra el mínimo lamento máximo encontrado para cada acción presente.

También es posible, siempre dentro del mismo concepto metodológico, aplicar el criterio minimax a una matriz de lamentos relativos, en la que, para generarla, se tiene en cuenta, para cada situación futura, no ya la diferencia respecto del mejor valor que puede obtenerse en la función objetivo sino el valor relativo de esa diferencia con respecto a ese óptimo particular.

En la tabla 4 se muestra la matriz de lamentos relativos, expresados como porcentajes, correspondiente al caso en estudio.

Los guarismos allí anotados son los de la tabla 3, divididos, en cada columna, por el mejor valor, en esa columna, en la tabla de origen.

	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>	U <sub>3</sub>	U <sub>4</sub>	U <sub>5</sub>	U <sub>6</sub>
A <sub>1</sub>	18,24	13,67	10,71	7,60	4,63	1,90
A <sub>2</sub>	2,10	0	0	0	0	0
A <sub>3</sub>	0	0,80	3,35	5,50	7,29	8,75
A <sub>4</sub>	2,18	5,31	9,75	13,37	16,26	18,54
A <sub>5</sub>	6,02	11,00	16,86	21,50	25,10	27,88

**Tabla 4.** Matriz de lamentos relativos

Una vez más, la aplicación del criterio minimax lleva a escoger a A<sub>2</sub> como área de diseño del intercambiador.

Una última vía de ataque lo podría constituir el criterio del *valor medio*. En este caso los cálculos se realizan sobre la matriz de pérdidas y ganancias (tabla 1) calculando, para cada acción presente, el promedio de los distintos valores de la función objetivo (valor medio de la fila).

Una vez que se ha realizado dicha operación para todas las acciones presentes se procede a seleccionar aquella donde se verifica el mejor valor medio.

La aplicación de la metodología expuesta conduce a los costos anuales medios FO<sub>i</sub>, correspondientes a las acciones presentes A<sub>i</sub> que se indican a continuación

FO <sub>1</sub>	FO <sub>2</sub>	FO <sub>3</sub>	FO <sub>4</sub>	FO <sub>5</sub>
1610,1	1470,4	1523,2	1616,7	1719,1

Y resulta que debe seleccionarse a A<sub>2</sub> como área para el diseño.

Podría considerarse que el criterio del valor medio es, en rigor, una metodología para aplicar a problemas en condiciones de riesgo, ya que está implícita la admisión de equiprobabilidad para las distintas situaciones futuras. Esto es así, pero, ante la carencia de una información que permita precisar la mayor o menor posibilidad de ocurrencia entre aquellas, la única suposición que se puede sostener respecto de las situaciones futuras es que sean todas igualmente probables y, por consiguiente, el valor esperado de la función objetivo para una acción presente en particular es el correspondiente valor medio de la misma.

Esta asignación de equiprobabilidad se utiliza en los casos mixtos, cuando el problema, de acuerdo a la información disponible para ciertos parámetros, se encuentra en condiciones de incertidumbre y en condiciones de riesgo, si se considera que es lo que ocurre con los otros. El tratamiento con técnicas propias del primer grupo supone una degradación del conocimiento disponible y la única vía posible de abordar el problema es admitir la equiprobabilidad de los parámetros de los que no se conoce su distribución de frecuencia.

Es el momento de entrar de lleno en el tratamiento del problema bajo la hipótesis del punto b), es decir, en condiciones de riesgo. Siempre dentro del planteo en forma discreta, es necesario establecer las probabilidades de cada una de las posibles situaciones futuras.

La forma como se ha procedido en la discretización del coeficiente U, tomando el valor medio de cada uno de los seis subintervalos en que se dividió el entorno {192,5; 770} permite resolver la cuestión en forma sencilla.

Se puede considerar, como se puede ver en la figura 7, que cada  $U_i$  representa a cualquiera de los valores del correspondiente intervalo.

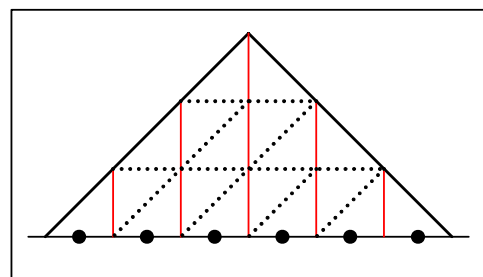


Figura 7. Distribución de probabilidad

De allí se sigue, en forma inmediata, que la probabilidad asociada a cada uno de ellos es el área bajo la curva de la figura, dentro de los límites del respectivo intervalo. Si se considera que el área total bajo la curva

debe ser 1 un análisis elemental (línea de puntos) conduce a que

$$p(U_1)=p(U_6)=1/18 ; p(U_2)=p(U_5)=3/18 ; p(U_3)=p(U_4)=5/18$$

Ahora se está en condiciones de calcular el valor esperado de la función objetivo correspondiente a cada acción presente prevista, resultados que se muestran a continuación

$FO_1$	$FO_2$	$FO_3$	$FO_4$	$FO_5$
1584,6	1449,0	1506,8	1604,5	1710,1

y debe elegirse  $A_2$  como área de intercambio.

Además del método expuesto, puede también trabajarse sobre los valores esperados de la matriz de lamentos o de lamentos relativos (se usan solamente los valores, no el criterio minimax).

Sería el punto, ahora, de analizar el caso continuo. Como ya se indicó, sólo se habrán de plantear los pasos que deben seguirse para resolver el problema, de acuerdo al método elegido. Asimismo, se dejarán esbozados los esquemas computacionales -en general la solución exige disponer de sistemas instrumentados para computadoras (rutinas de optimización, integración, interpolación, etc).

En el caso en condiciones de incertidumbre, la aplicación del criterio de Savage implica

- 1) Buscar, para cada situación futura  $S_i$  de un conjunto suficientemente representativo de las mismas (en el problema, valores de  $U$ ) el valor de la acción presente (área de intercambio) que hace

$$FO^*(S_i) = \underset{A}{\text{Opt}} [FO(A, S_i)]$$

- 2) Generar  $FO^*(S_i)$  como una tabla.
- 3) Buscar la acción presente que hace  $\min_A [F = \max_S [L = FO(A, S) - FO^*(S)]]$

En la figura 8 se esquematiza la utilización de diversas rutinas de cálculo aplicadas al caso bajo análisis, instrumentando la solución mediante el criterio de Savage. Se ha omitido el esquema computacional utilizado para generar  $FO^*(U)$  por ser el habitual en cualquier problema de optimización. Otro tanto se ha hecho con el esquema de interpolación requerido para la lectura de la tabla  $FO^*(U)$ .

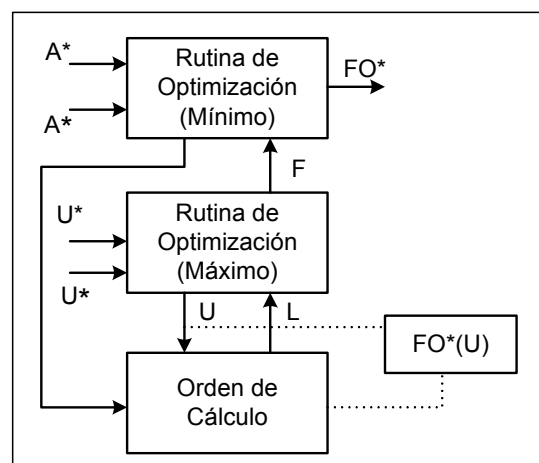


Figura 8. Criterio de Savage

En dicha figura aparece con claridad la búsqueda sobre  $A$  englobando, externamente, la maximización del lamento, efectuada sobre el coeficiente de

transferencia U y llevada a cabo para cada uno de los valores de área que propone la correspondiente rutina de optimización.

Nótese que las búsquedas se circunscriben, en ambos casos, a entornos prefijados de valores razonables,  $\{A^*, A^*\}$ , o posibles,  $\{U^*, U^*\}$ . Esto, más allá de las exigencias propias del método usado, es una cuestión absolutamente lógica desde el punto de vista técnico, ya que las áreas no pueden ser infinitamente grandes o pequeñas, al igual que los coeficientes de transferencia.

Para abordar el problema en forma continua bajo condiciones de riesgo, haciendo uso del criterio del valor esperado se debería lograr

$$FO^* = \underset{A}{\text{opt}} \left[ \overline{FO}(A) = \int_{\forall S} FO(A, S) f(S) dS \right]$$

En la figura 9 se esquematiza el procedimiento computacional necesario para el ejemplo analizado, con la incorporación a la rutina de mínimo de otra de integración numérica.

Esta última está a cargo de calcular, para cada A dado en la búsqueda, el valor de  $\overline{FO}(A)$ , que constituye la función objetivo de esa búsqueda.

Nótese que aquí también se requiere introducir los límites de variación de A y U, en un caso para restringir el ámbito de búsqueda y en el otro, para dar los límites en que debe efectuarse la integración.

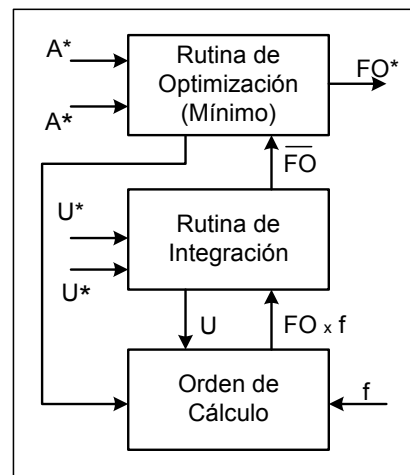


Figura 9. Diseño bajo riesgo

## Bibliografía

- Rudd D.F., Watson Ch.C., "Estrategia en Ingeniería de Procesos", Alhambra, 1976.

## Propuestas de trabajo

1) Se sabe que es posible vender un producto A por un lapso corto. Se dispone de los equipos para fabricarlo y sólo debe realizarse la compra del catalizador para producir A.

La alimentación al sistema será de 834 kg/h de materia prima y de acuerdo al tipo de catalizador a usarse se puede obtener A puro o una mezcla de A y otro producto B de bajo valor económico.

Los tipos de catalizador, costo, cantidad requerida y rendimientos, se encuentran en el cuadro siguiente:

Tipo Catalizador	Costo [\$/kg]	Kg requeridos para 834 kg/h de carga	Rendimiento [% de A]	Rendimiento [% de B]
1	80	500	100	--
2	30	700	75	25
3	10	1000	60	40

El reactor existente tiene una capacidad de 2000 kg y debe operar lleno. Para ello se dispone de un material inerte cuyo costo es de 2\$/kg.

El costo de la materia prima es de 0,04 \$/kg, en tanto que los márgenes de contribución (venta menos costos operativos) de los productos son 0,20 \$/kg para A y 0,10 \$/kg para B. En los márgenes de contribución no se han considerado los costos de catalizador e inerte. Estos últimos tienen un valor de recuperación nulo.

Considerar que los equipos funcionan las 24 horas y el volumen de ventas puede estar entre 20 y 60 días de producción.

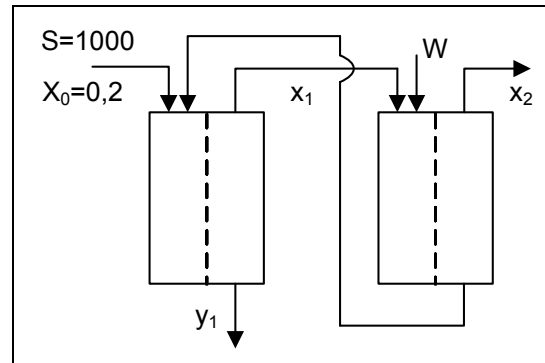
Qué catalizador aconsejaría usar si:

- Cualquier volumen de ventas tiene igual probabilidad.
- Estudios de mercado permiten predecir que:

Rango [días de producción]	Probabilidad [%]
20-30	20
30-50	50
50-60	30

El esquema de la figura muestra la instalación adoptada para recuperar un soluto valioso de la solución que lo contiene.

Se deben tratar 1000 kg/h de solvente S, que transporta 0,2 kg soluto/kg solvente S del producto deseado.



El solvente W de extracción es absolutamente inmisible con S y la relación de equilibrio de partición del soluto entre ambas fases se ha encontrado que puede ser expresada como:

$$Y \text{ (kg soluto/kg solv.W)} = K X \text{ (kg soluto/kg solv.S)}$$

En rigor, en los equipos sólo es posible alcanzar una determinada fracción del valor de equilibrio, pudiéndose definir una eficiencia para la operación como  $E = Y_{\text{real}}/Y_{\text{equi}}$ , encontrándose para la misma la relación  $E = 1 - \exp(-V/r(S+W))$ , siendo:

V: volumen del equipo (l)

S;W:caudales de solventes (kg/h)

r: constante experimental (l\*h/kg)

Para esta constante experimental el valor más frecuente encontrado resulta ser 0,125, verificándose desviaciones de hasta un 5% en menos y un 10% en más.

Con respecto al valor de la constante en la relación de equilibrio, se han determinado para ella valores que oscilan entre 1,235 y 1,365.

En el diseño, por una cuestión de simplicidad constructiva, los equipos han de tener el mismo volumen y se buscará maximizar el beneficio bruto anual, considerado como:

$$\text{Beneficio} = \text{Ventas} - \text{Costo solvente W} - \text{Amortización}$$

¿Qué volumen de extractores aconseja?

Resolver en forma discreta, considerando 2 valores para K, 3 para r y que el volumen puede estar entre 400 y 800 l.

Datos económicos:

Precio de venta del soluto (en mezcla con solvente W): 100 \$/t

Precio del solvente de extracción: 5 \$/t  
Costo del extractor-separador:  $2700V^{0.5}$   
Amortización de los equipos: 5 años.  
Tiempo de operación: 8000 h/año



# CAPÍTULO 16

## DISEÑO DE PLANTAS MULTIPRODUCTO

### Consideraciones generales

En los albores de la industria de procesos, fundamentalmente, los tiempos que siguen a la extraordinaria expansión de la síntesis química en la Alemania del siglo XIX, la casi totalidad de las plantas operaban en base a un esquema discontinuo. La falta de un conocimiento cabal sobre el comportamiento de materiales y equipos obligaba a recurrir a una instancia donde fuese posible ir ajustando los parámetros operativos de acuerdo al progreso del trabajo. Por otra parte, en esos tiempos, los mercados para esos productos se encontraban en un estado incipiente de desarrollo y los requerimientos existentes podían ser satisfechos perfectamente con los volúmenes de producción de las plantas discontinuas.

En la actualidad, en cambio, gran parte de los productos químicos se fabrican utilizando procesos continuos. El avance de los conocimientos en el campo de la Ingeniería Química, la creciente demanda de esos productos y factores económicos asociados a ese tipo de procesos, fueron produciendo el reemplazo en los modos de fabricación.

No obstante ello, existen plantas que trabajan en forma discontinua, como las de la industria farmacéutica o las de fabricación de agroquímicos. En todos los casos se trata de bienes con un alto valor agregado, con volúmenes de producción relativamente reducidos y que integran “familias” de productos, ya sea por las similitudes de la secuencia de proceso o, como mínimo, por el tipo de equipamiento utilizado en su fabricación.

La característica más importante de los procesos discontinuos es su flexibilidad para adaptarse a cambios en las condiciones operativas o

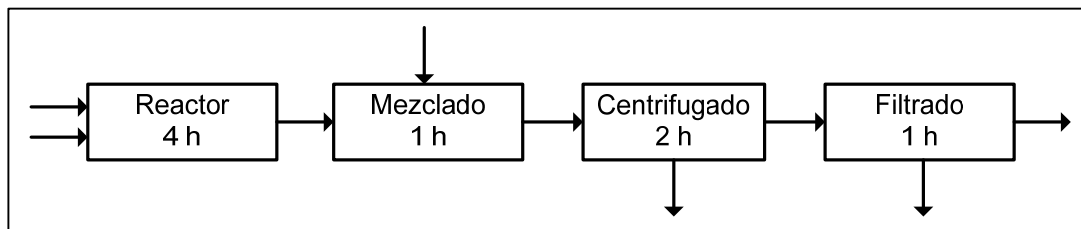
requerimientos externos y la facilidad con la que pueden destinarse a la fabricación de varios productos, sobre una base tecnológica común.

De acuerdo a las características que se presentan en esa producción pueden reconocerse dos tipos de plantas:

- *Multiproducto (Flowshop)*: productos diferentes se procesan con una misma secuencia de tareas. Se trata, en general, de productos similares.
- *Multipropósito (Jobshop)*: productos diferentes se procesan sobre los mismos equipos con distintas secuencias. En este caso, a diferencia del anterior, no se trata de productos similares.

En este capítulo se tratará sólo la primera de las categorías, comenzando por dejar establecidos algunos conceptos básicos.

Para ello, se utilizará un ejemplo como punto de referencia. En la figura 1 se muestra un proceso sencillo de cuatro etapas de procesamiento que se realizan en equipos que operan en forma discontinua. Dentro de los bloques que representan a los diferentes equipos, aparece el tiempo que demanda el procesamiento en cada etapa. En lo que sigue, estos tiempos de procesamiento siempre serán conocidos.



**Figura 1.** *Proceso sencillo*

Normalmente se usan diagramas de Gantt para representar los tiempos de procesamiento de cada etapa, como muestra la figura 2. Allí se han tenido en cuenta no sólo los tiempos de procesamiento sino, además, los de transferencia (el vaciado y el correspondiente llenado) de las etapas. Considerando que éstos son de media hora en todos los casos, el tiempo total de procesamiento resulta de 10 h.

Para poder visualizarlos gráficamente, se han aceptado altos tiempos de transferencia, en relación a los de procesamiento. Normalmente, los primeros

son mucho más cortos que los segundos, por lo cual, en general, se pueden ignorar, con lo cual se obtendrán situaciones como la que se muestra en la figura 3. Más adelante, quedará en claro que esta suposición tiene un efecto simplificador importante en los desarrollos.

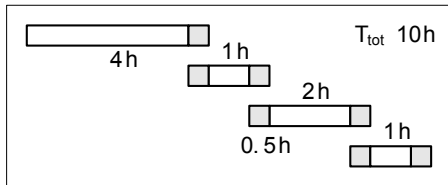


Figura 2. con tiempos de transferencia

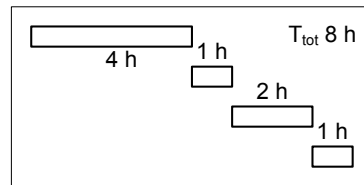


Figura 3. sin tiempos de transferencia

Otra de las características típicas de una planta de proceso discontinuo es su limitada capacidad de producción en relación a la demanda que debe atender en un determinado horizonte temporal.

Esta circunstancia obliga a encarar una fabricación por lotes, cuyo número y tamaño es variable según sea el producto de que se trate. Como, en general, se deben producir varios lotes de cada uno de ellos, habrá que realizar una cierta consideración sobre el modo en el que se ha de operar la planta: si se espera que la misma concluya, en forma completa, con el procesamiento de un lote antes de empezar con el siguiente o, si por el contrario, se han de utilizar los diferentes equipos tan pronto como se pueda.

Las figuras 4 y 5 muestran estas dos situaciones para el ejemplo simple planteado. Puede verse que, cuando existe superposición, al eliminarse los tiempos muertos, la operación resulta más eficiente, con un tiempo total de operación (*makespan*) de 12 horas frente a 16.

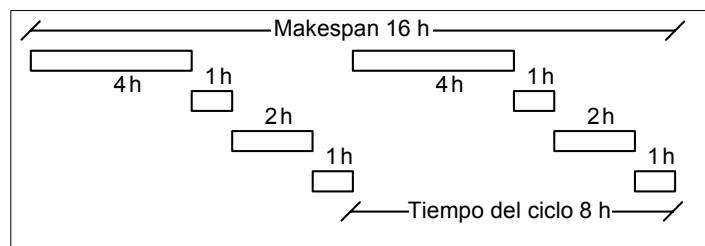
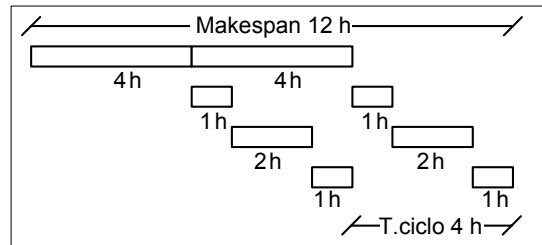


Figura 4. Operación sin superposición

Queda claro que, en la segunda alternativa, la etapa 1 no tiene tiempos muertos, por lo que representa, con este esquema, el cuello de botella para la producción de los sucesivos lotes.



**Figura 5.** Operación con superposición

El lapso que media entre dos lotes sucesivos es de 8 horas cuando no hay solapamiento y de 4 cuando lo hay. Al tiempo que demanda la producción de un lote se lo denominará *tiempo del ciclo* y resulta ser:

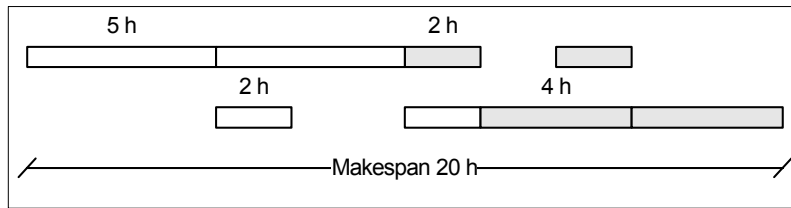
$$\text{sin solapamiento: } T_c = \sum_{j=1}^M T_{p_j}; \quad \text{con solapamiento: } T_c = \max_{j=1 \dots M} \{T_{p_j}\}$$

donde  $T_{p_j}$  es el tiempo de procesamiento en la etapa  $j$  y  $M$  el número total de etapas.

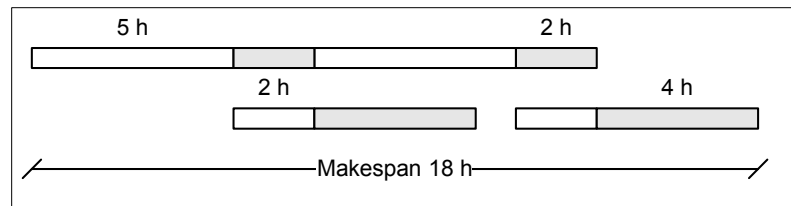
Otro punto importante a considerar en plantas multiproducto es el tipo de campaña que se usará para fabricar los lotes de los distintos productos. Básicamente:

- Campañas de productos aislados o únicos (SPC, single product campaigns, en la literatura de habla inglesa): se han de fabricar todos los lotes correspondientes a un producto antes de comenzar con el procesamiento del primer lote de cualquier otro.
- Campañas de distintos productos (MPC, mixed product campaigns): los lotes de los distintos productos se intercalan en la producción, con la intención de conseguir un mejor aprovechamiento de los equipos existentes.

En las figuras 6 y 7 pueden verse ambas situaciones, donde se fabrican dos productos diferentes, marcados en blanco y gris, cada uno de los cuales requiere procesar dos lotes.

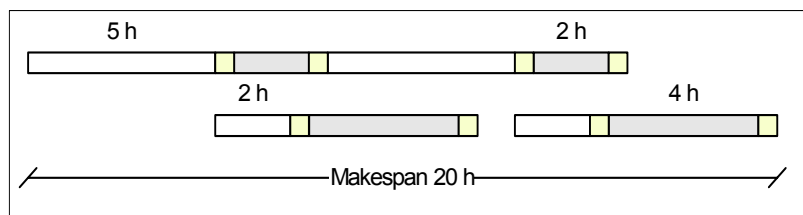


**Figura 6.** Campaña de producto único



**Figura 7.** Campaña de múltiples productos

En ambos casos todos los productos se fabricarán de acuerdo a una secuencia establecida. Observando ambas figuras, puede decirse que la campaña MPC es más eficiente ya que su makespan es inferior, pero en esos esquemas no se han tenido en cuenta los tiempos de limpieza, necesarios al cambiar de un producto a otro. Al considerarlos, tomando un valor de media hora en todos los casos, el makespan se aumenta a 20 horas, como puede observarse en la figura 8.



**Figura 8.** Influencia de los tiempos de limpieza

En general, se prefieren campañas SPC no sólo porque la aparente ventaja de la MPC se reduce cuando se consideran los tiempos de transferencia y limpieza sino porque, además, en muchos casos, como el de la industria farmacéutica, esta mezcla de productos incrementa el riesgo de contaminación, con la consiguiente pérdida económica.

## Incrementando la eficiencia de la planta

Hasta aquí se ha considerado, en todos los casos, que cada una de las etapas de proceso se lleva a cabo en un único equipo, estructura denominada de *unidades simples*. Otra posibilidad es usar equipos o unidades en paralelo. A través de un ejemplo se compararán ambas situaciones.

Se desea fabricar un cierto producto usando una planta de dos etapas, la primera con un tiempo de procesamiento de 12 hs, la segunda de 3 y que el tamaño del lote, cuando se procesa en equipos únicos, es de 1000 kg.

Con unidades simples, los distintos lotes, se irán produciendo cada 12 horas, de acuerdo a la ecuación 1. La figura 9 muestra esta situación. Se verá qué

ocurre si en la etapa 1, que es el cuello de botella del proceso, se colocan unidades en paralelo. Obviamente, no se gana nada si se

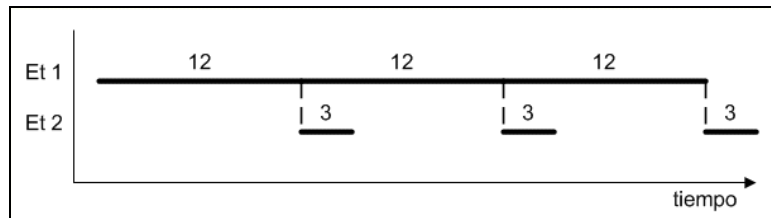


Figura 9. Etapas de unidades simples

adopta esta política en la segunda etapa, ya que, con unidades simples, presenta tiempos muertos significativos.

Si la etapa 1 opera con dos unidades en paralelo, cada una de ellas procesando 500 kg de producto (la mitad del lote anterior), como puede verse en la figura 10, el tiempo del ciclo se reduce de 12 a 6, pero el número de lotes se incrementa al doble.

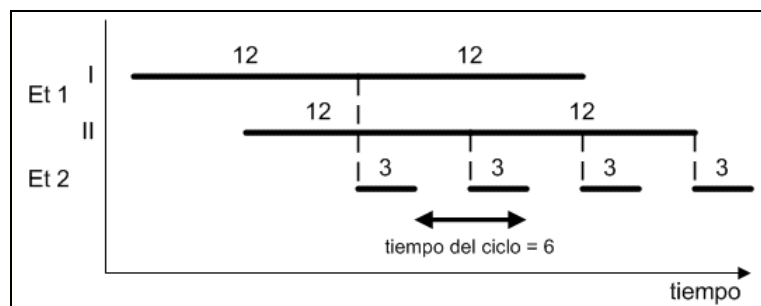


Figura 10. Etapas con unidades en paralelo

La ecuación para determinar el tiempo del ciclo con unidades en paralelo, es:

$$T_c = \max_{j=1 \dots M} \{T_{p_j} / N_j\}$$

siendo  $N_j$  el número de equipos en paralelo usados en la etapa  $j$

En el nuevo esquema, la capacidad de procesamiento de la primera etapa no se ha modificado respecto del caso con unidades simples: son 2 unidades de mitad de tamaño; en cambio, la de la segunda ha sufrido una reducción: hay un solo equipo de un 50% de capacidad.

Lógicamente, esto tiene incidencia sobre la inversión requerida en una u otra alternativa de diseño. Por efecto de la economía de escala, en el segundo caso, la etapa 1 tendrá un costo mayor que en el primero, en tanto que en la 2 el efecto es totalmente inverso.

Si la inversión para el equipamiento de las dos etapas tuviese la misma dependencia con el tamaño, siguiendo una ley del tipo  $I_i = I_{0i} (V_i / V_{0i})^\alpha$  se tendría

Esquema con unidades simples:

$$I_{TS} = I_{01} (V_1 / V_{01})^\alpha + I_{02} (V_2 / V_{02})^\alpha = I_1 + I_2$$

Esquema con unidades en paralelo:

$$I_{TP} = 2I_{01} \left( \left( \frac{V_1}{2} \right) / V_{01} \right)^\alpha + I_{02} \left( \left( \frac{V_2}{2} \right) / V_{02} \right)^\alpha = 2^{1-\alpha} I_{01} (V_1 / V_{01})^\alpha + 2^{-\alpha} I_{02} (V_2 / V_{02})^\alpha$$

Definiendo  $r = I_2 / I_1$  y operando, se encuentra que la alternativa con equipamiento en paralelo es más conveniente (la relación  $I_{TP} / I_{TS} < 1$ ) si

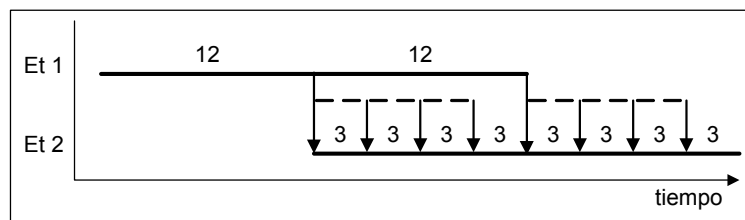
$r > \frac{2 - 2^\alpha}{2^\alpha - 1}$ . Para un valor típico de  $\alpha$ , alrededor de 2/3,  $r$  debería ser superior a

0,70 para que tuviese sentido económico la modificación.

Otra alternativa para incrementar la eficiencia de la planta, cuando existen importantes diferencias entre los tiempos de procesamiento, es introducir almacenamientos intermedios entre etapas, de manera de lograr un desacople que permita que cada una pueda ser dimensionada para reducir al mínimo los lapsos improductivos. Esto ha de implicar que en cada etapa se manejarán

distintos tamaños de lotes y, consecuentemente, los tiempos del ciclo, vistos desde cada etapa, serán diferentes.

En la figura 11 se ha incorporado un almacenamiento intermedio en el proceso considerado. Allí, el tamaño de la etapa 2 se ha reducido a la cuarta parte y esa es la relación entre los tamaños de lote que maneja cada una de las etapas. Los tiempos muertos se han eliminado totalmente, pero incorporando un almacenamiento intermedio de 750 kg.



**Figura 11.** Almacenamiento intermedio

Una vez más, la decisión sobre la alternativa más conveniente se debe tomar sobre la base de una consideración económica. Se ha logrado un ahorro al reducir el tamaño del equipamiento de la segunda etapa, el que deberá ser suficiente para afrontar el gasto que demanda la incorporación del almacenamiento.

## Dimensionado de equipos en plantas discontinuas

Se abordará ahora el dimensionado de los equipos de una planta discontinua. En este punto se hará uso, en cada etapa, del concepto – simplificadorio – de *factor de tamaño*  $S_j$ , que corresponde a la dimensión del equipo de la etapa  $j$ , requerido para producir la unidad de producto final.

En el factor de tamaño se engloba un conjunto de condiciones de proceso, lo que lo vuelve absolutamente dependiente de que se cumplan las condiciones para las cuales fue determinado.

Así, por ejemplo, si se busca fabricar un producto B mediante la reacción de primer orden irreversible  $A \rightarrow B$ ,  $r = k C_A$ , partiendo de una concentración de



reactivo  $C_{A0}$ , se tendrá, en un reactor batch de volumen  $V$ , al cabo del tiempo  $T$ , una cantidad de  $B$

$$P_B = V C_{A0} (1 - \exp(-kT))$$

Si, luego de la etapa de reacción, sigue una unidad de separación, en la que se obtiene el producto final, unidad donde es posible recuperar una fracción  $F$  de lo producido, el factor de tamaño para el reactor será

$$S_R = 1/(F C_{A0} (1 - \exp(-kT)))$$

y puede verse la dependencia del factor de tamaño con el tiempo de reacción y las condiciones iniciales de la mezcla reaccionante.

En el dimensionado de los equipos de una planta batch se utilizará otra suposición simplificatoria, la que está relacionada con el tiempo en el que la planta está ocupada en la fabricación de un cierto producto, como se verá a continuación.

En todos los casos, la demanda  $Q$  de cualquier producto, en un determinado período, será siempre una información conocida.

Toda vez que esté definido el número de equipos en cada etapa, resultará sencillo determinar el tiempo del ciclo  $T_c$ .

Habrà un cierto lapso,  $\Theta$ , asignado a la producción que se demanda. Durante ese lapso se han de fabricar  $N_L$  lotes de un tamaño  $B$ , tal que  $Q = N_L B$ .

Se admitirá que el número de lotes, el tiempo del ciclo y el asignado a la producción están relacionados por la ecuación  $\Theta = N_L T_c \rightarrow N_L = \Theta / T_c \rightarrow B = Q T_c / \Theta$  y salvo que las etapas tengan un número indeterminado de equipos en paralelo, los valores de  $N_L$  y  $B$  se calculan en forma inmediata.

La ecuación propuesta no es exacta, aunque el error disminuye a medida que aumenta el valor de  $\Theta$ . En la figura 12 se ha representado la fabricación, en una planta batch, de dos lotes de un determinado producto.

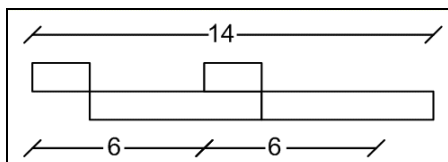


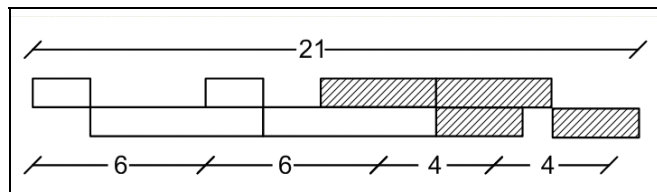
Figura 12.  $\Theta \neq N_L T_c$

El proceso tiene dos etapas y se requieren 2 horas de procesamiento en la primera y 6 en la segunda.

Puede verse que desde el ingreso del primer lote a la etapa 1 hasta que se dispone del segundo lote completamente terminado transcurren 14 horas, en tanto que

la fórmula que se ha propuesto arroja 12 horas: el tiempo real es del orden del 17% superior al previsto. Sin embargo, como es fácil de ver, esa diferencia de 2 horas entre el tiempo estimado y el real se mantendrá con independencia del valor de  $N_L$ , por lo que, en términos relativos, el error será cada vez menos significativo al aumentar el número de lotes.

Este efecto de dilución también se registra cuando se tratan varios productos; es más, en este caso se acentúa, por el solapamiento que se verifica en la producción de los distintos ítems. En la figura 13 se aprecia esta cuestión: una planta donde se fabrican dos productos en dos etapas, con



**Figura 13.**  $\sum \Theta_i \neq \sum N_{L_i} T_{C_i}$

tiempos de procesamiento 2h y 6h para el primero de ellos en las etapas 1 y 2, respectivamente, y 4h y 3h para el segundo.

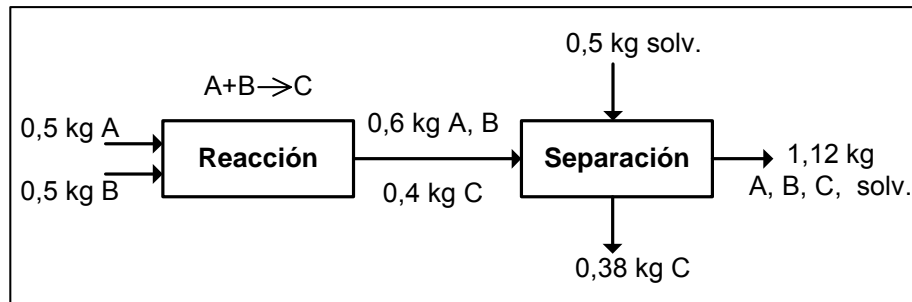
Se desarrollarán a continuación algunos ejemplos para introducir la metodología básica de dimensionado, así como ciertas estrategias relacionadas.

El caso más simple será la determinación del tamaño de los equipos en una planta que produce un único producto.

En la figura 14 se muestra el esquema de una planta con dos etapas, donde se fabrican 225000 kg/año del producto C a partir de iguales cantidades en peso de A y B. La planta opera 6000 horas.

Las pruebas de laboratorio realizadas para la etapa de reacción indican que, en un reactor de  $0,94 \text{ dm}^3$ , luego de 4 horas, la producción de C es del 40% en peso de la mezcla reaccionante.

Posteriormente C se separa por centrifugación, previo agregado de un solvente en la proporción 1:2 respecto a la mezcla que deja la etapa de reacción. Se ha determinado que, tras 1 hora de centrifugado, en un equipo de  $1,3 \text{ dm}^3$  que procesa 1 kg de mezcla de A, B y C y 0,5 kg de solvente, se recuperan 0,38 kg del producto C.



**Figura 14.** Proceso de dos etapas

Para el ejemplo que se analiza, el factor de tamaño para la etapa 1 es:

$$S_1 = \frac{0,94 \text{ dm}^3}{0,38 \text{ kg C}} = 2,4737 \frac{\text{dm}^3}{\text{kg C}}$$

Del mismo modo, para la etapa 2:

$$S_2 = \frac{1,3 \text{ dm}^3}{0,38 \text{ kg C}} = 3,4211 \frac{\text{dm}^3}{\text{kg C}}$$

Si se usan unidades simples en las dos etapas, el tiempo del ciclo es  $T_c = \text{máx}\{4,1\}$ , por lo tanto, en el horizonte de 6000 horas, se producirán 1500 lotes.

Como la demanda es de 225000 kg, el tamaño del lote será de  $B = 150 \text{ kg}$ .

Teniendo en cuenta el factor de tamaño y el tamaño del lote, puede calcularse el volumen de los dos equipos:

$$V_1 = S_1 B = 2,4737 \times 150 = 371 \text{ dm}^3$$

$$V_2 = S_2 B = 3,4211 \times 150 = 513 \text{ dm}^3$$

Si se usan dos unidades en paralelo en la etapa 1, el tiempo del ciclo será de 2 horas, se producirán 3000 lotes de 75 kg. Los tamaños serán  $185,5 \text{ dm}^3$  para cada uno de los dos reactores y  $256,5 \text{ dm}^3$  para el separador y la decisión sobre cual alternativa es más conveniente surgirá de un análisis de costos.

Se ha de considerar ahora un caso un poco más complicado. Se trata de dimensionar los equipos de una planta multiproducto con dos etapas que fabrican los productos A y B. Los valores de demandas, tiempos de procesamiento y factores de tamaño, se dan en la tabla 1. El período de operación es de 6000 h/año y los tiempos de limpieza son de 4 h de A a B o viceversa.

Producto	Demanda [kg]	Tiempos de Procesamiento [h]		Factores de tamaño [dm <sup>3</sup> /kg prod]	
		Etapa 1	Etapa 2	Etapa 1	Etapa 2
A	225000	8	3	5,0	3,1
B	135000	6	3	5,6	2,5

**Tabla 1.** Datos para dimensionado en una planta de dos productos

Para llegar a determinar el tamaño de los equipos se necesita especificar el ciclo de producción y el tipo de campaña, cuestiones que, luego, se volverán a considerar.

Arbitrariamente, se seleccionará un ciclo de producción de 1000 horas, por lo tanto habrá 6 ciclos anuales y, en consecuencia, habrá que analizar el almacenamiento requerido.

En cada campaña se producirán ambos productos en forma proporcional, esto es,  $225000/6 = 37500$  kg de A y  $135000/6 = 22500$  kg de B.

Las campañas de producción serán de producto único, por lo que el tiempo efectivo será de 992 horas, teniendo en cuenta los tiempos de limpieza entre la fabricación de ambos productos.

Una cuestión importante es encontrar cuales son los tiempos, dentro del horizonte propuesto, asignados a la producción de A y B . Un modo posible de hacerlo es como sigue.

El tamaño de lote del producto i está dado por:

$$B_i = \frac{\text{producción}_i}{\text{N}^\circ \text{ lotes}} = \frac{\text{producción}_i}{\Theta_i / T_{c_i}}$$

donde, como siempre,  $\Theta_i$  es el tiempo total de producción del producto i y  $T_{c_i}$  es el tiempo del ciclo del mismo.

Si se fija el número de equipos en cada etapa (en principio, equipos únicos), quedan, como variables, los tiempos  $\Theta_A$  y  $\Theta_B$ , vinculados por la relación  $\Theta_A + \Theta_B = 992$  h.

Una vez más, en forma arbitraria, se fijará igual tamaño de lote para ambos productos:

$$B_A = B_B = B = \frac{37500}{\Theta_A / 8} = \frac{22500}{\Theta_B / 6}$$

Con esto aparece una segunda relación entre los tiempos de producción de A y B, que permite calcularlos, así como el tamaño de los lotes, resultando  $\Theta_A = 684 \text{ h}$ ,  $\Theta_B = 308 \text{ h}$  y  $B = 438,5 \text{ kg}$ .

Ahora es posible determinar los volúmenes requeridos por cada producto en cada etapa ( $V_{ij} = S_{ij} B$ ) y luego, el volumen de diseño para la etapa, siendo:

$$V_j = \max_{i=1,N} \{V_{ij}\}$$

Así, para el caso en análisis resulta:

$$V1 = \max\{5 \times 438,5; 5,6 \times 438,5\} = 2455,6 \text{ dm}^3$$

$$V2 = \max\{3,1 \times 438,5; 2,5 \times 438,5\} = 1359,4 \text{ dm}^3$$

## Dimensiones del almacenamiento

Resta ahora determinar las dimensiones que son requeridas por el almacenamiento de los productos, de acuerdo a los criterios adoptados.

Los perfiles de existencia en almacenes de A y B son los de las figuras 15 a y b.

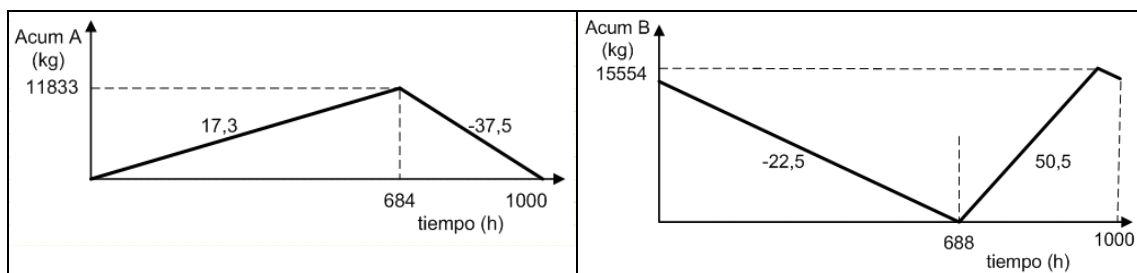


Figura 15 a. Almacenamiento de A

Figura 15 b. Almacenamiento de B

La forma de determinar esos perfiles es sencilla. Las demandas horarias de A y B son:

$$d_A = 37500/1000 = 37,5 \text{ kg/h}$$

$$d_B = 22500/1000 = 22,5 \text{ kg/h}$$

Las producciones horarias de ambos productos son:

$$P_A = 37500/684 = 54,8 \text{ kg/h}$$

$$P_B = 22500/308 = 73 \text{ kg/h}$$

El perfil de A surge del cálculo de las velocidades de acumulación y agotamiento, de acuerdo a:

0 – 684 hs:  $54,8 - 37,5 = 17,3$  kg/h

684 – 1000 h:  $-37,5$  kg/h

Para el producto B resulta:

0 – 688 h:  $-22,5$  kg/h

688 – 996 h:  $73 - 22,5 = 50,5$  kg/h

996 – 1000 h:  $-22,5$  kg/h

Es posible calcular el costo del almacenamiento determinando el almacenamiento promedio de A  $[(17,3 \times 684)/2 = 5917$  kg] y el de B  $[(50,5 \times (996-688))/2 = 7777$  kg].

Si el costo unitario de almacenamiento fuese de  $2,75$  \$/kg año, el costo total sería de:

$$C_{alm} = 2,75 (5917+7777) = 37738 \text{ \$/año}$$

En el costo unitario anterior se ha supuesto que, a los gastos financieros, seguros y otros similares, que implica la inmovilización del producto almacenado, se adiciona el pago de un alquiler por el depósito donde se aloja la mercadería. Si el sitio de almacenaje es propio, se debería reemplazar el alquiler por la amortización de las instalaciones del depósito, lo que implica una dependencia no lineal con el tamaño.

Con esto, se habría terminado con el dimensionamiento propuesto pero aún resta considerar una cuestión.

En varios momentos del cálculo se han efectuado algunas suposiciones sin ninguna justificación: el número de campañas dentro del horizonte total disponible, la igualdad en el tamaño de los lotes y el número de equipos en paralelo en las dos etapas. Queda claro que el problema tiene 4 grados de libertad y que, al darle valores, por ejemplo, al número de campañas y el de equipos en paralelo que se instalan en las etapas (todos valores enteros) así como al tiempo de producción de A o B durante una campaña, se tendrá una solución del problema.

Las relaciones existentes se explicitan en el siguiente modelo:

1)  $L_e = 6000/N_C - 8$

7)  $B_A = d_A / (\Theta_A / T_{C_A})$

2)  $\Theta_B = L_e - \Theta_A$

8)  $B_B = d_B / (\Theta_B / T_{C_B})$

3)  $T_{C_A} = \max(8/N_1; 3/N_2)$

9)  $V_1 = \max(S_{1A} B_A; S_{1B} B_B)$

$$4) T_{CB} = \max(6/N_1; 3/N_2)$$

$$10) V_2 = \max(S_{2A} B_A; S_{2B} B_B)$$

$$5) d_A = 225 \cdot 10^3 / N_C$$

$$11) Alm_A = (225 \cdot 10^3 / N_C - 37,5 \Theta_A)/2$$

$$6) d_B = 135 \cdot 10^3 / N_C$$

$$12) Alm_B = (135 \cdot 10^3 / N_C - 22,5 \Theta_B)/2$$

Siendo:

$L_e$ : tiempo efectivo (sin limpiezas) por campaña

$N_C$ : número de campañas en 6000 h

$Alm_P$ : Almacenamiento promedio del producto P

En el resto de las variables se han respetado las convenciones adoptadas anteriormente.

Al incrementar, dentro de valores razonables, el valor de  $N_C$ , no se ha de producir una merma significativa sobre el tiempo efectivo total de trabajo; en cambio, se reducirán los tamaños de lote, las dimensiones de los equipos y los almacenamientos, todo esto, suponiendo que se mantiene cierta proporcionalidad entre  $\Theta_A$  y  $\Theta_B$ .

Con respecto al número de equipos en paralelo,  $N_1$  y  $N_2$ , la primera cuestión que surge, considerando la relación 4, es que  $2N_2 \geq N_1$ . El incremento de estos valores tendrá el mismo efecto que el aumento de  $N_C$ .

Obviamente, en todo lo anterior sólo se ha tenido en cuenta el comportamiento de las magnitudes físicas. Un análisis completo deberá incluir las cuestiones económicas conexas.

## Diseño de plantas con campañas de producto único

Hasta ahora se ha considerado la cuestión de determinar el tamaño de los equipos de plantas multiproducto extremadamente simples. Ahora se buscará generalizar esa metodología a casos donde la complejidad matemática necesaria para resolverlos no exceda los límites que impone el cariz introductorio con el que se aborda el tema.

En todos esos casos se considerará que, para una planta que debe fabricar, con campañas de producto único, NP productos mediante un proceso con M etapas, son conocidos los valores de:

H: tiempo total disponible para fabricar los NP productos

$S_{ij}$ : factor de tamaño del producto  $i$  ( $i = 1, \dots, NP$ ) en la etapa  $j$  ( $j = 1, \dots, M$ )

$t_{ij}$ : tiempo de procesamiento del producto  $i$  en la etapa  $j$ , considerando un equipo único en la etapa

$Q_i$ : demanda del producto  $i$  en el "horizonte" H

Si se define  $B_i$  como el tamaño del lote del producto  $i$  y  $N_j$  el número de equipos en paralelo en la etapa  $j$ , deberá ser:

Límites sobre el número de equipos en paralelo:  $1 \leq N_j \leq N_j^{\max}$

Tiempo del ciclo del producto  $i$ ,  $Tc_i$ :  $Tc_i = \max_j \{t_{ij}/N_j\}$   $i = 1, \dots, NP$

Número  $N_{Li}$  de lotes del producto  $i$ :  $N_{Li} = Q_i / B_i$   $i = 1, \dots, NP$  (1)

Para el lapso asignado a la fabricación del producto  $i$ , aún con los errores ya considerados, puede escribirse

$$\Theta_i = N_{Li} Tc_i \quad i = 1, \dots, NP \quad (2)$$

El horizonte temporal H impone un límite a los lapsos de producción:

$$\sum_{i=1}^{NP} \Theta_i \leq H$$

Como en el equipo de la etapa  $j$  de tamaño  $V_j$  debe poderse procesar cualquiera de los NP productos, se debe cumplir la condición:

$$V_j \geq S_{ij} B_i = S_{ij} \frac{Q_i}{N_{Li}} = S_{ij} Q_i \frac{Tc_i}{\Theta_i} \quad \forall i$$

$$V_j = \max_i S_{ij} Q_i \frac{Tc_i}{\Theta_i} \quad j = 1, \dots, M$$

limitada por:  $V_j^{\min} \leq V_j \leq V_j^{\max} \quad \forall j$

Puede verse que este modelo general contiene  $4NP$  variables ( $Tc_i$ ,  $B_i$ ,  $N_{Li}$  y  $\Theta_i$ ) más otro grupo de  $2M$  ( $N_j$  y  $V_j$ ) vinculadas por  $3NP + M$  ecuaciones, es decir, tiene  $NP + M$  grados de libertad.

Se tomarán como variables de decisión a los números de equipos en paralelo en cada etapa,  $\{N_j\}$ , y los lapsos de producción  $\{\Theta_i\}$ .

Para terminar de definir el problema de optimización, habida cuenta de que la producción está fija, se propondrá minimizar la inversión que demanda la



instalación de la planta. Esto es, si se admite que el costo de los equipos sigue una ley de potencia, del tipo  $aV^b$ , se deberá hacer  $\min \sum_{\forall j} N_j a_j V_j^{b_j}$

A continuación se aplicará este planteo general a algunos casos sencillos, como el de plantas multiproducto con etapas de equipos únicos, disponibles en tamaños continuos y discretos y con etapas con equipos en paralelo de tamaños continuos.

## Diseño de plantas con etapas de equipos únicos. Tamaños continuos

Se analizará el caso de equipos únicos. De acuerdo a lo visto, el problema tendrá NP grados de libertad, ya que  $N_j = 1$  en todas las etapas.

Las características del problema de optimización son las de Programación No Lineal clásica y, si su dimensionalidad no es excesivamente grande, puede ser resuelto perfectamente utilizando una planilla de cálculo como Excel<sup>®</sup>.

Esto se verá en un ejemplo sencillo. Se trata de determinar las dimensiones de los equipos de una planta multiproducto con tres etapas de proceso que debe fabricar 2 productos, en un período de 6000 horas. La tabla 2 contiene los factores de tamaño y los tiempos de procesamiento para los mismos.

	Tiempos de proceso [h]		Factores de tamaño [m <sup>3</sup> /t]	
	Prod. A	Prod.B	Prod. A	Prod.B
Et.1	8	10	7,9	0,7
Et.2	20	12	2	0,8
Et.3	4	3	5,2	0,9

**Tabla 2.** Datos del ejemplo

Las demandas, en el horizonte fijado, son de 200 t de A y 150 de B.

La inversión requerida por un equipo de la etapa 1 viene dada por la expresión  $1600V_1^{0,6}$ , para la 2,  $3200V_2^{0,6}$  y para la 3,  $2175V_3^{0,6}$ , estando el volumen  $V_j$  expresado en  $m^3$ . Los límites para los mismos son, en todos los casos, de  $0,5 m^3$  el mínimo y  $7,5 m^3$  el máximo.

Las ecuaciones que representan el sistema son:

Variables de decisión:  $\Theta_A, \Theta_B$

Lapso del ciclo	Nº de lotes	Tamaño de lote	Tamaño de equipo
$T_{CA} = 20 \text{ h}$	$N_{LA} = \Theta_A / T_{CA}$	$B_A = 200 / N_{LA} \text{ [t]}$	$V_1 = \max\{7,9 B_A, 0,7 B_B\}$
$T_{CB} = 12 \text{ h}$	$N_{LB} = \Theta_B / T_{CB}$	$B_B = 150 / N_{LB} \text{ [t]}$	$V_2 = \max\{2 B_A, 0,8 B_B\}$
			$V_3 = \max\{5,2 B_A, 0,9 B_B\}$

$$\Theta_1 + \Theta_2 \leq 6000 \text{ h} \quad 0,5 \text{ m}^3 \leq V_j \leq 7,5 \text{ m}^3 \quad j = 1, 3$$

$$\text{Fun.Objetivo: } \min 1600 V_1^{0,6} + 3200 V_2^{0,6} + 2175 V_3^{0,6}$$

Puede verse que la dimensionalidad del problema no es significativa y la solución del problema de optimización puede alcanzarse, como se dijo, utilizando una planilla de cálculo.

Haciéndolo se obtiene

$$\Theta_A = 5084,7 \text{ h} \quad N_{LA} = 254 \quad B_A = 0,79 \text{ t}$$

$$\Theta_B = 915,3 \text{ h} \quad N_{LB} = 76 \quad B_B = 1,97 \text{ t}$$

$$V_1 = 6,21 \text{ m}^3 \quad V_2 = 1,57 \text{ m}^3 \quad V_3 = 4,09 \text{ m}^3$$

con un valor de la función objetivo de alrededor de 14000 \$.

Se abordará, ahora, el dimensionado de los equipos de una planta multiproducto cuando se admite la existencia de equipos en paralelo en las distintas etapas.

## Diseño de plantas con etapas de equipos en paralelo. Tamaños continuos

La formulación del problema es similar a la anterior, pero con notables diferencias. La primera es el número de grados de libertad, donde ahora se tienen  $NP + M$ , adoptando los lapsos de producción y el número de equipos en

paralelo en cada etapa como variables de decisión. Esto obliga a enfrentar un problema de Programación No Lineal Entera Mixta (PNLEM), ya que los valores de los números de equipos en paralelo deben ser enteros.

Puede apreciarse otra diferencia en la formulación del modelo: ahora es necesario explicitar la relación entre los lapsos de los ciclos y los valores de los  $N_j$  equipos en paralelo, así como la diferente expresión de la función objetivo con respecto a la que corresponde al caso de equipos únicos.

Para el ejemplo planteado, reformulando los lapsos de los ciclos y la función objetivo, se puede escribir

$$T_{cA} = \max (8 / N_1; 20 / N_2; 4 / N_3)$$

$$T_{cB} = \max (10 / N_1; 12 / N_2; 3 / N_3)$$

$$\text{Función Objetivo: } \min N_1 1600 V_1^{0,6} + N_2 3200 V_2^{0,6} + N_3 2175 V_3^{0,6}$$

con  $N_1, N_2$  y  $N_3$  enteros, limitados por  $1 \leq N_j \leq 3$ , si se considera que, en cualquier etapa, no debería haber más de 3 equipos iguales.

Una vez más, la dimensionalidad del problema permite la resolución aplicando una planilla de cálculo. Sin embargo, dado que el problema involucra la introducción de variables de decisión enteras, conviene facilitar la búsqueda del óptimo iniciándola desde una buena solución. En este caso puede usarse la encontrada cuando se consideraban equipos únicos, que constituye una cota superior del óptimo con equipos en paralelo. A partir de esos valores iniciales, se encuentra la siguiente solución óptima:

$\Theta_A = 4625,4 \text{ h}$	$N_1 = 1$	$N_{LA} = 462$	$B_A = 0,43 \text{ t}$	$V_1 = 3,42 \text{ m}^3$
$\Theta_B = 1384,6 \text{ h}$	$N_2 = 2$	$N_{LB} = 138$	$B_B = 1,08 \text{ t}$	$V_2 = 0,87 \text{ m}^3$
	$N_3 = 1$			$V_3 = 2,25 \text{ m}^3$

y un valor de la función objetivo de 12722 \$, obviamente, menor al encontrado en el caso anterior.

## Diseño de plantas con etapas de equipos únicos. Tamaños discretos

En los modelos anteriores se ha supuesto que los equipos podían adoptar tamaños continuos restringidos sólo por los límites inferior y superior que se especificaban. Esto no ocurre en la práctica, salvo casos especiales; por el contrario, los fabricantes los proveen en tamaños estándar, es decir, discretos.

En términos generales, puede decirse que las dimensiones del equipo en la etapa  $j$  debe pertenecer al conjunto de tamaños disponibles:  $V_j \in \{V_{js}\} = \{V_{j1}, \dots, V_{jn_j}\}$ , cuyos costos son  $\{C_{j1}, \dots, C_{jn_j}\}$

Una estrategia típica para abordar el problema que plantea un conjunto de alternativas discretas para una determinada variable es el uso de elementos binarios que permiten elegir un valor entre el conjunto de los disponibles.

Así, en este caso, para cualquier etapa, puede seleccionarse un determinado tamaño si se apela al uso de variables  $y_{js} \in \{1,0\}$ , que toman el valor 1 si el tamaño  $s$  se selecciona en la etapa  $j$  y 0 en caso contrario.

Obviamente, sólo es posible elegir un tamaño de la lista, con lo cual debe ser  $\sum_{s=1}^{n_j} y_{js} = 1$ , para  $j = 1, \dots, M$ . Estas relaciones se conocen con el nombre de *condición de unicidad*.

Téngase en cuenta que esto ha de obligar a considerar problemas de optimización con variables enteras, lo que implica una cierta complejidad matemática, mayor que la del caso continuo.

Si se restringe el análisis al caso de etapas con equipos únicos, puede encontrarse una formulación del problema de optimización que no excede los límites del enfoque introductorio que posee este capítulo.

Por ser etapas con equipos únicos, el tiempo del ciclo para cada producto está determinado,  $Tc_i = \max_{\forall j} \{t_{ij}\}$

Si se consideran las expresiones (1) y (2), puede establecerse la siguiente relación entre los lapsos de producción y las dimensiones de los equipos

$$\Theta_i \geq [Tc_i Q_i S_{ij}] / V_j \quad \forall j, \quad i = 1, \dots, NP$$

En la expresión anterior el numerador es una constante y, si se considera que  $1/V_j$  se puede expresar como  $1/V_j = \sum (1/v_{js}) y_{js}$ , entonces:

$$\Theta_i \geq [Tc_i Q_i S_{ij}] \sum_{s=1}^{nj} \left[ \frac{1}{v_{js}} \right] y_{js} \quad \forall j, \quad i = 1, \dots, NP$$

$$\Rightarrow \Theta_i = \max_{\forall j} \left[ [Tc_i Q_i S_{ij}] \sum_{s=1}^{nj} \left[ \frac{1}{v_{js}} \right] y_{js} \right] \quad i = 1, \dots, NP$$

Estas relaciones, a las que debe agregarse la limitación temporal del lapso total disponible y las restricciones que pesan sobre el conjunto  $\{y\}$

$$\sum_{s=1}^{nj} y_{js} = 1 \quad j = 1, \dots, M \quad ; \quad \sum_{i=1}^{NP} \Theta_i \leq H$$

permiten establecer los vínculos entre las variables fundamentales del problema.

A estas relaciones se debe agregar la función objetivo, expresada, también, en términos de las variables binarias  $\{y\}$

$$\min \sum_{j=1}^M \sum_{s=1}^{nj} c_{js} y_{js}$$

El problema de optimización obtenido es, esencialmente, de Programación Entera (PE). El uso de la relación  $\Theta_i = \max [Tc_i Q_i S_{ij}] / V_j$ , en lugar de  $\Theta_i \geq [Tc_i Q_i S_{ij}] / V_j \quad \forall j$  impide que se lo considere de Programación Lineal Entera Mixta (PLEM), ya que la expresión utilizada rompe con la linealidad exigida para aplicar dicha técnica.

¿Por qué renunciar a utilizar una técnica aparentemente más robusta y no adoptar el enfoque propuesto en 1992 por Voudouris y Grossmann? Por una parte, la dificultad que implica el manejo de las variables binarias es equivalente en cualquiera de los dos planteos. Pero la razón fundamental es que la solución a la que se llega con la estrategia PLEM es múltiple y se requeriría un segundo criterio para elegir una de entre las posibles. Este segundo criterio podría ser, dejando fijos los valores de  $y_{js}$ , maximizar la diferencia entre  $H$  y  $\sum \Theta_i$ , para liberar la planta lo antes posible y poderla asignar a otro programa de producción.

Esto se lo puede ver siguiendo un razonamiento sencillo. Imagínese haber obtenido una solución para el problema. En tanto no se cambie el conjunto de

variables binarias se seguirán teniendo los mismos valores para los tamaños de los equipos y, por consiguiente, de la función objetivo.

Las relaciones  $\Theta_i = \text{máx} [Tc_i Q_i S_{ij}] / V_j \forall j, \forall i$  establecen un límite inferior para los lapsos de producción, en tanto  $\Theta_i \geq [Tc_i Q_i S_{ij}] / V_j$  permiten que esos tiempos, respetando el umbral, sólo estén limitados por el horizonte disponible. Si se llama  $\Theta_{i,\text{min}}$  a los valores obtenidos como límites inferiores, se tendrá que  $\sum \Theta_{i,\text{min}} + \varepsilon = H, \varepsilon \geq 0$  y el valor de  $\varepsilon$  se puede distribuir, arbitrariamente, entre los distintos  $\Theta_i$ , sin que el valor de la función objetivo se modifique.

La solución por la vía propuesta, al par que asegura  $\min \sum_{j=1}^M \sum_{s=1}^{n_j} c_{js} y_{js}$ , reduce el tiempo total de producción a lo estrictamente necesario.

Se aplicará todo lo expuesto a un caso particular.

Supóngase que, para el ejemplo planteado, en cualquiera de las 3 etapas se dispone de equipos de tamaños y costos como se detallan en la tabla 3 (ND indica que no se dispone de ese tamaño).

Tamaño [m <sup>3</sup> ]	Costo [\$]		
	Et.1	Et.2	Et.3
1	ND	3200	2175
4	3675	7350	5000
7	5150	ND	7000

**Tabla 3.** Tamaños y costos para el ejemplo

En el conjunto de variables binarias se tendrá un total de siete  $y_{js}$ , dos vinculadas a las etapas 1 y 2 y 3 para la última. Se indicarán como  $y_{14}, y_{17}, y_{21}, y_{24}, y_{31}, y_{34}, y_{37}$ , teniendo en cuenta el tamaño al que refieren en cada caso.

Recordando que

$$\begin{aligned}
 T_{CA}Q_A S_{A1} &= 20 \times 200 \times 7,9 = 31600 & T_{CB}Q_B S_{B1} &= 12 \times 150 \times 0,7 = 1260 \\
 T_{CA}Q_A S_{A2} &= 20 \times 200 \times 2 = 8000 & T_{CB}Q_B S_{B2} &= 12 \times 150 \times 0,8 = 1440 \\
 T_{CA}Q_A S_{A3} &= 20 \times 200 \times 5,2 = 20800 & T_{CB}Q_B S_{B3} &= 12 \times 150 \times 0,9 = 1620
 \end{aligned}$$

El planteo del problema puede ser, en lo fundamental, como

$$1/V_1 = 1/4 y_{14} + 1/7 y_{17} \quad 1/V_2 = y_{21} + 1/4 y_{24} \quad 1/V_3 = y_{31} + 1/4 y_{34} + 1/7 y_{37}$$

$$\Theta_A = \max [31600 (1/V_1), 8000 (1/V_2), 20800 / V_3]$$

$$\Theta_B = \max [1260 / V_1, 1440 / V_2, 1620 / V_3]$$

$$y_{14} + y_{17} = 1$$

$$y_{21} + y_{24} = 1$$

$$y_{31} + y_{34} + y_{37} = 1$$

$$y_{14}, y_{17}, y_{21}, y_{24}, y_{31}, y_{34}, y_{37} \in \{0,1\}$$

$$FO = \min [3,675y_{14} + 5,15y_{17} + 3,2y_{21} + 7,35y_{24} + 2,175y_{31} + 5y_{34} + 7y_{37}]$$

La dimensionalidad del problema permite abordar su solución mediante una planilla de cálculo. Al hacerlo, se encuentran los resultados que siguen:

$$\Theta_A = 5200 \text{ h} \quad N_{LA} = 260 \quad B_A = 0,77 \text{ t}$$

$$\Theta_B = 405 \text{ h} \quad N_{LB} = 34 \quad B_B = 4,44 \text{ t}$$

$$V_1 = 7 \text{ m}^3 \quad V_2 = 4 \text{ m}^3 \quad V_3 = 4 \text{ m}^3$$

con un valor de la función objetivo de 17,5 M\$ y una utilización cercana al 94% del tiempo total disponible.

## Complemento Dis\_Batch

Este complemento permite encontrar los tamaños óptimos de los equipos de una planta multiproducto en campañas de producto único, usando distintos modelos. Su uso requiere que en la planilla Excel esté disponible el complemento Solver.

Al cargarse el Dis\_Batch.xla se genera el elemento de menú DisBatch, desde el cual es posible seleccionar las operaciones: *Nuevo Problema*, *Elegir Modelo* y *Definir Modelo*.

Al comenzar a trabajar solo está disponible la primera de las órdenes. Tras seleccionarla, se debe ingresar el número de etapas y productos. Inmediatamente se crea un nuevo libro con la hoja Datos de Diseño. En ella existen áreas resaltadas, específicas para el ingreso del tiempo total disponible, de los factores de tamaño y tiempos de procesamiento de los productos en

cada etapa, las demandas en el horizonte establecido y los coeficientes para el cálculo del costo de los equipos.

Al seleccionar la opción *Elegir Modelo* se pueden escoger las alternativas: *Continuo simple*, *Continuo Paralelo* y *Discreto Simple*.

Para cualquiera de las dos primeras, se modifica la hoja Datos de Diseño, en la cual habrá que ingresar los tamaños inferior y superior de cada etapa y, en el caso *Continuo Paralelo*, el número máximo de equipos en paralelo en cada etapa.

Al elegir *Discreto Simple* se debe ingresar el máximo número de tamaños disponibles para los equipos en cualquier etapa y luego, en la hoja "Tamaños Discretos", se deberán ingresar los tamaños disponibles para los equipos de cada una de las etapas.

Una vez completado el ingreso de la información, al dar la orden *Definir Modelo*, el programa lo genera en una hoja especial.

En todos los casos, para determinar la solución óptima del problema, el usuario debe invocar al Solver de la planilla Excel®, completando la información que se requiera.

Lo expuesto aquí es una síntesis de los aspectos básicos del complemento. Una información más completa se puede obtener accediendo a la ayuda del mismo.

## **Bibliografía**

- Biegler L.T., Grossmann I.E., Westerberg A.W., "Systematic Methods of Chemical Process Design", Prentice Hall, 1997.
- Voudouris V.T., Grossmann I.E., Ind. Eng. Chem. Res., 31, nº5, p1314, 1992.



## Propuesta de trabajo

Se tiene una planta batch con 4 etapas de procesamiento: reacción, separación, enfriamiento y cristalización y centrifugado. Se deben fabricar 4 productos A, B, C y D usando campaña de un único producto. Determinar los tamaños de las unidades requeridas en cada etapa de procesamiento, así como, cuando corresponda, el número de unidades que deben operar en paralelo para minimizar el costo de inversión.

Datos:

Demanda A = 40000 kg/año

Demanda B = 20000 kg/año

Demanda C = 25000 kg/año

Demanda D = 60000 kg/año

Horizonte = 6000 horas/año

	Tpos de Procesamiento [h]			
	A	B	C	D
Et.1	5	8	4	7
Et.2	3	2	4	5
Et.3	4	2	6	8
Et.4	1	3	2	4

	Factores de Tamaño [l/kg]			
	A	B	C	D
Et.1	2	3	4	6
Et.2	3	5	2	3
Et.3	4	2	6	2
Et.4	6	4	7	5

Costo reactor = \$ 650  $V^{0.6}$  (Volumen en l)

Costo separador = \$ 250  $V^{0.6}$

Costo enf-cristalizador = 300  $V^{0.6}$

Costo centrifuga = \$ 350  $V^{0.6}$

- Resolver considerando etapas de unidades simples y tamaños de equipos continuos.
- Resolver considerando que en las etapas pueda haber, como máximo, 2 unidades en paralelo y tamaños de equipos continuos.

En ambos casos usar 1500 l como tamaño mínimo y 12000 l como máximo.

- c) Resolver considerando etapas de unidades simples y tamaños de equipos discretos (Formulación MILP). Considerar, para los tamaños los valores siguientes.

Et.1	3000	5000	7000	9000
Et.2	1500	3000	6000	8000
Et.3	2500	5000	8000	12000
Et.4	2500	5000	8000	12000

# CAPÍTULO 17

## PROGRAMACIÓN DE LA PRODUCCIÓN EN PLANTAS MULTIPRODUCTO

### Consideraciones generales

Si bien en los procesos batch es posible aplicar técnicas y metodologías utilizadas en el análisis de plantas continuas, debe dejarse perfectamente establecido que los mismos presentan una problemática estrictamente propia, en cuya solución no siempre valen las analogías, más o menos libres, con el otro tipo de procesos.

En las plantas batch o por lotes, la productividad y la eficiencia económica se encuentran fuertemente influenciadas por el planeamiento de la producción que se ponga en práctica.

*Este planeamiento tiene que ver con la asignación, en el tiempo, de las capacidades de elaboración y de recursos humanos y materiales, así como con los stocks de insumos y productos intermedios y finales, con el objeto de satisfacer las demandas del mercado en el mediano y largo plazo.*

Su necesidad surge del hecho de tener que armonizar las cantidades y frecuencias con que se requieren los productos y los niveles posibles o eficientes que son propios de la unidad productiva.

Dentro del horizonte del planeamiento aparece, como es lógico, el problema del corto plazo, instancia a la que, de aquí en adelante, se hará referencia denominándola *programación de la producción*, tema cuyo análisis constituye el objeto del presente capítulo.

El planeamiento del mediano y largo plazo tienen un cuerpo metodológico propio, que no será abordado aquí más que en lo que podría considerarse como un resumen breve, enmarcando el problema del corto plazo.

En términos generales, resulta posible abordar la cuestión desde dos ángulos perfectamente diferenciados: el tratamiento *unificado o por niveles jerárquicos*.

En el primero de los enfoques se produce la consideración simultánea del planeamiento global de la producción así como la programación detallada de la misma. El horizonte temporal se divide en un cierto número de períodos, cada uno de los cuales se caracteriza por una determinada demanda para cada producto.

El objetivo del estudio es determinar, en cada período, los volúmenes a elaborar, niveles de stocks, requerimientos de insumos y recursos en general, ocupación de las etapas de proceso y programación detallada de la producción.

Si el costo de preparación de la planta para fabricar cualquiera de los productos resulta independiente de la secuencia de fabricación de los mismos, puede plantearse un modelo abordable por Programación Lineal Entera Mixta, donde se tiene en cuenta variables como

$U_{it}$  : unidades del producto  $i$  producidas en el período  $t$ ;

$S_{it}$  : unidades en stock del producto  $i$  al final del período  $t$ ;

$D_{it}$  : demanda del producto  $i$  en el período  $t$ ;

$r_{ji}$  : requerimiento del recurso  $j$  por unidad de producto  $i$ ;

$R_{jt}$  : disponibilidad del recurso  $j$  en el período  $t$ ;

$C_i$  : costo de preparación para elaborar el producto  $i$

y relaciones del tipo

$$S_{i,t-1} + U_{it} = D_{it} + S_{it}$$

$$\sum_{i=1}^N r_{ji} U_{it} \leq R_{jt}$$

En la función objetivo se tendrán en cuenta, típicamente, los costos variables de producción y uso de los recursos disponibles, así como los asociados al almacenamiento. El costo de la puesta en marcha de la elaboración de un producto  $i$ ,  $C_i$ , aparece, en la función objetivo, como  $\delta_{it}C_i$ , siendo  $\delta_{it}$  igual a uno si en el período  $t$  se produce la fabricación del producto  $i$  o nulo en caso contrario.

En el tratamiento por niveles jerárquicos, en su forma más simple, el problema se subdivide en dos partes, una que cubre el mediano y largo plazo y otra que abarca el horizonte inmediato.

La primera es esencialmente idéntica al planteo unificado al trabajarse sobre un modelo multiperiodico mientras que la segunda, subordinada a la anterior, analiza en detalle lo concerniente a la programación de la producción. La estrategia usual es instrumentar solo las acciones correspondientes al primero de los periodos considerados, al finalizar el cual se actualiza el modelo y se reitera el análisis.

En el presente capítulo no se abordará el análisis de mediano y largo plazo, restringiendo la atención sólo a la programación de la producción.

## **Programación de la producción**

De lo expuesto anteriormente queda claro que la consideración del corto plazo es de vital importancia en la planificación operativa de las plantas discontinuas, siendo la concreción práctica de los análisis efectuados.

Programar la producción significa establecer un "horario" detallado con el orden en el que han de elaborarse los distintos productos así como las asignaciones efectuadas, para cada uno, de las etapas de proceso.

Típicamente el problema queda caracterizado por

- un conjunto de  $N$  productos a ser elaborados
- un conjunto de  $M$  etapas de proceso disponibles para ello
- un orden de procesamiento para cada producto en cada etapa
- un criterio a ser optimizado
- una matriz de tiempos  $t_{ij}$  de procesamiento del producto  $i$  en la etapa  $j$
- una matriz de tiempos de preparación  $tp_{ij}$  (eventualmente, estos tiempos pueden depender de la secuencia de elaboración de los productos) y otra de transferencia  $tt_{ij}$  para cada producto  $i$  y etapa  $j$ , los que, normalmente, se considerarán despreciables frente a los de procesamiento
- un criterio de manejo de la capacidad de almacenamiento, si la hay, entre etapas de proceso
- restricciones en el orden de elaboración de ciertos productos

(establecimiento de precedencias)

En general, los casos que se consideran en la literatura son:

- *determinísticos*, donde todos los parámetros del problema son conocidos con certeza
- *estáticos*, lo que significa que los requerimientos de producción permanecen invariables durante el lapso cubierto por la programación
- *sin interrupción de proceso*, esto es, que una vez comenzada una operación sobre un producto en una etapa, ésta solo podrá desocuparse con el total completamiento de dicha operación.

Debe aclararse que, en todo lo que sigue, al hablarse de la producción de un *lote de un producto*, se estará haciendo referencia a la elaboración de la cantidad especificada por el planeamiento de largo o mediano plazo, esto es, lo producido durante una campaña, y no al volumen que es capaz de procesar la planta en un *lote de fabricación*, que es el tamaño del lote visto en el capítulo anterior.

De estos últimos se deberán producir, en forma sucesiva, el número de lotes que requiera el volumen planificado. Los lapsos globales que resulten en cada etapa han de ser los que se consideren como tiempos de procesamiento  $t_{ij}$ .

Los criterios comúnmente utilizados en los problemas de programación son tres:

- minimizar el tiempo total requerido para la fabricación de todos los productos o *tiempo global* (makespan en la literatura inglesa), con lo que se maximiza la productividad de la planta
- minimizar el *tiempo de residencia medio* (mean flowtime) de todos los productos en el sistema
- minimizar el máximo *retraso*, siendo este último la parte positiva de la diferencia entre la fecha efectiva de completamiento en la elaboración de un producto y la requerida por la planificación de nivel superior.

Como ya se vio, las estructuras de las plantas discontinuas se encuentran compuestas, en general, por etapas en serie, cada una de las cuales puede, o no, estar formada por un conjunto de unidades en paralelo.

Esta estructura en etapas, en conjunción con las posibilidades existentes de almacenamientos intermedios, determinan cuatro casos básicos de etapas:

- almacenamiento intermedio infinito (UIS)
- almacenamiento intermedio finito (FIS)
- sin almacenamiento intermedio (NIS)
- sin espera entre etapas (ZW)

con un quinto caso, almacenamiento intermedio mixto (MIS), que resulta una combinación de los cuatro anteriores.

Las siglas corresponden a las abreviaturas inglesas (UIS Unlimited Intermediate Storage, ZW Zero Wait, etc.) y se las mantiene por ser las que se utilizan normalmente.

Debe hacerse una aclaración respecto de la diferencia que existe entre el caso ZW y el resto de las situaciones básicas. En estas últimas siempre es posible mantener "estacionado" un lote en una etapa de proceso, no necesariamente un almacenamiento intermedio, mientras que cuando no se admiten esperas entre etapas esa detención no está permitida -se podrían producir degradaciones en el producto, por ejemplo- y el lote debe ser transferido de inmediato a la etapa siguiente.

Las características inherentes a los distintos casos han de ser visualizados de una mejor manera a través de un ejemplo sencillo.

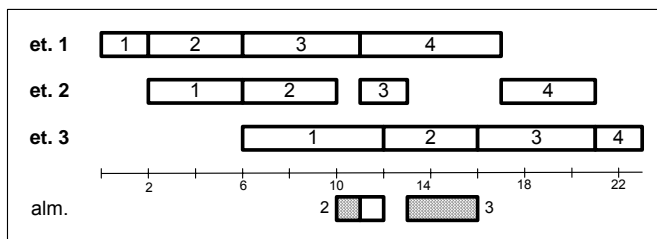
Se trata de procesar cuatro productos en una planta discontinua de tres etapas en serie, donde los tiempos de procesamiento del producto  $p_i$  en la etapa  $e_j$  son los que se indican en la tabla 1.

	P1	P2	P3	P4
Et.1	2	4	5	6
Et.2	4	4	2	4
Et.3	6	4	5	2

**Tabla 1.** *Tiempos de procesamiento*

En la figura 1 se muestra el esquema resultante cuando la secuencia elegida para los productos es 1/2/3/4 (sin pretender que ella sea la más adecuada) en el caso en que todas las etapas son UIS.

Puede advertirse la necesidad de utilizar el almacenamiento intermedio, parte del cual puede efectuarse en la propia unidad de proceso



**Figura 1.** *Etapas UIS*

(sector sombreado), pero hay un lapso en el que debe recurrirse a capacidades externas a fin de liberar la etapa 2 al procesamiento de productos. El tiempo total que demanda la secuencia (*makespan*) para el caso es de 23.

Cabe notar que, en las condiciones establecidas, lo encontrado para la situación UIS es coincidente con el resultado que se alcanzaría si la etapa 2 fuese FIS, con capacidad, al menos, de almacenar un lote.

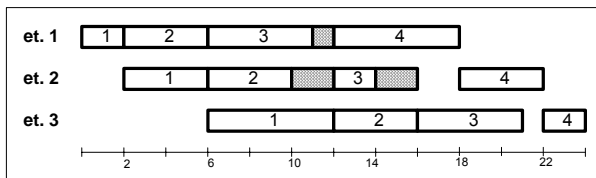


Figura 2. Etapas NIS

Si, en cambio, las etapas 1 y 2 careciesen de capacidad de almacenaje, es decir, fuesen NIS, los productos deberían permanecer "estacionados" allí, hasta que se

libere la siguiente, actuando la primera como un simple tanque. Esta situación es la que se muestra -en sombreado el período de almacenamiento- en la figura 2, siendo el *makespan*, en este caso, igual a 24.

Por fin, si los productos no pueden soportar ninguna clase de demoras en su procesamiento en todas las etapas fuesen ZW, como se muestra en la figura 3, el *makespan* sería de 26.

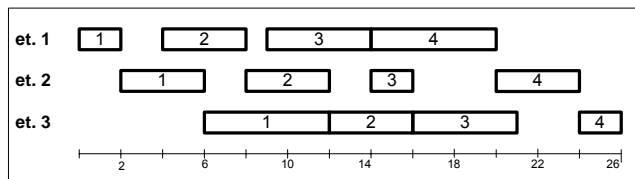


Figura 3. Etapas ZW

Nótese como se produce un desplazamiento en la ocupación de las unidades, para permitir la continuidad en el proceso de los distintos productos.

Puede notarse que la última etapa siempre se comporta como UIS, ya que, de hecho, los productos siempre se remiten al almacén de la planta.

Dado que la fabricación de un producto se inicia cuando ya ha finalizado el que lo precede, respetando siempre, en cada etapa, el orden de la programación, al tener cuatro productos, habrá 4! secuencias posibles de producción. Esto se conoce en la literatura como *programas de permutación*.

Como ya quedó dicho, en los ejemplos anteriores no se pretendía que la secuencia mostrada fuese la óptima.

Obtener tal secuencia es, en realidad, una cuestión difícil de solucionar. En términos estrictamente matemáticos, estos problemas carecen, hasta el



presente, de un algoritmo en el cual el tiempo requerido para alcanzar la solución final pueda ser expresado como una función *polinomial* del tamaño del problema, lo que se resume diciendo que la cuestión es un *problema NP*.

De esto se desprende que la aplicación de los métodos que encaran *en forma exacta* la resolución del problema ha de quedar restringida a casos relativamente simples, en tanto que, para los de mayor complejidad, deberá recurrirse a métodos aproximados.

Dentro del primer grupo se encuentran la aplicación de Programación Lineal Entera Mixta (PLEM o MILP en la terminología inglesa) y de las técnicas de Desarrollo y Acotamiento (*Branch and Bound*) y un conjunto de métodos heurísticos dentro de los enfoques aproximados.

## **La formulación bajo la técnica PLEM**

La utilización de esta técnica ha sido explorada, en principio, por Ku y Karimi, en una formulación bajo la forma de Programación Lineal Entera Mixta. Esto pretende aprovechar la existencia de métodos de PLEM, genéricos, como el complemento Solver en la planilla Excel o específicos, como el paquete LINDO, todos ellos sumamente eficaces.

El objetivo de esta técnica es determinar el orden de fabricación de los distintos productos en un programa de producción inicialmente desconocido. Al igual que se hiciese en el diseño de plantas batch con tamaños de equipos discretos, se puede utilizar una variable binaria para seleccionar el tiempo de procesamiento, en la etapa  $j$ , del producto que ocupa la posición  $k$  en la permutación (producto  $k$ -ésimo).

Para ello se introducen las variables  $X_{pk}$ , tales que

$X_{pk} = 1$  si el producto  $p$  es el producto  $k$ -ésimo, o nulo, si no lo es.

Complementariamente a esto debe exigirse que: a) cada uno de los  $N$  productos ocupe sólo una posición en la secuencia y b) que cada posición esté ocupada por un solo producto, lo que se expresa

$$a) \sum_{k=1}^N x_{pk} = 1 \quad p = 1, \dots, N \quad b) \sum_{p=1}^N x_{pk} = 1 \quad k = 1, \dots, N$$

Al igual que antes, estas relaciones se conocen con el nombre de condiciones de unicidad.

A lo anterior debe agregarse la condición de que el producto  $k$ -ésimo, no puede comenzar a ser procesado en una etapa  $j$  mientras:

- 1) el producto que ocupa la posición  $k-1$ , que le precede, no haya abandonado esa etapa y
- 2) ese producto  $k$ -ésimo se encuentre procesándose en la etapa anterior,  $j-1$  (Esta condición no rige, obviamente, para  $j=1$ ).

Si con  $\tau_{kj}$  se indica el tiempo en el cual el producto  $k$ -ésimo abandona la etapa  $j$  y se define  $\Theta_{kj} = \sum_{p=1}^N x_{pk} t_{pj}$  como el tiempo requerido para el procesamiento del producto  $k$ -ésimo en la etapa  $j$ , las consideraciones precedentes se han de indicar

Para el primer producto de la secuencia

$$\tau_{1j} = \tau_{1(j-1)} + \Theta_{1j} \quad j = 1, \dots, M \quad \tau_{10} = 0$$

Para los restantes

$$\begin{aligned} \tau_{kj} &\geq \tau_{k(j-1)} + \Theta_{kj} & k = 2, \dots, N & ; & j = 2, \dots, M \\ \tau_{kj} &\geq \tau_{(k-1)j} + \Theta_{kj} & k = 2, \dots, N & ; & j = 1, \dots, M \end{aligned}$$

La función objetivo será, adoptando el criterio de minimizar el makespan,  $\min \tau_{NM}$

El resto de la formulación varía según el tipo de etapa de que se trate. Si, por ejemplo, se estuviese frente a etapas UIS lo anterior sería suficiente; en cambio si la situación fuese FIS, con una capacidad de almacenamiento intermedio  $z_j$  entre la etapa  $j$  y la  $j+1$ , debería considerarse que el producto  $k$ -ésimo no puede abandonar  $j$  si, al menos, no hay allí una unidad de almacenamiento libre.

Si no se verificase tal disponibilidad habrían de estar "estacionados"  $z_j$  productos a la espera de ser procesados en la etapa  $j+1$ , como se muestra en la figura 4, mientras concluye allí su tratamiento el producto que ocupa la posición  $k-[z_j+1]$  en la secuencia y, por tanto, el  $k$ -ésimo deberá permanecer en  $j$  en idéntica espera, es decir que

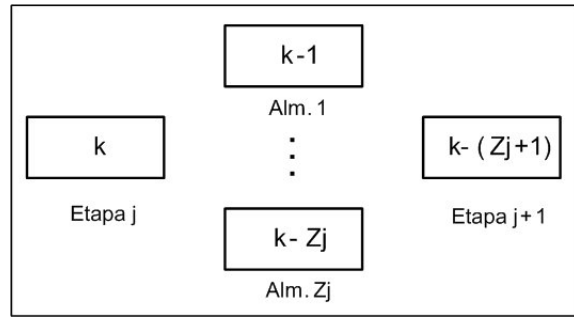


Figura 4. Esquema de almacenamiento

Si no se verificase tal disponibilidad habrían de estar "estacionados"  $z_j$  productos a la espera de ser procesados en la etapa  $j+1$ , como se muestra en la figura 4, mientras concluye allí su tratamiento el producto que ocupa la posición  $k-[z_j+1]$  en la secuencia y, por tanto, el  $k$ -ésimo deberá permanecer en  $j$  en idéntica espera, es decir que

$$\tau_{kj} \geq \tau_{(k-z_j-1)(j+1)} \quad k = 2, \dots, N \quad ; \quad \forall j \in \{J_{FIS}\}$$

Siendo  $\{J_{FIS}\}$  el conjunto de etapas a la salida de las cuales existe una capacidad de almacenamiento finita. Esto excluye, como ya se dijo, a la última etapa.

Para el caso en el que la etapa  $j$  es NIS la expresión anterior resulta ser  $\tau_{kj} \geq \tau_{(k-1)(j+1)}$ .

Obviamente, lo anterior, con independencia de la cantidad de almacenamiento existente, no afecta a los dos primeros productos de la secuencia. En rigor, debe ser  $k - z_j - 1 \geq 1 \rightarrow k \geq z_j + 2$ .

Si la etapa  $j$  es ZW, debe cumplirse  $\tau_{k(j+1)} = \tau_{kj} + \Theta_{k(j+1)}$ , para todos los productos, en lugar de  $\tau_{k(j+1)} \geq \tau_{kj} + \Theta_{k(j+1)}$

En todo lo anterior subyace la cuestión de la dimensionalidad: el problema aparece planteado en  $N^2 + NM$  variables con  $2N + 1$  ecuaciones y  $N(M-1) + N(M-1)$  restricciones, para el caso en el que todas las etapas son UIS, el más sencillo de todos (En el ejemplo demostrativo resulta un sistema de 26 relaciones en total y 28 incógnitas, 16 de las cuales son enteras.

## Tratamiento por Desarrollo y Acotamiento

Las técnicas por desarrollo y acotamiento forman parte de un grupo de metodologías ampliamente utilizadas en Inteligencia Artificial.

Consisten, básicamente, en una enumeración organizada de todas las posibles soluciones del problema, para lo que se requiere disponer de una solución incompleta del mismo así como de un valor límite de la función objetivo para la solución completa. La eficiencia de este tipo de técnicas depende, justamente, de la capacidad de evaluar adecuadamente este límite en forma sencilla.

Para el caso de programación de la producción, las técnicas de desarrollo y acotamiento se basan en el uso de una secuencia parcial de productos  $i_1 \dots i_k$  ya definida, para la que, por consiguiente, resultan conocidos los tiempos de completamiento en cada una de las etapas de proceso.

Para esta secuencia parcial se dispone de una estimación del valor del objetivo planteado, mínimo makespan, por ejemplo, que ha de requerir el procesamiento de la totalidad de los productos.

La etapa de desarrollo consiste en agregar, a la secuencia disponible, cada uno de los productos aún no programados, analizando el efecto que esto causa sobre la cota de la función objetivo.

Se retiene, luego, la secuencia ampliada con el mejor valor de la nueva cota y se reinicia todo el proceso.

En esto se considera, en principio, que las restantes alternativas, con un valor peor para la cota, no pueden producir una solución mejor. Se las debería retomar, sin embargo, en el caso en que la solución sobre la que se está trabajando tuviese un valor para la función objetivo, estimada o real, que resulta peor que el de alguna de las alternativas suspendidas.

Todo el problema radica en evaluar tales cotas, en una forma que no requiera cálculos extremadamente complejos. Lo común es considerar que se trata de un caso en el que todas las etapas son UIS, el más sencillo y el de menor valor para cuando se busca mínimo makespan.

El inconveniente es que la cota así calculada pueda resultar excesivamente conservadora y, en consecuencia, ineficaz para eliminar alternativas por analizar en el desarrollo.

Uno de los procedimientos utilizados para calcular estos límites, con los supuestos indicados, se debe a Ignall y Schrage. Este procedimiento puede esquematizarse como sigue:

Se admite tener asignados los primeros k productos en la secuencia de producción, lo que se anotará como  $i_1, \dots, i_k$ .

Ninguno de los productos aún no programados puede comenzar a ser procesado en la etapa j antes de que en ella concluya su tratamiento el producto k-ésimo, esto es, al tiempo  $\tau_{ikj}$ .

El tiempo que se requerirá para procesar en la etapa j la totalidad de los productos no programados no puede ser menor que

$$R_j = \sum_{p=k+1}^N t_{ipj}$$

Un producto q cualquiera, de los aún no programados, no podrá concluir su procesamiento en las restantes etapas, j+1 hasta M, en un lapso menor a

$$U_q = \sum_{m=j+1}^M t_{qm}$$

y, en consecuencia, el procesamiento de la totalidad de los productos no puede concluir antes de

$$D_j = \tau_{ikj} + R_j + \min_q U_q ; q \in \{i_{k+1} \dots i_N\}$$

Todo esto analizado desde una etapa genérica j. Al considerar el conjunto completo de unidades el tiempo global o makespan no podrá ser menor a

$$B = \max_j D_j ; j = 1 \dots M$$

En la figura 5 se muestra la aplicación de la técnica de desarrollo y acotamiento para el ejemplo planteado, donde todas las etapas son UIS.

En el primer momento no se dispone de secuencia alguna (bloque R de la figura) con lo que

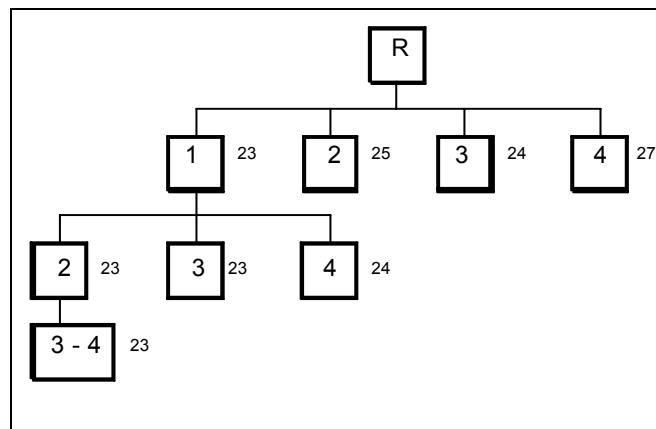


Figura 5. Etapas UIS

la incorporación de uno de los productos como inicial en la secuencia dará lugar a cuatro "ramas" que deben ser evaluadas.

Sea el caso de las secuencias que comienzan con el producto 1. Para el análisis a partir de la etapa 1 se tendrá, haciendo uso de las relaciones establecidas anteriormente ( $R_1=4+5+6$ ;  $U_2=4+4$ ; etc.):

$$\tau_{i1} = 2 \quad R_1 = 15 \quad U_2 = 8 \quad U_3 = 7 \quad U_4 = 6 \Rightarrow D_1 = 23$$

Al trasladar el estudio a la etapa 2 se tendrá:

$$\tau_{i2} = 6 \quad R_2 = 10 \quad U_2 = 4 \quad U_3 = 5 \quad U_4 = 2 \Rightarrow D_2 = 18$$

y para la 3

$$\tau_{i3} = 12 \quad R_3 = 11 \Rightarrow D_3 = 23$$

con lo que ninguna secuencia que comience programando el producto 1 como el primero a procesar podrá tener un tiempo global inferior a 23.

Para las secuencias que empiezan con 2, 3 y 4 los límites resultan ser 25, 24 y 27, respectivamente, como se indica en la figura 5.

Lo anterior determina que se continúe el proceso analizando las secuencias parciales 1-2, 1-3 y 1-4, para las que se encuentran límites de 23 en las dos primeras y 24 en la última (Debe tenerse en cuenta la relación  $\tau_{i2j} = \max(\tau_{i1j}, \tau_{i2j-1}) + t_{i2j}$  en la determinación del tiempo de completamiento del segundo producto en cualquiera de las etapas).

Dado que dos "ramas" presentan igual límite se elige, arbitrariamente, una de ellas para continuar el análisis, en este caso la 1-2.

La colocación del tercer producto determina, asimismo, la del último, con lo cual se completa la secuencia, resultando el valor de 23 para el tiempo global de 1-2-3-4.

Con esto se da por terminada la búsqueda ya que el valor real de la función objetivo coincide con el menor límite que se tenía para ella, no existiendo, por consiguiente, ninguna posibilidad de que otra secuencia pueda mejorarlo.

Adviértase que las características del tipo de etapa (UIS, FIS, NIS o ZW) sólo se tienen en cuenta en la determinación del tiempo de completamiento, en cada etapa, de los productos programados, mientras que para el resto de la estimación del límite, todas las etapas se consideran UIS.

Esto puede determinar, como ya quedó dicho, que el tiempo global efectivo de una secuencia resulte, tal vez, no solo mayor que el límite encontrado para ella sino también que el de muchas otras que fueron desechadas en pasos previos. En tal caso estas secuencias deberían ser retomadas, ya que, si no se admite esta búsqueda con retroceso, se corre el riesgo de no encontrar la secuencia óptima.

Esta posibilidad se reduciría con estimaciones más precisas de la cota pero, en ese caso, con seguridad, se ha de incrementar la dificultad para disponer de la estimación, por ejemplo, debido a la existencia de cálculos engorrosos o de complejas estructuras lógicas.

Un ejemplo de lo dicho anteriormente se verifica al aplicar las técnicas de desarrollo y acotamiento al ejemplo planteado, pero bajo la condición en la que todas las etapas son ZW.

En la figura 6 se resume la búsqueda realizada. Se ha indicado con un signo + las situaciones en las que las suspensiones provisionarias han permanecido así, hasta el final del análisis.

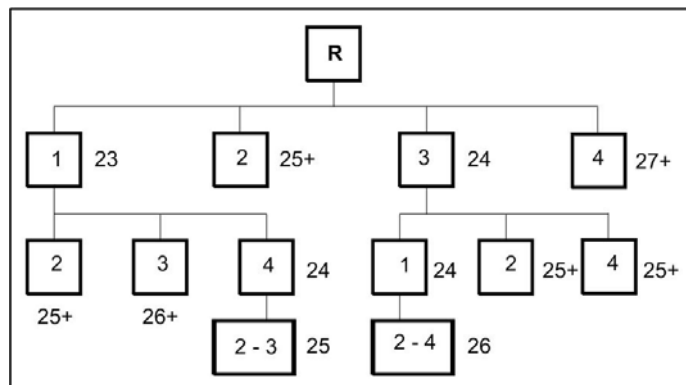


Figura 6. Etapas ZW

Así, todas las secuencias parciales de un producto, salvo la que comienza con el producto 1, quedan en suspenso. Esta situación se mantiene hasta que se completa la mejor secuencia de esa rama, 1-4-2-3. En ese momento debe retomarse la rama que comienza con el producto 3, cuyo desarrollo concluye con la secuencia completa 3-1-2-4 y allí se ve que no se podrá mejorar el makespan de 25 alcanzado en 1-4-2-3.

## Tratamiento por procedimientos heurísticos

Vista la notable dificultad que presenta el tratamiento riguroso para programar la producción de una planta multiproducto, o, en rigor, la imposibilidad de disponer de un *algoritmo eficiente*, en términos matemáticos, para resolverlo, los enfoques prácticos concluyen por estructurar metodologías en base a reglas heurísticas.

Este tipo de estrategias, obviamente, solo pueden asegurar la obtención de secuencias subóptimas, pero, paralelamente, los resultados se obtienen con un grado de dificultad razonable, *acotado polinomialmente*, lo que es fundamental para el tratamiento de problemas de cierta magnitud.

La mayor parte de estos procedimientos utilizan, de un modo u otro, los resultados exactos que se disponen para el caso UIS con dos etapas de proceso, para el cual, junto al de ZW con igual número de etapas, son los únicos donde existe un algoritmo *eficiente* para resolverlos.

Para el caso UIS con solo dos etapas de proceso la solución viene dada por la *regla de Johnson*, la que se puede enunciar como sigue:

*En una programación óptima, el producto  $i$  debe preceder al producto  $j$  si  $\min [t_{i1}, t_{j2}] \leq \min [t_{j2}, t_{i1}]$ .*

La regla conduce al siguiente algoritmo para resolver el caso:

- 1) Genérese una lista vacía de  $N$  elementos
- 2) Elija el producto con el menor tiempo de procesamiento, en primera o segunda etapa
- 3) Si el tiempo de procesamiento corresponde a la primera etapa, ocúpese el primer lugar libre a la izquierda
- 4) Si el tiempo de procesamiento corresponde a la segunda etapa, ocúpese el primer lugar libre a la derecha
- 5) En el caso en el que los tiempos de procesamiento del producto elegido sean iguales en ambas etapas, considérese que el mínimo se encuentra sobre la segunda.

La aplicación del algoritmo al siguiente caso con dos etapas de procesamiento UIS



Productos	1	2	3	4	5	6
Tiempo proceso (et.1)	10	5	11	3	7	9
Tiempo proceso (et.2)	4	7	9	8	10	15

comienza por elegir el producto 4, ubicándolo al comienzo de la lista: [4 - ? - ? - ? - ? - ?]. Luego el mínimo tiempo corresponde al producto 1, con lo que la lista queda [4 - ? - ? - ? - ? - 1]. Siguiendo el procedimiento se llegaría a [4 - 2 - 5 - ? - ? - 1], momento en el cual el mínimo tiempo, 9, se encuentra sobre los productos 3 y 6, pero no existe problema, ya que se ubican en distintas etapas. La secuencia óptima será, entonces, [4 - 2 - 5 - 6 - 3 - 1].

La secuencia de dos etapas UIS, para el que existe un algoritmo que permite su solución exacta, ha sido tomado por diversos autores como base de métodos heurísticos para abordar el tratamiento de otros casos.

Uno de los más utilizado se debe a Dannenbring, método propuesto en 1977 y que se conoce bajo la sigla RAES, Rapid Access with Extensive Search. La técnica RAES ha servido, asimismo, como base para otros métodos, también de naturaleza heurística, aunque más elaborados.

Consta de dos fases, el *Acceso Rápido*, que genera una secuencia inicial, y la *Búsqueda Extendida*, donde *evolutivamente* se trata de encontrar una secuencia mejor.

En la primera fase, el *procedimiento RA*, el problema, con N productos y M etapas del tipo de que se trate, se transforma en otro, con el mismo número de productos, elaborados en dos etapas UIS, siendo los tiempos de procesamiento del producto i en la primera y segunda etapa los que surgen de las relaciones

$$ta_{i1} = \sum_{j=1}^M (M - j + 1) t_{ij} \quad ta_{i2} = \sum_{j=1}^M j t_{ij} \quad i = 1, \dots, N$$

A este problema así definido se le aplica el algoritmo derivado de la regla de Johnson, con lo que se obtiene la secuencia inicial de la segunda fase o *procedimiento ES*.

Para esta secuencia inicial, y en todas las subsiguientes, se evaluará la función objetivo adoptada, normalmente, el tiempo global, considerando las M etapas reales, con las características que corresponda.

Allí se han de explorar las secuencias "vecinas" de la mejor disponible hasta ese momento, entendiendo como "vecindad" al conjunto de N-1 secuencias que resultan de la permutación de pares de productos adyacentes (1-2-3-4 es vecina de 1-3-2-4, y viceversa, pero no de 4-1-2-3, esto es, la lista no debe considerarse "circular").

En este conjunto de vecinos se evalúa la función objetivo de cada secuencia, reteniendo la mejor. Si existe una mejora sobre la de origen, se genera una nueva vecindad, tomando a la retenida como punto de partida y todo se repite. Si no existe tal progreso, el proceso se da por concluido, siendo el resultado la mejor secuencia obtenida hasta ese momento.

La aplicación de la técnica RAES al ejemplo de demostración, considerando que todas son NIS, se desarrolla como sigue:

*Fase 1* Los tiempos en las pseudoetapas son los que se muestran en la tabla 2.

	Prod.1	Prod.2	Prod.3	Prod.4
Etapa 1	20	24	24	28
Etapa 2	28	24	24	20

**Tabla 2.** *Tiempos de pseudoetapas*

donde la aplicación de la regla de Johnson determina la secuencia [1-2-3-4], con un makespan de 24. En el caso de los productos 2 y 3 resulta indistinto el orden en que se los ubique en la secuencia.

*Fase 2* Se procede a generar las secuencias "vecinas" [2-1-3-4], [1-3-2-4] y [1-2-4-3], para las que se encuentran los tiempos globales 25, 24 y 24, respectivamente, por lo que, al no registrarse una mejora sobre la situación de base, se da por terminado el procedimiento.

Otra metodología de igual naturaleza de la técnica RAES es el método CDS propuesto por Campbell, Dudek y Smith en 1970. Aquí el problema con M unidades de proceso se analiza a través del estudio de M-1 subproblemas artificiales de dos unidades, donde los tiempos de procesamiento del producto i en cada una de ellas, en el subproblema k, vienen dados por

$$ta_{i1}^k = \sum_{j=1}^k t_{ij} \quad ta_{i2}^k = \sum_{j=k+1}^M t_{ij} \quad i = 1..N; k = 1, \dots, M-1$$

lo que da lugar, luego de aplicarse la regla de Johnson, en principio, a M-1 secuencias que serán objeto de análisis, conservándose la mejor de todas ellas.

Otra de las técnicas que hacen uso de los procedimientos RAES y CDS es debida a Wiede y Reklaitis, por la cual todos los análisis se limitan a un conjunto de M problemas: el que surge de la fase 1 del RAES y los M-1 del CDS.

Como ya quedó dicho, este tipo de metodologías, simples en su desarrollo, han servido de base para estructurar otros procedimientos heurísticos de mayor complejidad, como el propuesto por Ku y Karimi, en el que se efectúa una formulación bajo la técnica PLEM, pero acotando el número de posiciones que puede ocupar cada producto en las secuencias por analizar, una suerte de ampliación de la Búsqueda Extendida.

El algoritmo propuesto puede resumirse como sigue:

- 1) Obténgase una secuencia inicial para el problema por aplicación de la primera fase del método RAES.
- 2) Considérese que el producto k-ésimo de la secuencia puede llegar a ocupar, en la óptima, los lugares k-2, k-1, k, k+1 o k+2, estando, obviamente, estos valores acotados al entorno 1, N. Esas posiciones aparecen indicadas en la matriz de la figura 7, cuya lectura debe realizarse como sigue: para el producto que figura en la primera posición de la secuencia RA se admiten, en el análisis, las ubicaciones que figuran en la primera fila (1, 2 y 3); para el segundo, las de la segunda y así siguiendo hasta el producto N-ésimo, con lo cual se reduce el número de variables enteras de N<sup>2</sup> a 5N-6.
- 3) Resuélvase el problema aplicando técnicas de PLEM, con las consideraciones del apartado anterior.

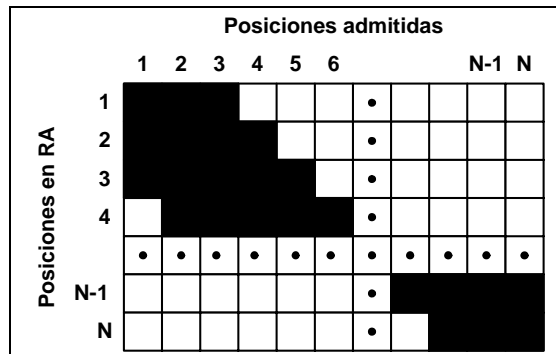


Figura 7. Posiciones a considerar

## Complemento KuKarimi

Este complemento permite encontrar la secuencia que minimiza el tiempo total de fabricación de un conjunto de productos en una planta multiproducto, utilizando la formulación de Ku y Karimi.

El complemento admite, en cada una de las etapas, cualquiera de los cuatro tipos clásicos (UIS, NIS, FIS y ZW), salvo para la última que siempre será considerada UIS.

KuKarimi.xla utiliza el Solver de la planilla Excel®, por lo que éste debe estar disponible.

Al cargarse el complemento se genera el elemento de menú *KuKarimi*, desde el cual es posible seleccionar las opciones: *Nuevo Problema* y *Generar Modelo*.

Eligiendo la primera de las órdenes, se debe ingresar el número de etapas y productos. Inmediatamente se crea un nuevo libro con la hoja *Datos del Problema*. En ella existen áreas resaltadas, específicas para el ingreso de los datos: los tiempos de procesamiento de los productos en cada etapa, el tipo de etapa para cada una de ellas y, en el caso de que la etapa sea de almacenamiento finito (FIS), el número de unidades de almacenamiento entre esa etapa y la siguiente.

El complemento admite hasta cinco productos y seis etapas como máximo.

Completada la información, se está en condiciones de generar el modelo. Al

usar la orden correspondiente, el complemento genera la hoja Modelo donde se encuentran las variables del mismo y las relaciones que las vinculan.

Para obtener la secuencia que minimiza el tiempo total de fabricación, el usuario debe invocar al Solver de la planilla Excel®, completando la información que se requiera.

Lo expuesto aquí es una síntesis de los aspectos básicos del complemento. Una información más completa se puede obtener accediendo a la ayuda del mismo.

## **Bibliografía**

- Iglesias O.A., Paniagua C.N., "Un Auxiliar Pedagógico para la Programación de la Producción en Plantas Multiproducto, Actas de INTERTECH'2012 – International Conference on Engineering and Technology Education, Dili, East Timor, p. 228 – 231, 2012.
- Ku H., Karimi I.A., "Scheduling in Serial Multiproduct Batch Processes with Finite Interstage Storage: a Mixed Integer Linear Program Formulation". *Ind.Eng.Chem.Res.* 27 n°10, p.1841, 1988.
- Ku H., Rajagopalan D., Karimi I.A, "Scheduling in Batch Processes". *Chem.Eng.Prog.*, Aug., p.35, 1987.
- Reklaitis G.V., "Review of Scheduling of Process Operations". *AIChE Symp.Ser.* 78 (214), p.119, 1982.
- Wiede W., Reklaitis G.V., "Determination of Completion Time for Serial Multiproduct Processes-2. A Multiunit Finite Intermediate Storage System". *Comput.Chem.Engng.* 11 n°4 p.345, 1987.
- Wiede W., Reklaitis G.V., "Determination of Completion Time for Serial Multiproduct Processes-3. Mixed Intermediate Storage Systems". *Comput.Chem.Engng.* 11 n°4 p.357, 1987.

## Propuestas de trabajo

1) Aplicar la formulación PLEM de Ku y Karimi, para minimizar el tiempo total requerido para fabricar los productos A, B y C, considerando que los tiempos de procesamiento en cada etapa y los modos de operación en las mismas, son los indicados en la tabla adjunta. En la etapa 1 hay almacenamiento para un único lote.

	Tpo. Procesamiento [h]			Tipo etapa
	A	B	C	
Etapa 1	2	8	4	FIS
Etapa 2	6	4	5	NIS
Etapa 3	3	9	2	ZW
Etapa 4	9	10	7	

- Plantear las relaciones de unicidad entre productos y posiciones en la secuencia, para los dos primeros productos y las dos primeras posiciones.
- Plantear las ecuaciones que permiten determinar los tiempos de procesamiento para los dos primeros productos en las dos primeras etapas.
- Resolver utilizando el complemento "KuKarimi.xla".
- Realizar el diagrama de Gantt de la secuencia óptima encontrada.

2) Proponer un programa óptimo de producción para una planta multiproducto donde deben fabricarse 4 productos sobre una misma línea de producción compuesta de 5 etapas. Los tiempos de procesamiento y el tipo de etapas se muestran en la tabla, siendo despreciables los tiempos de limpieza y llenado.

Etapa\Prod	A	B	C	D
I (NIS)	10	11	5	4
II (ZW)	11	9	12	11
III (ZW)	9	10	14	13
IV (ZW)	12	13	8	10
V	7	8	6	9

- a) Hallar el orden de procesamiento por medio del Tratamiento por Desarrollo y Acotamiento (Método de Ignall y Schrage).
- b) Hallar el orden de procesamiento y el makespan del ordenamiento obtenido
  - 1) por el Método RAES.
  - 2) por el Método CDS.

# CAPÍTULO 18

## SEGURIDAD Y CONFIABILIDAD. LOS SISTEMAS EN FALLA

### Las fallas y su tratamiento estadístico

Borges remata su “Fundación mítica de Buenos Aires” con un rotundo

A mí se me hace cuento que empezó Buenos Aires:

La juzgo tan eterna como el agua y como el aire.

Una comparación de una increíble fuerza poética, pero inexacta –la poesía suele tener esos contrasentidos. Hubo un tiempo en el que no había agua ni aire y habrá otro, en algún futuro, donde también estarán ausentes.

En el universo, más tarde o más temprano, todo está llamado a claudicar. La obra de la naturaleza o de la mano del hombre, inexorablemente, tendrá su fallo.

En las plantas de proceso estas fallas serán el origen de lesiones humanas o pérdidas económicas, a veces, severas; otras, no tanto.

Evitarlas es, por supuesto, imposible, pero un adecuado diseño y una inteligente política de mantenimiento pueden reducir su incidencia o mitigar su severidad.

Habida cuenta de que nunca se podrá saber, con certeza, el momento en el que dejará de estar apto un componente determinado en un sistema, el tratamiento de las fallas deberá ser, necesariamente, de tipo estadístico.

En la figura 1 se puede ver una curva típica (*curva de bañera*) de la evolución de la tasa de fallas  $\lambda(t)$  (fracción en falla por unidad de tiempo) a lo largo de la “vida” de un equipo.

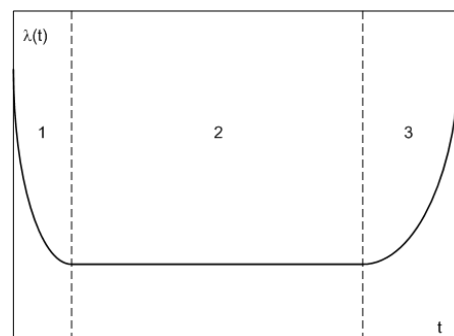


Figura 1. Curva de bañera



Se pueden distinguir tres zonas. En la primera, llamada de fallas iniciales, tempranas o “infantiles”, la tasa es decreciente y las roturas son atribuibles a elementos de fabricación defectuosa o mal instalados.

En la zona central,  $\lambda(t)$  se vuelve prácticamente constante y las fallas, aleatorias e inesperadas. Estas son producto de las condiciones normales de trabajo o de solicitaciones ocasionales extraordinarias.

Por último, cuando el equipo ingresa en su período de desgaste, se produce un incremento de la tasa de fallas, por la lógica degradación de los componentes.

Una adecuada política de mantenimiento, tal como la reparación inmediata de los componentes fallados o un reemplazo preventivo, antes de la posible falla, ha de permitir retrasar, en la práctica, la aparición de esta tercera fase.

Con este comportamiento en mente, es posible abordar el tratamiento estadístico del problema de fallas, donde se definirá como la variable aleatoria a tener en cuenta, el tiempo durante el cual el elemento considerado se encuentra funcionando sin que sobrevenga una rotura.

Se habla de *confiabilidad* o *fiabilidad* (en inglés, *reliability*) en el tiempo  $t$ ,  $R(t)$ , como la probabilidad de que la falla ocurra después de ese tiempo, con lo cual, si  $T$  es el momento en el cual se ha de producir el fallo, será

$$R(t) = \Pr( T > t )$$

Si con  $N_s(t)$  se indica el número de elementos, de un total inicial de  $N(0)$ , que funcionan correctamente al tiempo  $t$  y con  $N_f(t)$  los que han fallado hasta ese momento será

$$N(0) = N_s(t) + N_f(t)$$

y entonces

$$R(t) = N_s(t) / N(0)$$

El complemento de la confiabilidad  $R(t)$  es la *no fiabilidad*  $Q(t) = N_f(t) / N(0) = 1 - R(t)$ . En la literatura sobre el tema, se suele hablar de *infiabilidad*, palabra que no existe en la lengua castellana y pareciera ser una grosera traducción del término inglés *unreliability*.

En un lapso  $\Delta t$ , el producto de la tasa de fallas  $\lambda(t)$  por  $\Delta t$  puede considerarse como la probabilidad de que un elemento que se encuentra apto en el instante  $t$  esté fallado en  $t + \Delta t$ , es decir

$$\lambda(t) \Delta t = \Pr( t < T < t + \Delta t ) = [ Nf(t + \Delta t) - Nf(t) ] / Ns(t)$$

$$\lambda(t) \Delta t = [ Q(t + \Delta t) - Q(t) ] / R(t) = [ R(t) - R(t + \Delta t) ] / R(t)$$

Para cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  la expresión anterior se transforma en

$$\lambda(t) dt = -dR / R(t)$$

y entonces

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) dt\right)$$

que, para el comportamiento en la zona de fallas aleatorias de la figura 1, la tasa es una constante y resulta ser  $R(t) = \exp(-\lambda t)$ .

La función densidad de probabilidad de fallos,  $f(t)$ , es la probabilidad de que un elemento tenga una falla en el lapso  $t$  y  $t + dt$ . Matemáticamente

$$f(t) = dQ(t) / dt = -dR(t) / dt$$

Bajo el supuesto de la zona 2 de la figura 1

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$$

expresión conocida como *distribución exponencial*.

Ahora es posible calcular el tiempo esperable en el que se produce la falla, el llamado tiempo medio entre fallas - suponiendo una reparación instantánea - o tiempo medio de supervivencia TMS:

$$TMS = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \lambda \exp(-\lambda t) dt = -\int_0^{\infty} t d[\exp(-\lambda t)] = \left. \frac{-\exp(-\lambda t)}{\lambda} \right|_0^{\infty} - \left. \frac{t}{\exp(\lambda t)} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

Otro concepto que se maneja en confiabilidad de sistemas es la *vida útil* de un elemento. Esta no es otra cosa que el período durante el cual las fallas se producen en forma aleatoria, una vez que el equipo ha superado la fase de fallas tempranas. Casi como una obviedad, se establece que la vida útil está limitada por el período de desgaste y la distribución antes vista es válida durante ese tiempo. El periodo de fallas tempranas no se tiene en cuenta ya que se supone que todos los equipos que se están considerando han “sobrevivido” a esa etapa.

Si bien en la literatura y a través de los proveedores de los equipos es posible encontrar datos sobre la confiabilidad, como tasa de fallas o vida útil, de distintos equipos, la información más relevante ha de surgir del sector de mantenimiento del lugar donde están instalados los elementos. Allí, si bien, al principio de las operaciones, puede tenerse que trabajar sobre un tamaño de muestra reducido, en el análisis estadístico estarán presentes todos los factores puestos en juego, además del propio equipo: la política de mantenimiento y las prácticas operativas.

El registro de la historia de fallas de un determinado tipo de elemento permite, considerando un tamaño de muestra adecuado, la determinación de los valores estadísticos necesarios para evaluar la confiabilidad de esa clase de equipos, puestos en funcionamiento en la planta.

Es una práctica común ordenar el número de equipos sobrevivientes a intervalos iguales de tiempo, a lo largo de toda la vida útil de los mismos.

En la tabla 1 se puede ver la información obtenida sobre un conjunto de 200 equipos de una misma clase: el número que, a distintos tiempos, se han mantenido funcionando y la fracción del total inicial

t	0	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600
Ns(t)	200	166	138	115	96	80	67	56	47
R(t)	1	0,83	0,69	0,575	0,48	0,4	0,335	0,28	0,235
t	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400
Ns(t)	39	33	26	22	18	15	13	11	9
R(t)	0,195	0,165	0,13	0,11	0,09	0,075	0,065	0,055	0,045
t	3600	3800	4000	4200	4400	5000	5800	6000	
Ns(t)	7	6	5	4	3	2	1	0	
R(t)	0,035	0,03	0,025	0,02	0,015	0,01	0,005	0	

**Tabla 1.** Datos de mantenimiento

De verificarse una tasa de fallas constante, la gráfica  $\ln R(t)$  vs  $t$  sería una recta, donde la pendiente, cambiada de signo, es el valor de  $\lambda$ .

Para los datos de la tabla, al regresionar linealmente  $\ln R(t)$  con  $t$ , se obtiene  $\lambda$  igual a  $9,26 \cdot 10^{-4}$ , con un coeficiente de correlación de 99,97%, indicativo de la bondad de la aproximación.

## **Análisis de fallas en sistemas de protección**

En el diseño de sistemas de protección es fundamental determinar si los mismos resultan adecuados, en su capacidad de cobertura de la situación anormal, para evitar o mitigar las consecuencias económicas o de seguridad que, de otro modo, habrían de sobrevenir.

Deberá tenerse en cuenta la posibilidad de ocurrencia del evento indeseable así como las consecuencias que ese suceso puede acarrear.

En este sentido, y siempre dentro del marco de un análisis estadístico, el diseño puede encontrarse bajo tres condiciones básicas:

- 1) Inseguridad: la probabilidad del suceso indeseable es inaceptablemente alta
- 2) Razonable seguridad: hay un balance adecuado entre probabilidad de ocurrencia, operabilidad y costos
- 3) Sobreprotección: aparecen costosas redundancias inútiles, problemas operativos, etc.

Está claro que sólo la segunda condición es admisible, el problema radica en cómo cuantificar su razonabilidad.

La cuestión se puede dividir en dos partes: primero, hay que determinar la secuencia de eventos que conducen a la situación indeseable y evaluar su probabilidad de ocurrencia. Una vez hecho esto, hay que aplicar algún criterio que permita establecer si la seguridad que ofrece el diseño bajo análisis es razonable o no.

Una metodología disponible para abordar la realización de la primera fase es el Análisis por Árbol de Fallas (Fault Tree Analysis), como el propuesto por U.S. Nuclear Regulatory Commission.

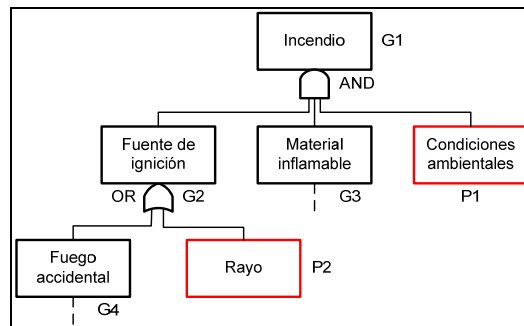
En él, cada suceso por analizar reconoce causas inmediatas que le dan origen. Así, por ejemplo, para que se produzca un incendio deberían estar presente, simultáneamente, algún material inflamable, una fuente de ignición y condiciones ambientales favorables.

A su vez, la fuente de ignición podría ser un fuego accidental o la caída de un rayo, por limitar en algo el número de alternativas.

Es obvio que las relaciones de causalidad se estructuran en base a los operadores lógicos “Y” (AND) y “O” (OR). A su vez, en las relaciones causales,

llegará un momento, como cuando se consideran las condiciones ambientales o la caída de un rayo, en el que la ocurrencia del antecedente se debe a factores que se encuentran fuera del sistema. Este tipo de situaciones podrían denominarse “sucesos primarios” y es preciso distinguirlas de aquellas que son consecuencia de causas que se encuentran dentro del sistema y, por lo tanto, su probabilidad de ocurrencia es función de las de esas causas.

En la figura 2 se puede ver como sería el árbol de fallas para este ejemplo elemental. Los bloques en rojo indican cuales deben considerarse representando sucesos primarios.



**Figura 2.** *Árbol de fallas*

Una vez que se dispone de un árbol de fallas, lo que implica un conocimiento acabado del sistema bajo análisis, se deben asignar las probabilidades de ocurrencia para todos y cada uno de los sucesos considerados. Para ello, hay que hacerlo con las correspondientes a los primarios y, a partir de allí, realizar el cálculo para los restantes, de acuerdo a las reglas del álgebra booleana. En la figura 2 se ha indicado con P la probabilidad de los sucesos primarios y con G la de los derivados.

- a) Probabilidad de dos sucesos simultáneos (“AND” lógico)

$$\Pr(A \text{ y } B) = \Pr(A) \times \Pr(B)$$

- b) Probabilidad de dos sucesos excluyentes (“OR” lógico)

$$\Pr(A \text{ o } B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

- c) Leyes distributivas

$$\Pr[A \text{ y } (B \text{ o } C)] = \Pr(A) \times \Pr(B) + \Pr(A) \times \Pr(C)$$

$$\Pr[A \text{ o } (B \text{ y } C)] = [\Pr(A) + \Pr(B)] \times [\Pr(A) + \Pr(C)]$$

d) Leyes asociativas

$$\Pr(A \text{ y } A) = \Pr(A \text{ o } A) = \Pr(A)$$

$$\Pr[A \text{ o } (A \text{ y } B)] = \Pr(A)$$

Por la aplicación de estas reglas, para el árbol de la figura 2 se tendrá:

$$G1 = G2 \times G3 \times P1 = (G4 + P2) \times G3 \times P1 = \dots$$

Y por sucesivos reemplazos se puede llegar a expresar la probabilidad G1 del evento de interés -incendio- en función de las probabilidades de los sucesos primarios involucrados.

Para el establecimiento de las probabilidades de los sucesos primarios, si bien lo más adecuado es disponer de valores que surjan del sector de mantenimiento de la planta para la que se está efectuando el análisis, no siempre se tiene esta información, por ejemplo, en el caso de plantas nuevas, debiéndose recurrir a datos genéricos, suministrados por fabricantes o instituciones específicas.

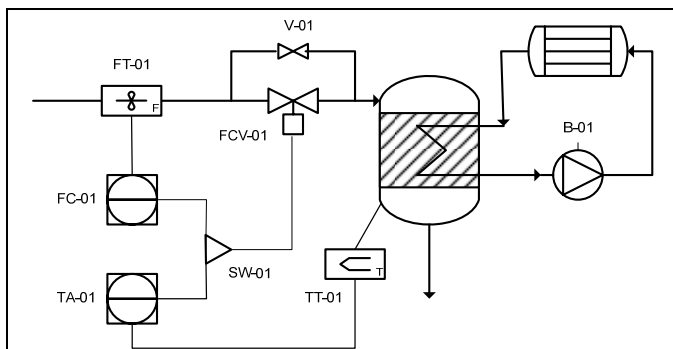
La tabla 2 muestra algunos intervalos de valores típicos, recogidos en varias de las instituciones vinculadas al tema.

Elemento	Tasa de falla [1/h]	Elemento	Tasa de falla [1/h]
Bomba centrífuga	$10^{-2} - 10^{-4}$	Error humano	$10^{-2} - 10^{-3}$
Motor eléctrico	$10^{-4} - 10^{-5}$	Válvula de control	$10^{-2} - 10^{-5}$
Servicio auxiliar	$10^{-2} - 10^{-4}$	Transmisores, controladores, etc.	$10^{-3} - 10^{-5}$

**Tabla 2.** Valores típicos de tasas de falla

Una vez que se ha evaluado la probabilidad de ocurrencia del suceso indeseable debe contrastarse con algún criterio que permita establecer si el sistema se encuentra en una condición de razonable seguridad o no y, en este último caso, que modificaciones deben proponerse para remediar la anomalía.

Todo lo dicho puede ser visualizado mejor a través del siguiente ejemplo.



**Figura 3.** Sistema de protección

En el esquema de la figura 3 se muestra el sistema de protección propuesto para un reactor que debe trabajar a 200 °C. La temperatura se mantiene en tal valor por recirculación forzada de un fluido refrigerante, el que, a su

vez, intercambia con agua. El sistema de control mantiene constante el caudal de reactivos. Paralelamente, por otro circuito, también se mantiene constante la refrigeración.

De este modo, el reactor opera en lazo abierto.

La operación requiere que la temperatura de trabajo no exceda los 300 °C, ya que si eso ocurre, el catalizador se degrada irreversiblemente y debe procederse a su cambio, a un costo importante.

Para evitarlo, se ha agregado un circuito de protección donde, al detectarse un incremento excesivo de temperatura, el controlador de alarma TA-01 opera sobre el switch SW-01 obligando a la válvula FCV-01 a cerrar el ingreso de reactivos.

La situación indeseable es que se alcance la temperatura crítica, lo que sucede si, habiéndose alterado la operación normal del reactor, por falla del lazo de control de caudal o con algún problema en el circuito de refrigeración, el sistema de protección no responde.

Se pueden enumerar como sigue las causas de falla de los distintos sectores:

- a) En el lazo de control
  1. El transmisor FT-01 no opera normalmente
  2. El controlador FC-01 está fallado
  3. La válvula FCV-01 no funciona correctamente
  4. La válvula V-01 está abierta
- b) En el circuito de refrigeración
  1. Se interrumpe el suministro de agua

2. Se interrumpe la recirculación
  - i Rotura en rotor de B-01
  - ii Rotura del motor de B-01
  - iii Pérdida de energía eléctrica
- c) En el sistema de protección
  1. Falla en el transmisor TT-01
  2. El controlador de alarma TA-01 no opera correctamente
  3. El switch SW-01 no conmuta

Las distintas cadenas de sucesos que llevan a  $T > 300\text{ °C}$  y su relación causal se muestra en el árbol de fallas de la figura 4. En ella, se ha supuesto que la bomba B-01 y el switch SW-01 tienen la misma fuente de alimentación de energía.

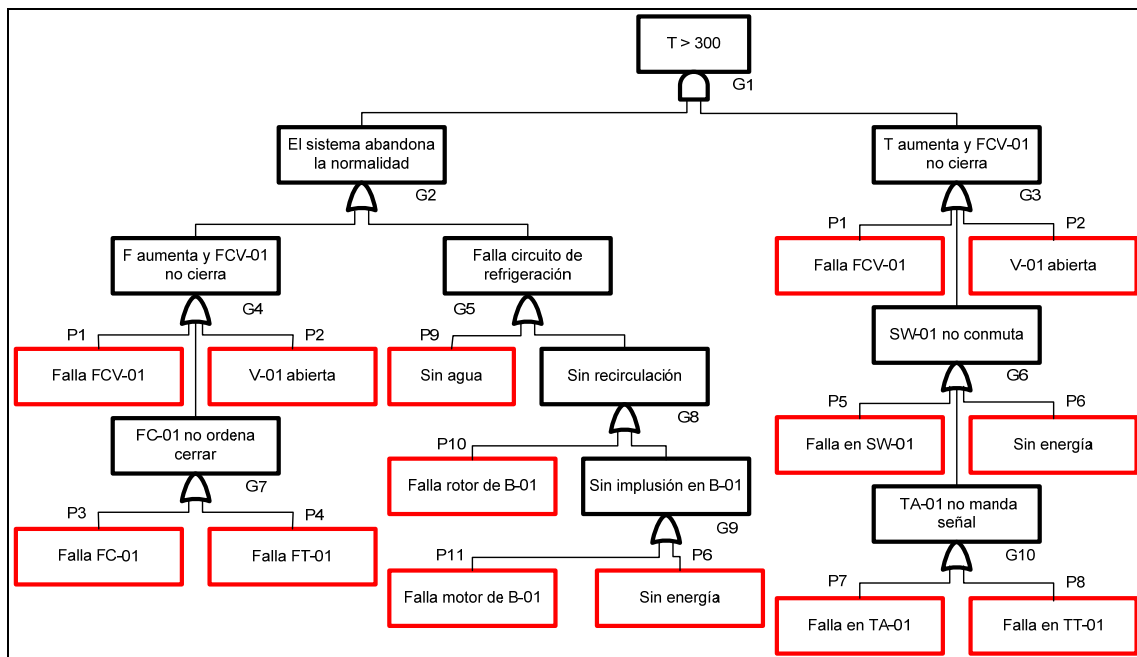


Figura 4. Árbol de fallas del ejemplo

El cálculo de la probabilidad de ocurrencia  $G_1$  del evento no deseado,  $T > 300\text{ °C}$ , se realiza mediante sucesivos pasos, utilizando las reglas ya vistas del álgebra booleana:

$$G_1 = G_2 \times G_3 = [G_4 + G_5] \times [P_1 + P_2 + G_6] = \dots = [P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_6 + P_9 + P_{10} + P_{11}] \times [P_1 + P_2 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8] = P_1 + P_2 + P_6 + P_3 \times P_5 + P_3 \times P_7 + \dots + P_4 \times P_5 + \dots + P_{11} \times P_8.$$



En el desarrollo debe tenerse en cuenta que  $Pr(A) + Pr(A) \times Pr(B) = Pr(A \text{ o } (A \text{ y } B)) = Pr(A)$ .

El cálculo de G1 es inmediato, una vez que se asignan las probabilidades  $P_i$  a los distintos sucesos primarios. Existen diversos criterios que establecen límites para la probabilidad de ocurrencia del evento indeseable y, por ejemplo, el monto estimado de la eventual pérdida o, desde otro punto de vista, la perspectiva de daños físicos al personal afectado al sector.

Pero la expresión anterior permite una lectura algo diferente a la de la pura evaluación matemática: cada uno de los sumandos es el aporte a G1 de la posibilidad de que ocurran conjuntos de uno, dos, tres,... eventos simultáneos. Así, por ejemplo, se llegaría al valor no deseado de temperatura si la válvula FCV-01 no cierra o si, a la vez, fallan el motor de la bomba B-01 y el transmisor TT-01.

Se puede ver que existen tres eventos cuya sola ocurrencia determina la posibilidad de  $t > 300^\circ\text{C}$ : la falla en FCV-01 o en el switch SW-01 o la pérdida de energía, afectando al switch y a la bomba.

A mediados de los 70, Browning propuso, para evaluar la seguridad de sistemas de protección, el criterio de considerar el conjunto con menor número de eventos para la ocurrencia del suceso indeseable.

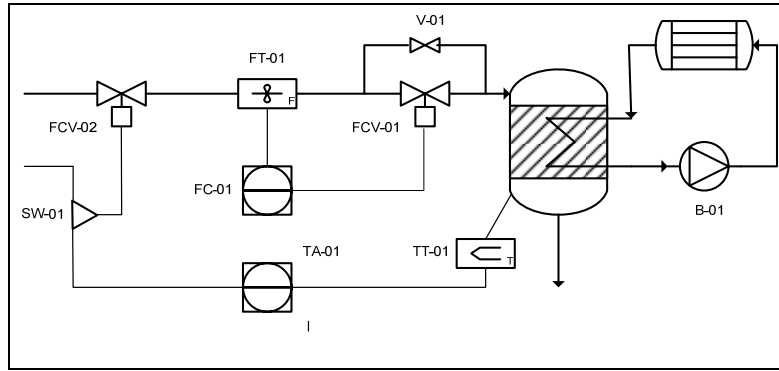
Si ese número es uno, la condición es de inseguridad y tres, existe sobreprotección. Esto es, el conjunto debe estar constituido por dos eventos de ocurrencia simultánea.

Claramente, el sistema de la figura 3 es inseguro.

La ventaja del árbol de fallas es que su análisis facilita la determinación de la mejora requerida.

En el sistema de esa figura el problema radica en que, además de la fuente de energía única, el lazo de control y el de alarma comparten el conjunto que opera sobre el ingreso de reactivos al reactor, la válvula FCV-01 y el conmutador SW-01.

La solución es diversificar el suministro de energía e independizar el circuito de alarma del lazo de control, como en el esquema de la figura 5.

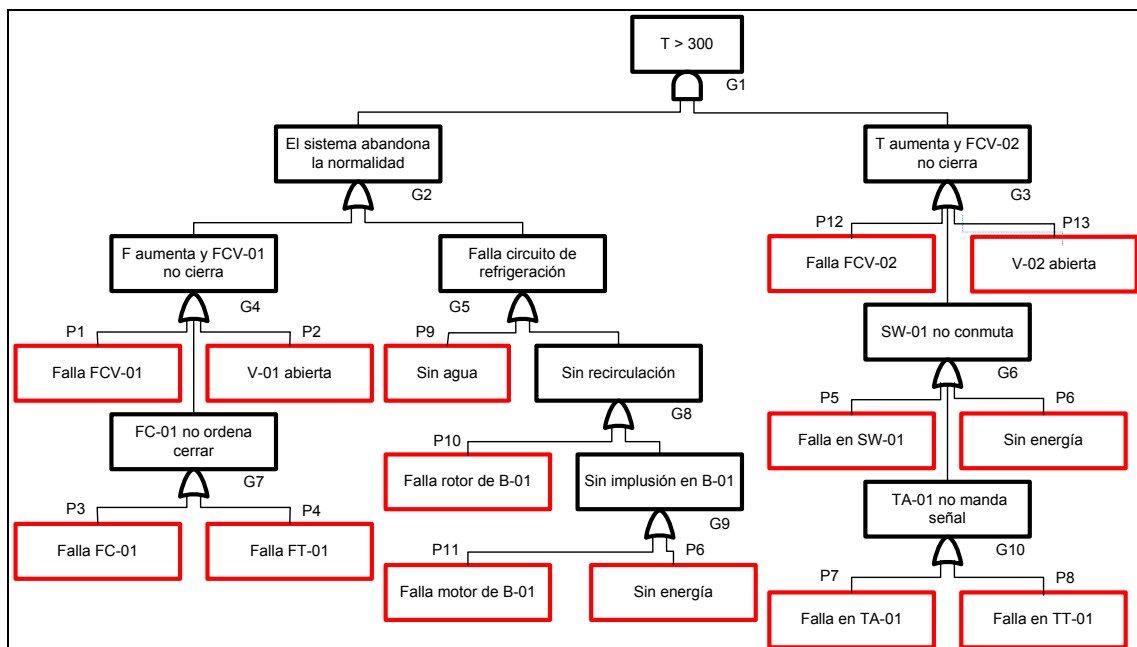


**Figura 5. Sistema mejorado**

Allí, el conmutador SW-01 mantiene abierta la válvula FCV-02 salvo cuando el circuito de alarma detecta un aumento excesivo de temperatura y ordena el cierre.

También, se ha independizado la energía que se suministra a SW-01 de la que se entrega a la bomba.

Con estas modificaciones, el árbol de fallas es de la figura 6, donde se puede verificar que el conjunto de menor número de eventos tiene dos elementos, como se buscaba.



**Figura 6. Árbol del sistema modificado**

## Confiabilidad de sistemas

En ciertos casos, un sistema puede fallar sin que esto implique perjuicios materiales totales o parciales en la zona afectada o daño físico para el personal que allí desarrolla sus tareas. Se trata, simplemente, de una interrupción en la producción, con el consiguiente lucro cesante y eventuales pérdidas de materias primas o productos semielaborados.

Solucionado el problema, el sistema se vuelve a poner en marcha y, al cabo de un cierto tiempo, todo se encuentra funcionando en las mismas condiciones que antes de la falla.

La rotura de una bomba de alimentación, por ejemplo, puede implicar que la unidad que se ubica aguas debajo de ella se encuentre sin material para procesar, lo que obliga a detener la operación. Una vez reparada, se dará comienzo a la puesta en marcha del sistema hasta alcanzar, nuevamente, el estado de régimen normal.

En este tipo de situaciones, se puede pensar en tener en reserva equipos que puedan entrar en funcionamiento, reemplazando al principal, cuando en éste se produce una rotura o bien, formando parte de un esquema que permite continuar operando el sector, aunque sea a un ritmo menor de producción.

En todos los casos, estas alternativas deben estar debidamente justificadas desde un punto de vista económico: el lucro cesante y las eventuales pérdidas que subsanan deben compensar la inversión extra que demandan.

Pero, para ello, es preciso cuantificar el tiempo durante el cual el sistema estará en condiciones de funcionar normalmente –esto es, no fallado- con y sin modificaciones. Conocida la producción por unidad de tiempo, se podrá conocer el incremento de beneficios que el sistema modificado permite obtener y evaluar, entonces, si la inversión que se requiere se justifica o no.

El parámetro básico para este análisis es la *disponibilidad*  $D$ , que se define como la fracción de tiempo en la que un sistema o equipo se encuentra en condiciones de funcionamiento normal.

Anteriormente se ha definido el tiempo medio de supervivencia y se ha visto que, si se cumple la distribución exponencial, resulta igual a la inversa de la tasa de fallas,  $TMS = 1/\lambda$ .

En forma complementaria, se puede definir un tiempo medio de parada TMP, como el lapso que media desde el instante en que se produce la falla hasta el momento en el cual, producida la reparación, se encuentra en condiciones de volver a funcionar normalmente.

La disponibilidad podrá escribirse, entonces, como

$$D = \frac{TMS}{TMS + TMP}$$

Por ejemplo, un valor típico para una planta de proceso continuo es 0,91 – 0,92, lo que equivale a unas 8000 h/año de funcionamiento, valor que incluye la parada anual programada.

La teoría de confiabilidad permite evaluar la disponibilidad de un sistema complejo, siendo conocidos los valores de las disponibilidades de los componentes.

El planteo básico puede resumirse como sigue:

Sea un sistema compuesto por  $n$  elementos de disponibilidad  $D_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) y sea  $m$  el número de estados posibles de ese sistema, determinados por las diferentes combinaciones de los estados individuales de los  $n$  componentes. Dado que esos estados individuales sólo pueden ser apto o fallado,  $m = 2^n$ .

Se admite que cada uno de los  $m$  estados tiene asociado un valor del efecto que se está estudiando (productividad, beneficio, pérdida, etc.), que se ha de expresar como una fracción  $p_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) del valor máximo alcanzable, a la que se la denominará efecto relativo.

El valor  $D_i$  puede considerarse como la probabilidad de que el componente  $i$  no esté fallado y, consecuentemente, su complemento ( $1 - D_i$ ) que lo esté.

Sea un estado  $k$  donde, simultáneamente, los  $l$  primeros elementos se encuentran funcionando y los  $n-l$  restantes, fallados. La probabilidad  $\Phi_k$  de que exista tal estado es

$$\Phi_k = \prod_{i=1}^l D_i \prod_{i=l+1}^n (1 - D_i) = \prod_{i=1}^n \Phi_{ik}$$

donde  $\Phi_{ik}$  vale  $D_i$  si el elemento esta funcionando ó  $1 - D_i$  si está fallado.

Si  $p_k$  es el efecto relativo en el estado  $k$ , el valor esperado  $VE(p)$  para el sistema será

$$VE(p) = \sum_{j=1}^m p_j \prod_{i=1}^n \Phi_{ij}$$

Sea  $D$  la disponibilidad del sistema, globalmente considerado, disponibilidad que, por analogía es la probabilidad de obtener un efecto relativo unitario si se trata de producción o ganancia o el complemento, si se está considerando un efecto que se produce cuando el sistema no funciona.

Con esto, para el primer caso,  $D = VE(p)$  y, para el segundo,  $(1 - D) = VE(p)$ .

En el ejemplo siguiente se puede visualizar la manera práctica de realizar el cálculo

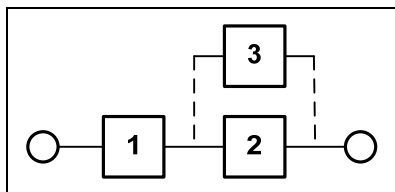


Figura 7. Elemento en espera

En la figura 7 se esquematiza un sistema compuesto por tres elementos, uno de los cuales, el 3, se encuentra en espera (stand-by) del 2, para comenzar a funcionar, en forma inmediata, ante cualquier falla de este último.

El sistema funcionará toda vez que no esté fallado el 1 y alguno del conjunto 2-3.

En la tabla 3 se indican  $2^3 = 8$  estados posibles en que puede encontrarse el sistema, la productividad como efecto relativo y las probabilidades de cada uno de ellos.

Para los equipos individuales se ha indicado con  $\bullet$  cuando el equipo no está fallado y con  $\circ$  cuando lo está.

Estado	1	2	3	$p_k$	$\Phi_k$	$p_k \Phi_k$
1	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	1	$D_1 D_2 D_3$	$D_1 D_2 D_3$
2	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	1	$D_1 D_2 (1-D_3)$	$D_1 D_2 (1-D_3)$
3	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	1	$D_1 (1-D_2) D_3$	$D_1 (1-D_2) D_3$
4	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	0	$D_1 (1-D_2) (1-D_3)$	0
5	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	0	$(1-D_1) D_2 D_3$	0
6	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	0	$(1-D_1) D_2 (1-D_3)$	0
7	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	0	$(1-D_1) (1-D_2) D_3$	0

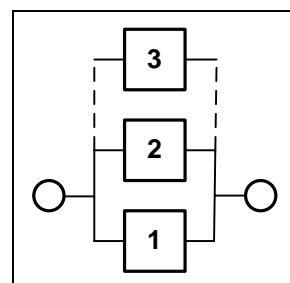
8	○ ○ ○	0	$(1-D_1)(1-D_2)(1-D_3)$	0
			$D =$	$D_1(D_2 + D_3 - D_2 D_3)$

**Tabla 3.** Cálculo de la disponibilidad del sistema

Cuando se dispone de una configuración viable para el sistema se puede analizar, para cada una de ellas, cuales son los efectos económicos asociados. Es obvio que el sistema de la figura 6 sin el equipo 3 requiere una menor inversión que cuando lo está, pero su disponibilidad es menor ( $D = D_1 D_2$ ). Aquí debe analizarse si la inversión adicional está debidamente compensada con el incremento de productividad.

En el siguiente ejemplo se muestra este tipo de análisis.

El sistema de la figura 8 representa uno de los posibles esquemas para una sección de filtrado que, en lo básico, consta de dos equipos en paralelo con una disponibilidad individual de 0,95.



**Figura 8.** Equipos en paralelo

El costo diario por parada de una línea es de 8000 \$.

El agregado de un tercer filtro en espera, idéntico a los otros dos, implica una erogación de \$700000, amortizable en 5 años.

Aquí, el efecto relativo a considerar es el lucro cesante y es nulo cuando dos equipos están aptos y 0,5 cuando sólo uno lo está.

Las tablas 4-a y 4-b muestran el análisis para cuando el sistema cuenta con 2 y 3 equipos, respectivamente.

Estado	1	2	$p_k$	$\Phi_k$	$p_k \Phi_k$
1	●	●	0	$(0,95)^2$	0
2	●	○	0,5	$0,95 \times 0,05$	0,02375
3	○	●	0,5	$0,05 \times 0,95$	0,02375
4	○	○	1	$(0,05)^2$	0,0025
$1 - D =$					0,05

**Tabla 4-a.** Sistema con 2 equipos

Estado	1	2	3	$p_k$	$\Phi_k$	$p_k\Phi_k$
1	●	●	●	0	$(0,95)^3$	0
2	●	●	○	0	$(0,95)^2 0,05$	0
3	●	○	●	0	$(0,95)^2 0,05$	0
4	●	○	○	0,5	$0,95 (0,05)^2$	0,0011875
5	○	●	●	0	$(0,95)^2 0,05$	0
6	○	●	○	0,5	$0,95 (0,05)^2$	0,0011875
7	○	○	●	0,5	$0,95 (0,05)^2$	0,0011875
8	○	○	○	1	$(0,05)^3$	0,000125
1 - D =						0,0036875

**Tabla 4-b.** Sistema con 2 equipos

La pérdida anual probable, en el primer caso, será  $P_o = (1 - D) \times 16000 \times 365 = 292000$  \$/año, en tanto que en el segundo el valor se reduce a 21535 \$/año, esto es, un ahorro anual de 270465 \$.

Para lograr tal economía es necesario realizar una inversión de 700000 \$, operación que, en los 5 años de vida útil del equipo, arroja una TIR del orden del 27% anual, valor que, si se encuentra por encima de la tasa de corte de la empresa, hace recomendable el agregado.

En relación a la disponibilidad de sistemas, hay algunas consideraciones de tipo conceptual que, aunque simplificadoras, merecen ser tenidas en cuenta en esta sucinta aproximación al tema.

En un plano muy básico, se admite que la confiabilidad de un sistema se puede incrementar por

- a) la incorporación de almacenamientos intermedios
- b) por duplicación de equipos en disposición paralela, en espera o combinación de ambas (híbrida).

Entre otros enfoques, el análisis puede llevarse a cabo considerando un nivel de producción fijo. Obviamente, en tal caso, a medida que aumenta la disponibilidad, el volumen de producción de diseño disminuye: si la disponibilidad prevista de la planta es 0,9, para cumplimentar una producción de 90000 ton/año, debe diseñársela para 100000.

El caso a) se puede ejemplificar con el sistema de la figura 9 donde existen tres subsistemas en serie con almacenamientos intermedios, con relaciones insumo/producto  $f_{i-1,i}$  y disponibilidad  $D_i$ .

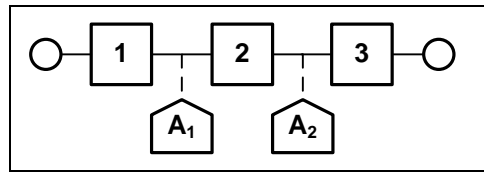


Figura 9. Caso con almacenamiento

Si no existiesen los almacenamientos, para que el nivel de producción del sistema sea  $P_o$  es necesario que el subsistema 2 entregue  $f_{23} P_o$  y, a su vez, el 1 genere  $f_{12} f_{23} P_o$ . Teniendo en cuenta las disponibilidades, habrá que diseñarlos con capacidades

$$C_1 = \frac{f_{12} f_{23} P_o}{D_1 D_2 D_3} \quad C_2 = \frac{f_{23} P_o}{D_1 D_2 D_3} \quad C_3 = \frac{P_o}{D_1 D_2 D_3}$$

En cambio, con la incorporación de los almacenamientos y si la capacidad del almacenamiento  $A_i$  permite cubrir los requerimientos del subsistema  $i+1$  mientras el subsistema  $i$  no está operando, las capacidades de los subsistemas serán

$$C_1 = \frac{f_{12} f_{23} P_o}{D_1} \quad C_2 = \frac{f_{23} P_o}{D_2} \quad C_3 = \frac{P_o}{D_3}$$

Es decir, cada elemento se ha independizado de lo que ocurra en el resto del sistema y, como consecuencia, se produce una disminución en los valores de diseño.

Esto producirá una merma en la inversión requerida por los subsistemas, que deberá compensar el aumento en la erogación debido al costo de los almacenes. En este caso, el ahorro y la nueva inversión se producen a un mismo tiempo y, por consiguiente, no se aplica un análisis por flujo de caja.

Con referencia a modificaciones en la disponibilidad por multiplicidad de equipos en disposición paralela, es necesario efectuar algunas consideraciones de índole general.

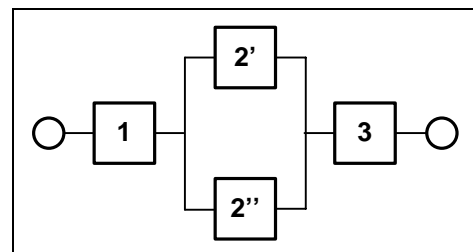


Figura 10. Equipos en paralelo

En un sistema como el de la figura 10, con  $2'$  y  $2''$  exactamente iguales, es posible que continúe funcionando, a un ritmo menor que el normal, cuando alguno de los subsistemas 2 se encuentre fallado.



Cuando ello ocurra, se ha de considerar que el efecto relativo  $e_r$  es  $0 < e_r < 1$ . Si bien por diseño, en condiciones normales, cada una de las líneas en paralelo soporta el 50% de la carga,  $e_r$  no es, necesariamente, igual a 0,5.

Esto es así porque, por una parte, los equipos que componen las líneas tienen un cierto factor de sobredimensionamiento, el que se puede visualizar como una capacidad ociosa, lo que le permitiría procesar más del 50% de la carga, cuando la otra línea esté fallada y operativo el resto de los subsistemas.

Pero esta no es la única razón. Mucho más importante es lo que ocurre cuando alguno de los subsistemas, diferente de aquel compuesto por líneas paralelas, tiene importantes tiempos muertos, como consecuencia de los procedimientos requeridos para su parada y puesta en marcha, cuando la detención está motivada por la falla total de otro subsistema. Son componentes “lentos”, en los que la posibilidad de mantenerlos funcionando, aunque sea a un régimen menor, ha de redundar en un beneficio económico.

Supóngase que el subsistema 3 de la figura 10 es “lento”, con un tiempo  $T_{PyPM3}$  de parada y puesta en marcha varias veces el  $TMF_2$  requerido para reparar cualquiera de los equipos que componen el subsistema 2,  $T_{PyPM3} = n TMF_2$ . El lucro cesante cuando 2' y 2" estén simultáneamente fallados será, al menos,  $n$  veces superior al que se registra con una sola de ellas fuera de servicio, habida cuenta que, en esta situación, no es preciso detener el subsistema 3.

En la tabla 5 se muestra el análisis del caso cuando se considera la productividad del sistema de la figura 10. En esta tabla se han omitido aquellos estados donde el subsistema 1 o el 3 ó ambos se encuentran fallados, además de aquellos en los que ambos subsistemas 2 no funcionan. En todos estos casos el efecto relativo considerado es nulo.

Estado	1	2'	2''	3	$p_k$	$\Phi_k$	$p_k \Phi_k$
1	•	•	•	•	1	$D_1 D_2^2 D_3$	$D_1 D_2^2 D_3$
2	•	○	•	•	$e_r$	$D_1 (1-D_2) D_2 D_3$	$e_r D_1 (1-D_2) D_2 D_3$
3	•	•	○	•	$e_r$	$D_1 D_2 (1-D_2) D_3$	$e_r D_1 D_2 (1-D_2) D_3$
						$D =$	$D_1 D_2 D_3 [D_2 + 2e_r(1-D_2)]$

**Tabla 5.** Análisis del sistema de la figura 10

Si  $e_r = 0.5 + \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$ , el término entre corchetes será

$$D_2 + 2e_r(1-D_2) = D_2 + (1 + 2\varepsilon)(1-D_2) = 1 + 2\varepsilon(1 - D_2) > 1$$

y se registra un incremento de la disponibilidad, respecto a no tener los equipos en paralelo.

Nótese que si  $\varepsilon = 0$ , entonces, la disponibilidad con el esquema paralelo coincide la que se registra cuando el equipo es único, análogamente a como ocurría en el sistema de la figura 8.

En el caso de un análisis sobre el lucro cesante, considerando que con una sola línea operativa el efecto relativo es  $e_r < 0,5$  y analizando, por simplicidad, sólo el grupo en paralelo de la figura 10, se tendrá, tomando en cuenta sólo los estados donde existe lucro cesante, los resultados de la tabla 6.

Estado	2'	2''	$p_k$	$\Phi_k$	$p_k \Phi_k$
1	○	•	$e_r$	$(1-D_2) D_2$	$e_r (1-D_2) D_2$
2	•	○	$e_r$	$D_2 (1-D_2)$	$e_r D_2 (1-D_2)$
3	○	○	1	$(1-D_2)^2$	$(1-D_2)^2$

**Tabla 6.** Análisis parcial del lucro cesante

Operando, se llega a una expresión para la indisponibilidad del grupo

$$(1 - D_2)' = (1 - D_2) [1 - D_2(1 - 2e_r)]$$

claramente menor a  $(1 - D_2)$ , que corresponde a la existencia de un único equipo. Una vez más, si  $e_r = 0,5$  no hay ventaja alguna sobre un solo equipo.

Rigurosamente, en las fallas de un sistema como en el de la figura 10, es posible considerar tres efectos relativos diferentes: uno, máximo, cuando el equipo 3 está fallado, suponiendo que éste sea el más lento; otro, intermedio,

cuando 1 y/o 2' y 2" están fuera de servicio y un tercero, cuando sólo una de las líneas paralelas está fallada.

En el primer caso, el tiempo en el cual se registra el lucro cesante es el lapso que involucra a la parada, la reparación y la puesta en marcha del equipo 3; ya que la parada y puesta en marcha del resto de los equipos será menor a ese lapso, por ser más rápidos.

En el caso intermedio, el período se reduce a un valor menor que el anterior, ya que se evita la reparación del equipo "lento".

Aquí se supone que los tiempos que demanda 3 en su parada y puesta en marcha son dominantes frente a cualquier contingencia en los otros sectores.

Por último, la existencia de sólo una línea operativa reduce el lapso con pérdidas al tiempo en el cual se repara el equipo fallado, pero durante el cual la producción puede estar por encima del valor de diseño para una única línea, en virtud del sobredimensionamiento existente.

Si se tiene en cuenta que, para el sistema de la figura, existen 16 estados posibles, de los cuales sólo uno no implica lucro cesante, el tratamiento detallado de este caso se torna sumamente engorroso, por lo que se ha restringido el análisis, exclusivamente, al sector de líneas paralelas.

En los esquemas donde existe la posibilidad de etapas con equipos en paralelo, tanto en el caso donde las fallas se verifican sobre equipos que no determinan los tiempos muertos como cuando las mismas se subsanan, parcialmente, aprovechando el sobredimensionamiento existente, la variación de la disponibilidad tiene cierta independencia de la estructura formal del sistema, al vincularse con cuestiones operativas o con el diseño de los equipos.

En tales circunstancias, se puede demostrar que no resulta conveniente ir más allá de dos equipos en paralelo, reemplazando a una sola unidad.

En efecto, supóngase que la inversión está relacionada con la capacidad de acuerdo con la expresión

$$I = I_b \left( \frac{Q}{Q_b} \right)^a$$

y que, por el reemplazo con la estructura en paralelo, la disponibilidad pasa del valor  $D_0$  a  $D_0 + \Delta$ , siendo  $\Delta$  un valor fijo.

Si  $Q_0$  es la capacidad de diseño que permite alcanzar, con la disponibilidad  $D_0$ , el nivel de producción  $P_0$ ;  $Q_0 = P_0 / D_0$ , la variación de la inversión total será

$$\Delta I = I - I' = I \left( 1 - \frac{I'}{I} \right) = I_b \left( \frac{P_0}{Q_b D_0} \right)^a \left( 1 - \left( \frac{D_0}{D_0 + \Delta} \right)^a \right)$$

siendo  $I$  y  $I'$  las inversiones correspondientes al sistema con estructuras simple y en paralelo, respectivamente.

Si se tiene en cuenta que, para lograr ese incremento en la disponibilidad, se ha tenido que reemplazar el equipo  $i$  de capacidad de procesamiento  $Q_{0i}$  por  $N$  equipos iguales,  $N \geq 2$ , pero de capacidad  $Q_{0i} / N$ , la variación en la inversión en este sector será

$$\Delta I_i = I_{0i} \left( N \left( \frac{Q_{0i}/N}{Q_{0i}} \right)^{a_i} - 1 \right) = I_{0i} (N^{1-a_i} - 1)$$

siendo  $a_i$  el exponente de la ley de la potencia que relaciona la inversión con la capacidad del equipo  $i$

Con esto, la modificación tendrá sentido si el ahorro en la inversión total es suficiente para cubrir el incremento de erogación por la estructura en paralelo

$$I \left( 1 - \left( \frac{D_0}{D_0 + \Delta} \right)^a \right) - I_{0i} (N^{1-a_i} - 1) > 0$$

La diferencia disminuye al aumentar  $N$ , lo que implica que el número de equipos en paralelo debe ser el menor posible, compatible con el incremento de disponibilidad, esto es,  $N = 2$ .

Cuando en el sistema más de un equipo es reemplazado por una estructura en paralelo se produce, aunque no existan equipos “lentos” ni la posibilidad de aprovechar los sobredimensionamientos, una variación en la disponibilidad del sistema.

Esto se evidencia al analizar el sistema de la figura 11, cuyo análisis se muestra en la tabla 7, donde, otra vez, sólo se han consignado los casos donde el efecto relativo (producción) no es nulo.

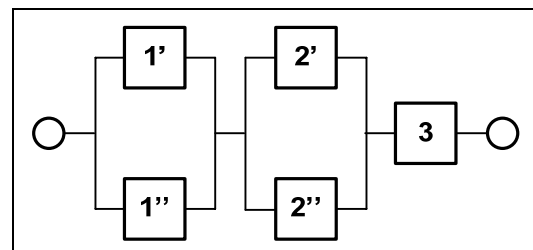


Figura 11. Múltiples etapas en paralelo

Est.	1'	1"	2'	2"	3	$p_k$	$\Phi_k$	$p_k \Phi_k$
1	•	•	•	•	•	1	$D_1^2 D_2^2 D_3$	$D_1^2 D_2^2 D_3$
2	•	•	○	•	•	0,5	$D_1^2 D_2 (1-D_2) D_3$	$0,5 D_1^2 D_2 (1-D_2) D_3$
3	•	•	•	○	•	0,5	"	"
4	○	•	•	•	•	0,5	$D_1 (1-D_1) D_2^2 D_3$	$0,5 D_1 (1-D_1) D_2^2 D_3$
5	•	○	•	•	•	0,5	"	"
6	•	○	○	•	•	0,5	$(1-D_1) (1-D_2) D_1 D_2 D_3$	$0,5 (1-D_1) (1-D_2) D_1 D_2 D_3$
7	•	○	•	○	•	0,5	"	"
8	○	•	○	•	•	0,5	"	"
9	○	•	•	○	•	0,5	"	"
							$D =$	$D_1 D_2 D_3 (1 + (1-D_1) (1-D_2))$

**Tabla 7.** Disponibilidad del sistema de la figura 11

Por último, conviene remarcar que el análisis de conveniencia económica para estructuras complejas, como los esquemas híbridos, se torna complicado, tanto más cuanto mayor es la complejidad del sistema y ya no es posible un análisis directo como el efectuado hasta aquí, donde sólo se han considerado casos simples.

El estudio de estas estructuras complejas obliga al tratamiento mediante técnicas numéricas para fenómenos aleatorios, como la simulación por el método de Montecarlo.

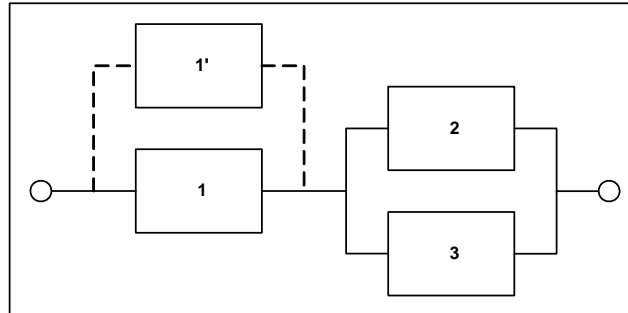
## Bibliografía

- Browning, Hydrocarbon Processing, p.253, sept.,1975.
- CCPS, Center for Chemical Process Safety.  
Paniagua C.N., Iglesias O.A., "Un Auxiliar Pedagógico para el Análisis de Disponibilidad de Sistemas", Actas de INTERTECH '2002 International Conference on Engineering and Technology Education, Sao Paulo, Brasil, 2002.
- Reliability Information Analysis Center (RIAC), "Nonelectronic Parts Reliability Data".

- Tillman, Hwang & Kuo, "Optimization of System Reliability, Marcel Dekker, Inc, 1980.
- U.S. Nuclear Regulatory Commission, Fault Tree Handbook, 1981.

## Propuestas de trabajo

1) Dado el sistema de la figura



- Hallar su disponibilidad considerando que el equipo 1' está en espera del equipo 1 y los equipos 2 y 3 soportan cada uno el 50 % de la carga total. En la determinación no se tendrá en cuenta la incidencia de los sobredimensionamientos de los equipos ni de los distintos tiempos de puesta en marcha y parada.
- Con los datos técnico-económicos que siguen, determinar la conveniencia financiera si la tasa de corte de la empresa es del 15 %.

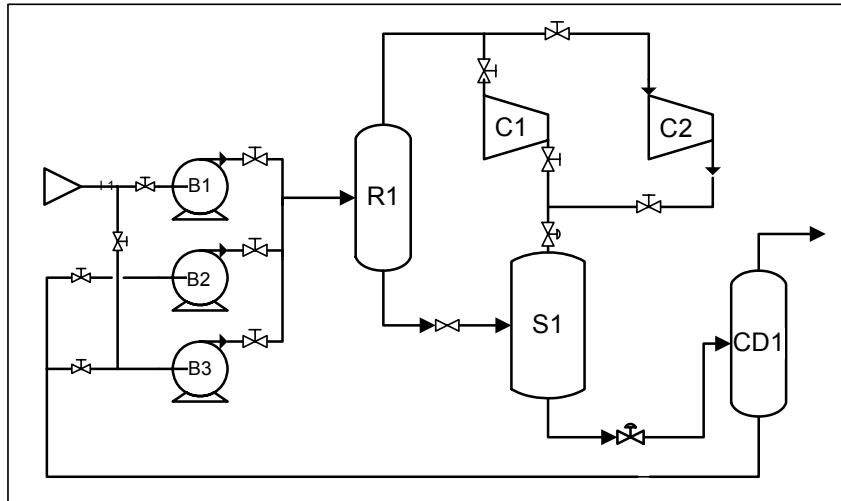
### Datos técnico-económicos

$D_1 = D_{1'}$	0,90
$D_2 = D_3$	0,85
Costo del equipo 1'	150000 \$
Lucro cesante	2000 \$/dia
Amortización	5 años
Días por año	330

2) Para el esquema de la figura, considerar que la disponibilidad de las tres bombas es 0,95, la de ambos compresores 0,80 y que B3 y C2 son equipos en espera.

Las capacidades de los equipos de un mismo tipo, son iguales.

El sistema puede funcionar sin reciclo (fallan B2 y B3)



- a) Calcular la disponibilidad del sistema para los siguientes casos:
- 1) Sin equipo en espera
  - 2) Solo uno de los equipos en espera (2 casos, B y C)
  - 3) Con los dos equipos en espera
- b) Para las alternativas a1) y a3) calcular
- 1) El lucro cesante
  - 2) La TIR en 5 años, resultante de invertir en equipamiento en espera.

Datos económicos:

Costo de cada bomba = 20000 \$

Costo de cada compresor = 120000 \$

Costo parada = 1000 \$/d

Días por año = 330

3) Sobre una muestra de 40 equipos, se han tomado el número de supervivientes a períodos iguales de tiempo.

Tiempo	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Supervivientes	40	28	18	14	9	6	4	3	2	1	0

Calcular el tiempo medio de supervivencia (TMS), suponiendo distribución exponencial.



# ANEXO A

## TUTORÍA DEL COMPLEMENTO SINRED.XLA

### Objetivo

Se pretende utilizar el complemento *SinRed.xla* para:

- Generar curvas compuestas de un conjunto de corrientes
- Obtener la aproximación mínima óptima en la estructuración de una red de intercambio térmico
- Estructurar una posible Red de Intercambio Térmico (RIT).

### Enunciado del problema

El caso a resolver tiene 2 corrientes de proceso calientes que se necesitan enfriar y 2 frías a calentar, y se dispone, para cuando sea necesario, vapor de alta presión y agua de enfriamiento como servicios auxiliares.

Los datos de las corrientes de proceso y de los servicios auxiliares disponibles son los que se muestran en las tablas 1 y 2, respectivamente.

Corr	W [Mcal/ h°C]	T. entrada [°C]	T. salida [°C]	h [Mcal/ m <sup>2</sup> h°C]
C1	2	180	40	0,573
C2	4	150	40	0,573
F1	3	60	180	0,630
F2	2,6	30	130	0,630

**Tabla 1.** Datos de Corrientes de Proceso

Serv. auxiliar	T. entrada [°C]	T. salida [°C]	Coef. pelicular [Mcal / m <sup>2</sup> h°C]	Costo unitario anual [\$/ (Mcal/h) año]
Frío	30	50	1,725	6
Caliente	250	250	12,6	60

**Tabla 2. Datos de Servicios Auxiliares**

El costo de los equipos viene dado por la expresión  $1930A^{0,65}$ , A en m<sup>2</sup>, previéndose una amortización lineal del 20% anual.

## Primera operación: Nuevo Problema

La primera operación es ingresar la información del problema a la planilla de cálculo, lo que se hace en la hoja “*Datos del Problema*” del libro que se crea al ejecutar la orden Nuevo Problema del menú SinRed.

En ella, como se muestra en la figura 1, se pueden apreciar, en verde, áreas específicas para el ingreso de los datos.

#	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	SINRED - Datos del problema										
2											
3	Equipos	Costo = a + b (Area)^c									
4		a	b	c							
5	Intercamb.					Tasa Amort.		%			
6	Enfriador										
7	Calentador										
8											
9	Servicios Auxiliares										
10		Temp.Ent.	Temp.Sal.	Coef.Pelic.	Cost.Uni.Año						
11	Serv.Frío										
12	Serv.Caliente										
13											
14	Corrientes de Proceso										
15											
16	Calientes						Frias				
17	Cod.ID	W = F * Cp	Temp.Ent.	Temp.Sal.	Coef.Pelic.	Cod.ID	W = F * Cp	Temp.Ent.	Temp.Sal.	Coef.Pelic.	
18											
19											
20											
21											
22											
23											
24											
25											
26	Nota1: Las unidades deben ser consistentes - Se aconseja usar el sistema SI										
27	Nota2: Las unidades de W deben ser [Potencia/Temperatura]										
28	Nota3: Las unidades del Coeficiente Pelicular deben ser [Potencia/Temperatura*Área]										
29	Nota4: Las unidades del Costo de un Servicio Auxiliar deben ser [\$/ (Potencia*Año)]										
30	Nota5: Los Cod.ID son obligatorios y deben ser una cadena alfanumérica										

**Figura 1. Hoja Datos del Problema vacía**

## Ingreso de los datos

Para ingresarlos se procede como sigue:

Para ingresar	Escribir	En la celda
- Información de costos de intercambiadores		
Coeficiente a	0	B5
Coeficiente b	1930	C5
Exponente c	0,65	D5

En forma similar, se lo hace para enfriadores y calentadores

- La tasa de amortización	20	G5
- Información del servicio auxiliar frío		
Temperatura de entrada	30	B11
Temperatura de salida	50	C11
Coeficiente pelicular	1,725	D11
Costo unitario anual	6	E11

Del mismo modo, se deben ingresar los datos del servicio auxiliar caliente.

- Información de la corriente caliente C1		
Código de identificación	C1	A18
Flujo entálpico	2	B18
Temperatura de entrada	180	C18
Temperatura de salida	40	D18
Coeficiente pelicular	0,573	E18

Lo propio se debe hacer con las corrientes de proceso restantes

Tras esos ingresos, la hoja "Datos del Problema" debe quedar como se muestra en la figura 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	SINRED - Datos del problema										
2											
3	Equipos	Costo = a + b (Area)^c									
4		a	b	c							
5	Intercamb.	0	1930	0,65		Tasa Amort.	20 %				
6	Enfriador	0	1930	0,65							
7	Calentador	0	1930	0,65							
8											
9	Servicios Auxiliares										
10		Temp.Ent.	Temp.Sal.	Coef.Pelic.	Cost.Unit.Año						
11	Serv.Frio	30,0	50,0	1,725	6						
12	Serv.Caliente	250,0	250,0	12,6	60						
13											
14	Corrientes de Proceso										
15											
16	Calientes					Frias					
17	Cod.ID	W = F * Cp	Temp.Ent.	Temp.Sal.	Coef.Pelic.	Cod.ID	W = F * Cp	Temp.Ent.	Temp.Sal.	Coef.Pelic.	
18	C1	2	180,0	40,0	0,573	F1	3	60,0	180,0	0,63	
19	C2	4	150,0	40,0	0,573	F2	2,6	30,0	130,0	0,63	
20											

Figura 2. Hoja Datos del Problema completa

En este momento se puede continuar por cualquiera de las opciones:

- Calcular Aproximación Mínima Óptima
- Generar Curvas Compuestas
- Sintetizar RIT

Luego de seleccionar cualquiera de ellas, el complemento validará la información de la hoja Datos del Problema y, si hubiera algún error, aparecerá un mensaje ad hoc. En ese caso se deberán corregir los datos mal ingresados o incorporar los faltantes y, luego, seleccionar nuevamente la orden dada.

En esta tutoría se comenzará por generar las curvas compuestas.

## Generar Curvas Compuestas

Para ello, se ejecuta la orden Generar Curvas Compuestas, tras lo cual aparece la ventana de la figura 3, donde ingresaremos el valor de la aproximación mínima, por ejemplo, 5°C y oprimiremos el botón Aceptar.

Figura 3. Ingreso de la aprox. mínima

Inmediatamente aparecen las curvas compuestas en la hoja CurvaComp, en la que puede verse además, la ubicación del punto Pinch, expresado en escala intermedia, y el valor de los consumos mínimos de los servicios auxiliares, como se observa en la figura 4.

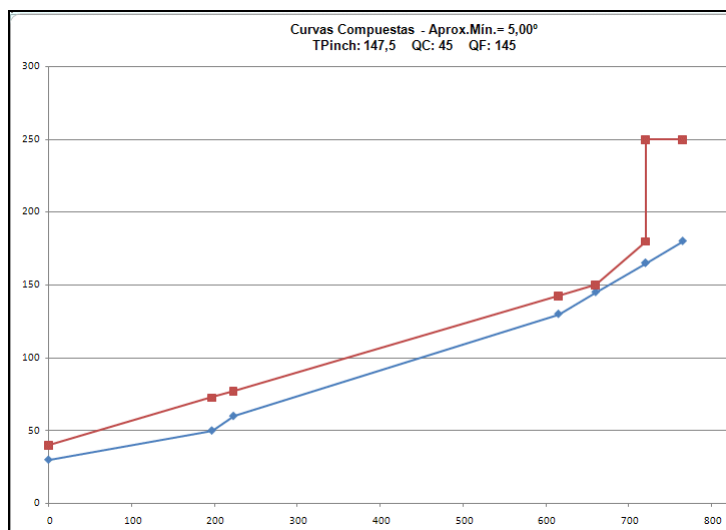
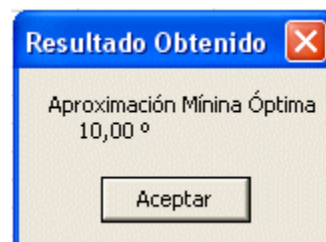


Figura 4. Curvas compuestas

## Calcular Aproximación Mínima Óptima

Para ello, debe ejecutarse la orden *Calcular Aprox. Mín Óptima*, tras lo cual aparece la ventana de la figura 5, con el valor solicitado.



Ahora se puede hacer uso de la cuarta opción disponible en el menú que corresponde a la estructuración de la red de intercambio térmico, para lo cual debe elegirse *Sintetizar RIT*.

Figura 5. Aprox.mín.óptima

## Síntesis de la red

El primer paso para sintetizar la red es ingresar la aproximación mínima que se usará. Para ello se selecciona la orden *Sintetizar RIT|Definir Aprox.Min.* Tras la validación, si no hay errores, aparece la ventana de la figura 6, en la



Figura 6. Ingreso de la aproximación mínima

que se ingresará el valor 10 a utilizar en este caso.

Al cerrarse la ventana, en el menú *SinRed|Sintetizar RIT* se habilitan las órdenes correspondientes a las operaciones del Método Pinch (**Intercambio, Dividir corrientes e Interc. Serv. Auxiliar,**). Se genera, además, una barra de herramientas personalizada y aparece la hoja “Bloque Caliente” que se muestra en la figura 7. Pueden usarse indistintamente las opciones del menú o de la barra.

Si el problema no tuviera bloque caliente aparecerá directamente la hoja “Bloque Frio”.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Corrientes Calientes					Corrientes Frias					
2	Cod. ID	W = F * Cp	Temp. Ent.	Temp. Sal.	Coef.Pelic.	Cod. ID	W = F * Cp	Temp. Ent.	Temp. Sal.	Coef.Pelic.	
3	C1	2	180,0	150,0	0,573	F1	3	140,0	180,0	0,63	
4											
5	Interc.Corrientes Interc.Serv.Auxiliar Dividir Corrientes Anular Operación										
6											
7											

Figura 7. Bloque caliente inicial

## Resolución del bloque caliente

Para el ejemplo elegido, de acuerdo a las reglas del Método Pinch, la primera operación a realizar en el bloque caliente es un intercambio; aquí, el único posible, entre C1 y F1.

Al seleccionar en el menú la opción **Intercambio**, o **Interc.Corrientes** en la barra, aparecerá el cuadro de diálogo de la figura 8, donde se deberá ingresar manualmente, o con el mouse, la celda A3. Luego aparecerá el cuadro de diálogo de la figura 9 en el cual se seleccionará la celda G3.




Figura 8. Ingreso de la corriente caliente



Figura 9. Ingreso de la corriente fría

SinRed realiza el intercambio en forma automática. En el bloque sólo queda la corriente fría F1 en el intervalo 160 – 180, que deberá ser calentada con vapor. Para ello, debe seleccionarse la opción “**Interc.Serv.Auxiliar**” e ingresar la celda G3 como se indica en el cuadro de mensaje de la figura 10.

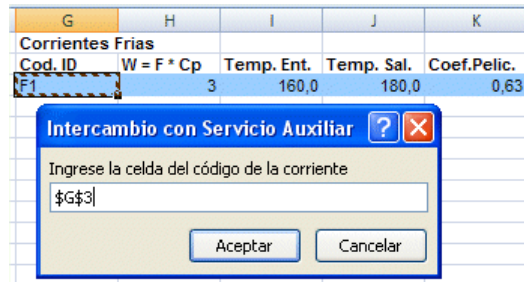


Figura 10. Intercambio con vapor

Con este intercambio, se termina de sintetizar el bloque caliente. En este momento el programa preguntará si se desea resolver nuevamente el bloque. Normalmente, se debería estructurar varias veces el bloque para obtener la mejor alternativa, pero en este caso no se va a hacer, por lo que se seleccionará el botón No.

Tras ello, aparecerá la hoja “Bloque Frío”, como se muestra en la figura 11.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Corrientes Calientes					Corrientes Frias					
2	Cod. ID	W = F * Cp	Temp. Ent.	Temp. Sal.	Coef. Pelic.	Cod. ID	W = F * Cp	Temp. Ent.	Temp. Sal.	Coef. Pelic.	
3	C1	2	150,0	40,0	0,573	F1	3	60,0	140,0	0,63	
4	C2	4	150,0	40,0	0,573	F2	2,6	30,0	130,0	0,63	
5											

Figura 11. Bloque frío inicial

## Resolución del bloque frío

Se comienza por seleccionar la opción “**Intercambio**”. Luego, cuando el programa solicita la identificación de las corrientes caliente y fría, se indican las celdas A4 y G3, respectivamente. Si bien las condiciones del Método Pinch se satisfacen plenamente, el intercambio propuesto no es posible ya que se necesitaría incorporar vapor para cubrir las necesidades del sistema

remanente. Por esta razón, el complemento no acepta el intercambio propuesto y aparece el mensaje de la figura 12.

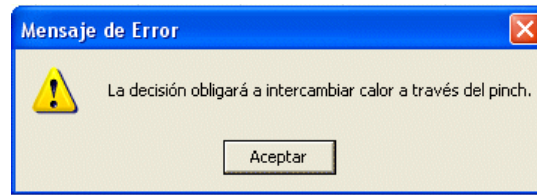


Figura 12. Mensaje de error

Para continuar, se debe dividir la corriente C2, por ejemplo, con  $W_1 = 1$  y  $W_2 = 3$ . Hay que seleccionar la opción “Dividir corriente” e ingresar la celda A4 cuando aparezca el cuadro de mensaje de la figura 13. Luego el programa, mediante otro cuadro de mensaje como el de la figura 14, solicita el W de una de las subcorrientes a generar, en este caso, 3.

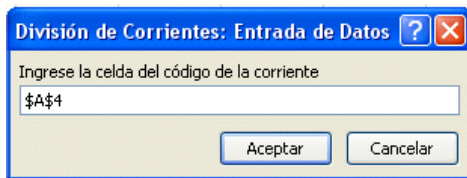


Figura 13. Ingreso de la corriente a dividir

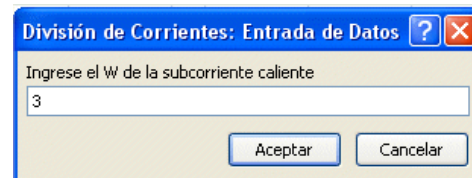


Figura 14. Ingreso del W

El estado del bloque frío será como el de la figura 15

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Corrientes Calientes						Corrientes Frias				
2	Cod. ID	$W = F * Cp$	Temp. Ent.	Temp. Sal.	Coef. Pelic.		Cod. ID	$W = F * Cp$	Temp. Ent.	Temp. Sal.	Coef. Pelic.
3	C1	2	150,0	40,0	0,573		F1	3	60,0	140,0	0,63
4	C2 - 1	1	150,0	40,0	0,573		F2	2,6	30,0	130,0	0,63
5	C2 - 2	3	150,0	40,0	0,573						

Figura 15. Bloque frío luego de la división

A continuación, se propone el intercambio C2-2, F1 con lo que la hoja Bloque Frío presentará el aspecto de la figura 16.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Corrientes Calientes						Corrientes Frias				
2	Cod. ID	$W = F * Cp$	Temp. Ent.	Temp. Sal.	Coef. Pelic.		Cod. ID	$W = F * Cp$	Temp. Ent.	Temp. Sal.	Coef. Pelic.
3	C1	2	150,0	40,0	0,573		F1	3	60,0	60,0	0,63
4	C2 - 1	1	150,0	40,0	0,573		F2	2,6	30,0	130,0	0,63
5	C2 - 2	3	70,0	40,0	0,573						

Figura 16. Bloque frío después del primer intercambio

Ahora se intercambiará C1 con F2. Para ello hay que dividir F2 de modo que el W de la subcorriente fría que intercambie sea superior a 2, a fin de evitar



violara la aproximación mínima. Seleccionamos, entonces, la opción “Dividir corriente” e ingresamos la celda G4. Luego, cuando el complemento solicite el W de la subcorriente fría, ingresamos el valor 2. Tras esto, realizamos el intercambio C1, F2-2.

Pero la mejor división de la corriente F2 es con un valor de W igual a 2,2, ya que, luego del intercambio, se satisfacen los requerimientos de las dos corrientes (C1 y F2-2).

Para proponer el nuevo valor deberemos anular las dos últimas operaciones (el intercambio primero y la división después). Para ello, utilizamos dos veces la opción de “Anular operación”, con lo que volveremos a obtener la hoja de la figura 16.

Dividimos ahora la corriente F2 con un W igual a 2,2. Al realizar el intercambio entre C1 y F2-2 el bloque queda como se muestra en la figura 17.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Corrientes Calientes					Corrientes Frias					
2	Cod. ID	W = F * Cp	Temp. Ent.	Temp. Sal.	Coef. Pelic.	Cod. ID	W = F * Cp	Temp. Ent.	Temp. Sal.	Coef. Pelic.	
3	C1	2	40,0	40,0	0,573	F1	3	60,0	60,0	0,63	
4	C2 - 1	1	150,0	40,0	0,573	F2 - 1	0,4	30,0	130,0	0,63	
5	C2 - 2	3	70,0	40,0	0,573	F2 - 2	2,2	30,0	30,0	0,63	

Figura 17. Intercambio entre C1 y F2-2 (con W = 2,2 para F2-2)

A partir de este momento queda un intercambio entre la corriente C2-1 y F2-1 y dos intercambios entre el servicio auxiliar y las corrientes C2-1 y C2-2 remanentes.

Terminada la síntesis del bloque frío, responderemos *No*, otra vez, a la pregunta si deseamos resolver nuevamente el bloque.

## Hoja Resultados

Al dar por terminado el trabajo de síntesis, aparece la hoja Resultados con todos los esquemas estructurados, en este caso, uno para el bloque caliente y otro para el frío como se muestra en la figura 18.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	<b>Bloque Caliente - Esquema 1</b>				Aprox Min	10,00												
2					<b>Corrientes Calientes</b>				<b>Corrientes Frías</b>				<b>Costos</b>					
3	<b>Cód.Equipo</b>	<b>Calor Interc.</b>	<b>Área</b>		<b>Código</b>	<b>W</b>	<b>Te</b>	<b>Ts</b>	<b>Coef.Pelic.</b>	<b>Código</b>	<b>W</b>	<b>Te</b>	<b>Ts</b>	<b>Coef.Pelic.</b>		<b>Amortiz.</b>	<b>Serv.Aux.</b>	
4	IntBC01	60,00	13,86		C1	2,00	180,0	150,0	0,573	F1	3,00	140,0	160,0	0,63		2 131,68	0,00	
5	Cal01	60,00	1,26		Serv.Caliente		250,0	250,0	12,6	F1	3	160,0	180,0	0,63		447,77	3 600,00	
6																		
7																		
8	<b>Bloque Frio - Esquema 1</b>				<b>Corrientes Calientes</b>				<b>Corrientes Frías</b>				<b>Costos</b>					
9					<b>Código</b>	<b>W</b>	<b>Te</b>	<b>Ts</b>	<b>Coef.Pelic.</b>	<b>Código</b>	<b>W</b>	<b>Te</b>	<b>Ts</b>	<b>Coef.Pelic.</b>		<b>Amortiz.</b>	<b>Serv.Aux.</b>	
10	<b>Cód.Equipo</b>	<b>Calor Interc.</b>	<b>Área</b>		<b>Código</b>	<b>W</b>	<b>Te</b>	<b>Ts</b>	<b>Coef.Pelic.</b>	<b>Código</b>	<b>W</b>	<b>Te</b>	<b>Ts</b>	<b>Coef.Pelic.</b>		<b>Amortiz.</b>	<b>Serv.Aux.</b>	
11	IntBF01	240,00	79,98		C2 - 2	3,00	150,0	70,0	0,573	F1	3,00	60,0	140,0	0,63		6 660,78	0,00	
12	IntBF02	220,00	50,82		C1	2,00	150,0	40,0	0,573	F2 - 2	2,20	30,0	130,0	0,63		4 960,20	0,00	
13	IntBF03	40,00	3,08		C2 - 1	1,00	150,0	110,0	0,573	F2 - 1	0,40	30,0	130,0	0,63		801,33	0,00	
14	Enf01	70,00	5,83		C2 - 1	1	110,0	40,0	0,573	Serv.Frío	3,50	30,0	50,0	1,725		1 214,41	420,00	
15	Enf02	90,00	14,50		C2 - 2	3	70,0	40,0	0,573	Serv.Frío	4,50	30,0	50,0	1,725		2 195,56	540,00	

Figura 18. Hoja Resultados

Si se quiere una copia impresa de ésta o de cualquiera de las otras hojas del libro, debe procederse a hacerlo en forma manual, como con cualquier planilla.

# ANEXO B

## TUTORÍA DEL COMPLEMENTO TRANSBORDO.XLA

### Objetivo

El objetivo de la tutoría es utilizar el complemento *Transbordo.xla* para estructurar una red de intercambio térmico, con el menor número de equipos posibles y donde existen impedimentos para el intercambio entre determinadas corrientes de proceso.

### Enunciado del problema

El caso a resolver tiene 2 corrientes de proceso calientes que se necesitan enfriar y 2 frías a calentar, y se dispone, para cuando sea necesario, vapor de alta presión y agua de enfriamiento como servicios auxiliares.

La ubicación en el terreno de las corrientes caliente 1 y fría 1 impide proponer, en un planteo técnico razonable, un intercambio entre ellas.

Para la estructuración de la red se considerará una aproximación mínima de 10 °C.

Los datos de las corrientes de proceso y de los servicios auxiliares disponibles son los que se muestran en las tablas 1 y 2, respectivamente.

Corr.	W [kW/ °C]	T. entrada [°C]	T. salida [°C]
Cc1	2	180	40
Cc2	4	150	40
Cf1	3	60	180
Cf2	2,6	30	130

**Tabla 1.** Datos de Corrientes de Proceso

Servicio	T. entrada [°C]	T. salida [°C]	Costo unitario anual [\$ / kW año]
Frío	30	50	6
Caliente	250	250	60

Tabla 2. Datos de Servicios Auxiliares

## Incorporación del problema en la planilla

La primera operación que debe realizarse es ejecutar la orden Nuevo Problema del menú Transbordo. El complemento crea un libro nuevo y muestra una ventana como la de la figura 1 para el ingreso del número de servicios auxiliares y corrientes de proceso de cada tipo. Allí, para este problema, debe ingresarse 1 para cada uno de los servicios auxiliares y 2 para ambos tipos de corrientes de proceso.

Figura 1. Servicios y corrientes

A partir de este ingreso, *Transbordo.xla* crea la hoja “Datos del Problema” como la que se muestra en la Figura 2, donde, de acuerdo a la información dada, se han reservado dos filas para cada tipo de corrientes y una para cada servicio (sectores sombreados).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	<b>Modelo de Transbordo</b>								
2									
3	Aprox. Mínima								
4									
5	<b>Servicios Auxiliares</b>								
6									
7	<b>Calientes</b>					<b>Frios</b>			
8	Cod.ID	Temp.Ent.	Temp.Sal.	Cost.Unit.Año		Cod.ID	Temp.Ent.	Temp.Sal.	Cost.Unit.Año
9									
10									
11	<b>Corrientes de Proceso</b>								
12									
13	<b>Calientes</b>					<b>Frias</b>			
14	Cod.ID	$W = F * Cp$	Temp.Ent.	Temp.Sal.		Cod.ID	$W = F * Cp$	Temp.Ent.	Temp.Sal.
15									
16									

Figura 2. Hoja Datos del Problema vacía

## Ingreso de los datos

Los datos sólo pueden ubicarse en los sectores sombreados de la hoja “Datos del Problema”, ya que el resto de la misma se encuentra protegida. No es necesario ingresar el código de identificación Cod.ID puesto que, oportunamente, lo hará el complemento en forma automática. Para el resto de la información se procederá como sigue:

Para ingresar	Escribir	En la celda
- Aproximación mínima	10	B3
- Información del servicio auxiliar caliente		
Temperatura de entrada	250	B9
Temperatura de salida	250	C9
Costo unitario anual	60	D9

De la misma manera se lo hace para el servicio auxiliar frío.

- Información de la corriente caliente 1		
Flujo entálpico	2	B15
Temperatura de entrada	180	C15
Temperatura de salida	40	D15

En forma similar, se incorporan los datos correspondientes a las corrientes de proceso restantes.

Ahora, resta ingresar el intercambio no permitido. Recién en este momento puede realizarse esta especificación, ya que previamente el complemento no contaba con la información suficiente para procesarla.

## Ingreso de Intercambios no Permitidos

Para ingresar las corrientes impedidas de un intercambio mutuo, debe elegirse la opción correspondiente en el elemento de menú Transbordo.

Al dar la orden que habilita la definición de intercambios no permitidos, *Transbordo.xls* valida la información de la hoja “Datos del Problema”, al igual

que lo hace con “Resolver Modelo” o “Dibujar cascada”. Si falta algún dato o alguno es incorrecto, muestra un mensaje ad hoc, tras lo cual se deberá corregir la información y nuevamente seleccionar la opción correspondiente.

Si los datos ingresados son correctos, luego de seleccionar “Intercambios no Permitidos”, se abre una ventana en la que debe ingresarse el par de corrientes que no pueden intercambiar calor entre sí.

Del cuadro de selección de la corriente caliente, se elige *Cc1* y *Cf1* del de la fría. La figura 3 muestra el momento en que se está seleccionando la corriente fría. Luego debe oprimirse el botón “Agregar” para incorporar el par seleccionado y finalmente el botón “Cerrar”.

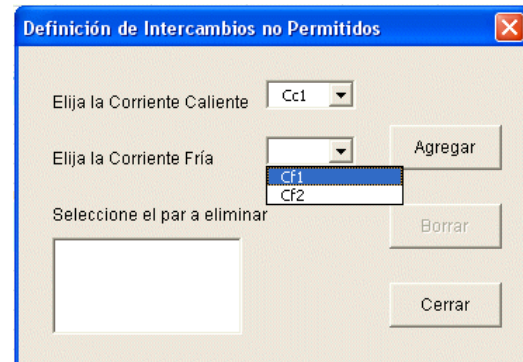


Figura 3. Intercambios prohibidos

Si se comete algún error al ingresar una de las corrientes, puede eliminarse el par, eligiéndolo con el mouse en el cuadro inferior y luego oprimir el botón Borrar, que se habilita en el momento que, con el mouse, se elige el par.

Al cerrar la ventana, *Transbordo.xls* vuelca esta nueva información en la hoja “Datos del Problema” y bloquea la hoja. La misma deberá ser como la de la figura 4.

Con la especificación de los intercambios no permitidos se concluye la etapa de definición del problema.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Modelo de Transbordo								
2									
3	Aprox.Mínima	10							
4									
5	Servicios Auxiliares								
6									
7	Calientes					Frios			
8	Cod.ID	Temp.Ent.	Temp.Sal.	Cost.Unit.Año		Cod.ID	Temp.Ent.	Temp.Sal.	Cost.Unit.Año
9	Sc1	250	250	60		Sf1	30	50	6
10									
11	Corrientes de Proceso								
12									
13	Calientes					Frios			
14	Cod.ID	$W = F * Cp$	Temp.Ent.	Temp.Sal.		Cod.ID	$W = F * Cp$	Temp.Ent.	Temp.Sal.
15	Cc1	2	180	40		Cf1	3	60	180
16	Cc2	4	150	40		Cf2	2,6	30	130
17									
18	Intercambios no permitidos								
19									
20	Corr.Cal.	Corr.Fría							
21	Cc1	Cf1							

Figura 4. Hoja Datos del Problema completa

Ahora, antes de generar el modelo, se visualizará la estructura de las disponibilidades y requerimientos de calor, de acuerdo a las restricciones termodinámicas existentes y la aproximación mínima fijada, para lo cual se usará la orden Dibujar cascada.

## Dibujar Cascada

Una vez que se selecciona la opción Dibujar Cascada, el complemento crea la hoja “Cascada” que presenta el aspecto que muestra la figura 5.

Allí, con una flecha se indican los puntos de ingreso y egreso de los servicios auxiliares. Los valores numéricos en rojo y azul corresponden a los aportes y requerimientos de las corrientes de proceso en cada uno de los intervalos. En negro, aparecen las temperaturas límites de los mismos, a la izquierda, en escala de corrientes calientes, a la derecha, de las frías.

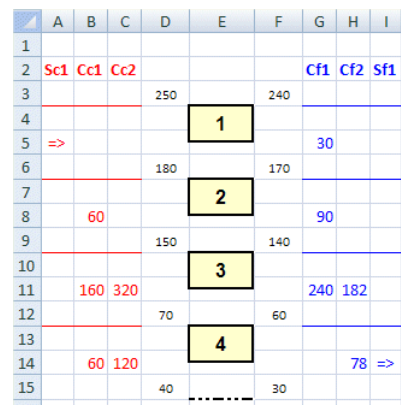


Figura 5. Cascada de calor

Ahora se está en condiciones de generar el modelo.

## Generar Modelo: Mínimo Número de Equipos

Para cumplir el objetivo propuesto debe seleccionarse, desde el menú Transbordo, la opción Generar Modelo →Mínimo Número de Equipos.

El complemento crea la hoja “MinNroEquipos” que contiene el modelo buscado como puede verse en la figura 6.

En los sectores sombreados con azul, se encuentran las variables del modelo. En la fila 4 están, en las dos primeras columnas, los requerimientos a los servicios y en las restantes, los flujos de calor transferidos desde las fuentes a los sumideros en cada intervalo. En la fila 7 están los remanentes y, en la 10, las variables binarias.

A continuación se encuentra el bloque de condiciones, separados, en distinto color, las correspondientes a cada intervalo. Se ha separado en la submatriz izquierda, los coeficientes que se vinculan a los calores intercambiados y en otra, a la derecha, los correspondientes a los remanentes. En una columna a la derecha de este bloque, aparecen los términos independientes y en una última, los balances.

En un segundo bloque, debajo del anterior, se encuentran, en la submatriz izquierda, los coeficientes de las restricciones que vinculan a los calores transferidos desde una fuente a un sumidero en todos los intervalos, con la existencia de un equipo donde ello se verifique, representado por las variables binarias. En la submatriz de la derecha, como coeficientes vinculados a ellas, aparece el menor valor entre la disponibilidad de la fuente y el requerimiento del sumidero. En la última columna ocupada, se encuentran las expresiones de las correspondientes restricciones en el modelo.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
1	<b>Variables</b>															<b>N° de Equipos</b>											
2	<b>Calores intercambiados</b>															0											
3	Qs01	Qs01	Qs1,1	Qs1,1	Qs1,2	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	<b>Remanentes</b>																										
6	RS1,1	RS1,2	RS1,2	RS1,3	RS1,3	R1,3	R2,3																				
7	0	0	0	0	0	0	0																				
8	<b>Intercambios</b>																										
9	YS1,1	YS1,2	Y1,2	Y1,S1	Y2,1	Y2,2	Y2,S1																				
10	0	0	0	0	0	0	0																				
12	<b>Ecuaciones</b>																										
13	<b>Matriz de coeficientes (Balance de Calor)</b>																										
14	Qs01	Qs01	Qs1,1	Qs1,1	Qs1,2	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3
15	Int. 1	-1		1													RS1,1	RS1,2	R1,2	RS1,3	R1,3	R2,3				TInd	
16					1												1									0	0
17	Int. 2					1											-1	1								30	0
18							1												1							60	0
19								1																		90	0
20	Int. 3								1								-1		1							0	0
21										1											1					160	0
22											1	1														320	0
23												1														240	0
24													1	1												182	0
25	Int. 4														1											0	0
26																										60	0
27																										120	0
28																										78	0
29																										0	0
31	<b>Matriz de coeficientes (intercambios)</b>																										
33	Qs1,1	Qs1,1	Qs1,2	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	Qs1,3	YS1,1	YS1,2	Y1,2	Y1,S1	Y2,1	Y2,2	Y2,S1				
34		1	1	1													360										0
35																		260									0
36																			260								0
37																				280							0
38																					360						0
39																						260					0
40																							440				0

Figura 6. Modelo generado



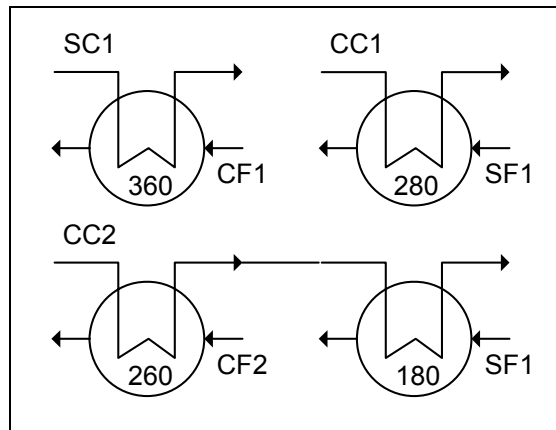


Aquí puede verse que el mínimo número de equipos para la red son 4 intercambiadores (celda I2):

- Un calentador donde el vapor intercambia con la corriente fría 1 (YS1,1 = 1) 360 kW (30 kW en el intervalo 1 - QS1,1,1 = 30 -; 90 en el 2 - QS1,1,2 = 90 - y 240 en el 3 - QS1,1,3 = 240).
- Un intercambiador donde la corriente caliente 2 entrega a la fría 2 (Y2,2 = 1) 260 kW (182 en el intervalo 3 y 78 en el 4).
- Un enfriador donde el agua extrae de la corriente caliente 1 (Y1,S1 = 1) 280 kW en el intervalo 4.
- Un enfriador donde el agua extrae de la corriente caliente 2 (Y2,S1 = 1) 180 kW, también en el intervalo 4.

Si se desea una copia impresa de ésta, o de cualquiera de las otras hojas del libro, se lo debe hacer en forma manual, como con cualquier otra planilla.

Si bien el complemento Transbordo.xls no incluye la posibilidad de generar el diagrama de proceso (PFD) de la red estructurada, resulta conveniente hacerlo en forma manual para una mejor visualización de la misma. En este caso el PFD resultante se muestra en la Figura 8.



**Figura 8.** PFD de la solución óptima

# ANEXO C

## TUTORÍA DEL COMPLEMENTO INTEPROC.XLA

### Objetivo

El objetivo de la tutoría es utilizar el Modelo de Transbordo implementado en el complemento *InteProc.xla* para estructurar una red de intercambio térmico u otra de masa. Dado que el complemento trabaja con la cascada expandida, esta tutoría se basará en aquellos casos donde tiene sentido el uso de la misma. Así

- A) En el caso de la red de intercambio térmico se impondrá como objetivo el mínimo costo de servicios externos, bajo la suposición de la existencia de algunos problemas espaciales que impiden el intercambio entre determinadas corrientes de proceso.
- B) En el caso de la red de intercambio de masa, se buscará encontrar el mínimo número de equipos posibles para la misma, bajo la condición de un mínimo costo de agentes externos.

### A) Red de intercambio térmico

#### Enunciado del problema

El caso a resolver tiene 2 corrientes de proceso calientes que se necesitan enfriar y 2 frías a calentar, y se dispone, cuando sea necesario, de vapor de alta presión y agua de enfriamiento como servicios auxiliares.

La ubicación en el terreno de las corrientes caliente 1 y fría 1 impide proponer, en un planteo técnico razonable, un intercambio entre ellas.

Para la estructuración de la red se considerará una aproximación mínima de 10 °C.

Los datos de las corrientes de proceso y de los servicios auxiliares disponibles son los que se muestran en las Tablas 1 y 2, respectivamente

Corr.	W [kW/ °C]	T. entrada [°C]	T. salida [°C]
Cc1	2	180	40
Cc2	4	150	40
Cf1	3	60	180
Cf2	2,6	30	130

**Tabla 1.** Datos de Corrientes de Proceso

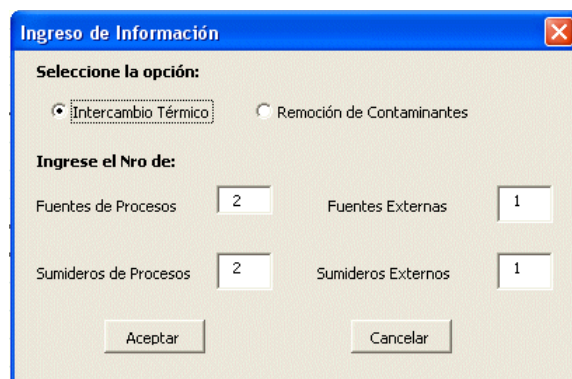
Servicio	T. entrada [°C]	T. salida [°C]	Costo unitario anual [\$ / kW año]
Frío	30	50	6
Caliente	250	250	60

**Tabla 2.** Datos de Servicios Auxiliares

### Incorporación del problema en la planilla

Ahora se está en condiciones de entrar la información del problema en la hoja de cálculo.

La primera operación que debe realizarse es ejecutar la orden *Nuevo Problema* del menú *Integracion*. El complemento crea un libro nuevo y muestra una ventana como la de la figura 1, donde se ha de elegir la opción Intercambio Térmico y se ingresan el número de servicios auxiliares y corrientes de proceso de cada tipo.



**Figura 1.** Ingreso de fuentes y sumideros

A partir de estos datos, *InteProc.xla* crea la hoja “Problema”, donde aparecen tres sectores, cuyas columnas contendrán la información para cada fuente y sumidero, identificadas con F# para las primeras y S# para las

segundas. El símbolo # es un número para las corrientes de proceso y una letra para las auxiliares, como puede observarse en la figura 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1			Corrientes de proceso y externas						
2			F1	F2	FA	S1	S2	SA	
3		Vent							
4		Vsal							
5		Costo							
6		Aprox.Mín.							
7		Cte Equil.							
8		Flujo Disp							
9									
10		Flujo Oper							
11		VentD							
12		VsalD							
13		FlujoDispD							
14									
15			Matriz de Pertenencia						
16			F1	F2	FA	S1	S2	SA	
17									

Figura 2. Hoja Problema vacía

### Ingreso de los datos

Los datos deben ubicarse en el sector asignado [C3:H8] de la hoja “Problema”. Para ingresar la información correspondiente a la corriente caliente 1, se procede como se indica a continuación:

Para ingresar	Escribir	En la celda
- Temperatura de entrada ( <i>Vent</i> )	180	C3
- Temperatura de salida ( <i>Vsal</i> )	40	C4
- Costo unitario anual ( <i>Costo</i> )	0	C5
- Aproximación Mínima ( <i>Aprox.Mín.</i> )	0	C6
- Constante de Equilibrio ( <i>Cte Equil.</i> )	1	C7
- Flujo entálpico Disponible ( <i>Flujo Disp</i> )	2	C8

A fin de poder generalizar las fórmulas que se usarán, en el caso de intercambio térmico la constante de equilibrio será la unidad para todas las corrientes. La aproximación mínima tendrá un mismo valor para todas las fuentes y otro para todos los sumideros. Así, dichos valores serán 0 y 10 si se ha de trabajar en escala de corrientes calientes, con una aproximación mínima de 10°C.

En forma similar, se incorporan los datos de la corriente caliente 2 y del vapor, donde, para este último, la temperatura de entrada y salida coinciden (250) y el flujo entálpico disponible no está especificado.

Luego se ingresa la información correspondiente a los sumideros, donde el valor de la aproximación mínima es 10 y debe dejarse en blanco la celda H8.

Debajo de toda esta información, aparece un *segundo sector* [C10:H13], donde se ha de ingresar el flujo entálpico operativo, las temperaturas y los flujos entálpicos disponibles (desplazados) expresados en la escala elegida.

En el caso de los servicios auxiliares, el caudal operativo será considerado variable.

Para la corriente caliente 1 se ingresarán las fórmulas como sigue:

Para ingresar	Escribir	En la celda
- Flujo entálpico operativo ( <i>Flujo Oper</i> )	=C8	C10
- Temperatura de entrada desplazada ( <i>VentD</i> )	=(C3+C6)*C7	C11
- Temperatura de salida desplazada ( <i>VsalD</i> )	=(C4+C6)*C7	C12
- Flujo entálpico disponible desplazado ( <i>FlujoDispD</i> )	=C8/C7	C13

De la misma manera, se incorporan los datos de las corrientes restantes y de los servicios auxiliares, con la salvedad que el flujo operativo de estos últimos se debe dejar vacío.

Una vez producidos todos estos ingresos la hoja debería quedar como muestra la figura 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Corrientes de proceso y externas					
2			F1	F2	FA	S1	S2	SA
3		Vent	180	150	250	60	30	30
4		Vsal	40	40	250	180	130	50
5		Costo	0	0	60	0	0	6
6		Aprox.Mín.	0	0	0	10	10	10
7		Cte Equil.	1	1	1	1	1	1
8		Flujo Disp	2	4		3	2,6	
9								
10		Flujo Oper	2	4		3	2,6	
11		VentD	180	150	250	70	40	40
12		VsalD	40	40	250	190	140	60
13		FlujoDispD	2	4		3	2,6	
14								
15			Matriz de Pertenencia					
16			F1	F2	FA	S1	S2	SA
17								

Figura 3. Información parcial

Ahora resta completar el *último sector* que comienza en la fila 17. Este sector corresponde a la matriz de pertenencia, donde se indica que porcentaje de cada corriente figura en cada intervalo, donde para las fuentes se considera el tramo superior del intervalo y el inferior para los sumideros. Obviamente, antes de calcular estos porcentajes, se deben definir los intervalos.

Para hacerlo se copia el rango de valores de entrada desplazados (VentD), luego se posiciona el cursor en la celda A17 y usando *Edición|Pegado Especial...|Pegar Valores*, con la opción *Transponer* seleccionada, quedarán los valores encolumnados a partir de esa celda. Se eliminan los valores repetidos y se los ordena en forma descendente. Luego, se copia el rango [A18:A21] a partir de B17 y se borra el contenido de la celda A21.

Una vez hecho esto se debe completar la matriz de pertenencia. En el caso de la corriente F1, se selecciona el rango [C17:C20], se escribe "=" y usando *Funciones Definidas por el Usuario*, se elige la función *Pertenece* desarrollada por la cátedra. Es una función matricial, que al ser llamarla abre un cuadro de diálogo en el que debe ingresarse el rótulo de identificación de la corriente [C16], el rango en el que se encuentran los intervalos, usando referencias absolutas, [\$A\$17:\$B\$20], la temperatura de entrada [C11] y de salida [C12] de la corriente. Inmediatamente después de cerrar la ventana con el botón *Aceptar*, debe ubicarse el cursor sobre la barra de fórmulas como se puede ver en la figura 4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
10		Flujo Oper	2	4		3	2,6		
11		VentD	180	150	250	70	40	40	
12		VsalD	40	40	250	190	140	60	
13		FlujoDispD	2	4		3	2,6		
14									
15			<b>Matriz de Pertenencia</b>						
16			F1	F2	FA	S1	S2	SA	
17	250	180	=Perter						
18	180	150							
19	150	70							
20	70	40							

**Figura 4.** Uso de la función *Pertenece*

Para desplegar los resultados de la función matricial, ahora se debe oprimir, simultáneamente, las teclas Ctrl-Shift-Enter.

Ahora, se puede copiar el rango [C17:C20] al resto de la tabla, que tendrá el aspecto de la figura 5.

En dicha matriz, aparece el valor  $-1$  en el intervalo que ingresa una corriente que cambia de fase a temperatura constante.

	A	B	C	D	E	F	G	H
15			Matriz de Pertenencia					
16			F1	F2	FA	S1	S2	SA
17	250	180	0	0	-1	0,1429	0	0
18	180	150	1	0	0	1	0	0
19	150	70	1	1	0	1	0,875	0
20	70	40	1	1	0	0	1	0,6667

Figura 5. Matriz de Pertenencia

Si la corriente no cambia de fase, aparecerá el valor  $1$  cuando está presente en todo el intervalo,  $0$  si no está y un valor intermedio, si lo está parcialmente.

Finalmente, se ingresa el intercambio no permitido. Recién en este momento puede realizarse esta especificación, ya que previamente el complemento no contaba con la información suficiente para procesarla.

### Intercambios no permitidos

Para ingresar las corrientes impedidas de un intercambio mutuo, debe elegirse la opción "Intercambios no Permitidos" en el elemento de menú Integración.

Al hacerlo, *InteProc.xls* valida la información de la hoja "Problema", al igual que lo hace con los órdenes "Definir Modelo" o "Dibujar Cascada". Si falta algún dato o alguno es incorrecto, muestra un mensaje ad hoc, tras lo cual se deberá corregir la información y nuevamente seleccionar la opción correspondiente.

Por la metodología que utiliza el complemento, la Cascada expandida, será necesario definir el objetivo que se persigue, minimizar el costo o el número de equipos, por lo cual, si los datos ingresados son correctos, se abre una ventana en la que debe ingresarse el objetivo propuesto.

En este caso, se elegirá la opción *Mínimo Costo*. Al aceptar, aparece una nueva ventana donde debe seleccionarse el par de corrientes que no pueden intercambiar calor entre sí.



Del cuadro de selección de la corriente caliente, se elige la *F1* y *S1* del de la fría. La figura 6 muestra el momento en que se está seleccionando el sumidero. Luego debe oprimirse el botón “Agregar” para incorporar el par seleccionado y finalmente el botón “Cerrar”. En ese momento el par seleccionado se agrega a la lista contenida en el recuadro inferior.

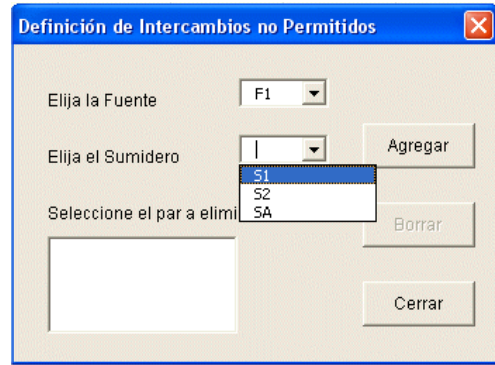


Figura 6. Intercambios prohibidos

Si se comete algún error al ingresar una de las corrientes, puede eliminarse el par, eligiéndolo con el mouse en el cuadro inferior y luego oprimir el botón Borrar, que se habilita en el momento que, con el mouse, se elige el par.

Una vez cerrada la ventana, el complemento vuelca esta nueva información en la hoja “Problema” sobre la fila 1 a partir de la segunda columna libre, J en este caso. La apariencia de la hoja deberá ser como la de la figura 7.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1			Corrientes de proceso y externas							Intercambios no permitidos	
2			F1	F2	FA	S1	S2	SA		Fuente	Sumidero
3		Vent	180	150	250	60	30	30		F1	S1
4		Vsal	40	40	250	180	130	50			
5		Costo	0	0	60	0	0	6			
6		Aprox.Mín.	0	0	0	10	10	10			
7		Cte Equil.	1	1	1	1	1	1			
8		Flujo Disp	2	4		3	2,6				
9											
10		Flujo Oper	2	4		3	2,6				
11		VentD	180	150	250	70	40	40			
12		VsalD	40	40	250	190	140	60			
13		FlujoDispD	2	4		3	2,6				
14											
15			Matriz de Pertenencia								
16			F1	F2	FA	S1	S2	SA			
17	250	180	0	0	-1	0,1429	0	0			
18	180	150	1	0	0	1	0	0			
19	150	70	1	1	0	1	0,875	0			
20	70	40	1	1	0	0	1	0,6667			

Figura 7. Hoja Problema completa

Con la especificación de los intercambios no permitidos se concluye la etapa de definición del problema.

Ahora, antes de generar las ecuaciones del modelo, conviene visualizar la estructura de las disponibilidades y requerimientos de calor, de acuerdo a las restricciones termodinámicas existentes y la aproximación mínima fijada, para lo cual se usará la orden Dibujar cascada.

### Dibujar Cascada

Una vez que se selecciona la opción “Dibujar Cascada”, el complemento solicita que se ingrese el rango de la matriz de pertenencia [C17:H20] y el rango de intervalos [A17:B20]. Luego de esto, aparece la hoja “Cascada” que presenta el aspecto que se visualiza en la figura 8.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	F1	F2	FA				S1	S2	SA
3				2,500E+2					
4									
5			=>		1		3,000E+1		
6				1,800E+2					
7									
8	6,000E+1				2		9,000E+1		
9				1,500E+2					
10									
11	1,600E+2	3,200E+2			3		2,400E+2	1,820E+2	
12				7,000E+1					
13									
14	6,000E+1	1,200E+2			4			7,800E+1	=>
15				4,000E+1					

Figura 8 . Cascada de Calor

Allí, con una flecha se indican los puntos de ingreso y egreso de los servicios auxiliares. Los valores numéricos en rojo y azul corresponden a los aportes y requerimientos de las corrientes de proceso en cada uno de los intervalos. En negro, aparecen las temperaturas límites de los mismos en escala de corrientes calientes.

### Definir Modelo: Mínimo costo de servicios auxiliares

Para cumplir el objetivo propuesto, seleccionado al ingresar los intercambios prohibidos, debe elegirse, desde el menú *Integracion*, la opción Definir Modelo.

Al hacerlo, el complemento solicita los mismos rangos ingresados al dibujar la cascada y luego, sobre la segunda columna y a partir de la segunda fila libre (en B22, en este caso), coloca el rango reservado para las variables (flujos

intercambiados y remanentes) y define la matriz de coeficientes del modelo matemático.

El rótulo de identificación de los flujos tiene la estructura siguiente: el primer índice indica la fuente, el segundo el sumidero y el tercero el intervalo donde es posible la transferencia. Por ejemplo, W123 corresponde al flujo calórico que la corriente caliente 1 puede cederle a la fría 2 en el intervalo 3.

En cuanto a los remanentes, el primer índice se refiere a la fuente y el segundo al intervalo. Estas variables, para cada una de las primeras, existen desde el intervalo donde ingresa la corriente hasta el penúltimo, ya que el último no figura pues debe ser nulo.

*InteProc.xls* genera primero las condiciones para las fuentes y luego las de los sumideros. Sombrea con distinto color los sectores de cada fuente y deja en blanco todo el bloque correspondiente a los sumideros. En la primera columna sin rótulo, T en este caso, están los aportes, para el caso de las fuentes, o remociones, para los sumideros, discriminados por intervalo. En la columna siguiente, U, se encuentran los balances parciales. Estos incluyen, en el caso de las fuentes, los remanentes y los flujos transferidos a los sumideros y en el de los sumideros, las cantidades recibidas desde las distintas fuentes.

La figura 9 muestra el aspecto de la hoja.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U							
22		Variables																										
23		W123	W124	W1A4	W213	W223	W224	W2A4	WA11	WA12	WA13	WA23	WA24															
24																												
25																												
26		R12	R13	R23	RA1	RA2	RA3																					
27																												
28																												
29		Ecuaciones de Balance																										
30		W123	W124	W1A4	W213	W223	W224	W2A4	WA11	WA12	WA13	WA23	WA24	R12	R13	R23	RA1	RA2	RA3									
31																												
32															1			60,00	0,00									
33		1																		-1	1		160,00	0,00				
34			1	1																		-1		60,00	0,00			
35						1	1													1		320,00	0,00					
36								1	1													-1		120,00	0,00			
37										1													1		0,00	0,00		
38											1	1										-1	1	0,00	0,00			
39												1														0,00	0,00	
40													1													30,00	0,00	
41														1												90,00	0,00	
42															1											240,00	0,00	
43		1					1													1				182,00	0,00			
44			1							1										1				78,00	0,00			
45					1									1													0,00	0,00

Figura 9. Modelo generado

## Resolver el modelo

Antes de resolver el modelo, debe definirse la función objetivo, la que, por la elección efectuada, será la erogación por los consumos de vapor y agua.

Debe tenerse en cuenta que en la celda correspondiente al flujo del vapor, el valor que allí figura resulta del producto del caudal por el calor latente, en tanto que para el agua lo es entre el caudal y la capacidad calorífica. En este último caso, como el costo unitario es por energía transferida, para incluir ese gasto en la función objetivo, habrá que afectar el flujo del agua por el salto de temperatura que se verifica en el servicio.

Entonces, ubicando la función objetivo en cualquier celda, por ejemplo O24, considerando que en E10 se encuentra el flujo operativo del vapor, en E5 su costo y en forma similar en H10 y H5 para el agua y H3 y H4 las temperaturas de entrada y salida de la misma, hay que escribir “=E10\*E5+H10\*H5\*(H4-H3)”.

Ahora, para resolver el modelo, se debe invocar al complemento Solver.

La celda objetivo será O24 y se indicará que debe buscarse un mínimo.

Las celdas cambiantes corresponden a los flujos transferidos desde las fuentes a los sumideros en cada intervalo [B24:M24], los remanentes [B27:G27] y además, los flujos calóricos de los servicios auxiliares [E10,H10].

Las condiciones del problema exigen que los balances parciales para fuentes y sumideros, en todos los intervalos, sean iguales a los aportes o retiros, es decir que el rango [U31:U45] sea igual al rango [T31:T45].

Asimismo, en Opciones, debe seleccionarse Adoptar modelo lineal y Asumir no negativos. Luego de oprimir el botón Resolver se obtiene la solución óptima que se muestra en la figura 10, donde se aprecia que los consumos de vapor y agua son 120 kW/año y 220 kW/año ( $11\text{kW/año}^\circ\text{C} \times 20^\circ\text{C}$ ), respectivamente.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U					
1			Corrientes de proceso y externas						Intercambios no permitidos																	
2			F1	F2	FA	S1	S2	SA		Fuente Sumidero																
3		Vent	180	150	250	60	30	30		F1	S1															
10		Flujo Oper	2	4	120	3	2,6	11																		
22		Variables																								
23		W123	W124	W1A4	W213	W223	W224	W2A4	WA11	WA12	WA13	WA23	WA24		FO											
24			102	0	178	240	80	78	42	30	90	0	0	0	8520											
26		R12	R13	R23	RA1	RA2	RA3																			
27			60	118	0	90	0	0																		
29		Ecuaciones de Balance																								
30		W123	W124	W1A4	W213	W223	W224	W2A4	WA11	WA12	WA13	WA23	WA24	R12	R13	R23	RA1	RA2	RA3							
31														1									60,00	60,00		
32		1													-1	1							160,00	160,00		
33			1	1												-1							60,00	60,00		
34					1	1											1						320,00	320,00		
35							1	1										-1					120,00	120,00		
36									1									1					120,00	120,00		
37										1								-1	1				0,00	0,00		
38											1	1							-1	1			0,00	0,00		
39													1								-1		0,00	0,00		
40									1														30,00	30,00		
41										1													90,00	90,00		
42					1							1											240,00	240,00		
43		1				1							1										182,00	182,00		
44			1				1							1									78,00	78,00		
45				1				1															220,00	220,00		

Figura 10 . Solución óptima

## B) Red de intercambio másico

### Enunciado del problema

En este caso se pretende encontrar el mínimo número de unidades de transferencia con mínimo costo de agentes externos, para un caso donde existen 2 corrientes de proceso a las que se les debe remover fenol (corrientes ricas) y 4 sumideros de los cuales 2 son corrientes de proceso.

Los datos de las corrientes de proceso y externas disponibles son los que se muestran en las Tablas 3 y 4, respectivamente.

Corriente	Caudal [kg/ seg]	Frac. másica entrada	Frac. másica salida	Cte equilibrio	Aprox. Mín [fracc. Másica]
R1	2	0,050	0,010	--	--
R2	1	0,030	0,00003	--	--
S1	5	0,005	0,015	2,00	0,001
S2	3	0,010	0,030	1,53	0,001

Tabla 3: Datos de Corrientes de Proceso

Corriente	Frac. mástica entrada	Frac. mástica salida	Cte equilibrio	Aprox. Mín [frac. Mástica]	Costo [\$/kg]
S3	0	0,110	0,02	0,001	0,081
S4	0	0,029	0,04	0,001	0,020

**Tabla 4:** Datos de Corrientes Externas de Extracción

A fin de obtener el mínimo número de equipos para la red, en las condiciones establecidas, debe determinarse, previamente, el punto pinch que corresponde al mínimo costo de sumideros externos. Esto permite obtener una solución distinta de la obvia (utilizar sólo agentes externos) al determinar el número mínimo de unidades para los bloques rico y pobre por separado. Este esquema de solución es absolutamente general, tanto para intercambio mástico como energético.

### **B1) Red de intercambio mástico: Mínimo costo en el uso de agentes externos**

A pesar de que el complemento no está preparado para definir el modelo de mínimo costo sin intercambios prohibidos, se lo puede utilizar para sistematizar el ingreso de los datos y usar la función pertenece. Puede verse que, con las características propias de la planilla, la construcción de este modelo es sumamente sencillo.

#### ***Incorporación del problema en la planilla. Ingreso de datos***

Como se lo hizo en el caso de integración térmica, hay que seleccionar Nuevo Problema desde el menú, salvo que, al abrirse el cuadro de diálogo para solicitar la información de fuentes y sumideros, debe elegirse la opción “Remoción de Contaminantes”.

Se repiten también, los pasos vistos previamente para ingresar todos los datos incluidos en las tablas 3 y 4.

A partir de estos datos, se debe completar la información de los valores desplazados y de la matriz de pertenencia.

En este caso la planilla queda con la estructura que muestra la figura 11.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Corrientes de proceso y externas					
2			F1	F2	S1	S2	SA	SB
3		Vent	0,05000	0,03000	0,00500	0,01000	0,00000	0,00000
4		Vsal	0,01000	0,00003	0,01500	0,03000	0,11000	0,02900
5		Costo	0	0	0	0	0,081	0,02
6		Aprox.Min.	0	0	0,001	0,001	0,001	0,001
7		Cte Equil.	1	1	2	1,53	0,02	0,04
8		Flujo Disp	2	1	5	3		
9								
10		Flujo Oper	2	1				
11		VentD	0,05000	0,03000	0,01200	0,01683	0,00002	0,00004
12		VsalD	0,01000	0,00003	0,03200	0,04743	0,00222	0,00120
13		FlujoDispD	2	1	2,5	1,96078		
14								
15			Matriz de Pertenencia					
16			F1	F2	S1	S2	SA	SB
17	0,05	0,03	1	0	0,1	0,87150	0	0
18	0,03	0,01683	1	1	1	1	0	0
19	0,01683	0,012	1	1	1	0	0	0
20	0,012	0,00004	0,16722	1	0	0	0,18227	0,09699
21	0,00004	0,00002	0	0,5	0	0	1	0

Figura 11. Hoja Problema completa

Puede verse que están en blanco los flujos operativos de todos los sumideros. A diferencia del caso anterior, no se requiere que los de proceso se involucren en la red en forma total, sino en aquella cantidad que minimiza el consumo de las corrientes externas de extracción.

Una vez completada la hoja Problema, deben calcularse los aportes y extracciones de cada corriente en cada intervalo y luego definir las condiciones del problema y la función objetivo.

### Definición del modelo

En la determinación de mínimo costo en el uso de agentes externos cuando no existen intercambios no permitidos, no es necesario conocer los flujos

transferidos en cada intervalo de cada fuente a cada sumidero. Por esta razón, no es necesario el uso de la cascada expandida y el modelo resulta muy sencillo.

Para definir los flujos en cada intervalo, en la celda C24, por ejemplo, se escribe la fórmula “=C17\*(\$A17-\$B17)\*C\$10” y luego se la copia en todo el rango [C24:H28].

A continuación debe determinarse el balance en cada intervalo, escribiendo para ello, primero, en I24, la fórmula “=SUMA (C24:D24)-SUMA(E24:H24)” y luego copiándola para todos los intervalos.

Ahora debe escribirse la fórmula que definirá los remanentes de cada intervalo o balances acumulados. Por ejemplo en J25, “=J24+I25”. Debe tenerse en cuenta que el remanente  $R_0$  es igual a cero, por lo que en la celda J24 irá sólo “=I24”.

Finalmente, debe definirse la función objetivo, la que, como ya se dijo, será la erogación por los consumos de los agentes externos. Entonces, ubicándola en cualquier celda, por ejemplo L24, considerando que en G10 y H10 se encuentran los flujos operativos de los agentes, en G5 y H5 sus costos unitarios (en términos de caudales no desplazados) y en G7 y H7 sus constantes de equilibrio, hay que escribir “=G10\*G5\*G7+H10\*H5\*H7”.

Los valores de los flujos de los sumideros y la función objetivo que se ven en la figura 12, corresponden a haber establecido, arbitrariamente, para una mejor visualización, valores unitarios para los caudales operativos de las corrientes de extracción.

J25		=J24+I25										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
15			Matriz de Pertinencia									
16			F1	F2	S1	S2	SA	SB				
22												
23			Flujos						Balances	Remanentes	F0	
24			0,04000	0,00000	0,00200	0,01743	0,00000	0,00000	0,02057	0,02057	0,00242	
25			0,02634	0,01317	0,01317	0,01317	0,00000	0,00000	0,01317	0,03374		
26			0,00966	0,00483	0,00483	0,00000	0,00000	0,00000	0,00966	0,04340		
27			0,00400	0,01196	0,00000	0,00000	0,00218	0,00116	0,01262	0,05602		
28			0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00002	0,00000	-0,00001	0,05601		

Figura 12. Cálculo de balances y remanentes



## Resolver el modelo

Para resolver el modelo, debe invocarse al Solver, como en el ejemplo previo.

La celda objetivo será L24 y se indicará que debe buscarse un mínimo.

Las celdas cambiantes corresponden a los flujos operativos desplazados de todos los sumideros.

En este caso, las condiciones –los remanentes de cada intervalo– deben ser no negativos, salvo el del último intervalo que debe ser igual a cero. Hay que agregar, además, que los caudales operativos desplazados de los sumideros de proceso no deben ser superiores a los disponibles, también desplazados, sin olvidarse de ingresar en Opciones, Adoptar modelo lineal y no negativos.

La solución a la que se arriba, partiendo de valores nulos para las variables de decisión, se muestra en la figura 13.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
9												
10		Flujo Oper	2	1	2,5	1,359	0,5	14,901				
11		VentD	0,05000	0,03000	0,01200	0,01683	0,00002	0,00004				
12		VsaID	0,01000	0,00003	0,03200	0,04743	0,00222	0,00120				
13		FlujoDispD	2	1	2,5	1,96078						
14												
15		Matriz de Pertenencia										
16		F1	F2	S1	S2	SA	SB					
22												
23		Flujos							Balances	Remanentes	F0	
24		0,04000	0,00000	0,00500	0,02369	0,00000	0,00000	0,01131	0,01131	0,0127		
25		0,02634	0,01317	0,03293	0,01790	0,00000	0,00000	-0,01131	0,00000			
26		0,00966	0,00483	0,01208	0,00000	0,00000	0,00000	0,00242	0,00241			
27		0,00400	0,01196	0,00000	0,00000	0,00109	0,01728	-0,00242	0,00000			
28		0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000			

Figura 13. Solución óptima para mínimo costo de agentes externos

Como se puede ver, los caudales óptimos a los que se llega, son:

$$Q_1^S = 2,500 \quad ; \quad Q_2^S = 1,359 \quad ; \quad Q_3^S = 0,500 \quad ; \quad Q_4^S = 14,900$$

que corresponden a los reales:

$$Q_1^S = 5,000 \quad ; \quad Q_2^S = 2,079 \quad ; \quad Q_3^S = 0,010 \quad ; \quad Q_4^S = 0,596.$$

Puede observarse que hay 2 puntos pinch: en dos intervalos intermedios los remanentes se hacen cero, lo que determina la existencia de tres bloques. En el primero, no son necesarios los agentes externos. En el segundo bloque

participan los dos sumideros externos y la corriente S1. Por último, en el tercer bloque, la extracción se realiza utilizando sólo el servicio externo SA.

A fin de analizar la metodología, la determinación del mínimo número de equipos se realizará sobre el primero de todos los sectores.

## **B2) Red de intercambio másico: Mínimo número de equipos**

Se determinará, como se dijo previamente, el menor número de equipos en el primer bloque, donde sólo se tienen las corrientes de proceso.

### ***Construcción del modelo***

Una vez más, se elegirá la opción Nuevo Problema, donde debe ingresarse, en este caso, 2 fuentes y 2 sumideros de proceso.

Puede aprovecharse la información del caso anterior para completar la que se requiere ahora. Para ello, puede seleccionarse el rango [C3:F13] de la hoja Problema donde se halla el cálculo de mínimo costo de agentes externos y se lo copia a partir de C3. Debe hacerse lo mismo con el rango [A17:B18] a partir de A17.

Ahora se modificarán los valores de las concentraciones para que se correspondan con las del bloque a analizar. Para las fuentes se ingresa como valor de variable de salida  $V_{sal}$ , el que se encuentra en la celda B18 y para los sumideros, como valor de entrada el resultado de la fórmula “=B18/E7 - E6” para S1 y “=B18/F7 - F6” para S2.

Por último, se ha de copiar, a partir de E13, los valores que se encuentran en el rango [E10:F10] de la hoja Problema anterior.

Si bien no es necesario en el cálculo que sigue, para mantener la coherencia de los cuadros, en el sector [E8:F8] se colocó el resultado del producto de los flujos de [E13:F13] por las constantes de [E7:F7].

Para completar el ingreso de la información, deben borrarse los valores de las celdas E10 y F10.

Con la función Pertenece, como se hizo antes, se completa la matriz de pertenencia, con lo cual, los distintos sectores de la hoja Problema quedarán como muestra la figura 14.

Finalmente se solicita al complemento que defina el modelo, que tendrá la apariencia de la figura 15.

	A	B	C	D	E	F
1			Corrientes de proceso y externas			
2			F1	F2	S1	S2
3		Vent	0,05000	0,03000	0,00742	0,01000
4		Vsal	0,01683	0,01683	0,01500	0,03000
5		Costo	0	0	0	0
6		Aprox.Mín.	0	0	0,001	0,001
7		Cte Equil.	1	1	2	1,53
8		Flujo Disp	2	1	5	2,07925
9						
10		Flujo Oper		2	1	
11		VentD	0,05000	0,03000	0,01683	0,01683
12		VsalD	0,01683	0,01683	0,03200	0,04743
13		FlujoDispD		2	1	2,5
14						
15			Matriz de Pertenencia			
16			F1	F2	S1	S2
17	0,05	0,03	1	0	0,1	0,8715
18	0,03	0,01683	1	1	1	1

Figura 14. Hoja Problema bloque rico

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
20		Variables											
21		W111	W121	W112	W122	W212	W222						
22													
23													
24		R11											
25													
26													
27		y11	y12	y21	y22								
28													
29													
30		Ecuaciones de Balance											
31		W111	W121	W112	W122	W212	W222	R11					
32			1	1					1	0,04	0,00		
33					1	1			-1	0,03	0,00		
34							1	1		0,01	0,00		
35		1								0,01	0,00		
36				1			1			0,03	0,00		
37			1							0,02	0,00		
38					1		1			0,02	0,00		
39													
40		Ecuaciones de Intercambio											
41		W111	W121	W112	W122	W212	W222	y11	y12	y21	y22		
42			1		1				-0,038			0	
43				1		1				-0,042		0	
44							1				-0,013	0	
45								1				-0,013	0

Figura 15. Modelo para mínimo número de equipos

### **Resolver el modelo**

Antes de resolver el modelo, debe definirse, como ya se ha visto, la función objetivo. En este caso, como lo que se busca es el mínimo número de unidades, debe tenerse en cuenta que la suma de las variables binarias sea un mínimo. Para ello, en cualquier celda, por ejemplo G28, se ingresa “=SUMA(B28:E28)”.

Tras esto, se invoca al Solver. Las celdas cambiantes corresponden a: 1) los flujos transferidos entre las corrientes en cada intervalo, rango [B22:G22], 2) los remanentes (único, en este caso) [B25], 3) las variables binarias [B28:E28].

Las restricciones del problema incluyen a los balances parciales para fuentes y sumideros, en todos los intervalos, que deben ser iguales a los aportes o retiros, ésto es, el rango [J32:J38] debe ser igual al rango [I32:I38]. A esto debe agregarse que los flujos operativos de los sumideros, [E10:F10], no deben ser superiores a los disponibles desplazados, [E13:F13].

Se debe identificar que las variables del rango [B28:E28] son binarias y que los intercambios no deben superar los valores límites, esto es [L42:L45]  $\leq 0$ .

Debe elegirse, además, las opciones Adoptar modelo lineal y Asumir no negativos.

Partiendo de todas las celdas cambiantes nulas, el resultado al que se llega es un número de equipos igual a 3 y donde los valores de las restantes variables son:

$$\begin{aligned} W111 &= 0.00500 & W121 &= 0.02369 & W112 &= 0.01976 \\ W122 &= 0.01790 & W212 &= 0.01317 & W222 &= 0.0 & R11 &= 0.01131 \end{aligned}$$

# ÍNDICE TEMÁTICO

- Agentes de separación, 90, 94
- Algoritmo
  - Forder Hutchison Westerberg, 352
  - Upadhye - Grens, 354-356
- Almacenamiento, 249, 250, 255, 389, 395, 412, 416, 445
- Aproximación mínima, 16, 29, 32, 40, 46, 93, 186, 304
  - \_óptima, 34, 61, 459
- Bloques
  - caliente / frío, 33, 44-49, 51-55, 70-74, 77-78, 80-82, 269
  - rico / pobre, 102
- Búsqueda unidireccional, 176, 178
- Camino crítico, 308, 331-332, 334-337
  - fecha límite, 336
  - fecha temprana, 334
  - distribución beta, 337
  - margen de elasticidad, 335
- Capacidad global
  - calentamiento / enfriamiento, 47
  - recepción / entrega, 103
- Cascada de calor, 39, 42, 70, 255-257, 259, 262-266
- Ciclos, 54, 56
  - independencia de %, 55,58
  - matriz de % y arcos, 57,352
  - vector de ciclos, 355
- Conjunto de corte, 349, 351, 354,356
  - familias de %, 354
- consumos mínimos, 18, 34, 42, 44, 97
- corrientes
  - calientes / frías, 24, 40, 45, 48, 51, 262, 265
  - ricas/ pobres, 89, 94, 97, 100, 276
- Costo
  - Columna, 116
  - Total Anual, 25, 28, 38, 52, 90, 116
- Curva compuesta, 29-32, 94, 99-101
  - Balanceada, 34
  - gran curva compuesta, 66-68, 71
- Diagrama de Gantt, 338, 384
- Diagrama de rutas, 305-307, 309-312
- dirección de búsqueda, 182, 199, 201, 203, 205, 207
- Ecuaciones de diseño Ver Relaciones de diseño
- Eliminación de regiones, 176, 178, 180
- Esquemas de procesos, 6, 11, 14, 20, 25, 61, 66, 75, 82, 90, 343, 360, 363, 367
- Esquemas iterativos, 152
- grados de libertad, 135-137, 149-153, 174, 187, 217, 220, 222, 224, 232, 236, 319, 366, 368, 396, 398-400
- Flujo de información, 174, 296, 298, 309, 319, 335, 344
  - diagrama, 144, 148, 157, 293, 299, 303, 306, 309-311, 314, 317, 319, 322, 325, 352, 364
  - inversión, 143, 150, 310, 312, 316, 364
- Grafo, 17, 54-60, 129, 139-142, 153, 305, 332-336
- Incertidumbre
  - acción presente, 362, 372
  - Criterio pesimista, 374
  - Criterio Savage, 374, 378
  - matriz de lamentos, 375
  - matriz de pérdidas y ganancias, 374, 376
  - probabilidad, 337, 363, 368-370, 376, 431, 434-436, 438, 442
  - situación futura, 362, 364, 368, 373, 375, 378
  - Valor esperado, 377, 379
  - Valor medio, 376
- Integración
  - bombas de calor, 79, 82
  - columnas de destilación 69,71,73
  - evaporadores, 75,77
  - máquinas térmicas, 79,81
- Intervalos
  - temperatura, 29, 41, 256
  - escala de temperatura, 40
  - composición, 98, 100, 276
  - escala de composición, 94
- Matriz
  - de adyacencias, 352
  - de existencia original, 139, 141, 153, 156, 168
  - de existencia reordenada, 140, 142, 147, 154, 168
- Métodos
  - CDS, 424
  - Desarrollo y Acotamiento, 415, 417-421
  - FUG, 116
  - Hendry – Hughes, 125-127
  - Pinch, 24, 44, 49, 51-53, 64, 89, 92, 102
  - Ku Karimi, 415, 425
  - ROTE, 119, 120-122
  - Técnica RAES, 423-425
  - Vapores Marginales, 122-125

Modelo matemático, 5, 9, 134-137, 143, 152, 167, 174, 196, 210, 215, 280, 293, 302, 342, 364, 367  
 Modelo de Transbordo  
   Cascada expandida, 262, 264, 283  
   Cascada reducida, 257, 260  
   intercambios no permitidos, 266, 280, 285  
   Mínimo costo de servicios 261, 266, 268  
   Mínimo costo de agentes, 102, 280-282  
   Mínimo número de equipos, 267, 269, 285, 288  
 Técnicas de optimización  
   Complemento Solver, 205, 209-211, 242, 271, 290, 405, 415, 426  
   Complex de Box, 192, 198, 357  
   Gradiente Reducido Generalizado, 198, 200, 203, 209  
   Número de Oro, 178, 181, 182, 321  
   Programación Cuadrática Sucesiva, 198, 200, 205, 357  
   Simplex Secuencial, 188  
   Técnica de Penalización, 190  
 Ordenamiento de cálculo 134, 137, 140-142, 144, 148, 152-156, 167, 169, 197, 298, 342, 366, 372  
 Plantas discontinuas, 383, 386, 390, 411  
   campana de productos, 386, 394, 396  
   diseño  
     con equipos únicos, 393, 399, 402  
     con equipos en paralelo 393, 400  
   factor de tamaño, 390, 393  
   makespan, 385, 412, 414, 416, 419  
   número de lotes, 388, 391, 400  
   tamaño de lotes, 390, 394-396, 400  
   tiempo del ciclo, 386, 389, 391, 402  
   tipo de etapa  
     FIS, 413, 416  
     NIS, 413, 417, 420  
     UIS, 413, 416, 418, 422  
     ZW, 413, 417, 421  
 Punto Pinch, 32, 37, 39, 44-53, 56, 61, 70, 72, 77, 79, 82, 93, 97, 101-106, 256, 262, 266, 269, 272, 282, 291, 304  
 Unimodalidad, 176, 180  
 Variables  
   de estado, 137, 140-142, 144, 147-149, 151, 154, 156, 181, 197, 200, 202-204, 209, 294, 296, 299, 310, 312, 366  
   artificiales, 232, 234, 236, 248  
   básicas, 225, 237, 240  
   binarias, 268-270, 284, 403, 415  
   de decisión, 8, 130, 137, 140-144, 147, 151-153, 155, 174-176, 181, 183, 186, 188, 190, 193, 197, 200-203, 209, 219, 225, 227, 239, 242, 293, 295, 303, 310, 319-321, 361-366, 368, 372, 398, 400  
   de diseño Ver de decisión  
     discretas, 22, 148, 305, 373, 402  
     independientes Ver de decisión  
     flojas, 223, 225, 231  
     no básicas, 225, 228, 230, 239  
     supuestas, 155, 158, 210, 348, 351  
 Programación Lineal  
   columna pivote, 227-229  
   fila pivote, 228  
   Función objetivo artificial, 233, 237  
   infinitas soluciones, 230, 240  
   Método Simplex, 226, 232  
   problema sin solución, 235  
   sensibilidad paramétrica, 237, 243-245  
   solución degenerada, 237, 239, 248  
   solución en el infinito, 228  
 Promotores de convergencia  
   Autovalor Dominante, 162  
   Newton, 164  
   Piccard, 159, 161  
   Secante / Regula Falsi, 160  
   Wegstein, 161  
 Regla de Hohmann, 17, 38, 46, 53-55  
 Regla de Johnson, 422  
 Reglas heurísticas, 14-16, 21  
   destilación, 109, 112, 115, 120  
   intercambio térmico, 16, 51  
   programación de la producción, 422  
   tratamiento de reciclós, 324  
 relaciones de diseño, 7, 36, 134, 137, 139, 144, 183, 190, 192, 235, 358  
 restricciones, 7, 45, 47, 94, 106, 134, 146, 176, 181-186, 188, 190, 192, 197, 199, 202-205, 207-211, 215-226, 231-233, 237-239, 241-246, 262, 284, 360, 403, 411, 417  
 Tabla del Problema, 39-44, 66, 93, 97-101, 256, 275, 280-282, 304  
 Técnicas evolutivas  
   esquemas vecinos, 18-21, 424

## LOS AUTORES

### **Omar A. Iglesias**

Egresó en 1968 como Ingeniero Químico en la UNLP

Es Profesor Titular con Dedicación Exclusiva de la Facultad de Ingeniería de la UNLP. Ha sido Docente Investigador “A” en el Programa de Incentivos para Docentes Investigadores.

Ha dictado diversos cursos de posgrado sobre temas de Ingeniería Química.

Ha publicado en colaboración un libro sobre modelado matemático de la industria petroquímica y más de 60 artículos en revistas y actas de congresos nacionales e internacionales.

Sus temas de interés en investigación son la simulación y optimización de procesos y la aplicación de informática en la enseñanza de la Ingeniería.

Ha sido Secretario de Posgrado, Ciencia y Técnica de la Facultad de Ingeniería de la UNLP y Vicepresidente de la misma Universidad.

Ha formado parte del directorio de una empresa estatal del área petroquímica y asesorado a la Secretaría de Energía sobre temas de ese sector productivo.

Correo electrónico: [oaiglesi@ing.unlp.edu.ar](mailto:oaiglesi@ing.unlp.edu.ar)

### **Carmen N. Paniagua**

Egresó como Ingeniero Químico en 1980. Es Especialista en Petroquímica.

Es Profesora Adjunta en la Facultad de Ingeniería de la UNLP y Profesional Principal del CONICET.

Ha dictado diversos cursos de posgrado sobre simulación de procesos.

Ha publicado en colaboración un libro sobre modelado matemático de la industria petroquímica y más de 30 trabajos en revistas y actas de congresos de la especialidad.

Sus temas principales de Investigación son la simulación y optimización de procesos y la aplicación de informática a la enseñanza de la ingeniería.

Correo electrónico: [cnpaniag@ing.unlp.edu.ar](mailto:cnpaniag@ing.unlp.edu.ar)

Iglesias, Omar A.  
Elementos de diseño optimo / Omar A. Iglesias y Carmen N. Paniagua. - 1a ed.  
- La Plata : Universidad Nacional de La Plata, 2014.  
E-Book: ISBN 978-950-34-1136-0

1. Diseño Asistido por Computador. 2. Educación Unviersitaria. I. Paniagua,  
Carmen N. II. Título  
CDD 004.678

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata  
47 N.º 380 / La Plata B1900AJP / Buenos Aires, Argentina  
+54 221 427 3992 / 427 4898  
editorial@editorial.unlp.edu.ar  
www.editorial.unlp.edu.ar

Eduulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2014  
ISBN 978-950-34-1136-0  
© 2014 - Eduulp



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA